MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

David Tomandl

Finanční matematika pro střední školy s podporou internetu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky - Učitelství informatiky

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucí své diplomové práce, doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc., za užitečné rady a za čas, který mi věnovala.

Název práce: Finanční matematika pro střední školy s podporou internetu

Autor: David Tomandl

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá finanční matematikou a její výukou na střední škole.
Práce je zpracovaná ve formě webových stránek, zahrnuje úvod do financí, jednoduché a složené úročení, cenné papíry, dluhopisy, úvěry a spoření.
Webové stránky jsou obohaceny o interaktivní prvky, jako jsou applety v programu GeoGebra a krokovaná řešení úloh. Webové stránky zahrnují závěrečný test, ve kterém je možné si prověřit své znalosti. Test obsahuje deset náhodně vybraných otázek pokrývajících učivo, které je obsaženo v této práci.
Práce by měla sloužit zejména jako rozšiřující výukový materiál pro žáky středních škol.

Klíčová slova: finanční matematika, jednoduché a složené úročení, úvěry, spoření, cenné papíry

Title: Financial mathematics for secondary schools with internet support

Author: David Tomandl

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: The work deals with financial mathematics and its teaching in upper secondary school.
This thesis contains introduction to finance, simple and compound interest, securities, bonds, loans and savings. The work is also presented in the form of web pages.
The web pages are enhanced with interactive features such as applets in GeoGebra and step-by-step solutions for exercises. The web pages include a final test in which one can check his knowledge. The test contains ten randomly generated tasks which cover the curriculum of the thesis.
The work is meant as an extending teaching materials for upper secondary school pupils.

Keywords: financial mathematics, simple and compound interest, loans, savings, securities

Obsah

Úvod

Diplomová práce je zaměřena na vytvoření webových stránek s interaktivními prvky pro výuku finanční matematiky na střední škole. Součástí práce je výukový text s rozšiřujícím učivem, příklady a úlohy. Stránky jsou obohaceny o applety v programu GeoGebra a úlohy s krokovanými řešeními. U appletů v této práci je použitá v číselných výrazech tečka místo desetinné čárky.

V úvodní kapitole jsou žáci seznámeni se základními pojmy ze světa financí. Dále se tato kapitola věnuje investicím, konkrétně akciím a podílovým listům.

Druhá kapitola je zaměřena na jednoduché a složené úročení. Tato kapitola je zakončena sadou úloh s krokovanými řešeními.

Třetí kapitola je věnována dluhopisům. V této kapitole jsou uvedeny konkrétní příklady dluhopisů emitovaných v České republice.

Čtvrtá kapitola obsahuje učivo o úvěrech a půjčkách, které si žáci mohou opět procvičit v úlohách s krokovanými řešeními.

Spoření je věnována pátá kapitola, kde opět jsou uvedeny úlohy s krokovanými řešeními.

Webová stránka je zakončená závěrečným testem. Uživateli se náhodně vygeneruje 10 otázek z vytvořené databáze. Pořadí otázek a možností odpovědí je náhodné. Otázky v testu jsou děleny do tří kategorií. Uživatel vždy dostane 3 teoretické otázky, 3 jednoduché početní otázky, kde je možné k řešení dojít i bez použití kalkulačky a 4 složitější početní otázky.

Webová stránka rovněž obsahuje rejstřík pojmů, který uživateli usnadní hledání.

Diplomová práce obsahuje mnoho příkladů a úloh, které obsahují aktuální úrokové sazby a produkty používané komerčními bankami u svých produktů, ale jména bank jsou vynechána. Rovněž jména emitentů dluhopisů jsou vynechána. V práci jsou použita místo toho sousloví společnost A, banka A, atd.

Webová stránka je dočasně umístěna na adrese `http://karlin.mff.cuni.cz/~tomandl/fin_mat`. Po obhajobě diplomové práce budou stránky umístěny na portálu středoškolské matematiky, který spravuje Katedra didaktiky matematiky MFF UK. Pro prohlížení těchto stránek doporučujeme použít některý z následujících prohlížečů: Mozilla Firefox, Google Chrome, Opera, Safari.

Tištěná verze diplomové práce se z pochopitelných důvodů liší od webové v několika bodech. Dynamické applety jsou nahrazeny statickými obrázky s jedním konkrétním nastavením parametrů appletu. Z tohoto důvodu je i upravena formulace textů u appletů. Úlohy s krokovaným řešením mají v tištěné verzi uvedeno přímo řešení. Rozšiřující učivo je v tištěné verzi uvedeno mezi výukový text. Obrázek k ilustraci cenného papíru byl v tištěné verzi vypuštěn. Rejstřík pojmů je v tištěné verzi rovněž vypuštěn.

Většina definic byla převzatá z publikace Odvárko (2005).

1. Úvod do financí

1.1 Motivace

Žijeme v době, kdy svět financí je velice rozsáhlý a složitý a většina zemí má tržní ekonomiku. Objevují se stále nové finanční produkty a vznikají stále nové investiční příležitosti. Není tak vůbec snadné se v tomto světě orientovat a správně se rozhodovat, resp. investovat.

Investicí zde rozumíme část příjmu, která je vložena do prostředků (zdrojů, peněz), které nepřinášejí okamžitý prospěch, ale umožní zvýšení produkce prostředků v budoucnosti.

Náš pohled na investice bude takový, že ekonomický subjekt (stát, podnik, občan) nepoužije okamžitě část svých prostředků (zdrojů, peněz), ale vloží je do prostředků, u nichž očekává zisk v budoucnu.

Obecně nelze dát správný návod, kam své peníze uložit nebo kdy a kde si peníze půjčit. Můžeme například uložit část peněz do jedné investice a zbytek do investic jiných. Co když ale budeme mít investice, o kterých nebudeme schopni říci, jaký zisk nám přinesou? Jak pak najít tu nejlepší možnost pro zhodnocení svých úspor?

Ukážeme si, že i kdybychom měli pouze dvě možné investice a jejich výnos bychom dokázali spočítat, tak ani porovnání výhodnosti těchto investic není jednoduché. Vezměme si například dvě hypotetické investice, kde bychom investovali 1000 Kč.
1. Investice nám přinese buď 950 Kč, nebo 1050 Kč. Obojí se stejnou pravděpodobností 50 %.
2. Investice může přinést buď 980 Kč, nebo 1020 Kč. Obojí se stejnou pravděpodobností 50 %. Určitě bychom našli jedince, kteří by preferovali první investici. Rovněž by někdo preferoval druhou investici. Která investice je finančně výhodnější? Obecně to nelze posoudit, závisí to na velikosti majetku (jmění) daného jedince nebo také na vztahu jedince k riziku. Finanční matematika má nástroje, jak u většiny investic spočítat výnos. Avšak finanční matematika nenabízí přístup, jak výše uvedené investice porovnávat mezi sebou, to už bychom se dostali do oblasti ekonomie.

Pro nás je však důležité umět spočítat zisk dané investice a být si vědom možných rizik. Není naším účelem dát jednoduchý návod, jak investovat peníze. **Důležité je rozumět jednotlivým typům investic a následně se rozhodnout, co preferujeme v konkrétní situaci.** Rovněž budeme klást důraz na orientaci v dnešním finančním světě, uvedeme zde nejčastější finanční produkty.

V této kapitole si vysvětlíme, jaké možnosti nabízí svět financí. V dalších kapitolách budeme klást **důraz na základní přístupy k řešení úloh ve finančním světě**. Není možné vyjmenovat všechny možnosti finančního světa, navíc za několik let se zcela jistě objeví jiné finanční produkty, avšak matematický princip zůstane stejný.

Finanční pojmy

V této části si uvedeme nezbytné pojmy k porozumění dalšího textu. Pojmy jako kapitál, likvidita a inflace jsou obecně používané. Zavádíme je zde proto, že jejich ekonomický význam může být mylně interpretován.

Kapitál může nabývat různých podob a významů. Jsou jím výrobní prostředky, peníze a jejich formy (cenné papíry, např. akcie), licence, jež přinášejí svému vlastníkovi zisk (ve formě úroků, podílu na zisku, dividend apod.).

Kapitál chápeme jako peněžní prostředky, které nejsou použité na okamžitou spotřebu, ale slouží ke generování zisku v budoucnu.

Likvidita je možnost či schopnost rychle přeměnit aktiva (peníze v bance, nemovitost, cenné papíry atd.) na hotové peníze.
Například pokud máme peníze uložené v bance na běžném účtu, můžeme je vybrat, tedy přeměnit na hotové peníze téměř okamžitě. Naopak vlastníme-li nemovitost a chtěli bychom ji prodat, tedy přeměnit na hotové peníze, jistě bude nějaký čas trvat, než se najde zájemce a než se celý prodej vyřídí. Likvidita nemovitosti je tedy vyšší v porovnání s likviditou peněz uložených v bance na běžném účtu.

Pojem likvidita budeme používat u charakteristiky investic, proto je důležité těmto pojmům rozumět. Podle likvidity dělí centrální banky peníze do několika skupin.

Centrální banka dělí peníze podle likvidity do několika skupin, kterým říkáme **měnové agregáty** a používáme pro ně následující značení:

- M0: oběživo (mince a bankovky),
- M1: M0 + vklady na běžných účtech v bankách, tento měnový agregát označujeme jako úzké peníze,
- M2: M1 + termínované vklady + ostatní vklady, tento měnový agregát označujeme jako střední peníze,
- M3: M2 + krátkodobé cenné papíry (v horizontu 1 roku přeměnitelné na peníze), tento měnový agregát označujeme jako široké peníze.

Pomocí měnových agregátů se určuje množství peněz v oběhu.

Do hry při řešení finančních problémů vstupuje v reálném světě také inflace.

Inflace je znehodnocení měny způsobené růstem cen. Obecně inflace znamená všeobecný růst cenové hladiny v čase, zajímá nás tzv. míra inflace.

Míra inflace se počítá jako relativní nárůst cen za příslušný rok. Nárůst cen se stanovuje podle indexu spotřebitelských cen, který je měřen souhrnně přes všechna zboží ve spotřebitelském koši. V České republice index spotřebitelských cen počítá ČSÚ (2019), který také stanovuje, které zboží bude ve spotřebitelském koši. Tento koš obsahuje cca 700 výrobků a služeb.

Index spotřebitelských cen (CPI - consumer price index) pro období t označme jako CPI_t.
Dále značíme:
$n \dots$ velikost spotřebního koše (počet zboží/služeb)
$p_i \dots$ cena i-tého zboží/služby ze spotřebitelského koše v čase t
$w_i \dots$ váha (resp. význam) i-tého zboží/služby ze spotřebitelského koše
$q_i \dots$ cena i-tého zboží/služby ze spotřebitelského koše v základním období (čas

vůči, kterému měříme CPI)
Poté můžeme obecně definovat index spotřebitelských cen v čase t jako:

$$CPI_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot w_i}.$$

Váha, kterou mají jednotlivé zboží ve spotřebitelském koši, odpovídá podílu spotřeby daného zboží na celkové spotřebě domácností.

Od ledna 2018 jsou indexy spotřebitelských cen počítány na aktualizovaných vahách, které vycházejí z výdajů domácností v roce 2016; rovněž spotřebitelský koš vychází z výdajů domácností v roce 2016. Do spotřebního koše je zařazeno potravinářské zboží (potraviny, nápoje, tabák), nepotravinářské zboží (odívání, nábytek, potřeby pro domácnost, drogistické a drobné zboží, zboží pro dopravu a volný čas, zboží pro osobní péči) a služby (opravárenské, z oblasti bydlení, provozu domácnosti, zdravotnictví, sociální péče, dopravy, volného času, vzdělávání, stravování a ubytování, osobní péče a služby finanční).

