

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Křivonožka

Matematické modely stratifikovaného proudění

Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2007

Velice děkuji Doc. RNDr. Josefu Brechlerovi, CSc. a ing. Ludkovi Benešovi, PhD., za vedení mé práce, předávání zkušeností, poskytnutou literaturu, cenné rady a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Jan Křivonožka

Obsah

Úvod	5
1 Základní matematický model	6
1.1 Základní sada rovnic	6
1.2 Základní pojmy	9
1.3 Okrajové podmínky	13
2 Systémy rovnic a jejich aproximace	16
2.1 Rovnice stlačitelného proudění	16
2.2 Rovnice nestlačitelného proudění	17
2.3 Aproximace mělké vody	18
2.4 Aproximace hluboké vody - anelastická aproximace	19
2.5 Hydrostatická aproximace	20
2.6 Boussinesqova aproximace	20
3 Modelování proudění v homogenní vrstvě	23
3.1 Základní rovnice	23
3.2 Proudění nad velmi nízkou překážkou	24
3.3 1-D nelineární hydrostatické proudění	27
3.4 Nelineární vlny	28
3.5 Proudění přes topografii s nelinearitami a disperzí	29
3.6 Nelineární proudění přes 3-D překážky	30
4 Modelování dvojvrstvého proudění	31
4.1 Základní rovnice	31
4.2 1-D nelineární hydrostatické proudění	32
5 Použití modelování stratifikovaného proudění	36
5.1 Modelování mezní vrstvy atmosféry	36
5.2 Modelování v oceanografii	36
5.3 Modelování znečištění podzemních vod	37
Závěr	38
Literatura	39

Název práce: Matematické modely stratifikovaného proudění

Autor: Jan Křivonožka

Katedra (ústav): Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

e-mail vedoucího: josef.brechler@mff.cuni.cz

Abstrakt

Cílem práce je vyhledat a srovnat matematické modely používané v modelování stratifikovaného proudění a zhodnotit je z hlediska použitelnosti modelování proudění v mezní vrstvě atmosféry. Práce by měla sloužit jako výchozí pomůcka pro další studium a modelování stratifikovaného proudění, neboť obsahuje formulaci základních rovnic pro popis proudění v tekutinách se zaměřením na mezní vrstvu atmosféry. Dále je zavedeno několik základních veličin a pojmů, jako např. stabilita atmosféry a Brünt Väisälöva frekvence. Rozebrány jsou různé systémy rovnic stratifikovaného proudění a jejich aproximace. Detailně je zpracována problematika proudění v homogenní vrstvě a dvojvrstvě.

Klíčová slova: Mezní vrstva atmosféry, matematické modely proudění, stratifikace, Boussinesqova aproximace, okrajové podmínky

Title: Mathematical models of stratified flows

Author: Jan Křivonožka

Department: Department of meteorology and environment protection

Supervisor: Doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

Supervisor's e-mail address: josef.brechler@mff.cuni.cz

Abstract

The goal of this text is to find out and compare mathematic models used for stratified air-flow modelling. To assess them from the point of view of applicability for modelling of flow within the planetary boundary layer. This study could serve as a tool for the next study and modelling of the stratified air-flow, because it contains formulation of the governing equations for fluid flows in general and with focusing to Atmospheric Boundary Layer as well. Some basic quantities like atmospheric stability or Brünt Väisälö's frequency are spoken. The equations for modelling of stratified flows and their approximations are spoken as well. The problematics of one homogenous layer flows and two-layers flows are discussed in details.

Keywords: Atmospheric boundary layer, Mathematical models of flow, Stratification, Boussinesq approximation, Boundary Conditions

Úvod

Termín stratifikované proudění, nebo méně užívaný český název zrstvené proudění, se většinou užívá ve smyslu proudění stratifikované tekutiny. Přesněji řečeno by se mělo psát hustotně stratifikované, resp. hustotně zvrstvené proudění, aby nedošlo k záměně s teplotním zvrstvením. Ve stratifikované tekutině jsou dramaticky důležité změny hustoty. V normálním popisu je předpoklad, že hustota je stabilní v přibližně horizontálních vrstvách, kde hustější tekutina leží pod méně hustou tekutinou. Změny hustoty mohou být spojitě anebo, tak jak tomu je ve většině případů v reálné atmosféře či v oceánu, jsou koncentrovány v nespojitých rozhraních. Ve většině případů jsou změny hustoty malé, ale právě tyto změny hrají významnou roli v prouděních, kde se výrazně projevují vztlakové síly. Popis stratifikovaného proudění pomáhá přesněji popsat, pochopit a modelovat například takové speciální druhy proudění jako jsou proudění v řekách, přehradách nebo přes horský hřeben či komplikovanou soustavu horských masivů. Takovéto druhy proudění velice úzce souvisí s životem člověka a jeho činností, takže pochopení aspektů stratifikovaného proudění je velice důležité.

V kapitole č. 1 je shrnuto základní matematický model používaný pro modelování pohybu tekutiny. Tento model je založen na rovnicích popisujících laminární, stlačitelné, vazké proudění newtonovské tekutiny. Hned v zápětí jsou zavedeny základní pojmy a veličiny, které jsou pro modelování pohybu tekutiny nezbytné.

V další kapitole lze najít různé způsoby aproximace rovnic popsanych v kapitole č. 1, doplněné o systémy rovnic použitelné pro modelování stratifikovaného proudění v mezní vrstvě atmosféry. Systémy jsou roztrženy podle použitého způsobu aproximace.

V kapitole č. 2 jsou uvedeny metody modelování velice jednoduchého systému, tedy proudění v homogenní vrstvě. Tento systém je velice dobrým základem pro další komplikovanější modelování stratifikovaného proudění, které je zmíněno v kapitole č. 3, kde už se jedná o modelování dvojrstevnatého proudění.

Nakonec jsou připojeny příklady praktického použití popsanych modelů v mezní vrstvě atmosféry, oceanografii a v problematice podzemních vod. Tyto příklady vycházejí ze studia odborných článků popisujících danou aplikaci.

Kapitola 1

Základní matematický model

1.1 Základní sada rovnic

Chování tekutiny popisujeme parciálními diferenciálními rovnicemi, které vyjadřují zákony zachování a termodynamické vlastnosti tekutiny. Uvažujme případ laminárního, vazkého, stlačitelného proudění a zavedme základní rovnice pro popis tohoto proudění. Výsledkem bude soustava rovnic, které následně budeme aplikovat pro modelování v mezní vrstvě atmosféry.

Rovnice kontinuity

První rovnice je rovnice kontinuity, která vyjadřuje zákon zachování hmoty. Označme čas t , polohový vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)$, vektor parciálních derivací podle souřadnic $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Uvažujme hustotu $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ proměnnou v prostoru a čase a rychlost $\mathbf{u} = (u, v, w)$. S použitím transportního teorému a při dostatečné hladkosti funkcí lze odvodit (viz [11], str. 35):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.1)$$

Pohybová rovnice

Tato rovnice je odvozena přímo z 2. Newtonova zákona, který vyjadřuje vztah pro zrychlení tekutiny a je vyjádřením zákona zachování hybnosti. Při dostatečné hladkosti funkcí a s použitím transportního teorému máme pohybovou rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma_{ij}, \quad (1.2)$$

kde \mathbf{f} vyjadřuje objemové síly (např. tíhová síla, Coriolisova síla), σ_{ij} je tenzor napětí, který reprezentuje vnitřní síly (tlak, vazkost).

Pro popis proudění v atmosféře však budeme uvažovat tzv. newtonovské tekutiny, u nichž platí lineární vztah mezi tenzorem napětí σ_{ij} a tenzorem rychlosti deformace d_{ij} . Budeme tedy předpokládat platnost Stokesovy hypotézy, podle které lze přepsat tenzor napětí do tvaru

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}, \quad (1.3)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.4)$$

kde pro rychlost a polohu používáme označení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Symbol δ_{ij} označuje Kroneckerovo delta, tedy jednotkový tenzor. Dále μ a λ jsou dynamická viskozita a druhý koeficient viskozity, pro které platí v případě jednoatomového plynu vztah $\mu = -\frac{2}{3}\lambda$.

Z těchto obecných pohybových rovnic tedy odvodíme (viz [14], str. 19) následující pohybovou rovnici, která je nejčastěji nazývána Navier-Stokesova rovnice.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(\nu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (1.5)$$

Pro účely modelování v MVA se nejčastěji tato rovnice používá v tomto tvaru

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times \mathbf{u} + \mathbf{g} + \nabla(\nu \nabla \mathbf{u}), \quad (1.6)$$

přičemž p je tlak tekutiny, člen $-2\Omega \times \mathbf{u}$ představuje Coriolisovu zrychlení působící kolmo ve směru rotace Země a zároveň kolmo k pohybu částice, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ vyjadřuje tíhové zrychlení a ν je koeficient kinematické viskozity. Symbolem $\frac{d}{dt}$ označujeme úplnou derivaci podle času, která se dá dle Eulerova vztahu rozepsat jako

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (1.7)$$

Rovnice energie

Z prvního termodynamického zákona lze odvodit rovnici bilance entalpie (nebo tepla), kterou nyní zapíšeme s pomocí potenciální teploty, která je definována níže.

$$\frac{d(c_p \theta)}{dt} = K_T \nabla^2 (c_p \theta) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot R, \quad (1.8)$$

kde první člen na pravé straně představuje molekulární přenos tepla s koeficientem molekulární tepelné difuze K_T a druhý člen představuje tepelný tok způsobený radiací. V mnoha případech se uvažuje adiabatické chování tekutiny nebo velice malé změny teplot, takže neuvažujeme rovnici energie.

Stavová rovnice

Stavová rovnice dává obecně do souvislosti stavové veličiny a hustotu ρ . Pro účely popisu proudění v MVA se nejčastěji užívá stavová rovnice ve tvaru, který vyjadřuje vztah mezi tlakem p a hustotou ρ ,

$$p = \rho RT, \quad (1.9)$$

zde p je tlak, T absolutní teplota a R je plynová konstanta ¹.