Pokud bychom chtěli vypočítat míru inflace i_{inf} v roce t , dostaneme: $i_{inf} = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}} \cdot 100\,\%$.

V praxi se inflace nepočítá pomocí ročního CPI, ale pomocí průměrného ročního CPI v daném roce. Tedy CPI_t bude reprezentovat průměrné meziroční CPI v jednotlivých měsících v roce t.
Občas se míra inflace počítá kvartálně, resp. půlročně.

Uvádí se, že zdravá míra inflace je do 3 %. Opak inflace je **deflace** (snižování cen). Graf na obrázku 1.1 ukazuje vývoj míry inflace v procentech v uvedených letech v České republice dle Českého statistického úřadu.

Obrázek 1.1: Vývoj míry inflace v % v ČR (zdroj: ČSÚ (2019), tradingeconomics.com (2019))

Tabulka 1.1 ukazuje míru inflace v procentech v jednotlivých letech v České republice.

Inflace nastává v případě, kdy je větší nabídka peněz než poptávka po penězích. To může být způsobeno hned několika příčinami:

2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1,8	0,1	2,8	1,9	2,5	2,8	6,3	1,0	1,5	1,9	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5

Tabulka 1.1: Míra inflace v % v ČR. (zdroj: ČSÚ (2019))

- Růstem objemu vydávaných peněz v oběhu, přičemž ty nejsou v dostatečné míře kryté.
- Růstem objemu bezhotovostních peněz v důsledku vyšších úrokových sazeb.
- Růstem poptávky spotřebitelů, což může být způsobení například růstem mezd nebo neochotou spořit (víra v dobrou budoucnost).
- Oslabením domácí měny, což vede ke zdražení dovozu.
- Růstem nákladů na tvorbu zboží a služeb, což může být způsobeno například růstem cen surovin, pohonných hmot či elektrické energie. Tomuto druhu inflace se někdy říká inflace hnaná náklady.

Velká míra inflace přesahující 100 % se nazývá **hyperinflace**. Peníze jsou znehodnocené, přestávají plnit svoji funkci. Příklad hyperinflace nastal v roce 2016 ve Venezuele, dle odhadu mezinárodního měnového fondu míra inflace byla odhadována ve výši 1 660 %.

Poznámka. Pokud ekonomové očekávají míru inflace 2 %, neznamená to, že například cena rohlíku se zvýší o 2 %.

Míra inflace je měřena souhrnně (podle indexu spotřebitelských cen) přes všechno zboží ve spotřebitelském koši. Tudíž nelze podle míry inflace určit vzrůst ceny konkrétního zboží, produktu. Dokonce se může stát, že při inflaci 2 % cena některého zboží klesne. Naopak existují produkty, jejichž cena roste mnohonásobně rychleji než míra inflace. Tento ekonomický jev vykazuje například cena bytů v Praze. V srpnu roku 2018 byl meziroční nárůst cen bytů v Praze téměř 10 % (zdroj: realitymix.cz (2019)), v některých částech Prahy dokonce 20 %.

Některé společnosti nebo osoby se snaží zajistit proti vlivu inflace. Dalo by se říci, že inflace je meřítko investic pro některé investory (osoby).

1.2 Dlužník a věřitel

Každý člověk se asi někdy dostal do situace, kdy si potřeboval půjčit peníze, nebo někomu jinému peníze půjčil. To nás vede k zavedení pojmu dlužník, resp. věřitel.

Příklad

Pan X půjčí panu Y částku Kč a za měsíc bude chtít částku vrátit. Kdo je věřitel a kdo je dlužník?

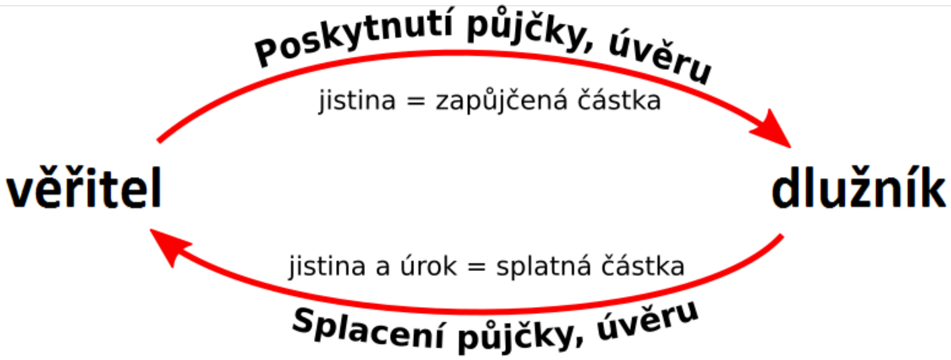
Řešení

Pan X je **věřitel**. Pan Y je **dlužník**.

Definice 1. ***Věřitel*** *je osoba nebo společnost, která poskytne finanční půjčku a jako odměnu získá částku navíc (úrok).*

Definice 2. ***Dlužník*** *je povinen věřiteli splatit poskytnutou finanční částku včetně dohodnuté odměny za půjčení peněz (úroků).*

Následující obrázek 1.2 ukazuje vztahy mezi dlužníkem a věřitelem.



Obrázek 1.2: Vztah mezi dlužníkem a věřitelem

Tabulka 1.2 ukazuje vztahy mezi klientem a bankou. V prostředním řádku máme situaci, kdy si klient půjčí kapitál od banky. V posledním řádku máme situaci, kdy klient vloží do banky kapitál.

Dlužník	Věřitel	Jistina
klient	banka	půjčka od banky
banka	klient	vklad do banky

Tabulka 1.2: Vztahy mezi klientem a bankou.

1.3 Úrok

Definice 3. ***Úrok*** *je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za zapůjčení peněz.*
Úrok budeme značit u.

Příklad

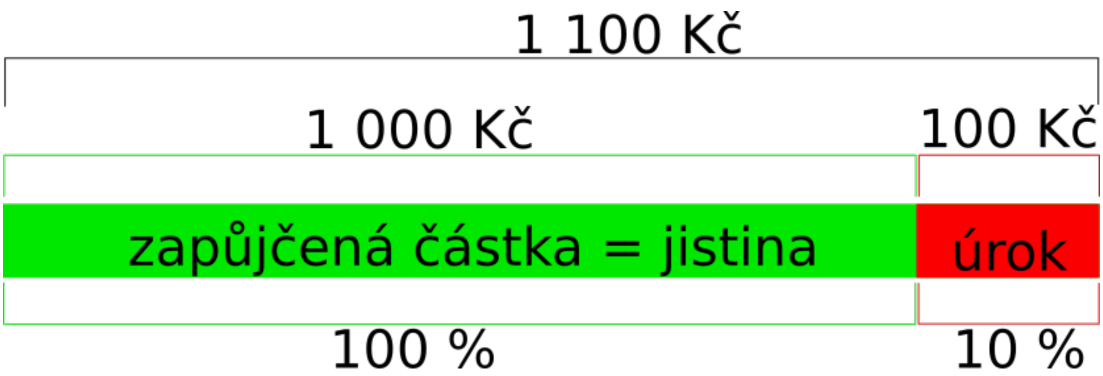
Honza si půjčí od kamaráda Martina částku 1 000 Kč a za měsíc bude chtít Martin vrátit 1 100 Kč. Jak velký bude úrok, který Honza zaplatí Martinovi? Kolik procent ze zapůjčené částky vrátí Honza Martinovi navíc?

Řešení

Úrok jsme definovali jako částku, kterou získá Martin (věřitel) od Honzy (dlužníka) jako odměnu za zapůjčení částky 1 000 Kč. Z toho plyne, že úrok za zapůjčení částky 1 000 Kč je **100 Kč**. Navíc Honza zaplatí

$$\frac{100\text{ Kč}}{1\,000\text{ Kč}} \cdot 100\,\% = 10\,\%.$$

Graficky je situace znázorněna na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Jistina a úrok

Poznámka. Úrok pro věřitele je zisk, který se u nás daní.

Předchozí příklad nás motivuje k tomu, abychom si zavedli pojem úroková sazba, která ve výše uvedeném příkladu činila 10 %.

Úrokové sazby rozlišujeme dle časového období, ke kterému se vztahují.

Definice 4. ***Roční úroková sazba (míra)*** *je podíl úroku získaného za rok ze zapůjčené částky. Vyjadřuje se v procentech, nebo ve tvaru desetinného čísla.*
Roční úrokovou sazbu značíme i.
Roční úroková sazba (míra) se označuje také jako úroková míra p. a.

p. a. vyjadřuje latinské per annum, což znamená za jeden rok.
Pro úrokové sazby dle období se používají následující zkratky:

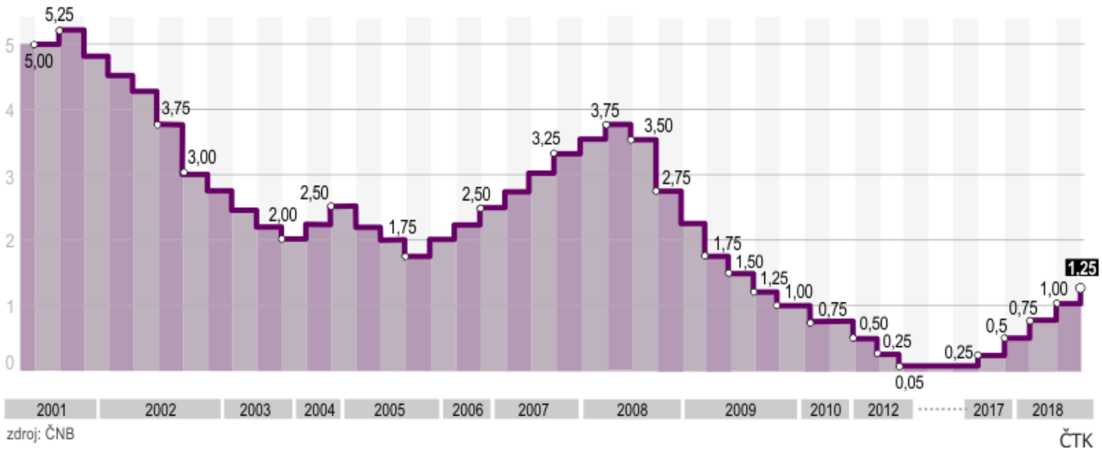
- p.a. (per annum) - roční úroková sazba,

- p.s. (per semestre) - pololetní úroková sazba,
- p.q. (per quartale) - čtvrtletní úroková sazba,
- p.m. (per mensem) - měsíční úroková sazba,
- p.d. (per diem) - denní úroková sazba.

Poznámka. Roční úroková sazba je používána nejčastěji, proto se často uvádí roční úroková sazba bez zkratky p.a., např. 2 %.

Úroková sazba, kterou banky uvádí u úvěrů a půjček, se odvozuje z několika faktorů. Hlavním faktorem je však **úroková repo sazba ČNB** (Česká národní banka). Od úrokové repo sazby ČNB se odvíjí úročení úvěrů poskytované bankami. Úrokové sazby ČNB stanovuje její bankovní rada. Bankovní rada odvozuje úrokové sazby podle vývoje a prognóz ekonomiky. Občas se v médiích objevuje slovní spojení “hypotéky zdraží”, čímž se zřejmě míní to, že ČNB zvedla úrokovou repo sazbu a v důsledku toho banky zvýší úrokové sazby dalších finančních produktů.