V případě modelování atmosféry navíc můžeme většinu dějů uvažovat za adiabatické. Pro tyto děje tedy platí

$$\frac{p^\kappa}{T} = konst, \quad (1.10)$$

kde pro suchý a čistý vzduch je hodnota koeficientu $\kappa = 0.286$. Uvažujme T_1 a p_1 jako počáteční teplotu a tlak soustavy. Potom z předchozí rovnice vyplývá

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^\kappa. \quad (1.11)$$

Tato rovnice umožňuje zavést tzv. potenciální teplotu definičním vztahem s použitím veličiny c_p , což je měrná tepelná kapacita plynu při konstantním tlaku

$$\theta \equiv T \left(\frac{p}{p_r}\right)^{-\frac{R}{c_p}} = T \left(\frac{p_r}{p}\right)^\kappa. \quad (1.12)$$

Potenciální teplota je teplota, kterou by měl uvažovaný plyn po adiabatické expanzi nebo kompresi na referenční tlak $p_r = 10^5 Pa$.

Rovnice transportu

Pokud potřebujeme řešit problém šíření koncentrace pasivní příměsi v tekutině, je nutno zadat rovnici transportu příměsi

$$\frac{dC}{dt} = \nabla(K_C \nabla C), \quad (1.13)$$

kde C je koncentrace příměsi a K_C je koeficient molekulární difuze.

Shrňme tedy přehledně základní rovnice popisující laminární, vazké, stlačitelné proudění newtonovské tekutiny.

1. Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.14)$$

2. Pohybová rovnice

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(\nu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (1.15)$$

3. Rovnice energie

$$\frac{d(c_p \theta)}{dt} = K_T \nabla^2(c_p \theta) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot R \quad (1.16)$$

¹ $R = R^*/M$, kde R^* je universální plynová konstanta a M je molární hmotnost plynu). Pro suchý a čistý vzduch je hodnota $R = 287 JK^{-1}kg^{-1}$

4. Stavová rovnice

$$p = \rho RT \quad (1.17)$$

a případně ještě

5. Rovnice transportu

$$\frac{dC}{dt} = \nabla(K_C \nabla C), \quad (1.18)$$

Tyto rovnice tvoří systém rovnic, které se v nejrůznějších zjednodušeních používají pro praktické řešení modelování proudění. V dalším textu zavedeme několik základních pojmů a veličin, které s modelováním proudění tekutin souvisí. Zaměříme se přitom již zejména na popis modelování atmosféry a mezní vrstvy atmosféry (MVA), což je hlavní úlohou matematického modelování v meteorologii.

1.2 Základní pojmy

V této části popíšeme stručně několik nejzákladnějších veličin a pojmů, které jsou stěžejní pro pochopení stratifikace proudění, ale také pro jeho matematické modelování. Opět se zaměříme na aplikaci v MVA.

Stabilita atmosféry

Pojem stabilita atmosféry je důležitá pro pochopení zejména teplotní stratifikace a dále také vertikálního přenosu hybnosti, tepla a příměsí. Na jednoduchém příkladě ukážeme podstatu problému stability atmosféry. Uvažujme částici vzduchu v nějaké výšce z_0 . Pokud je částice z její pozice vychýlena do výšky $z_0 + dz$, tak můžeme pozorovat v principu tyto tři způsoby chování částice:

- Vzduchová částice bude jevit snahu se vrátit do své původní polohy ve výškové hladině z_0 .
- Částice setrvává v nové poloze na hladině $z_0 + dz$.
- Vzduchová částice nadále samovolně pokračuje ve výstupu.

Podle tohoto chování rozlišujeme tři základní stavy atmosféry nazvané postupně **stabilní**, **indiferentní**, **labilní**. Je zřejmé, že například v případě stabilního zvrstvení jsou horší podmínky pro transport veličin atd.

Lze odvodit ([5], str. 22) vztah pro vertikální zrychlení částice s předpokladem adiabatického chování částice, který má tvar

$$a = -g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = -g \frac{T_1 - T_2}{T_2}, \quad (1.19)$$

kde a je vertikální složka zrychlení částice \mathbf{a} , g je tíhové zrychlení, T_1 je původní teplota a T_2 teplota částice na nové hladině $z_1 = z_0 + dz$.

Ze znaménka výrazu $(T_1 - T_2)$, lze tedy přímo rozhodnout o typu stratifikace atmosféry. Je-li $(T_1 - T_2) > 0$, pak směřuje zrychlení částice \mathbf{a} vzhůru a atmosféra je labilní. Pokud aplikujeme definiční rovnici pro potenciální teplotu 1.12, pak můžeme shrnout podmínky stability přepsat do následujícího tvaru

- $(\frac{\partial\theta}{\partial z}) > 0 \implies$ **Stabilní zvrstvení**
- $(\frac{\partial\theta}{\partial z}) = 0 \implies$ **Indiferentní (neutrální) zvrstvení**
- $(\frac{\partial\theta}{\partial z}) < 0 \implies$ **Labilní (instabilní) zvrstvení**

Brünt-Väisälova frekvence

Velice důležitou veličinou pro popis spojitě stratifikované tekutiny je Brünt-Väisälova frekvence N , která je definována vztahem

$$N^2 = -\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz}. \quad (1.20)$$

Pokusme se interpretovat tuto veličinu. Uvažujme, že částice se posunula z výšky z_0 do vzdálenosti dz , kde je potenciální teplota θ_2 , přičemž částice má teplotu θ_1 .

Částice po vychýlení začne kmitat. Frekvence těchto kmitů je dána právě veličinou N , která tedy vyjadřuje bezrozměrnou míru stability atmosféry a má charakter frekvence. Přesné odvození lze nalézt například [11], str. 39.

N je tedy frekvence lokálních vertikálních oscilací, která určuje vlastně nejvyšší frekvenci, kterou vztlakem způsobené fluktuace mohou mít. Tato frekvence nám také udává charakteristické časové měřítko pro tyto děje v tekutině. Maximální hodnoty N pro oceán i pro atmosféru se pohybují řádově okolo 10^{-2} s^{-1} .

Bezrozměrné charakteristické veličiny

Pro účely modelování je užitečné zavést **charakteristické měřítko** a **bezrozměrný tvar** veličin. Charakteristické veličiny označíme indexem c a jejich bezrozměrný tvar hvězdičkou. Hodnota charakteristických měřítek závisí na konkrétní modelované situaci. Modelování se totiž provádí v několika různých prostorových, rychlostních nebo časových měřítkách. Pro vyjádření bezrozměrných veličin zavedeme charakteristickou délku L_c , rychlost U_c , čas t_c , teplotu T_c , hustotu ρ_c a gravitační zrychlení g_c . Dále definujeme charakteristický Coriolisův parametr

$$\Omega_c = 2\Omega \sin \varphi, \quad \varphi \neq 0, \quad (1.21)$$

kde φ je zeměpisná šířka studovaného místa MVA. Bezrozměrové veličiny zavedeme následujícím způsobem:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L_c, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U_c, \quad t^* = t/t_c, \quad \Omega^* = \Omega/\Omega_c,$$

$$T^* = T/T_c, \bar{\Theta}^* = \bar{\Theta}/T_c, \Theta'^* = \Theta'/\Delta T_c, \rho^* = \rho/\rho_c, \quad (1.22)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_c U_c^2}, \mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}}{g_c}, \nabla^* = \nabla/L_c.$$

Po řadě jsou to bezrozměrný polohový vektor, rychlost, čas, úhlová rychlost, teplota, potenciální teplota, odchylka potenciální teploty, hustota, tlak, tíhové zrychlení a bezrozměrový gradient. Dosadíme-li postupně výrazy (1.22) do soustavy základních rovnic, získáme soustavu

$$\left[\frac{L_c}{U_c t_c} \right] \frac{d\rho^*}{dt^*} = -\rho^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*), \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{L_c}{U_c t_c} \right] \frac{d\mathbf{u}^*}{dt^*} &= \nabla^* p'^* + \left[\frac{\Delta T_c}{T_c} \frac{L_c}{U_c^2} g_c \right] \frac{\Theta'^*}{\Theta_0^*} \mathbf{g}^* - \left[\frac{\Omega_c L_c}{U_c} \right] (\boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{u}^*) + \\ &+ \left[\frac{\nu}{L_c U_c} \right] (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^*, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\left[\frac{L_c}{U_c t_c} \right] \frac{dT^*}{dt^*} = \left[\frac{k}{\rho_c c_p \nu} \right] \left[\frac{\nu}{L_c U_c} \right] (\nabla^*)^2 T^* + \left[\frac{\nu}{L_c U_c} \right] \left[\frac{U_c^2}{c_p \Delta T_c} \right] \Theta^*, \quad (1.25)$$

$$\left[\frac{L_c}{U_c t_c} \right] \frac{dC^*}{dt^*} = \left[\frac{\nu}{L_c U_c} \right] \left[\frac{K_C}{\nu} \right] (\nabla^*)^2 C^* \quad (1.26)$$

Výrazy v hranatých závorkách jsou koeficienty, nazývané také **podobnostní čísla**, které vyjadřují vztah mezi modelem a skutečností. Mohli bychom je interpretovat jako poměry mezi různě působícími silami. Zde je uvedeno několik podobnostních čísel, které souvisí s problematikou proudění v MVA.

- **Strouhalovo číslo** St - definováno vztahem

$$\frac{1}{St} = \left[\frac{L_c}{U_c t_c} \right] \quad (1.27)$$

Vyskytuje se ve všech pohybových rovnicích. V nestacionárním proudění udává poměr konvektivního a lokálního zrychlení. Je-li však proudění stacionární, tak se Strouhalovo číslo v rovnicích vyskytuje jako konstanta. Definujeme-li např. charakteristický čas tímto způsobem,

$$t_c = \frac{L_c}{U_c}, \quad (1.28)$$

tak dostáváme $St = 1$ pro všechny studované případy.

- **Schmidtovo číslo** Sc - definováno vztahem

$$\frac{1}{Sc} = \left[\frac{K_C}{\nu} \right] \quad (1.29)$$

Toto podobnostní číslo je dáno jako poměr mezi kinematickou viskozitou vzduchu a koeficientem molekulární difuze pasivní příměsi.