Obrázek 1.4 ukazuje vývoj úrokové repo sazby ČNB v procentech.



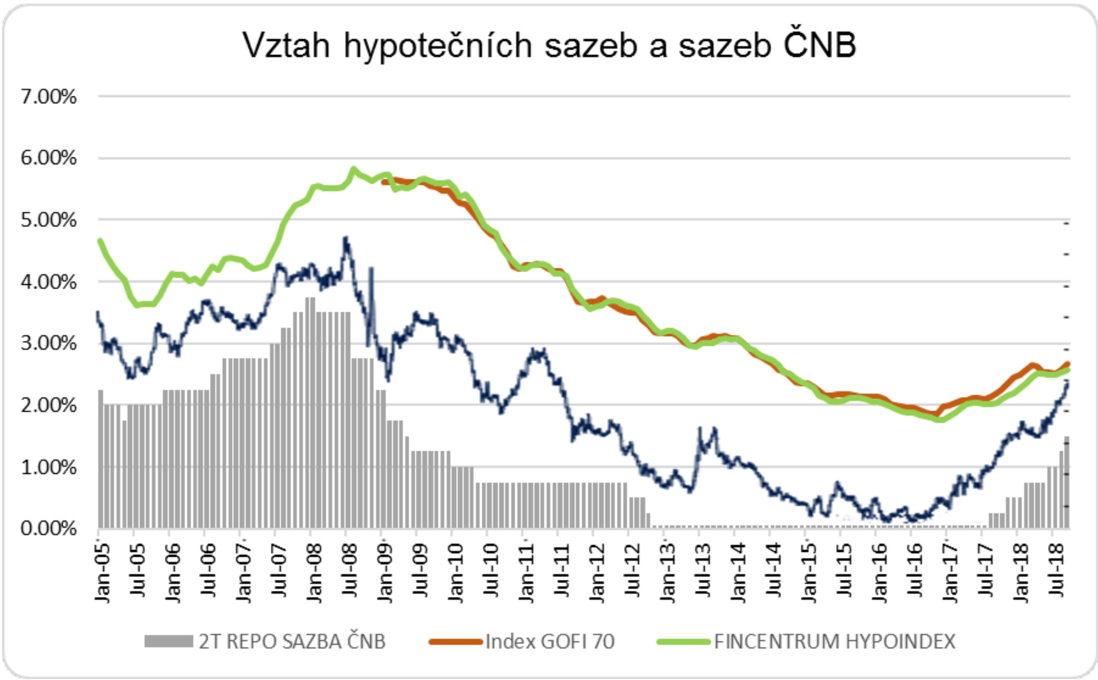
Obrázek 1.4: Vývoj repo sazby ČNB (zdroj: ČNB (2019), ČTK (2019))

Grafy na obrázku 1.5 a obrázku 1.6 ukazují, jak vývoj úrokových sazeb hypoték kopíruje vývoj úrokové repo sazby ČNB. Úrokové sazby hypoték měříme **Hypoindexem**, který se snaží měřit průměrnou úrokovou sazbu u hypoték v České republice.

Zelená křivka u obrázku 1.5 ukazuje vývoj průměrné úrokové sazby u hypoték měřené Hypoindexem. Šedivý sloupcový graf ukazuje vývoj úrokové repo sazby ČNB v procentech. Všimněme si, že rozdíl mezi úrokovou sazbou hypoték a úrokovou repo sazbou ČNB je v průběhu let téměř konstantní.

Další obrázek 1.6 opět ukazuje, jak úrokové sazby hypoték kopírují vývoj úrokové repo sazby ČNB. Tento graf je vztažen ke kratšímu časovému intervalu.

Je zřejmé, že úrokové sazby u hypoték se liší u jednotlivých věřitelů i dlužníků. Existují i jiné typy úvěrů než hypotéky, konkrétně se půjčkám a úvěrům budeme věnovat v samostatné kapitole.



Obrázek 1.5: Vývoj úrokových sazeb a hypoték (zdroj: golemfinance.cz (2019))

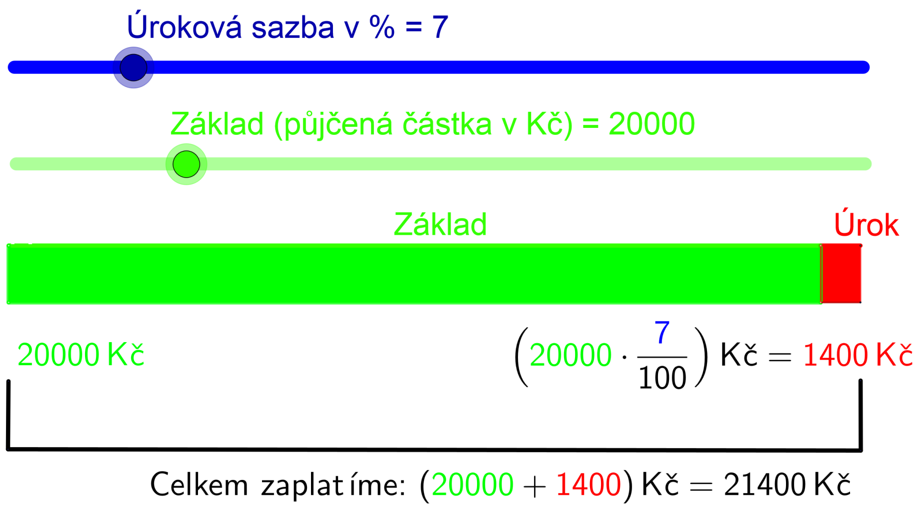
Obrázek 1.6: Vývoj úrokových sazeb a hypoték (zdroj: ČNB (2019), hypoindex.cz (2019), ČT (2019))

Příklad

Požádáme banku o půjčku ve výši 20 000 Kč. Banka nám půjčí 20 000 Kč na jeden rok s roční úrokovou sazbou 7 %. Jak velký bude úrok, který zaplatíme na konci roku bance? Kolik korun zaplatíme celkem?

Řešení

V následující aplikaci na obrázku 1.7 lze měnit půjčenou částku a roční úrokovou sazbu.



Obrázek 1.7: Applet: Výpočet úroku

Bance zaplatíme úrok 1 400 Kč.
Celkem bance zaplatíme 21 400 Kč.

Úrok u ze zapůjčené částky K při úrokové sazbě i spočítáme takto:

$$u = K \cdot i.$$

Již víme, že výše úroku u souvisí s úrokovou sazbou i a kapitálem K. Velmi důležité také je časové období, po které např. dlužník má půjčené peníze.

Definice 5. ***Úroková doba*** *je časový úsek, ve kterém je kapitál úročen.*

Pro výpočet úrokové doby se používají určité **standardy**. Odlišují se tím, kolik dní se započítávají (finanční) měsíce a kolik dní se započítávají (finanční) roky. Uvádíme zde následující standardy.

- **30E/360** (německý standard, obchodní či německá metoda)
  Každý měsíc má 30 dní, každý rok má 360 dní.
- **30A/360** (americký standard)
  Standard je podobný standardu 30E/360. Liší se od standardu 30E/360 maximálně o jeden den. Pokud poslední den vkladu připadá na 31. den v měsíci a zároveň první den vkladu není 30. či 31. den v měsíci, pak se počítá i poslední den vkladu, tj. 31. den.
- **ACT/360** (mezinárodní standard, francouzská metoda)
  Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby. Rok má 360 dní.
- **ACT/365** (anglická metoda)
  Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby, tj. skutečný počet dní v měsíci. Rok má 365 dní.

Příklad

Rozhodneme se vložit do banky 100 000 Kč. Banka uvádí úrokovou sazbu 2 % p. a.

Vklad vložíme do banky 1. 1. 2019 a vybereme ho 31. 7. 2019. Banka úročí vklad jednou ročně, a to v den splatnosti. Den vkladu se nezapočítává a den výběru se započítává.

Vypočítejte výši úroku před zdaněním a výsledek zaokrouhlete na koruny, pokud požijeme standard:

a) 30E/360,
b) 30A/360,
c) ACT/360,
d) ACT/365.

Určete, podle kterého standardu bude úrok největší.

Řešení

a) Ve standardu 30E/360 má každý měsíc 30 dní, rok má 360 dní. Den vkladu se nezapočítává, začneme počítat od 2. 1. 2019. Celkový počet dní úrokové doby je $29 + 6 \cdot 30 = 209$.
Úroková doba je 209 dní, což znamená $\frac{209}{360}$ finančního roku.
Úrok bez daně je $\frac{2}{100} \cdot \frac{209}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 0{,}02 \cdot \frac{209}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 1\,161{,}\overline{1}\,\text{Kč} \approx 1\,161\,\text{Kč}$.
b) Den výběru je 31. den v kalendářním měsíci, proto je počet dní úrokové doby u standardu 30A/360 o jeden den větší než u standartu 30E/360.
Úroková doba je 210 dní, což znamená $\frac{210}{360}$ finančního roku.
Úrok bez daně je $\frac{2}{100} \cdot \frac{210}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 0{,}02 \cdot \frac{210}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 1\,166{,}\overline{6}\,\text{Kč} \approx 1\,167\,\text{Kč}$.
c) Ve standardu ACT/360 se započítává skutečný počet dnů úrokové doby a rok má 360 dní. Jelikož se den vkladu nezapočítává, začneme počítat od 2. 1. 2019. Celkový počet dní úrokové doby je
$30 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 211$.
Úroková doba je 211 dní, což znamená finančního roku $\frac{211}{360}$.
Úrok bez daně je $\frac{2}{100} \cdot \frac{211}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 0{,}02 \cdot \frac{211}{360} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 1\,172{,}\overline{2}\,\text{Kč} \approx 1\,172\,\text{Kč}$.
d) Ve standardu ACT/365 se započítává se skutečný počet dnů úrokové doby a rok má 365 dní. Celkový počet dní úrokové doby je stejný jako u standardu ACT/360.
Úroková doba je 211 dní, což znamená $\frac{211}{365}$ finančního roku.
Úrok bez daně je
$\frac{2}{100} \cdot \frac{211}{365} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 0{,}02 \cdot \frac{211}{365} \cdot 100\,000\,\text{Kč} = 1\,156{,}164\ldots\,\text{Kč} \approx 1\,156\,\text{Kč}$.

Výsledné porovnání úroků pro jednotlivé standardy je uvedeno v následující tabulce 1.3.

Standard	Část finančního roku	Úrok (bez daně)	Rozdíl úroku oproti ACT/360
30E/360	$\frac{209}{360}$	1 161 Kč	−11 Kč
30A/360	$\frac{210}{360}$	1 167 Kč	−5 Kč
ACT/360	$\frac{211}{360}$	1 172 Kč	0 Kč
ACT/365	$\frac{211}{365}$	1 156 Kč	−16 Kč

Tabulka 1.3: Porovnání standardů

Vidíme, že použitím různých standardů dostáváme rozdílné částky, ty se však moc neliší. Největší rozdíl je mezi standardy ACT/360 a ACT/365, rozdíl v absolutní hodnotě činí 16 Kč. Což je přibližně 1,36 % úroku, který dosáhneme pomocí standardu ACT/360.

Podle zákona o daních z příjmů jsou úroky zdaněny.

Definice 6. ***Daň z úroku*** *je procentuální část úroku, jejíž výši určuje pro jednotlivé vkladové produkty stát. Daň z úroku se odvádí státu.*
Daň z úroku značíme i_{tax}.

Poznámka. Obvyklá daň činí 15 %.

Nás bude zejména zajímat daň u vkladových produktů. Daň se odvádí ze zisku, tedy pokud si peníze půjčíme, nemusíme daň brát do úvahy při výpočtech, neboť v tomto případě bude daň platit věřitel. Ukažme si na příkladu vkladu, jak bude vypadat úrok před zdaněním a po zdanění. Pro názornost budeme volit vyšší úrokovou sazbu, než současně banky poskytují, rovněž daň z úroku je vyšší než daň z úroku daná zákonem. To vůbec nevadí, neboť v následující interaktivní aplikace na obrázku 1.8 lze oba parametry měnit.

Příklad

Vložíme do banky na jeden rok částku 20 000 Kč. Banka uvádí roční úrokovou sazbou 10 % s jednorázovým úročením na konci roku. Daň z úroku je 15 %. Z úroku nám banka vyplatí jen 85 %, zbylých 15 % odvede státu jako daň z úroku. Jak velký bude úrok před zdaněním? Jak velký bude úrok po zdanění (čistý úrok)? Jakou částku budeme mít v bance na konci roku po zdanění?

Řešení

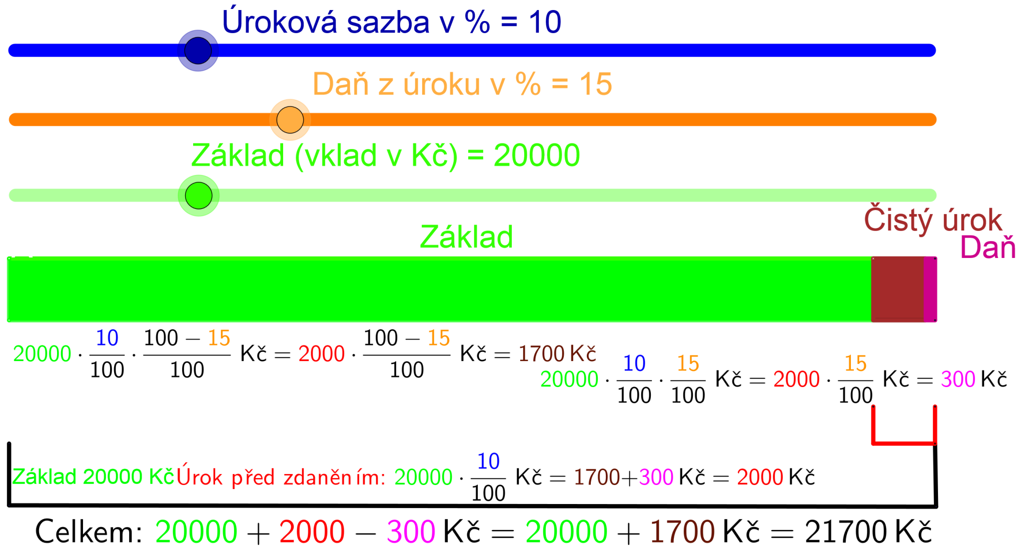
V následující aplikaci na obrázku 1.8 lze měnit vklad, roční úrokovou sazbou a daň z úroku.

Úrok před zdaněním bude 2 000 Kč.
Čistý úrok (tj. úrok po zdanění) bude 1 700 Kč.
V bance na konci roku budeme mít po zdanění 21 700 Kč.

Úrok po zdanění u' spočítáme pomocí zapůjčené částky K, roční úrokové sazby i a daně z úroku i_{tax}.

$$u' = K \cdot i \cdot (1 - i_{tax}) = u \cdot (1 - i_{tax})$$

Pokud je daň z úroku 15 %, pak platí $u' = K \cdot i \cdot 0{,}85 = u \cdot 0{,}85$.
Tedy úrok pro daň 15 % činí 85 % z nezdaněného úroku u.



Obrázek 1.8: Applet: Výpočet úroku po zdanění

Úlohy

1. Podnikatel získá od banky půjčku ve výši 500 000 Kč na jeden rok s roční úrokovou sazbou 5 %.

   a) Kolik korun činí úrok z úvěru ze zapůjčené částky?
   b) Kolik korun podnikatel zaplatí bance celkem?

   Řešení

   a) Úrok je 5 % z částky 500 000 Kč, tedy $\frac{5}{100} \cdot 500\,000$ Kč $= 0{,}05 \cdot 500\,000 =$ 25 000 Kč.

   b) Podnikatel celkem zaplatí bance částku
   500 000 Kč + 25 000 Kč = 525 000Kč.

2. Pan A půjčí panu B částku 30 000 Kč na jeden rok s roční úrokovou sazbou 4 %.

   a) Kolik korun činí úrok ze zapůjčené částky?
   b) Kolik korun pan A dostane celkem od pana B?

   Řešení

   a) Úrok je 4 % z částky 30 000 Kč, tedy $\frac{4}{100} \cdot 30\,000$ Kč $= 0{,}04 \cdot 30\,000 =$ 1 200 Kč.

   b) Pan A dostane celkem od pana B částku 30 000 Kč+1 200 Kč = 31 200Kč.

3. Uložíme do banky částku 200 000 Kč na jeden rok. Tento vklad se nám bude úročit jednou ročně na konci daného roku, roční úroková sazba je 6 % a daň z úroku je 15 %.

a) Kolik korun činí úrok před zdaněním?
b) Kolik korun je úrok po zdanění?
c) Kolik korun celkem obdržíme od banky po jednom roce?

Řešení

a) Úrok před zdaněním je 6 % z částky 200 000 Kč, tedy $\frac{6}{100} \cdot 200\,000\,\text{Kč} = 0{,}06 \cdot 200\,000 = 12\,000\,\text{Kč}$.

b) Úrok po zdanění je $(100-15)$ % z částky 12 000 Kč, tedy $\frac{85}{100} \cdot 12\,000\,\text{Kč} = 0{,}85 \cdot 12\,000 = 10\,200\,\text{Kč}$.

c) Celkem obdržíme od banky po jednom roce částku
$200\,000\,\text{Kč} + 10\,200\,\text{Kč} = 210\,200\text{Kč}$.

4. Pan C uloží do banky částku 1 500 000 Kč na jeden rok. Jeho vklad banka bude úročit jednou ročně na konci daného roku. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 3,45 % a daň z úroku je 15 %. Banka vyplácí úrok zaokrouhlený na koruny dolů.

   a) Kolik korun činí úrok po zdanění?
   b) Kolik korun celkem obdrží pan C od banky po jednom roce?

Řešení

a) Úrok po zdanění se spočítá následovně:
$\frac{3{,}45}{100} \cdot \frac{100-15}{100} \cdot 1\,500\,000\,\text{Kč} = 0{,}0345 \cdot 0{,}85 \cdot 1\,500\,000 = 43\,987{,}5\,\text{Kč} \approx 43\,987\,\text{Kč}$.

b) Celkem obdrží pan C od banky po jednom roce částku
$1\,500\,000\,\text{Kč} + 43\,987\,\text{Kč} = 1\,543\,987\text{Kč}$.

1.4 Investice

V této kapitole se budeme věnovat investicím. Tento pojem jsme zavedli v první kapitole Motivace. Investice můžeme dělit dle různých hledisek, například tak, jak si uvedeme dále.

Dělení investic

- reálné (do reálných - hmotných věcí):
  - movité - zlato, drahé kovy, umělecká díla
  - nemovité - budovy, pozemky, byty
- finanční:
  - vklady (banky, finanční instituce)
  - poskytnuté úvěry
  - nakoupené cenné papíry

Dále se zaměříme na finanční investice, a to na vklady a cenné papíry.

Vklady

Vkladových produktů, je dnes celá řada, některé banky úročí i peníze vložené na běžných účtech. Jednotlivé vkladové produkty se mohou lišit smluvními podmínkami. Z tohoto důvodu nebudeme všechny dostupné vkladové produkty zavádět. Zavedeme ten nejznámější, a to termínovaný vklad.

Definice 7. ***Termínovaný vklad*** *je typ finančního vkladu, jehož doba splatnosti může být několik dnů až několik let.*
Předčasný výběr před uplynutí doby splatnosti je spojen se sankcí. Daň z úroku pro termínované vklady je 15 %.

U termínovaného vkladu většinou určuje dobu splatnosti banka. Často je vklad zdola omezený (je požadovaná minimální částka vkladu), před uplynutím doby splatnosti nelze s penězi disponovat bez sankce. Peníze uložené na termínovaných vkladech jsou ze zákona pojištěny až do hodnoty 100 000 EUR.

Poznámka. Většina bankovních produktů včetně termínovaných vkladů je ze zákona pojištěna. Tudíž se jedná o investice s nízkým nebo nulovým rizikem.

Kromě nízké rizikovosti nabízejí termínované vklady vyšší úrok, než nabízejí běžné účty. Nevýhodou je jejich nízká likvidita, před uplynutím doby splatnosti nelze s penězi disponovat.

Cenné papíry

Cenný papír je listina (dokument), která je bezprostředním nositelem práva. Představuje dokument, s nímž je svázána určitá hodnota, majetek a majetkový prospěch. Společnost nebo jiný subjekt vydávající cenný papír se nazývá **emitent**.

Pojem cenný papír je definován občanským zákoníkem takto: „Cenný papír je listina, se kterou je právo spojeno takovým způsobem, že je po vydání cenného papíru nelze bez této listiny uplatnit ani převést“ (§ 514 zákona č. 89/2012 Sb). Pro nás nebude důležitá právní definice. Budeme v této práci rozlišovat druhy cenných papírů:

- akcie
- dluhopisy
- podílové listy

Akcie

Definice 8. ***Akcie*** *je cenný papír vydávaný akciovou společností, s nímž jsou spojena určitá práva, zejména se jedná o právo rozhodovací a právo majetkové. Majitel (držitel) se označuje jako* ***akcionář****.*

Pro akcionáře jsou důležité následující práva.

- Právo podílet se na **řízení** společnosti. Velcí akcionáři mají právo podílet se na řízení společnosti na valné hromadě. Síla rozhodovacích pravomocí odpovídá poměru vlastněných akcií k celkovému počtu vydaných (emitovaných) akcií.
- Právo podílet se na **zisku** společnosti prostřednictvím **dividend** vyplácených akcionářům. O výši dividendy rozhoduje valná hromada na návrh managementu společnosti.
- Právo podílet se na **likvidačním zůstatku** v případě úpadku společnosti.
- Právo na úpis dalších akcií při zvýšení základního kapitálu; v některých případech stanovených zákonem má akcionář právo na odkup akcií akciovou společností (nabídka převzetí).

Důležitá je **nominální hodnota akcie (jmenovitá hodnota)**, což představuje peněžní hodnotu přiřazenou určité složce majetku akciové společnosti. Součet nominálních hodnot všech akcií je roven výši základního jmění společnosti.

Tržní cena akcie je cena, s jakou je obchodována na kapitálovém trhu.