- **Prandtlovo číslo Pr** - definováno vztahem

$$\frac{1}{Pr} = \left[\frac{k}{\rho_c c_p \nu} \right] \quad (1.30)$$

Vyjadřuje poměr mezi viskózní difuzí a tepelnou difuzí, která je charakterizována koeficientem tepelné vodivosti k . Pro plyny má Prandtlovo číslo hodnotu přibližně $Pr = 0,7$, zatímco pro vodu je to $Pr = 7$.

- **Eckertovo číslo Ec** - definováno vztahem

$$Ec = \left[\frac{U_c^2}{c_p \Delta T_c} \right] \quad (1.31)$$

Toto číslo vyjadřuje poměr kinetické energie a entalpie a je tedy mírou disipace energie. Jsou-li v reálném i modelovém případě rychlosti proudění U_c mnohem menší než rychlost zvuku, je vliv Eckertova čísla na studované proudění zanedbatelný (viz [11]).

- **Rossbyho číslo Ro** - definováno vztahem

$$\frac{1}{Ro} = \left[\frac{\Omega_c L_c}{U_c} \right] \quad (1.32)$$

Rossbyho číslo určuje poměr setrvačné a Coriolisovy síly. Vliv setrvačných sil by se začal projevovat, pokud bychom modelovali horizontálně relativně velkou oblast MVA, ve které by se významně projevovaly účinky Coriolisovy síly. Rossbyho číslo dosahuje řádově hodnot 10^0 a to v případě modelování oblastí s horizontálním měřítkem cca do 5 km v přízemní podvrstvě MVA.

- **Richardsonovo číslo Ri** - definováno vztahem

$$Ri = \left[\frac{\Delta T_c L_c}{T_c U_c} \right] \quad (1.33)$$

Richardsonovo číslo udává poměr mezi termickou a mechanickou produkcí kinetické energie turbulentních fluktuací. Jeho hodnota je ovlivňovaná teplotním zvrstvením MVA. Pokud je $Ri > 0$, jedná se o instabilní zvrstvení, pokud $Ri < 0$ pak je atmosféra stabilně zvrstvena a pokud $Ri = 0$, pak je zvrstvení indiferentní.

- **Reynoldsovo číslo Re** - definováno vztahem

$$\frac{1}{Re} = \left[\frac{\nu}{U_c L_c} \right] \quad (1.34)$$

Reynoldsovo číslo Re udává poměr sil setrvačných a vazkých a je velice důležitou charakteristikou proudění v MVA, kde jsou jeho hodnoty vysoké řádově $10^8 - 10^9$. Význam tohoto čísla je však i pro obecné proudění v tekutinách, neboť jeho hodnota udává, zda jde o laminární nebo turbulentní proudění.

- **Machovo číslo** M_a - definováno vztahem

$$M_a = \left[\frac{U_c}{c_s} \right] \quad (1.35)$$

Machovo číslo M_a udává poměr rychlosti proudění U_c a rychlosti zvuku ve daném prostředí c_s . Hodnoty Machova čísla jsou řádově nízké v přízemní vrstvě MVA, kde $M_a = 10^{-1} - 10^{-2}$. Machovo číslo se užívá pro určení, zda lze proudění považovat za nestlačitelné nebo stlačitelné. Pro vysoké hodnoty Machova čísla je nutno proudění uvažovat jako stlačitelné, viz níže.

S použitím těchto podobnostních čísel je možno napsat základní rovnice v tomto tvaru

$$\frac{1}{St} \frac{d\rho^*}{dt^*} = -\rho^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*), \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{St} \frac{d\mathbf{u}^*}{dt^*} = \nabla^* p'^* + Ri \frac{g_c}{U_c} \frac{\Theta'^*}{\Theta_0^*} \mathbf{g}^* - \frac{1}{Ro} (\boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{u}^*) + \frac{1}{Re} (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^*, \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{St} \frac{dT^*}{dt^*} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} (\nabla^*)^2 T^* + \frac{Ec}{Re} \Theta^*, \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{St} \frac{dC^*}{dt^*} = \frac{1}{Re} \frac{1}{Sc} (\nabla^*)^2 C \quad (1.39)$$

1.3 Okrajové podmínky

Matematické modelování proudění se realizuje tak, že příslušné pohybové rovnice jsou numericky řešeny na zadané omezené oblasti. Pro tyto účely je tedy nutno systém pohybových rovnic doplnit o tzv. okrajové podmínky, které určují chování systému na jeho hranicích.

Vycházejme s představy, že oblast, ve které budeme řešit matematický model je omezena šesti stěnami. Vstupní stěna, dolní stěna, horní stěna, výstupní stěna a boční stěny. Konkrétní charakter hranic však samozřejmě závisí na tom, o jakou fyzikální situaci se jedná. Na těchto hranicích nějakým způsobem zadáváme hodnoty tlaku, rychlosti, potenciální teploty a koncentrace pasivní příměsi.

Jako dolní stěnu budeme uvažovat zemský povrch, který bude specifikován funkcí $z = h(x, y)$, která vyjadřuje nerovnosti a překážky na povrchu.

U definice horní stěny budeme uvažovat podmínku **konečné hloubky**, kde uvažujeme proudění v oblasti shora omezené pevnou hranicí, která se s časem nemění.

Pokud hustota na horní stěně je nulová, pak nazýváme tuto hranici **volná hladina** a pokládáme $p = 0$.

Tlak se na vstupní stěně často extrapoluje z vnitřku oblasti, nebo se využívá toho, že je v přízemní vrstvě téměř konstantní. Na dalších stěnách se však používá i zadání Dirichletovými či Neumannovými podmínkami.

Rychlost se zadává mnoha různými způsoby v závislosti na situaci. Většinou se však na vstupní stěně zadává nějaký vstupní rychlostní profil. Na zemském povrchu se předepisují podmínky ulpívání rychlosti, které jsou v případě vazkého proudění vyjádřeny pomocí tzv. *no-slip conditions* (viz níže) a v případě nevazkého se rychlost uvažuje jako tečná k povrchu. Na horní stěně se rychlost zadává většinou Neumannovými podmínkami, neboť pokud by byla explicitně zadána, mohlo by to mít za následek nežádoucí efekt, který by byl způsoben tím, že takto zadaná rychlost by horní stěně dala charakter jakési další mezní vrstvy. Na výstupní stěně a bočních stěnách se používají Neumannovy nebo Dirichletovy okrajové podmínky.

Potenciální teplota a koncentrace pasivní příměsi se zadávají Dirichletovými nebo Neumannovými podmínkami a záleží samozřejmě na modelované situaci.

Zapišme nyní jako příklad konkrétnější okrajové podmínky pro modelování laminárního, vazkého, nestlačitelného proudění v obdélníkové oblasti MVA.

1. **Vstupní stěna** - předepisujeme Dirichletovy podmínky pro všechny proměnné. Předpokládáme tedy znalost tlaku p , složek rychlosti u , v a w , potenciální teploty θ a případně i koncentrace příměsi C jako explicitně zadané funkce souřadnic (y, z) . Pokud jde o počáteční podmínky rychlosti, tak máme několik možností, jak zvolit vstupní rychlostní profil.

- Konstantní rychlostní profil, kdy rychlosti (u, v, w) jsou zadány jako (u_0, v_0, w_0) , přičemž, u_0 , v_0 a w_0 jsou konstanty.
- Logaritmický rychlostní profil, kdy $(u, v, w) = (u_0 \ln(1 + \frac{z(e-1)}{c}), v_0, w_0)$, kde c je vertikální rozměr oblasti.
- Ekmanova spirála, což znamená, že $(u, v, w) = (u_0(1 - e^{-Az}) \cdot \cos(Az), v_0 e^{-Az} \sin(Az), 0)$, kde $A = \sqrt{\Omega_c/2K}$, Ω_c je Coriolisův parametr a K je konstanta.

2. **Zemský povrch** - potřebujeme podmínku pro rychlosti, zvanou *no-slip condition*, tedy podmínku ulpívání proudu, která dává $u = 0$, $v = 0$ a $w = 0$. Potenciální teplotu předepisujeme Dirichletovou podmínkou. Pokud uvažujeme transport příměsi, tak na spodní hranici se neuvažuje usazování příměsi, tedy $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0$, přičemž \mathbf{n} je vektor normálový k povrchu. V blízkosti povrchu platí také rovnováha mezi silou tlakového gradientu a silou Coriolisovou v horizontálním směru.

3. **Výstupní stěna** - podmínky předepisujeme jako Neumannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.40)$$

kde \mathbf{n} je vektor normálový ke stěnám.

4. **Horní stěna** - Pro rychlost a tlak jsou většinou předepisovány Dirichletovy okrajové podmínky. Někdy se pro vertikální složku rychlosti používá Neumannova podmínka. Pro koncentraci a potenciální teplotu bývá použita Neumannova podmínka, ale potenciální teplota může být zadána i Dirichletovou podmínkou.
5. **Boční stěny** - Předepíšeme různé okrajové podmínky v závislosti na charakteru řešeného fyzikálního případu.
 - Zadáme periodické podmínky pro tlak, rychlost, potenciální teplotu a případně koncentraci.
 - Předepíšeme Neumannovy podmínky, tedy

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.41)$$

kde \mathbf{n} je vektor normálový ke stěnám.

- Použijeme Dirichletovy podmínky, tedy zadáme tlak, rychlost, potenciální teplotu a koncentraci jako funkce (x, z) .

Kapitola 2

Systemy rovnic a jejich aproximace

2.1 Rovnice stlačitelného proudění

Popišme si nejprve obecnější případ laminárního, vazkého, stlačitelného proudění v MVA. Pro tento případ potřebujeme k popisu použít úplný systém Navierových-Stokesových rovnic, viz [6], str. 2. Tento systém zapíšeme přehledně pomocí vektorového zápisu pro 2-D případ takto

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{T}, \quad (2.1)$$

kde vektory mají složky

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\rho, \rho u, \rho w, e)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u w, u(e + p))^T, \\ \mathbf{H} &= (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + p, w(e + p))^T, \\ \mathbf{R} &= (0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{11}u + \tau_{12}w + K_T \theta_x)^T, \\ \mathbf{T} &= (0, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{21}u + \tau_{22}w + K_T \theta_z)^T, \end{aligned}$$

a dále e je celková energie v jednotce objemu, θ_x a θ_z jsou parciální derivace potenciální teploty podle x a z a τ_{ij} je tenzor obsahující viskózní část tenzoru napětí, který je dle (1.3) dán vztahem $\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}$.