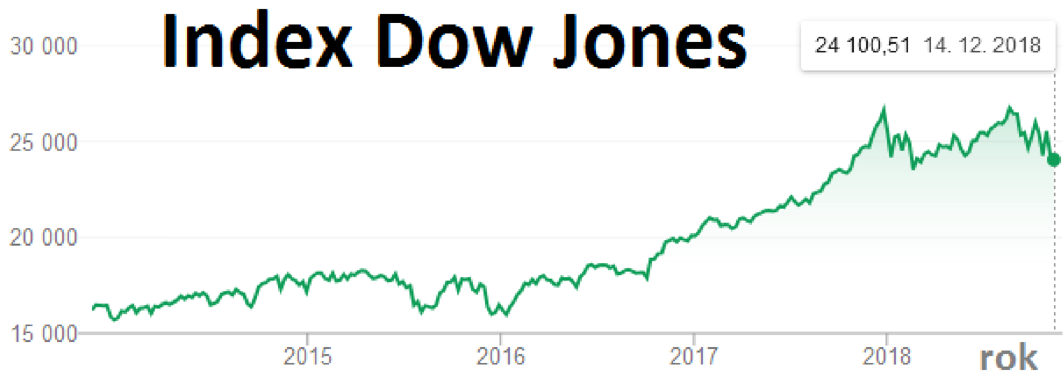
S některými akciemi se obchoduje na **burzách cenných papírů**, kde se tak v rámci nabídky a poptávky určuje cena. Dnes je vše plně automatizované pomocí počítačů, kde se zadávají nabídky a poptávky, burza pak páruje nabídky a poptávky. V České republice je nejvýznamnější burzou *Burza cenných papírů Praha*. Další českou burzou je *RM-SYSTÉM*. Největší burzou cenných papírů je označována burza *NYSE (New York Stock Exchange)* na známé adrese Wall Street v New Yorku.

Nejčastější motivací investorů je nákup akcií z důvodu spekulace o růstu ceny akcie nebo z důvodu pravidelného vyplácení dividendy. Akcie mají v průměru vyšší výnos než dluhopisy a bankovní vklady, ale mají vyšší riziko.

Pro ukazatel vývoje cen akcií na určitém trhu se používají **akciové indexy**. Burzovní (akciový) index odráží současný stav vývoje trhu. V současné době je tzv. *Index PX* oficiálním indexem *Burzy cenných papírů Praha*. Nejznámějším a nejsledovanějším indexem světa je *Dow Jones Industrial Average* (obrázek 1.9), který zahrnuje 30 akcií nejvýznamnějších společností USA, tyto akcie jsou zapsány na burze v New Yorku.

Daň

Dividendy jsou vypláceny až po zdanění.



Obrázek 1.9: Dow Jones Industrial Average (zdroj: google.com/finance (2019))

Podle zákona o dani z příjmů jsou od daně z příjmů osvobozeny příjmy z prodeje cenných papírů, pokud doba mezi jejich nákupem a prodejem přesáhne 6 měsíců. Pokud doba mezi jejich nákupem a prodejem nepřesáhne 6 měsíců, je třeba podat daňové přiznání.

Obchodování s akciemi

Dříve občané nakupovali akcie pomocí makléře, který dostával provizi jako odměnu za nákup, resp. prodej akcií. Nyní jsou burzovní systémy plně automatizované a občané můžou pomocí investičních aplikací zadávat nákupní či prodejní pokyny. Dnes existují i aplikace, s nimiž můžeme investovat pomocí mobilu nebo tabletu. Za nákup nebo prodej akcií přes investiční aplikace zaplatíme poplatek za uzavření obchodu.

Příklad

Nakoupíme na *Burze cenných papírů Praha* 100 kusů akcií společnosti *ČEZ*. Cena jedné akcie je 700 Kč.

Celkový poplatek za uzavření obchodu se skládá z poplatku obchodníka a poplatku trhu. Poplatek obchodníka je 0,35 % z objemu obchodu (min. 40 Kč; max. 1 190 Kč). Poplatek trhu je 0,01 % z objemu obchodu (min. 10 Kč; max. 4 000 Kč).

Kolik zaplatíme za poplatky při uzavření obchodu?

Řešení

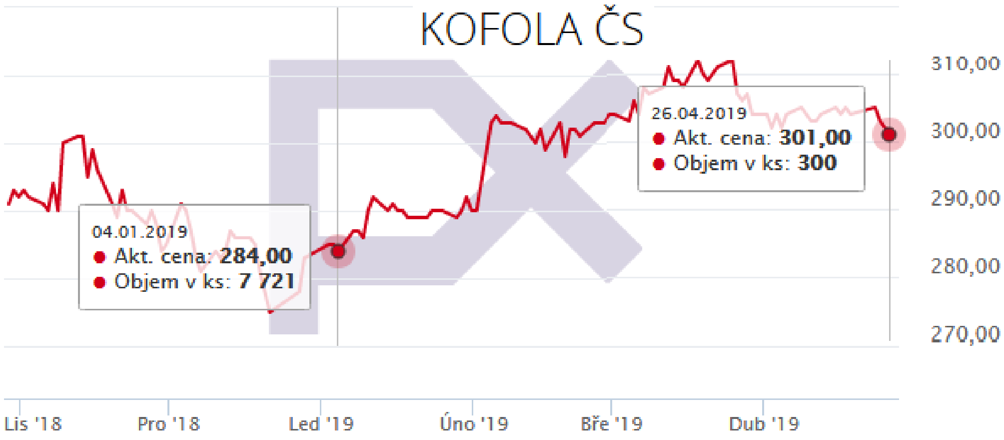
Množství: 100kusů akcií
Cena za akcii: 700 Kč
Objem obchodu: 70 000 Kč
Poplatek obchodníka: $70\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}0035 = 245\,\text{Kč}$
Poplatek trhu: $70\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}0001 = 7\,\text{Kč}$ (min. 10 Kč) -> 10 Kč
Celkový poplatek: $245\,\text{Kč} + 10\,\text{Kč} = 255\,\text{Kč}$

Zaplatíme za poplatky 255 Kč.

Úlohy

1. Dne 4. ledna 2019 se pan A rozhodne koupit 85 kusů akcií společnosti *Kofola*. Akcie nakoupí na *Burze cenných papírů Praha*. Celkový poplatek za uzavření obchodu se skládá z poplatku obchodníka a poplatku trhu. Poplatek obchodníka je 0,35 % z objemu obchodu (min. 40 Kč; max. 1 190 Kč). Poplatek trhu je 0,04 % z objemu obchodu (min. 10 Kč; max. 4 000 Kč). Poplatky se zaokrouhlují na haléře nahoru. Každý poplatek se odvádí samostatně. Tržní ceny akcií společnosti *Kofola* jsou uvedeny v následujícím grafu na obrázku 1.10.

   Jaký zisk/ztrátu realizuje pan A prodejem všech svých akcií společnosti *Kofola* 26. 4. 2019? Daň z příjmů neuvažujte.



Obrázek 1.10: Vývoj ceny akcií společnosti Kofola (zdroj: pse.cz (2019))

Řešení

Z grafu na obrázku 1.10 vyčteme, že dne 4. ledna byla cena akcií společnosti *Kofola* 284 Kč. Pan A nakoupil 85 kusů akcií, tedy celková nákupní cena činila $85 \cdot 284$ Kč $= 24\,140$ Kč.

Poplatek obchodníka při nákupu akcií je 0,35 % z 24 140 Kč, tedy $0{,}0035 \cdot 24\,140$ Kč $= 84{,}49$ Kč.

Poplatek trhu při nákupu akcií je 0,04 % z 24 140 Kč, tedy $0{,}0004 \cdot 24\,140$ Kč $= 9{,}656$ Kč (min. 10 Kč).
Tedy poplatek trhu činí 10 Kč.

Celkový poplatek při nákupu 85 kusů akcií společnosti *Kofola* je $84{,}49$ Kč $+ 10$ Kč $= 94{,}49$ Kč.

Pan A prodal akcie za 301 Kč za kus, celkem prodej akcií činil $685 \cdot 301$ Kč $= 25\,585$ Kč.

Celkový poplatek při prodeji 85 kusů akcií společnosti *Kofola* je $0{,}0035 \cdot 25\,585$ Kč $+ 0{,}0004 \cdot 25\,585$ Kč $= 89{,}5475$ Kč $+ 10{,}234$ Kč $\approx$ $89{,}55$ Kč $+ 10{,}24$ Kč $= 99{,}79$ Kč.

Celkem za poplatky pan A zaplatí 94,49 Kč + 99,79 Kč = 194,28 Kč.

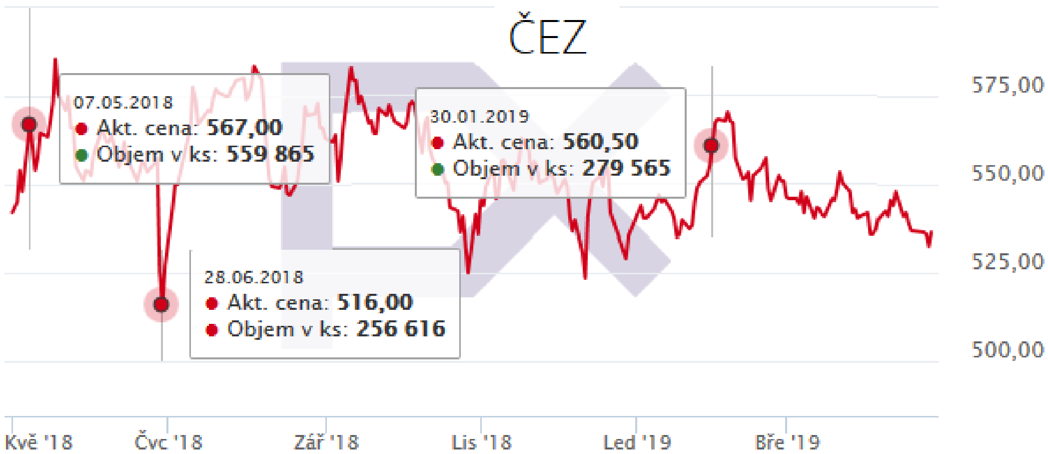
Celkový zisk/ztráta se spočte jako rozdíl prodejní a nákupní ceny a navíc nesmíme zapomenout na poplatky, tedy 25 585 Kč − 24 140 Kč − 194,28 Kč = 1 250,72 Kč.

Celkem pan A realizuje **zisk 1 250,72 Kč**.

2. Pan B se rozhodne koupit akcie společnosti *ČEZ*. Pan B 7. května 2018 koupí 150 kusů akcií společnosti *ČEZ* na *Burze cenných papírů Praha*. Pan B dostane vyplacené dividendy 1. srpna 2018, přičemž dividenda na akcii je 33 Kč. Pan B se rozhodne 30. ledna 2019 prodat všechny své akcie společnosti *ČEZ*.

   Celkový poplatek za uzavření obchodu se skládá z poplatku obchodníka a poplatku trhu. Poplatek obchodníka je 0,35 % z objemu obchodu (min. 40 Kč; max. 1 190 Kč). Poplatek trhu je 0,01 % z objemu obchodu (min. 10 Kč; max. 4 000 Kč). Poplatky se zaokrouhlují na haléře nahoru. Každý poplatek se odvádí samostatně.

   Tržní ceny akcií společnosti *ČEZ* jsou uvedeny v následujícím grafu na obrázku 1.11.



Obrázek 1.11: Vývoj ceny akcií společnosti ČEZ (zdroj: pse.cz (2019))

Jaký zisk/ztrátu realizuje pan B prodejem všech svých akcií společnosti ČEZ 30. 1. 2019?

Řešení

Z grafu na obrázku 1.11 vyčteme, že dne 7. května 2018 byla cena akcií společnosti *ČEZ* 567 Kč. Pan B nakoupil 150 kusů akcií, tedy celková nákupní cena činila 150 · 567 Kč = 85 050 Kč.

Poplatek obchodníka při nákupu akcií je 60,35 % z 685 050 Kč, tedy 0,0035 · 85 050 Kč = 297,675 Kč ≈ 297,68 Kč.

Poplatek trhu při nákupu akcií je 0,01 % z 85 050 Kč, tedy 0,0001 · 85 050 Kč = 8,505 Kč (min. 10 Kč).
Poplatek tedy činí 10 Kč.

Celkový poplatek při nákupu 150 kusů akcií společnosti *ČEZ* je $297{,}68$ Kč $+ 10$ Kč $= 307{,}68$ Kč.

Pan B prodal akcie za $560{,}50$ Kč za kus, celkem prodej akcií činil $150 \cdot 560{,}50$ Kč $= 84\,075$ Kč.

Poplatek obchodníka při prodeji akcií je $0{,}0035 \cdot 84\,075$ Kč $= 294{,}2625$ Kč $\approx$ $294{,}27$ Kč. Poplatek trhu při prodeji akcií je $0{,}0001 \cdot 84\,075$ Kč $= 8{,}4075$ Kč (min. 10 Kč). Celkový poplatek při prodeji 150 kusů akcií společnosti *ČEZ* je $294{,}27$ Kč $+ 10$ Kč $= 304{,}27$ Kč.

Celkem za poplatky pan B zaplatí $307{,}68$ Kč $+ 304{,}27$ Kč $= 611{,}95$ Kč.

Pan B dostane vyplacené dividendy.
Celková částka za výplatu dividend činí $150 \cdot 33$ Kč $= 4\,950$ Kč.

Celkový zisk/ztrátu vypočteme jako rozdíl prodejní a nákupní ceny, následně odečteme poplatky a přičteme výplatu dividend.
Zisk/ztráta je $(84\,075 - 85\,050 - 611{,}95 + 4\,950)$ Kč $= 3\,363{,}05$ Kč.

Celkem pan B realizuje **zisk 3 363,05 Kč**.

Podílové listy

Dalším typem cenných papírů je podílový list.

Definice 9. ***Podílový list*** *je cenný papír, který vydávají investiční společnosti.*

Vydáním podílových listů shromažďují investiční společnosti peněžní prostředky v **podílových fondech**. Majitelé podílových fondů mají právo na odpovídající podíl majetku v podílovém fondu a právo podílet se na ziscích získaných zhodnocením tohoto majetku.

Podílový fond lze chápat jako soubor majetku, který je spravován investičními společnostmi. Podílové fondy jsou regulované zákonem. Vlastník podílových listů (podílník) je předem seznámen s tím, jak bude s jeho prostředky naloženo. Podílové fondy ve svých zprávách uvádějí strukturu majetku. Většinou mají podílové fondy poplatky, a to vstupní, výstupní a také poplatek za správu.

Podílové fondy jsou vhodné pro typy investorů, kteří jsou ochotni svoje volné peníze investovat na delší dobu, ideálně v řádu několika let. Výhodou je, že do mnohých podílových fondů lze investovat i průběžně malé částky, což je atraktivní způsob ukládání především pro drobné investory.

Většina podílových fondů v České republice má jako dominantní aktivum dluhopisy. Některé podílové fondy investují i do akcií, ale v malé míře, neboť se jedná o rizikovou investici.

Podílové fondy s sebou nesou určité riziko poklesu hodnoty majetku podílového fondu, právě v důsledku tržních cen vlastněných akcií. Výnosy podílových fondů v jednotlivých letech jsou zveřejňovány a jsou v průměru větší než výnosy z bankovních vkladů.

Obrázek 1.12 ukazuje **výkonnost** (což označuje roční úrokovou míru) akciových fondů. Místo slova výkonost je někdy používána řada synonym jako např. míra výnosu, výnosnost.

Výnosy (úroky) z podílových listů, které jsou v držení majitele déle než 6 měsíců, jsou osvobozeny od daně.

Název fondu	Objem spravovaných aktiv	Výkonnost			
	(mld. Kč)	2015	2016	2017	2018
TOP STOCKS - o.p.f.	19,188	-0,64	1,58	1,67	-0,72
Active Invest Dynamic	12,409	0,8	-0,15	3,54	2,12
STOCK SMALL CAPS CZK C	9,049	0,25	1,02	2,87	-069
Generali Fond globálních značek	5,146	1,63	1,21	2,13	-0,79
AXA Selection Global Equity speciální fond fondu	5,132			2,09	-0,80
KBC Equity Fund CSOB Akciový Fd Div Firem Cap	4,727	0,52	3,29	2,94	-2,24
AXA CEE Akciový fond opf	4,503	0,1	0,9	3,73	-2,23
NN (L) International Czech Equity P (CR) Cap CZK	3,646	-0,81	2,34	4,54	-0,81
CSOB Akciový	3,608	0,44	4,25	0,73	-2,19
SPOROTREND	3,318	1,93	1,04	-0,69	0,43

peak.cz

Obrázek 1.12: Podílové fondy (zdroj:peak.cz (2019))

Příklad

Na začátku roku 2018 jsme koupili 10 000 kusů podílových listů. Jejich kurz byl 2,5332, tj. hodnota jednoho podílového listu byla 2,5332 Kč. Vstupní poplatek je 3 % z investované částky. Správcovský poplatek činí 2 % z částky, kterou budeme mít na konci roku. Poplatky se zaokrouhlují na haléře dle matematických pravidel.

Na konci roku 2018 jsme prodali všechny podílové listy, přičemž kurz byl 2,7742. Jaký zisk získáme touto investicí? Zaokrouhlete na haléře.

Řešení

Nakoupíme 10 000 kusů podílových listů celkem za
$2{,}5332\,\text{Kč} \cdot 10\,000 = 25\,332\,\text{Kč}$.
Vstupní poplatek je 3 % z částky 25 330 Kč, tedy $25\,330\,\text{Kč} \cdot 0{,}03 = 759{,}96\,\text{Kč}$.
Podílové listy prodáme celkem za $2{,}7742\,\text{Kč} \cdot 10\,000 = 27\,742\,\text{Kč}$.
Manažerský poplatek, tj. správcovský poplatek činí 2 % z částky 27 742 Kč, tedy $27\,742\,\text{Kč} \cdot 0{,}02 = 554{,}84\,\text{Kč}$.
Jelikož podílové listy prodáme až 1 roce, nemusíme platit daň.
Zisk této investice je
$27\,742\,\text{Kč} - 25\,332\,\text{Kč} - 759{,}96\,\text{Kč} - 554{,}84\,\text{Kč} = 1\,095{,}20\,\text{Kč}$.

Úlohy

1. Nakoupíme 20 000 kusů podílových listů podílového fondu *Bohatství*. Nákup podílových listů proběhl 15. 7. 2009, všechny podílové listy jsme prodali 11. 6. 2018. Kurzy podílových listů jsou zobrazeny na obrázku 1.13. Vstupní poplatek je 1,5 % z investované částky. Vstupní poplatek se zaokrouhluje na koruny. Další poplatky neuvažujte.

   Určete, jaký zisk nám přinesla tato investice?

Obrázek 1.13: Fond Bohatství (zdroj: ČSOB (2019))

Řešení

Z obrázku 1.13 zjistíme, že hodnota jednoho podílového listu 15. 7. 2009 byla 1,436 Kč. Rovněž zjistíme, že prodejní cena jednoho podílového listu byla 2,1858 Kč.

Nákupní cena podílových listů činila 1,436 Kč · 20 000 = 28 720 Kč.

Prodejní cena podílových listů byla 2,1858 Kč · 20 000 = 43 716 Kč.

Při nákupu podílových listů zaplatíme vstupní poplatek, který činí 1,5 % z 28 720 Kč. Za vstupní poplatek celkem zaplatíme 28 720 Kč · 0,015 = 430,8 Kč ≈ 431 Kč.

Tato investice nám přinese zisk 43 716 Kč − 28 720 Kč − 431 Kč = 14 570 Kč
.

2. Na začátku roku nakoupíme 100 000 kusů podílových listů podílového

   fondu B. Hodnota podílového listu podílového fondu B je 1,843 Kč.

   Podílový fond B uvádí následující informace:
   vstupní poplatek: 3 %,
   správcovský poplatek: 0 %.

   Chceme po 1 roce prodat všechny podílové listy. Jaký musí být kurz po jednom roce, abychom dosáhli většího zisku než uložením peněz na termínovaný vklad s roční úrokovou sazbou 2 % a ročním úročením? Daň z úroku na termínovaných vkladech je 15 %. Částku na termínovaném vkladu zaokrouhlete na celé koruny.

Řešení

Nákupní cena podílových listů činila 1,843 Kč · 100 000 = 184 300 Kč.

Při nákupu podílových listů zaplatíme vstupní poplatek, který činí 3 % z 184 300 Kč. Za vstupní poplatek celkem zaplatíme 184 300 Kč · 0,03 = 5 529 Kč.

Na termínovaném vkladu bychom měli částku $184\,300\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 0{,}85) = 187\,433{,}1\,\text{Kč} \approx 187\,433\,\text{Kč}$.

Prodejní cena jednoho podílového listu po jednom roce musí být alespoň $\dfrac{187\,433\,\text{Kč} + 5\,529\,\text{Kč}}{100\,000} = \dfrac{192\,962\,\text{Kč}}{100\,000} = 1{,}92962\,\text{Kč}$.
Kurz podílových listů podílového fondu B po jednom roce musí být alespoň 1,92962.

2. Úročení

2.1 Jednoduché úročení

V této kapitole se budeme věnovat úročení. Úročení je způsob, jak počítat úroky. Rozlišujeme dva základní typy úročení, a to jednoduché a složené úročení.

Důležité u úročení je časové období, ke kterému se vztahuje výpočet úroku.

Definice 10. ***Úrokovací období*** *je časový úsek mezi dvěma bezprostředně po sobě následujícími úročeními. Úrokovací období může být roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční, denní,...*

Definice 11. ***Jednoduché úročení*** *je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.*

Poznámka. Pokud úrokovací doba není dělitelná beze zbytku úrokovacím obdobím, pak na zbylé necelé období použijeme některý ze standardů zavedených v sekci 1.3.

Zkusme vyjít z definice jednoduchého úročení a spočítejme na konkrétním příkladu částku, kterou budeme mít po třech letech. Pro zjednodušení situace nebudeme uvažovat daň z úroku a úrokovací období je rok.

Příklad

Na začátku roku 2019 vložíme 1 000 000 Kč na 3 roky na bankovní účet. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 1 %, úrokovací období je rok. Banka používá jednoduché úročení. Neuvažujme daň z úroku. Jak velká bude výsledná naspořená částka po třech letech?