Situaci zjednodušíme uvažováním adiabatičnosti a Boussinesqovy aproximace (viz níže), čímž dostáváme soustavu pro laminární, vazké a stlačitelné proudění, kde se neuvažuje rovnice energie a pravá strana je zjednodušená na tzv. nestlačitelné proudění:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + w \frac{\partial \rho u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + u \frac{\partial \rho w}{\partial x} + w \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

V této soustavě je $\nu = \nu(T)$, dynamická viskozita závislá na teplotě. Platí samozřejmě stavová rovnice (1.9). Dále je nutné určit vztah mezi proměnnými u , v , ρ a p v rovnicích (2.2).

Tyto rovnice mohou být dále zjednodušeny přechodem k tzv. nestlačitelnému proudění.

2.2 Rovnice nestlačitelného proudění

Dále postupujme s popisem modelů nestlačitelného proudění. Jde o jednu z nejzákladnějších aproximací v modelování chování tekutin, která se používá zejména pro modelování proudění atmosféry, neboť předpoklad nestlačitelnosti v tomto případě není závažnou chybou, viz [11].

Většinou se proudění považuje za nestlačitelné, pokud jeho hustota je v průběhu pohybu konstantní ve všech infinitezimálních částech tekutiny a to i přesto, že dochází například ke změnám tlaku. Upravme rovnici kontinuity (1.1) na následující tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

přitom pokud je hustota konstantní, tak její časové i prostorové derivace jsou nulové, takže v tomto případě se rovnice kontinuity (2.3) redukuje na tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.4)$$

Pokud však uvažujeme stratifikované proudění, není možné považovat hustotu za konstantní funkci. Předpoklad nestlačitelnosti spočívá v tomto případě v tom, že hustota je nezávislá na tlaku a platí vztah (2.4), takže rovnice kontinuity se zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (2.5)$$

Takto zadaná rovnice kontinuity je nejčastějším způsobem zadání průběhu hustoty ve stratifikovaném proudění.

Uveďme konkrétní systém rovnic řešící dvojrozměrné proudění v MVA.

Uvažujme osu x jdoucí ve směru proudu a osu z kolmou k povrchu. Máme tedy $\mathbf{u} = (u, w)$ jako vektor rychlosti, ρ_0 je hustota, která je konstantní, p je tlak, ν kinematická viskozita a g gravitační zrychlení. Nejčastěji používaný model laminárního, vazkého a nestlačitelného proudění v MVA je založen na následujících rovnicích

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.8)$$

Tento model uvažuje samozřejmě nestratifikované proudění. Pokud potřebujeme modelovat systém s většími změnami energie, je nutno k tomuto systému přidat ještě rovnici energie (1.8) zapsanou pro teplotu nebo pro potenciální teplotu.

V našem případě půjde o tzv. nízkorychlostní proudění o rychlostech $2\text{--}10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, které se vyznačuje nízkými hodnotami Machova čísla, $M_a = 10^{-1} - 10^{-2}$, a naopak vysokým Reynoldsovým číslem, $Re = 10^8 - 10^9$.

Je několik možností, jak uvažovat změnu hustoty a tím přejít k řešení stratifikovaného proudění. Jednou z nich je přidat následující rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

kterou lze interpretovat jako rovnici přenosu hustoty.

Je vidět, že rovnice (2.6) a (2.9) jsou vlastně jen přepsáním rovnice kontinuity v nestlačitelném proudění (2.5), přičemž poznamenejme, že rovnice (2.9) je typická rovnice hyperbolického typu.

K rovnicím (2.6)-(2.9) se přidává stavová rovnice (1.9), která určuje vztah mezi hustotou a stavovými veličinami.

Dále použijeme např. Boussinesqovu aproximaci, kde hlavní část proudového pole splňuje rovnici hydrostatické rovnováhy, viz níže.

2.3 Aproximace mělké vody

Aproximace mělké vody, nebo též *shallow water equations*, je často používanou aproximační rovnicí kontinuity, která vychází z představy, že se hustota atmosféry mění s výškou jako důsledek stlačitelnosti, ale v horizontální rovině jsou změny v uvažované omezené oblasti relativně malé. Okamžitou hustotu ρ lze proto rozložit na dvě složky

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z), \quad (2.10)$$

kde $\rho_0(z)$ je horizontálně homogenní složka hustoty, která se mění s výškou, $\rho'(x, y, z)$ pak značí poruchu této homogenity. Pro měrný objem můžeme provést obdobnou úvahu

$$\alpha(x, y, z) = \alpha_0(z) + \alpha'(x, y, z) \quad (2.11)$$

Rovnici kontinuity (1.1) lze tak přepsat dle [11] na tvar

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dz} = \frac{1}{w} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.12)$$

Označíme-li levou stranu rovnice H_α^{-1} a pravou stranu L_z^{-1} , potom veličina H_α charakterizuje rozměr změny hustoty a L_z rozměr změny rychlosti. Charakteristický rozměr změny rychlosti, který lze odhadnout rozměrem MVA $H_\alpha \approx 1 \text{ km}$, je v atmosféře mnohem menší než rozměr změny hustoty $L_z \approx 8 \text{ km}$, což je výška, ve které zaznamenáváme výrazné změny hustoty. Platí tedy

$$L_z \ll H_\alpha \quad (2.13)$$

a rovnici (2.12) přejde do jednoduchého tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.14)$$

který můžeme chápat tak, že se MVA chová jako nestlačitelná tekutina s konstantní hustotou.

Uvedme opět konkrétní systém rovnic pro popis proudění v MVA. Aproximace mělké vody se používá zejména pro 2-D případy proudění. Uvažujme stejně jako v případě nestlačitelného proudění osu x jdoucí ve směru proudu a osu z kolmou k povrchu, $\mathbf{u} = (u, w)$ vektor rychlosti, ρ_0 hustota, p je tlak, ν kinematická viskozita a g gravitační zrychlení. Model laminárního, vazkého proudění v aproximaci mělké vody pro MVA je založen na následujících rovnicích

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.18)$$

2.4 Aproximace hluboké vody - anelastická aproximace

Pokud neuvažujeme proudění za nestlačitelné ve smyslu aproximace mělké vody, tedy pokud uvažujeme místo vztahu (2.13) porovnání

$$L_z \sim H_\alpha \quad (2.19)$$

tak rovnici kontinuity (1.1) přepisujeme na

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \quad (2.20)$$

Takové přiblížení nazýváme aproximací hluboké vody, resp. anelastickou aproximací. Kompletní systém rovnic, které popisují dvojrozměrné proudění v anelastické aproximaci je tedy

$$\frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.23)$$

2.5 Hydrostatická aproximace

Je-li vzduch vůči zemi v relativním klidu a všechny síly působící ve vertikálním směru jsou zanedbatelné vůči síle tíhové, hovoříme o tzv. hydrostatické rovnováze. Rovnice (1.6) se ve vertikální směru redukuje dle [11] na

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.24)$$

Tato aproximace se využívá v dalším textu např. při aplikaci Boussinesqovy aproximace, pro samostatný popis MVA se však příliš nehodí, neboť představuje pouze hrubé přiblížení. Nebudeme zde vypisovat celý systém rovnic, neboť je stejný jako v předchozích případech, jen pohybová rovnice (1.6) se změní ve vertikálním směru na tvar (2.24).

2.6 Boussinesqova aproximace

Předpokládejme dle [11], že:

1. termodynamický stav atmosféry je blízký stavu hydrostatické rovnováhy (2.24), který budeme nazývat referenčním stavem značeným dolním indexem $_0$
2. vertikální odchylky hustoty, tlaku a potenciální teploty jsou vůči referenčnímu stavu malé
3. Machovo číslo M_a charakterizující vliv stlačitelnosti dosahuje malých hodnot

Následně můžeme, obdobně jako v aproximaci mělké vody, hustotu, tlak a potenciální teplotu rozložit na referenční složku a odchylku

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z), \\ p(x, y, z) &= p_0(z) + p'(x, y, z), \\ \Theta(x, y, z) &= \Theta_0(z) + \Theta'(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Z předpokladu 2. vyplývá pro odchylky od referenčního stavu

$$\frac{\rho'}{\rho_0}, \frac{p'}{p_0}, \frac{\Theta'}{\Theta_0} \ll 1 \quad (2.26)$$

Pro referenční tlak p_0 platí rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho \quad (2.27)$$

Zapišme nyní pohybovou rovnici ve vertikálním směru

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho_0} \nabla(\mu \nabla w). \quad (2.28)$$

V této rovnici můžeme dosadit do prvních dvou členů na pravé straně z rovnic (2.25), takže tyto členy pak vypadají

$$-\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p_0}{\partial z} - g - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Nyní dosadíme na pravé straně za p_0 z rovnice hydrostatické rovnováhy (2.27). Dostáváme tak výraz

$$-\frac{g\rho_0}{\rho_0 + \rho'} - g - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (2.30)$$

což můžeme jednoduše upravit na

$$-g \frac{\rho'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (2.31)$$

Dále uvážíme, že člen $\rho' \ll \rho_0$, takže jej v obou jmenovatelých zanedbáme a dále pokud vzpomeneme na definici potenciální teploty (1.12) a stavovou rovnici (1.9), takže platí

$$-\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad (2.32)$$

dostáváme tak

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g \frac{\theta'}{\theta_0}. \quad (2.33)$$

Rovnici (2.28) tedy přepíšeme do tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g \frac{\theta'}{\theta_0} + \frac{1}{\rho_0} \nabla(\mu \nabla w), \quad (2.34)$$

kde druhý člen na pravé straně je nazýván *vztakový člen*, který velice úzce souvisí s charakterem stability v MVA. Připíšme zbývající pohybové rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \nabla(\mu \nabla u) + \Omega_c v, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \nabla(\mu \nabla v) - \Omega_c u. \quad (2.36)$$

Velice podobně můžeme odvodit rovnici energie zapsanou pro potenciální teplotu a také rovnici transportu příměsi

$$\frac{\partial c_p \theta'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_p \theta' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\frac{K_T}{c_p} \right), \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\rho_0 K_C \nabla C). \quad (2.38)$$

Systém rovnic uzavírá vhodná rovnice kontinuity, kterou zde uvedeme například v anelastickém tvaru

$$u \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_0 v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0. \quad (2.39)$$

Zapsali jsme tedy systém rovnic, který popisuje 3-D laminární, vazké proudění v anelastické aproximaci s Navier-Stokesovými rovnicemi zapsanými v Boussinesqově aproximaci.

Boussinesqova aproximace je používána téměř při všech modelovaných situacích v MVA a to jak pro stlačitelné, tak pro nestlačitelné proudění a pro modely různých měřítek.

Kapitola 3

Modelování proudění v homogenní vrstvě

V této kapitole budeme diskutovat laminární, nestlačitelné a nevazké proudění homogenní tekutiny. Tato tekutina má horní okraj s vlastnostmi **volné hladiny**. Budeme dále předpokládat, že tekutina má volnou hladinu i při průchodu nad izolovanou překážkou. Tento systém je obecně relativně jednoduchým přiblížením stratifikovaného proudění. Všechny zákonitosti popsané v této kapitole mají svou analogii ve stratifikovaném proudění, obrácená věta však neplatí, neboť stratifikované proudění obsahuje mnoho zákonitostí, které se v jednovrstevnatém proudění nevyskytují. Popsání tohoto jednovrstevnatého proudění je velice vhodné pro další pochopení komplexnějšího stratifikovaného proudění.

3.1 Základní rovnice

Rovnice kontinuity a pohybová rovnice jsou zjednodušené, neboť předpokládáme nestlačitelnou, homogenní a nevazkou tekutinu s hustotou ρ_0 . Rovnice kontinuity se tedy redukuje na:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

Pohybová rovnice vypadá takto:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{g} \quad (3.2)$$

Vyvstává nutnost popsat nějakým způsobem překážku, kterou bude třeba při tomto proudění počítat. Výskyt překážky budeme uvádět ve formě $z = h(x, y)$, přičemž $z = 0$ je nulová hladina odpovídající hodnotě u dna. Okrajová podmínka nulové normálové rychlosti je vyjádřena podmínkou

$$w = \mathbf{u} \cdot \nabla h, \quad (3.3)$$

přičemž předpokládám $z = h(x, y)$.

Tekutina má horní volnou hladinu na hodnotě $z = d_0$, s posunutím η . Díky tomuto můžeme na této hladině psát $p = p_0 = 0$ a $w = \frac{d\eta}{dt}$. Pokud vertikální zrychlení $\frac{dw}{dt}$ je mnohem menší než gravitace, tak platí hydrostatická aproximace, tedy

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0. \quad (3.4)$$

Z této rovnice následnou integrací dostáváme $p = p_0 + \rho_0 g(d_0 + \eta - z)$.

Jednoduchá měřítková analýza nám dává, že tato aproximace platí, pokud $(d_0/L)^2 \ll 1$, kde L je horizontální měřítko pohybu tekutiny.

Pokud dále předpokládáme, že horizontální složky rychlosti u a v jsou nezávislé na z , tak mohou pohybové rovnice přepsat takto:

$$u_t + uu_x + vv_y = -g\eta_x, \quad (3.5)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -g\eta_y, \quad (3.6)$$

$$\eta_t + (du)_x + (dv)_y = 0, \quad (3.7)$$

kde dolní indexy značí příslušné derivace a $d = d_0 + \eta - h$ je tloušťka vrstvy.

Toto jsou tedy základní rovnice, které se dají řešit několika metodami. Ty ovšem velice závisí na charakteru překážky a počátečních podmínkách. V dalším textu se pokusíme naznačit způsob řešení rovnic v konkrétněji zadaných případech.

3.2 Proudění nad velmi nízkou překážkou

Systém rovnic (3.5), (3.6) a (3.7) je nelineární. Pokusíme se napsat řešení těchto rovnic nejprve v linearizovaném případě a poté se budeme snažit řešit nelineární případ.

Lineární hydrostatické proudění

Budeme uvažovat rovnoměrnou rychlost proudění U ve směru osy x . Do tohoto proudění vložíme dlouhou překážku, která bude charakteristická malou výškou vyjádřenou $z = h(x, y)$. Linearizací rovnic (3.5), (3.6) a (3.7) v okolí počátečního stavu a při vyjádření x -ové složky rychlosti jako $u = U + u'$, dává tyto rovnice:

$$u'_t + Uu'_x = -g\eta_x, \quad (3.8)$$

$$v_t + Uv_x = -g\eta_y, \quad (3.9)$$

$$\eta_t + U\eta_x + d_0(u'_x + v_y) = Uh_x, \quad (3.10)$$

které se dají upravit eliminováním u' a v , čímž dostaneme rovnici pro η :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \eta - gd_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - gd_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad (3.11)$$

kteřá je řešitelná pro $t > 0$, s počátečními podmínkami

$$\eta = h(x, y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{pro } t = 0. \quad (3.12)$$

Nyní zavedeme bezrozměrný parametr, Freudovo číslo F_0 definované vztahem

$$F_0 = \frac{U}{\sqrt{gd_0}}. \quad (3.13)$$

Freudovo číslo je poměr rychlosti proudění a rychlosti dlouhých gravitačních vln v nehybné tekutině hloubky d_0 . Přitom proudění s $F_0 = 1$ nazýváme *kritické*, s $F_0 < 1$ *podkritické* a s $F_0 > 1$ *nadkritické*. U podkritického proudění se vlny mohou šířit jak po směru proudění, tak proti němu. U nadkritického proudění není možné šíření proti směru proudění.

Uvedeme nyní jen stručně řešení pro 1-D proudění ve směru osy x přes 2-D překážku. Proměnná h je nezávislá na y , takže standartními metodami lze řešit systém rovnic (3.11) a (3.12).

$$\eta = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} h(x) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h[x - (U + \sqrt{gd_0})t]}{F_0 + 1} - \frac{h[x - (U - \sqrt{gd_0})t]}{F_0 - 1} \right\}, \quad (3.14)$$

což je řešením za předpokladu, že $F_0 \neq 1$. Z tohoto řešení vidíme, že překážka působí na proudění tak, že vytváří vlny, jejichž parametry jsou explicitně určeny rovnicí (3.14). Pro $F_0 \rightarrow 1$ se řešení stává singulárním. Pro $F_0 = 1$ má totiž řešení tvar

$$\eta = \frac{Ut}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{4} h(x - 2Ut) + \frac{3}{4} h(x). \quad (3.15)$$

Dále vyřešíme systém rovnic (3.11) a (3.12) pro 2-D proudění s 3-D překážkou. Tento problém je podstatně složitější a jeho řešení není hlavním zájmem této práce, takže jen stručně uvedeme, že pro $F_0 < 1$ je ustálený tvar rovnice (3.11) v eliptickém tvaru, který se dá upravit na tvar Poissonovy rovnice. Řešení tedy umíme najít metodou Greenovy funkce a explicitní tvar je

$$\eta = \frac{F_0^2}{2\pi(1 - F_0^2)^{\frac{1}{2}}} \iint h(x', y') \frac{[(x - x')^2 - (1 - F_0^2)(y - y')^2]}{[(x - x')^2 + (1 - F_0^2)(y - y')^2]^2} dx' dy', \quad (3.16)$$

kde se integruje přes oblast překážky. Rovnice lze zjednodušit za předpokladu symetrie a dostatečné vzdálenosti proudění od překážky, ale podrobněji se této problematice nebudeme věnovat.

Pro $F_0 > 1$ je rovnice (3.11) hyperbolická v prostorových proměnných. Vlny generované v tomto případě jsou výhradně ve směru proudění. Znovu lze nalézt řešení rovnice v ustáleném tvaru metodou Greenovy funkce. Řešení vypadá takto:

$$\eta = \frac{F_0^2}{2(1 - F_0^2)} f \left[x - (F_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} y \right] + f \left[x + (F_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} y \right], \quad (3.17)$$

kde

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} h \left[\xi - (F_0^2 - 1) \frac{1}{2} y', y' \right] dy'. \quad (3.18)$$

Uvedme na závěr zajímavou analogii mezi hydrostatickým prouděním za překážkou, které má podkritické, resp. nadkritické rychlosti a prouděním ve stlačitelném prostředí za tenkými 2-D tělesy (tenkými v tom smyslu, že poruchy jsou malé a tedy lineární) podzvukovou, resp. nadzvukovou rychlostí. Při této analogii hraje Machovo číslo $M = \frac{U}{c_s}$, kde c_s je rychlost zvuku v daném prostředí, stejnou roli jako hrálo Froudeovo číslo F_0 .

Lineární nehydrostatické proudění

V případě nehydrostatického proudění se nám změní sada rovnic popisujících proudění. Zavádí se zde potenciál, k jehož použití nás opravňuje přímo rovnice (3.1). Platí tedy pohybová rovnice v tomto tvaru:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (3.19)$$

která je doplněna rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.20)$$

přičemž potenciál zavedu klasicky vztahem

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \text{ přičemž platí } \nabla^2 \phi = 0. \quad (3.21)$$

K těmto rovnicím připojíme okrajové podmínky na volné hladině a na povrchu, podobně jako v případě hydrostatického proudění.

$$w = \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + g\eta = \text{konst.}, \quad (3.22)$$

na hladině $z = d_0 + \eta$, a u dna

$$w = \mathbf{u} \cdot \nabla h, \text{ přičemž předpokládám } z = h(x, y). \quad (3.23)$$

Po přidání počátečních podmínek obdržíme kompletně zadanou sadu rovnic, kterou budeme řešit. Nejprve linearizujeme okrajové podmínky za předpokladu malých perturbací okolo střední rychlosti U v x -ovém směru. Toto můžeme napsat jako $u = U + u'$, z čehož následně dostaneme $\phi = Ux + \phi'$. Okrajové podmínky při horním okraji a u dna tedy přepíšeme na

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta, \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t} + U \frac{\partial \phi'}{\partial x} + g\eta = 0, \quad z = d_0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h, \quad z = 0. \quad (3.25)$$

Tento systém rovnic ve stacionárním případě ($U = 0$) se stálou hloubkou ($h = 0$) generuje lineární vlny, které závisí na $e^{i(kx - \omega t)}$, kde k je vlnové číslo, ω frekvence vlnění a i je imaginární jednotka. Zajímavější je řešení nestacionárního problému proudění přes nízkou překážku, které se dá řešit metodou Fourierovy transformace. Přesný výpočet řešení však přesahuje rámec této práce a lze jej najít např. v [3], str. 28. Zajímavým faktem je, že pro 2-D proudění generují rovnice při vhodném měřítku podobné vlny, které jsou vytvářeny při pohybu lodí na vodní hladině.