Řešení

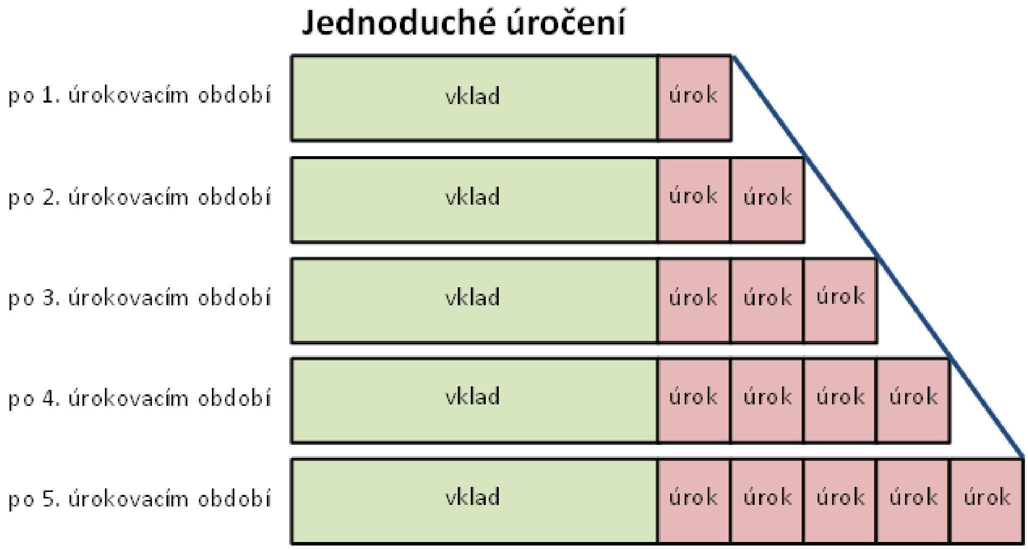
Řešení je uvedeno v tabulce 2.1.

	Vždy na konci roku		
Rok	**Úrok v Kč**	**Celkový úrok v Kč**	**Stav účtu v Kč**
2019	$1\,000\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10\,000$	$10\,000$	$1\,000\,000 + 10\,000$
2020	$1\,000\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10\,000$	$10\,000 + 10\,000 = 2 \cdot 10\,000$	$1\,000\,000 + 2 \cdot 10\,000$
2021	$1\,000\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10\,000$	$2 \cdot 10\,000 + 10\,000 = 3 \cdot 10\,000$	$1\,000\,000 + 3 \cdot 10\,000$

Tabulka 2.1: Jednoduché úročení

Na konci roku 2021 (po třech letech) bude výsledný kapitál
$1\,000\,000\,\text{Kč} + 3 \cdot 10\,000\,\text{Kč} = 1\,030\,000\,\text{Kč}$.

Obrázek 2.1 ilustruje průběh jednoduchého úročení. Ukazuje, jak se mění kapitál v jednotlivých úrokovacích obdobích.



Obrázek 2.1: Průběh jednoduchého úročení.

Odvození vzorce pro jednoduché úročení

Nyní si odvodíme vzorec pro jednoduché úročení. Opět si situaci zjednodušíme a budeme uvažovat roční úrokovací období a nebudeme počítat s daní z úroku. Různým frekvencím úročení a dani z úroku se budeme věnovat v samostatných následujících kapitolách.

Značení

$i \ldots$ roční úroková sazba (míra) ve tvaru desetinného čísla
$n \ldots$ počet úrokovacích období
$K_0 \ldots$ základ, jistina, počáteční kapitál
$K_n \ldots$ výsledný kapitál po n úrokovacích obdobích

Příklad

Uvažujme bankovní účet, na který vložíme počáteční kapitál K_0, úrokovací období je 1 rok. Banka používá jednoduché úročení a uvádí roční úrokovou sazbu i. Neuvažujte daň z úroku.

Jaký bude výsledný kapitál K_n na účtě po n letech?

Řešení

Řešení je uvedeno v tabulce 2.2.

Po n letech bude výsledný kapitál $K_n = K_0(1 + in)$.

Věta 1. *Výsledný kapitál K_n po n ročních úrokovacích obdobích, který je úročen jednoduchým úročením s roční úrokovou sazbu i a úrokovací období je 1 rok, spočítáme následovně*

$$K_n = K_0(1 + in),$$

kde je K_0 počáteční kapitál. Daň z úroku neuvažujeme.

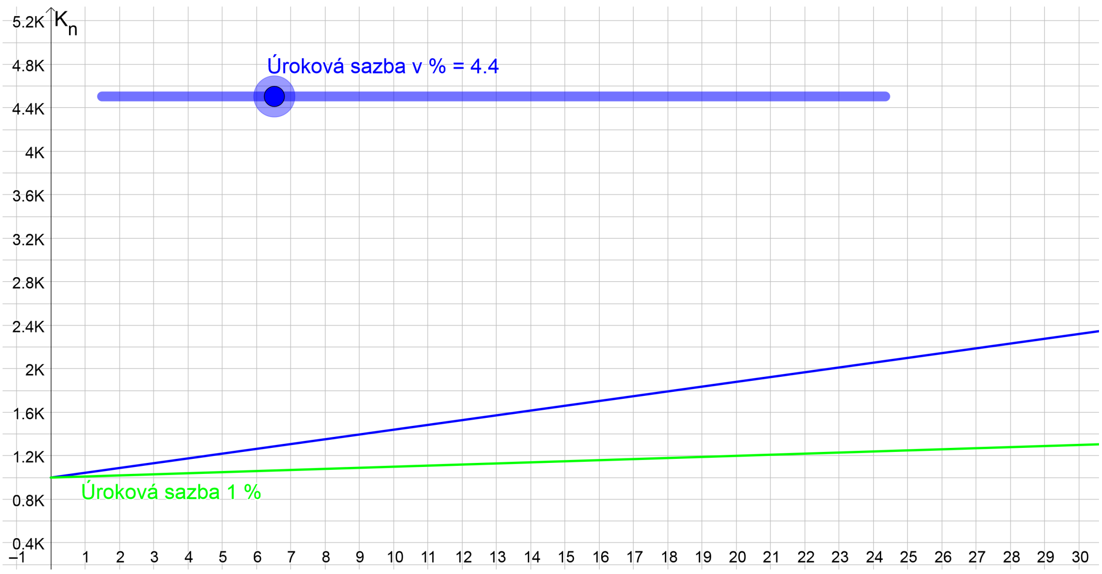
	Na konci úrokovacího období		
Čas	**Úrok v Kč**	**Kumulovaný úrok v Kč**	**Stav účtu v Kč**
0			K_0
1	$K_0 \cdot i$	$K_0 \cdot i$	$K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$
2	$K_0 \cdot i$	$2K_0 \cdot i$	$K_0 + K_0 \cdot 2i = K_0(1+2i)$
3	$K_0 \cdot i$	$3K_0 \cdot i$	$K_0 + K_0 \cdot 3i = K_0(1+3i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$K_0 \cdot i$	$nK_0 \cdot i$	$K_0 + K_0 \cdot ni = K_0(1+in)$

Tabulka 2.2: Odvození vztahu pro jednoduché úročení.

Poznámka. Stejný vzorec by platil i v případě, kdybychom měli měsíční (týdenní, denní, ...) úrokovou sazbou i a vklad bychom úročili měsíčně (týdenně, denně, ...). Pak by ale K_n byla částka po n měsících (týdnech, dnech, ...).

V kapitole Frekvence úročení se budeme zabývat případem, kdy je dána roční úroková sazba, ale úročili bychom vícekrát do roka, tj. úrokovací období bude kratší než rok.

Abychom si lépe představili, jak roste kapitál při jednoduchém úročení, uvádíme zde graf na obrázku 2.2, kde lze měnit úrokovou sazbu.



Obrázek 2.2: Applet: Růst kapitálu při jednoduchém úročení.

Úloha

Na začátku roku vložíme na bankovní účet 1 000 000 Kč na 5 let. Úrokovací období je jeden rok a roční úroková sazba je 1,2 %. Daň z úroku neuvažujte. Banka úročí kapitál pomocí jednoduchého úročení. Jaký bude výsledný kapitál po třech letech?

Řešení

$K_0 = 1\,000\,000$ Kč, $n = 5$, $i = 0{,}012$

Budeme chtít spočítat výsledný kapitál K_5.
$K_5 = K_0(1 + in) = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}012 \cdot 5) = 1\,060\,000\,\text{Kč}$
Výsledný kapitál po pěti letech je 1 060 000 Kč.

Vliv daně na výsledný kapitál při jednoduchém úročení si uvedeme v kapitole Vliv daně a inflace.

2.2 Složené úročení

V předchozí kapitole jsme se věnovali jednoduchému úročení, v této kapitole se budeme věnovat složenému úročení.

Definice 12. ***Složené úročení*** *je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí.*

Zkusme vyjít z definice složeného úročení a spočítejme na konkrétním příkladu částky, kterou budeme mít na účtě po třech letech. Pro zjednodušení situace nebudeme uvažovat daň z úroku a úrokovací období bude rok.

Příklad

Na začátku roku 2019 vložíme 1 000 000 Kč na 3 roky na bankovní účet. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 1 %, úroková doba je 1 rok. Úrok se přičítá na konci každého roku k již dosažené částce. Neuvažujme daň z úroku. Jak velká bude výsledná částka na účtě po třech letech?

Řešení

Řešení je uvedeno v tabulce 2.3.

	Vždy na konci roku	
Rok	**Úrok v Kč**	**Stav účtu v Kč**
2019	$1\,000\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10\,000$	$1\,000\,000 + 10\,000 = 1\,010\,000$
2020	$1\,010\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10\,100$	$1\,010\,000 + 10\,100 = 1\,020\,100$
2021	$1\,020\,100 \cdot \frac{1}{100} = 10\,201$	$1\,020\,100 + 10\,201 = 1\,030\,301$

Tabulka 2.3: Příklad složeného úročení

Na konci roku 2021 (po třech letech) bude výsledný kapitál 1 030 301 Kč.
U jednoduchého úročení nám vyšel kapitál po třech letech 1 030 000 Kč, postup je uveden v sekci Jednoduché úročení.

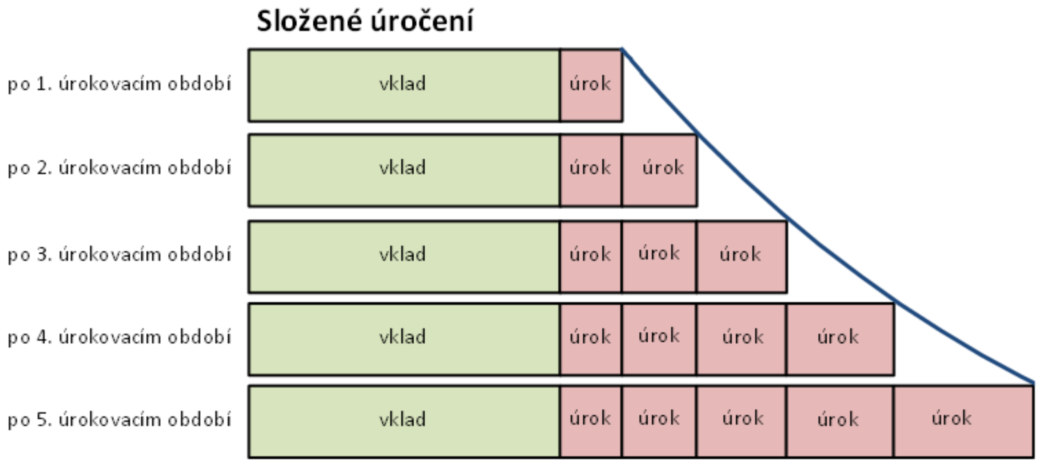
Obrázek 2.3 ilustruje průběh složeného úročení. Ukazuje, jak se mění kapitál v jednotlivých úrokovacích obdobích.
Pro porovnání s jednoduchým úročením se můžete podívat na obrázek 2.1.

Odvození vzorce pro složené úročení

Odvodíme vzorec pro složené úročení. Opět si situaci zjednodušíme a budeme uvažovat roční úrokovací období a nebudeme uvažovat daň z úroku. Frekvencemi úročení a daní z úroku se budeme věnovat v samostatných kapitolách.