3.3 1-D nelineární hydrostatické proudění

Pro popis tohoto modelu proudění se vrátíme zpět k nelineárním efektům jednodimenzionálního proudění. Zákonitosti nelineárního proudění jsou velice užitečné pro studium hydrostatických systémů s dlouhým horizontálním délkovým měřítkem, kde nejsou přítomny efekty disperze. Použijeme rovnice (3.5), (3.6), (3.7), které po úpravě na jednodimenzionální případ vypadají takto:

$$u_t + uu_x = -g\eta_x, \quad (3.26)$$

$$d_t + (du)_x = 0, \quad (3.27)$$

nebo

$$\eta_t + [(d_0 + \eta)u]_x = (uh)_x, \quad (3.28)$$

kde dolní indexy značí příslušné derivace a $d = d_0 + \eta - h$ je tloušťka vrstvy. Uvažujme dále počáteční podmínky $u = U$, $\eta = h$ a $\eta_t = 0$ v čase $t = 0$. Máme tak klasický systém hyperbolických diferenciálních rovnic. Pro malé časy se řešení redukuje na již popsany lineární případ, přičemž řešení je popsáno rovnicí (3.14). Nás však bude dále zajímat řešení při uvažování tzv. *hydraulic jumps*, tedy skoků, které jsou modelovány jako nespojitosti, což je efekt, který je u stratifikovaného proudění velice častý.

Hydraulické skoky

Uvažujme jednoduchý model skoků založený na zachování hmoty a hybnosti. Označme rychlosti proudění u a příslušné hloubky d , před skokem u_u a d_u a za skokem u_d a d_d . Zákon zachování hmoty lze tedy vyjádřit jako

$$u_u d_u = u_d d_d = Q, \quad (3.29)$$

kde Q je objemový tok skokem. Rovnici pro zachování hybnosti dostaneme integrací (3.26), takže máme

$$d_u u_u^2 + \frac{1}{2} g d_u^2 = d_d u_d^2 + \frac{1}{2} g d_d^2. \quad (3.30)$$

Tyto dvě rovnice kompletně popisují vlastnosti skoku a umožňují další výpočty. Důležitá je např. disipace energie ve skoku, viz [3], str. 37.

Proudění nad svahem se třením

V tomto případě poprvé uvažujeme vysoké hodnoty Reynoldsova čísla, které jsou typické pro pohyby v blízkosti zemského povrchu. Tření budeme uvažovat jako kvadratickou funkci rychlosti, tedy členem $\frac{-Cu^2}{d}$, který musíme přidat na pravou stranu rovnice (3.26). Zde C je součinitel odporu, který vyjadřuje míru drsnosti povrchu. Pro zarovnaný svah, který je horizontálně skloněn pod úhlem θ řešíme soustavu rovnic

$$u_t + uu_x + g \cos \theta \eta_x = g \sin \theta - \frac{-Cu^2}{d}, \quad (3.31)$$

$$d_t + (du)_x = 0, \quad (3.32)$$

kde u směřuje ve směru svahu a d je hloubka měřená kolmo ke svahu. Rovnice 3.31 má v ustáleném rovnovážném případě řešení

$$u^2 = \frac{gd \sin \theta}{C}. \quad (3.33)$$

Pro neustálené proudění, které však má nízký horizontální gradient, takže členy na levé straně rovnice (3.31) jsou mnohem menší než členy na pravé straně, pak hovoříme o tzv. **kinematické vlnové aproximaci** a řešení je určeno rovnicemi (3.32) a (3.33). Tyto rovnice se redukují na

$$d_t + \frac{3}{2} \left(\frac{gd \sin \theta}{C} \right)^{\frac{1}{2}} d_x = 0. \quad (3.34)$$

Tato rovnice se používá např. pro řešení povodňových vln na řekách.

Pomocí rovnic uvedených v této části jsme tedy schopni řešit některé zjednodušené případy. Pro mnoho praktických aplikací jsou však tyto rovnice málo, neboť nezahrnují efekty nelineární svahovitosti a disperze, které více prodiskutujeme v další části.

3.4 Nelineární vlny

Hydrostatické přiblížení pro většinu případů poskytuje velice dobrý popis proudění přes dostatečně dlouhé překážky. Existuje však několik speciálních případů, kde hydrostatické přiblížení nelze použít, neboť nehydrostatické nelineární vlny nabývají na důležitosti bez ohledu na to, jak dlouhé jsou překážky. Pro krátké překážky očekáváme za překážkou generovaný vlnový pohyb o krátkých vlnových délkách. Navíc musíme uvažovat přítomnost nelineární advekce a disperze. Pokusíme se nyní stručně popsat tyto komplexnější situace. Budeme diskutovat rovnice, které zohledňují disperzi i nelineární advekci jakožto malé změny rovnoměrného šíření konstantní rychlostí. Toto vede k obecnějšímu popisu proudění ustáleného vzhledem k tokům hmotnosti, hybnosti a energie.

Disperzní relace pro jednodimenzionální lineární gravitační vlnu zapsanou jako $e^{i(kx-\omega t)}$ v tekutině v klidu o hloubce d_0 je

$$\omega^2 = gk \tanh kd_0, \quad (3.35)$$

což v prvním přiblížení dává přibližný vztah

$$\omega^2 \cong c_0^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{3} k^2 d_0^2\right), \quad (3.36)$$

kde $c_0^2 = gd_0$. Za předpokladu $kd_0 \ll 1$ dostaneme z rovnice 3.36

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{1}{3} d_0^2 \eta_{xxtt} = 0, \quad (3.37)$$

což je rovnice známá jako **lineární Boussinesqova rovnice**. Pohybové rovnice za předpokladu konstantní hloubky zahrnují disperzi mají tedy tvar:

$$u_t + uu_x + gd_x + \frac{1}{3} d_0 d_{xtt} = 0 \quad (3.38)$$

$$d_t + (du)_x = 0. \quad (3.39)$$

Tyto rovnice se nazývají **Boussinesqovy rovnice** a popisují vlnový pohyb způsobený prouděním přes překážku. K tomuto systému připojujeme dva parametry, $\frac{a}{d_0}$ a $(\frac{d_0}{L})^2$, kde a je amplituda povrchových posunutí a L je charakteristický rozměr horizontální délky. Pro $\frac{a}{d_0} \rightarrow 0$ se Boussinesqovy rovnice redukují na lineární Boussinesqovu rovnici a pro $(\frac{d_0}{L})^2 \rightarrow 0$ se první z Boussinesqových rovnic redukuje na rovnici (3.26). Pokud jsou oba parametry dostatečně malé, dá se odvodit tzv. **Korteweg-de Vriesova rovnice (KdV)**:

$$\eta_t - c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{d_0} \eta \eta_x + \frac{1}{6} c_0 d_0^2 \eta_{xxx} = 0. \quad (3.40)$$

Tato rovnice je velice známá, neboť má přesné řešení a spoustu krásných analytických vlastností, zatímco pro numerické modelování bývá používána spíše její úprava, která vychází z předpokladu, že $\eta_t \approx -c_0 \eta_x$ a má tedy tvar

$$\eta_t - c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{d_0} \eta \eta_x - \frac{1}{6} d_0^2 \eta_{xxt} = 0. \quad (3.41)$$

Numerickým řešením Boussinesqovy rovnice a rovnice Korteweg-de Vriesovy lze popsat nevazký systém s časovým vývojem, který v počátečním stavu sestává z monotónní změny v hloubce d_0 z jednoho rovnovážného proudu do druhého. Typicky se tím myslí například náraz proudění na velmi dlouhou překážku (náraz proudění na útes atd.).

3.5 Proudění přes topografii s nelinearitami a disperzí

Nyní se vraťme k otázce obtékání proudění přes topografii tak, jako jsme to částečně řešili v případě 1-D nelineárního hydrostatického proudění. Nyní však budeme navíc diskutovat efekty disperze vlnění. Teoretické studie této problematiky jsou založeny

na Boussinesqově rovnici. Z rovnice (3.11), která popisuje topograficky vynucené lineární šíření vlnění proti směru proudění, lze odvodit rovnici

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U - \sqrt{gd_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{U}{2} \frac{dh}{dx}, \quad (3.42)$$

která kombinací s Korteweg-de Vriesovou rovnicí dává

$$\eta_t - (U - c_0)\eta_x - \frac{3}{2} \frac{c_0}{d_0} \eta \eta_x - \frac{1}{6} c_0 d_0^2 \eta_{xxx} = \frac{1}{2} U h(x), \quad (3.43)$$

kde $c_0 = \sqrt{gd_0}$.

Numerická řešení této rovnice jsou nestabilní. Roku 1988 Smyth, [15], přidal k této rovnici členy popisující viskozitu a zjistil, že proudění se ve většině případů stává ustáleným v blízkosti překážky. Amplitudy vlnění přitom zůstávají konstantní v čase při pohybu od překážky. Dalšími aspekty řešení těchto problémů se však už nebudeme v této práci zabývat.

3.6 Nelineární proudění přes 3-D překážky

Studium vlastností proudění přes 3-D překážky omezené výšky má relativně krátkou historii. Dá se však říci, že zákonitosti tohoto proudění mají blízko k proudění přes kameny ve velice mělkých řekách, což je proudění, které lidé patrně studují už delší dobu.

Uvažujme hydrostatický případ a tedy soustavu rovnic (3.5), (3.6) a (3.7). Dále je nutné uvažovat zachování potenciální vorticity. Pro popis proudění přes překážky konečné výšky potřebujeme nutně umět popsat dvojrozměrné skoky, které nemusí navíc být nutně kolmé k proudění.

Popis dvourozměrných skoků je analogickým rozšířením jednodimenzionálních skoků, kterým jsme se věnovali v části 3.3. Pro popis se použije vhodná parametrizace skoku, který se obecně vyznačuje nerovnostmi, přičemž dochází samozřejmě k tvorbě vírů. Rovnice vycházejí ze zákona zachování hmoty a hybnosti. Detailní odvození vlastností 2-D skoků lze najít např. v [3], str. 79. Tato problematika je však velice složitá, takže ji dále nebudeme popisovat.

Existuje několik velice přibližných řešení speciálních problémů proudění nad trojrozměrnými překážkami, které byli odvozeny analyticky. V současné době však další postup spočívá v numerickém řešení soustavy rovnic (3.5), (3.6) a (3.7).

Kapitola 4

Modelování dvojvrstvého proudění

V této kapitole popíšeme pohyby vyvolané překážkami nebo stykem dvou homogenních proudění o různých hustotách. Budeme se zaměřovat na takové zákonitosti tohoto proudění, které jsou zcela nové v porovnání s jednovrstevnatým prouděním, které jsme stručně popsali v předchozí kapitole. Většinou budeme omezovat náš zájem na proudění, které je uspořádáno podél x -ové osy.

4.1 Základní rovnice

Pro naprostou většinu případů, které budeme popisovat nám postačí předpoklad konečné hloubky, to znamená, že uvažujeme pouze jednu horní styčnou plochu. Pro některé účely budeme uvažovat horní hranici jako volnou hladinu, tak jako tomu bylo v předchozí kapitole. Toto je však omezení pro situace, které jsou dynamicky pasivní, což znamená, že rychlost tekutiny je mnohem menší, než rychlost dlouhých gravitačních vln na volné hladině, která je úměrná $[g(d_1 + d_2)]^{\frac{1}{2}}$. Dále předpokládáme, že styčná plocha bude nekonečně tenká. Výsledné rovnice však budou platit i pro případy, kdy má styčná plocha konečnou tloušťku, s podmínkou, že pohyb má horizontální délkové měřítko srovnatelné s tloušťkou rozhraní.

Uvažujme nyní pro každou vrstvu její šířku, hustotu, rychlost a tlak. Pro i -tou vrstvu tedy máme po řadě d_i , ρ_i , \mathbf{u}_i a p_i pro $i = 1, 2$. Spodní vrstva má přitom index $i = 1$ a horní $i = 2$. Dále je klidová šířka vrstvy označena d_{i0} . Zavedme tyto vztahy:

$$d_{10} + d_{20} = D, \quad (4.1)$$

$$d_1 = d_{10} + \eta(x, t) - h(x), \quad (4.2)$$

kde η je posunutí od rozhraní proudění, D je celková šířka obou proudění a h je překážka na spodní hranici odpovídající například překážce, tak, jak tomu bylo i v předcházející kapitole.

Pokud budeme v obou vrstvách předpokládat nerotační pohyb, tak můžeme psát

$$\mathbf{u}_i = \nabla\phi_i, \text{ kde } \nabla^2\phi_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Pohybové rovnice pro jednotlivé vrstvy pak mohou vyjádřit ve formě

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^2 + gz + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

pokud navíc předpokládáme, že pohyb je po směru i proti směru šíření nevychýlený ve vertikálním směru, pak mohou integrací získat

$$p_i = p_0 - \rho_i \left(g(z - d_{10}) + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 \right), \quad i = 1, 2, \quad (4.5)$$

kde p_0 je tlak na původním rozhraní. Dále připojujeme podmínku spojitosti tlaku a odchylky η na rozhraní, což nám dává podmínky

$$p_1 = p_2, \quad (4.6)$$

$$w_1 = \phi_{1z} = \eta_t \phi_{1x} \eta_x + \phi_{1z} \eta_z, \quad (4.7)$$

$$w_2 = \phi_{2z} = \eta_t \phi_{2x} \eta_x + \phi_{2z} \eta_z, \quad (4.8)$$

příčemž $z = d_{10} + \eta$ a navíc s podmínkou pro spodní a horní pevnou hranici

$$\nabla \phi_1 \cdot \nabla [z - h(x)] = 0, \quad \text{pro } z = h(x), \quad (4.9)$$

$$\phi_{2z} = 0, \quad \text{pro } z = D, \quad (4.10)$$

přítom dolní indexy x , z a t v rovnicích označuje příslušné derivace. Rovnice (4.4) a (4.5) nám dále dávají

$$\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g\eta + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 \right], \quad \text{pro } z = d_{10} + \eta. \quad (4.11)$$

Pokud je horní vrstva velmi široká, že platí $\frac{d_1}{D} \ll 1$ a pokud považujeme pohyb za hydrostatický, tak můžeme členy na pravé straně rovnice (4.11) zanedbat. Pohybová rovnice pro spodní vrstvu je tedy stejná jako rovnice popisující jednovrstevnaté proudění, jen se záměnou g za $g' = (1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})g$. Tento případ je nazýván **aproximace na $1\frac{1}{2}$ -vrstevnatý model**.

4.2 1-D nelineární hydrostatické proudění

Předpokládejme nyní horizontální měřítko L a časové měřítko proudění dostatečně velké, abychom mohli vertikální pohyb považovat za hydrostatický. Zapišme tuto podmínku jako $\left(\frac{D}{L}\right)^2 \ll 1$. Předpokládejme dále, že horní okraj vrchní vrstvy je pevný a platí tedy vztah $h(x) + d_1 + d_2 = D$, kde $h(x)$ vyjadřuje nerovnost u dna spodní vrstvy, d_1 a d_2 jsou šířky vrstev a D je celková vzdálenost od dna spodní vrstvy po horní okraj vrchní vrstvy. Pohybové rovnice můžeme tedy zapsat jako

$$u_{it} + u_i u_{ix} = -\frac{\bar{p}_{ix}}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4.12)$$

$$d_{it} + (d_i u_i)_x = 0, \quad (4.13)$$

kde \bar{p}_i značí vertikální průměr tlaku v i -té vrstvě. Přitom p_i je dáno rovnicemi

$$p_1(x, z, t) = p_s + g\rho_1(h + d_1 - z) + g\rho_2 d_2, \quad (4.14)$$

$$p_2(x, z, t) = p_s + g\rho_2(h + d_1 + d_2 - z), \quad (4.15)$$

kde p_s je tlak u horní hranice. Pohybové rovnice se nám tedy změní na tvar

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} u_1^2 + g \left(h + d_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + \frac{p_s}{\rho_1} \right] = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} u_2^2 + g(h + d_1 + d_2) + \frac{p_s}{\rho_2} \right] = 0, \quad (4.17)$$

Připojením dvou rovnic zachování hmoty (4.13) dostáváme

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 = Q, \quad (4.18)$$

kde Q je celkový tok hmoty, který je nezávislý na čase a horizontální poloze. Z rovnic (4.13) a dále eliminací p_s z rovnic (4.16) a (4.17) a zavedením proměnné $\delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ dostáváme soustavu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} u_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(u_1^2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} u_2^2 \right) - \frac{g\delta\rho}{\rho_1} d_2 \right] = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (d_1 - d_2) + \frac{\partial}{\partial x} (d_1 u_1 - d_2 u_2) = 0. \quad (4.20)$$

Tyto rovnice dále upravíme zavedením nových proměnných η a ν , které definujeme jako

$$\nu = u_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} u_2, \quad (4.21)$$

$$d_1 + h = d_{10} + \eta, \quad (4.22)$$

$$d_2 = d_{20} - \eta, \quad (4.23)$$

kde d_{10} a d_{20} jsou hodnoty původní šířky vrstev, pro které platí $d_{10} + d_{20} = D$.

Vyjádřením u_1 a u_2 v proměnných η a ν a dosazením do rovnic (4.19) a (4.20) dostáváme požadované rovnice pro tyto proměnné. Aplikací Boussinesqovy aproximace na tyto rovnice dostáváme konečně

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(d_{20} - \eta)((d_{10} - h + \eta)\nu - Q)}{D - h} \right] = 0, \quad (4.24)$$

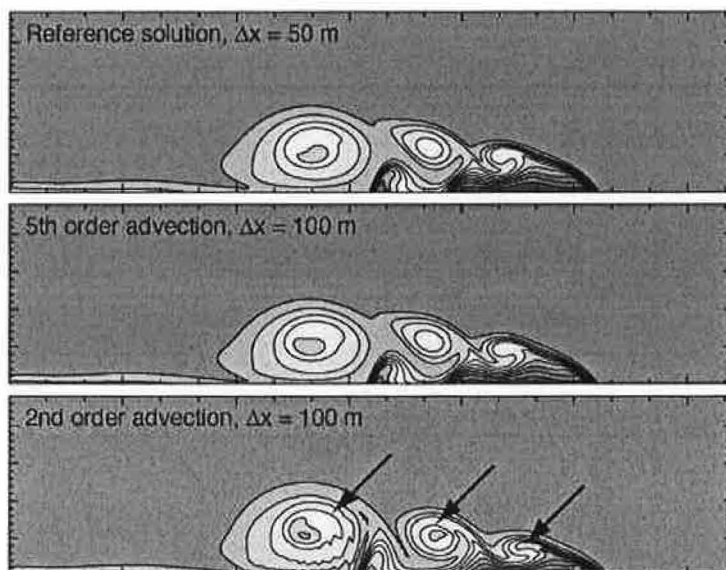
$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g'\eta + \frac{\nu^2(d_{20} - d_{10} + h - 2\eta) + 2Q\nu}{2(D - h)} \right] = 0, \quad (4.25)$$

kde $g' = g \frac{\delta \rho}{\rho_1}$. Tyto rovnice jsou hyperbolické a řešíme je numericky. Pokud neuvážujeme topografii, tedy pokud $h = 0$, dají se rovnice dokonce přímo integrovat. Tento případ nás však příliš nezajímá. Systém rovnic (4.24) a (4.25) jsou základem pro numerické modelování prakticky všech dvojrstvých příkladů. Situace se komplikují různým zadáváním počátečních podmínek, které odpovídají profilům hranic proudění a zejména tvarům překážek. Podívejme se dále stručně na některé jevy, které stratifikované proudění doprovází a které mohou být studovány numerickým modelováním.

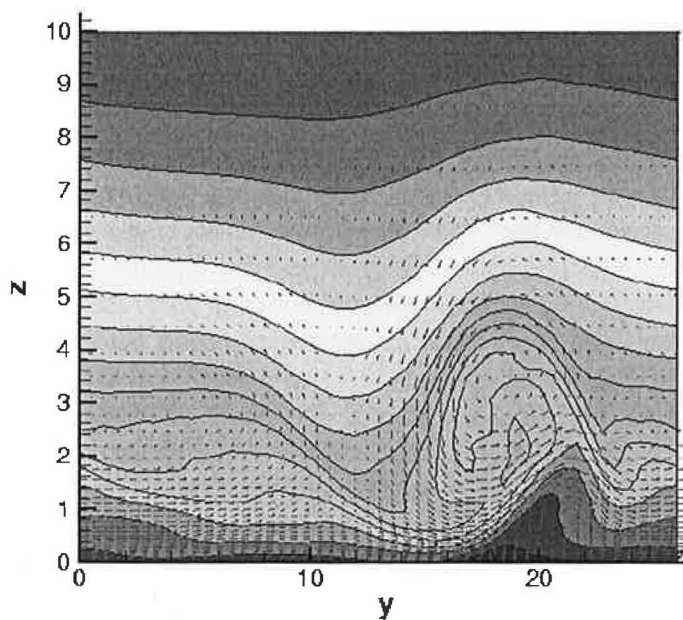
Hustotní proudy

Hustotní proud je speciální případ dvojrstvého hydraulického skoku, kde šířka spodní vrstvy se blíží k nule. Tento případ je v přírodě velice běžný a realizuje se v mnoha zajímavých příkladech. Toto proudění nastává, když se těžká tekutina rozlívá do velkého objemu lehčí tekutiny. Toto proudění je tedy řízeno rozdíly hustot a hlavní vliv zde má vztaková síla. Jako příklady tohoto druhu proudění uveďme atmosferický proud zvaný *haboob* známý s pouštních oblastí Súdánu, mořskou brezu, proudění ze spodních vrstev bouřek, zákalový proud na mořském dně, sněhové laviny nebo přízemní hladina proudění chladného vzduchu do vytopené místnosti po otevření dveří. Velice často se hustotní proud projevuje v souvislosti s průmyslovou činností, neboť se téměř vždy silně projevuje při různých haváriích a požárech. V těchto případech je užitečné modelovat šíření znečištění do atmosféry.

Často se pro modelování tohoto proudění uvažuje zjednodušený dvojrozměrný případ proudění přes povrch s konstantní zásobou těžké tekutiny. V laboratořích se hustotní proud jednoduše modeluje například v případě, kdy se slaná voda dostává do vody sladké. Dochází tak k vytvoření typické struktury vřdčího proudění v hustotním proudu, které je následováno oblastí, která se za ním valí a její vlastnosti zůstávají podobné jako u přízemní vrstvy. Lépe je charakter hustotního proudu vidět na obr. 1. Za tímto prouděním se tekutina dostává do stavu tzv. **Kelvin-Helmholtzovy nestability**, jak je vidět na obr. 2. Detailnější popis hustotního proudu a obecně vlnění, které vzniká ve stratifikovaném vlnění lze nalézt například v [10], str 91.



Obr. 1: Klasický profil hustotního proudu, viz. [16].



Obr. 2: Tvar tzv. Kelvin-Helmholtzova zvlnění, které je důsledkem nestability, viz [13].

Kapitola 5

Použití modelování stratifikovaného proudění

5.1 Modelování mezní vrstvy atmosféry

Nejvýznamější jsou pro použití v meteorologii ty aplikace modelování stratifikovaného proudění, které nám poskytují informace o mezní vrstvě atmosféry. Matematické modelování MVA je velice rozšířeným oborem, neboť jeho výsledky jsou velice důležité pro život člověka. Se stratifikovaným prouděním nejvíce souvisí modelování charakteru proudění přes horské hřebeny, dále modelování šíření znečištění, při kterém se uvažuje proudění nad komplexním terénem a také modely věnující se speciálně turbulenci, které jsou nutné např. pro posuzování vhodnosti staveb v místech s možností silných a nebezpečných vzduchových proudů.

V [3], str. 453, je uvedeno několik základních způsobů, jak popsat složitý terén a tím modelovat pohyb vzduchových hmot skrze údolí mezi horskými masivy nebo přes složité periodické překážky typu městské zástavby. Tyto modely jsou realizovány na malých měřítcích, řádově do 5 km a poskytují tak velice užitečné lokální informace. Tento druh modelování se začíná zahrnovat i do numerických předpovědních modelů.

Pokud jde o modelování turbulence, tak uveďme například modelování turbulentního proudění ve stratifikované atmosféře způsobené ochlazováním, resp. ohříváním povrchu po západu, resp. východu Slunce. Více je o této problematice uvedeno přímo v článku [8].

5.2 Modelování v oceanografii

Numerické řešení problémů stratifikovaného proudění nachází aplikaci také v oceanografii. Řeší se problém vlivu stratifikace a rotace na relativně stabilní proudění vodních hmot v oceánu, které je narušeno například silnými nárazy větru při tropických cyklónách. Více o modelování v oceanografii lze nalézt například v člancích [1] a [12].

5.3 Modelování znečištění podzemních vod

Numerické modelování rovnic stratifikovaného proudění nachází aplikaci také v proudění podzemních vod. V této oblasti se typicky řeší problém šíření různých příměsí do podzemních vod.

Konkrétně v článku [9] je popsána simulace problému šíření slané vody do podzemních vod v Káhiře. Toto modelování je velice obtížné, neboť hranice modelovaných oblastí jsou velice komplikované. Většinou se při modelování předpokládá konstantní hustota v jednotlivých vrstvách a řeší se pak pomocí vhodné numerické metody příslušná sada rovnic. Tento model ukazuje široké hranice použití numerického modelování stratifikovaného proudění.

Závěr

V předložené práci jsou shrnuty základy matematického modelování proudění tekutin. Popis modelu se více zaměřuje na aplikaci pro modelování atmosféry, resp. mezní vrstvu atmosféry. Je uveden základní systém rovnic. Dále jsou zavedeny základní veličiny a konstanty užitečné pro řešení problémů proudění. Podrobněji jsou popsány systémy pro modelování stlačitelného a stlačitelného proudění v mezní vrstvě atmosféry.

Jsou popsány metody matematického modelování stratifikovaného proudění v nejjednodušším případě jedné homogenní vrstvy, které jsou dále aplikovatelné na komplikovanější případy. Jsou popsány různé situace s různými aproximacemi, lineární a nelineární případy, hydrostatické a nehydrostatické systémy, případy pro velmi nízkou a jednoduchou topografii a problémy různých dimenzí.

Dále je popsána problematika dvojevrstvého proudění, která už přímo ukazuje na komplikace v modelování stratifikovaného proudění. Popsány jsou pouze 1-D případy nelineárního hydrostatického proudění a diskutována je problematika hustotních proudů v atmosféře, což je velice zajímavý a často modelovaný problém přímo související s hustotní stratifikací vzduchových hmot.

V závěru jsou popsány aplikace modelování stratifikovaného proudění v mezní vrstvě atmosféry. Stručně je zmíněn způsob užití v modelování proudění nad složitým terénem a také aplikace turbulentního modelu.

Zmíněny jsou taktéž odkazy na články věnující se aplikaci stratifikovaného proudění v problémech oceanografických a v problematice modelování znečištění podzemních vod.

Práce poskytuje základní přehled o způsobech matematického modelování stratifikovaného proudění a může být užitečná jako východisko pro další práci související např. s detailnějším popisem a modelováním konkrétních fyzikálních situací.

Literatura

- [1] Allen S. J., Newberger P. A.: *On intermediate models for stratified fluid*, Journal of Physical Oceanography, vol. 23, Oregon, 1993.
- [2] Barrabaa S.: *Écoulements turbulents stratifiés et simulations des grandes échelles*, Doctorat de l'université de Toulon et du Var, Toulon, 2002.
- [3] Baines P.G.: *Topographic Effects in Stratified Flows*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] Bednář J., Zikmunda O.: *Fyzika mezní vrstvy atmosféry*, Academia, Praha, 1985.
- [5] Beneš L.: *Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry*, Disertační práce, České vysoké učení technické, Fakulta strojní, Praha, 2000.
- [6] Beneš L., Bodnár T., Kozel K.: *Matematické modely stratifikovaného proudění*, České vysoké učení technické, Fakulta strojní, Praha, 2006.
- [7] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2005.
- [8] Cederwall R. T., Street R. L.: *A study of turbulence in a evolving stable atmospheric boundary layer using Large-Eddy simulation*, First international symposium on turbulence and shear flow, California, 1999.
- [9] Rofail N.: *A mathematical model of stratified groundwater flow*, Hzdrolological Sciences Bulletin, Káhira, 1977.
- [10] Grimshaw R.: *Environmental stratified flows*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2002.
- [11] Jaňour Z.: *Modelování mezní vrstvy atmosféry*, Učební texty University Karlovy, Praha, 2001.
- [12] Kurien S., Smith L. M., Wingate B. A.: *A novel investigation of rotating and stratified flows*, Los Alamos Report, Los Alamos National Laboratory, 2002.
- [13] Riley J. J.: *Turbulence in density-stratified flows*, Mechanical engineering faculty, University of Washington, 2002, dostupné na internetové adrese: <http://faculty.washington.edu/rileyj/strat.html>

- [14] Sládek I.: *Numerical solution of some problems in atmospheric boundary layer*, Disertační práce, České vysoké učení technické, Praha, 2004.
- [15] Smyth N. F.: *Dissipative effects on the resonant flow of a stratified fluid over topography*, Journal for fluid mechanics, 1988.
- [16] Straka et. al.: *Numerical Solutions of a Nonlinear Density-Current*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1993, dostupné na internetové adrese:
http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests/density/density.html