Značení

$i \ldots$ roční úroková sazba (míra) ve tvaru desetinného čísla
$n \ldots$ počet úrokovacích období
$K_0 \ldots$ základ, jistina, počáteční kapitál
$K_n \ldots$ výsledný kapitál po n úrokovacích obdobích



Obrázek 2.3: Průběh složeného úročení.

Příklad

Uvažujeme bankovní účet, na který vložíme počáteční kapitál K_0. Úrokové období je 1 rok a roční úroková sazba je i. Banka používá složené úročení. Daň z úroku neuvažujte.

Jaký bude výsledný kapitál na účtě po letech?

Řešení

Řešení je uvedeno v tabulce 2.4.

Čas	**Úrok v Kč**	**Stav účtu v Kč**
0		K_0
1	$K_0 \cdot i$	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$
2	$K_0(1+i) \cdot i$	$K_2 = K_0(1+i) + K_0(1+i) \cdot i = K_0(1+i)^2$
3	$K_0(1+i)^2 \cdot i$	$K_3 = K_0(1+i)^2 + K_0(1+i)^2 \cdot i = K_0(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$K_0(1+i)^{n-1} \cdot i$	$K_n = K_0(1+i)^{n-1} + K_0(1+i)^{n-1} \cdot i = K_0(1+i)^n$

Tabulka 2.4: Odvození vztahu pro složené úročení.

Po n letech budeme mít částku $K_0(1+i)^n$.

Věta 2. *Výsledný kapitál K_n po n ročních úrokovacích obdobích, který je úročen složeným úročením s roční úrokovou sazbu i, je dán vztahem*

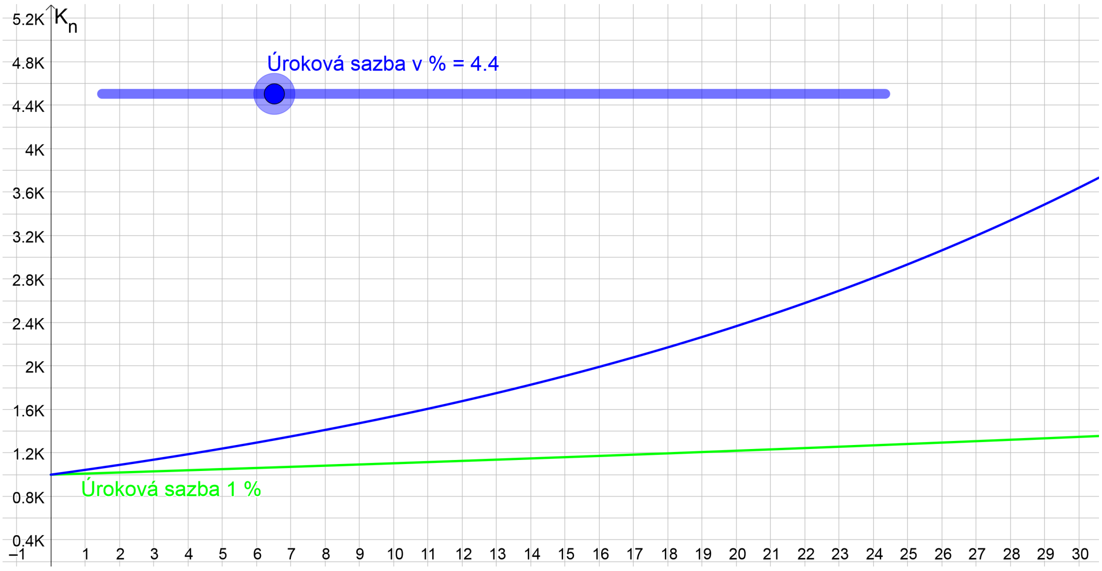
$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

kde je K_0 počáteční kapitál. Daň z úroku neuvažujeme.

Poznámka. Stejný vzorec by platil i v případě, kdybychom měli měsíční (týdenní, denní, ...) úrokovou sazbou i a vklad bychom úročili měsíčně (týdenně, denně, ...). Pak by ale K_n byla částka po n měsících (týdnech, dnech, ...).

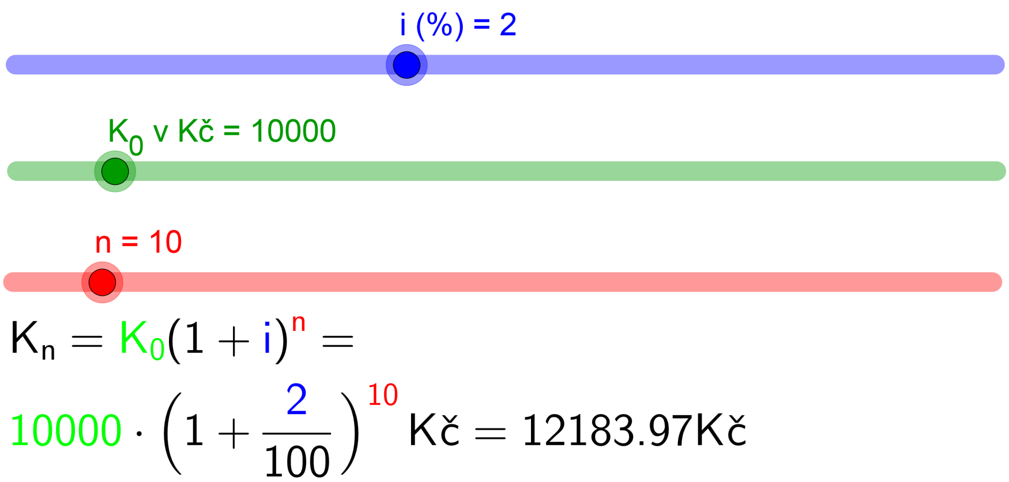
V kapitole Frekvence úročení se budeme zabývat případem, kdy je dána roční úroková sazba, ale úročili bychom vícekrát do roka.

Abychom si lépe představili, jak roste kapitál při složeném úročení, uvádíme zde graf na obrázku 2.4, kde lze měnit úrokovou sazbu.



Obrázek 2.4: Applet: Růst kapitálu při složeném úročení.

Následující aplikace na obrázku 2.5 počítá pomocí složeného úročení výsledný kapitál K_n po n úrokovacích obdobích. V aplikaci lze měnit jistinu (základ) K_0, úrokovou sazbu ia počet úrokovacích období n.



Obrázek 2.5: Applet: Kapitál u složeného úročení

Úloha

Na začátku roku vložíme na bankovní účet 1 000 000 Kč na 5 let. Úrokovací období je jeden rok a roční úroková sazba je 1,2 %. Banka úročí kapitál pomocí složeného úročení. Daň z úroku neuvažujeme.

Jaký bude výsledný kapitál po třech letech?

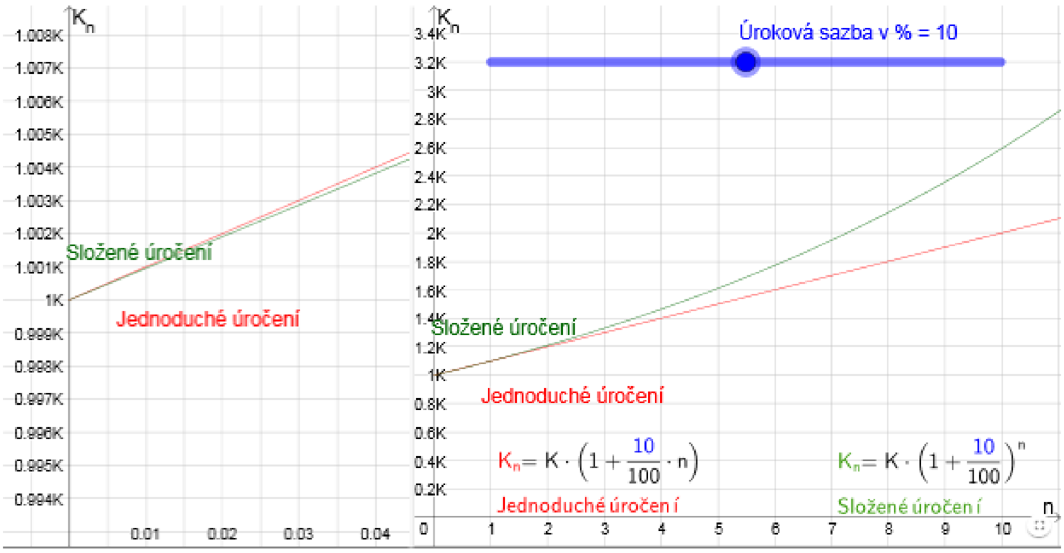
Řešení

$K_0 = 1\,000\,000$ Kč, $n = 5$, $i = 0{,}012$
Budeme chtít spočítat výsledný kapitál K_5.
$K_5 = K_0(1+i)^n = K_0(1+0{,}012)^5 = 1\,000\,000 \cdot (1{,}012)^5 =$
$1\,061\,457{,}38\ldots$ Kč $\approx 1\,061\,457$ Kč
Výsledný kapitál po třech letech je $1\,061\,457$ Kč.

Vliv daně na výsledný kapitál při složeném úročení si uvedeme v kapitole Vliv daně a inflace.

Porovnání jednoduchého a složeného úročení

V následujícím grafu na obrázku 2.6 porovnáme složené úročení s jednoduchým úročením při stejném počátečním kapitálu. V levé části appletu je graf přiblížený. V appletu na obrázku 2.6 lze měnit úrokovou sazbu.



Obrázek 2.6: Applet: Porovnání jednoduchého a složeného úročení.

Počáteční kapitál u obou typů úročení je pouze multiplikativní konstanta, tzn., pokud počáteční kapitál například zvětšíme dvakrát, tak se i výsledný kapitál K_n po n úrokovacích obdobích zvětší dvakrát.

Všimneme si, že v případě malé úrokové sazby a malého počtu úrokovacích období, tak se výsledný kapitál K_n po n úrokovacích období u jednoduchého a složeného úročení moc neliší. Z odvozených vzorců plyne, že jestliže $0 < n < 1$, pak jednoduché úročení přináší vyšší kapitál, naopak pokud je $n > 1$, pak složené úročení přináší vyšší kapitál. Pokud platí, že $n \in \{0{,}1\}$, pak oba způsoby úročení přináší stejný kapitál.

Při zvyšující se úrokové sazbě se rozdíl výsledných kapitálů K_n složeného a jednoduchého úročení zvětšuje.

2.3 Frekvence úročení

Doposud jsme se zabývali situací, ve které jsme měli roční úrokovou sazbou a vklad jsme úročili ročně. Nyní se budeme zabývat i ostatními případy. Konkrétně se podíváme, jak probíhá jednoduché a složené úročení v situaci, kdy uvažujeme roční úrokovou sazbou a vklad bychom úročili p-krát do roka (např. $p = 12$, tj. měsíčně), $p \in \mathbb{N}$. Úrokovací období je tedy kratší než rok.

Můžeme se setkat s finančními nabídkami, které uvádějí roční úrokovou sazbu, a mají různou délku úrokovacího období. Proto si nyní odvodíme vztah pro tzv. efektivní úrokovou sazbu. Efektivní úroková sazba pomáhá porovnat výslednou úrokovou sazbu (úvěrů či spoření) při rozdílných frekvencí úročení.

Definice 13. ***Efektivní úroková sazba (míra)*** *je roční úroková sazba, která dává za rok při ročním úrokovacím období stejný úrok jako roční úroková sazba při úrokovacím období kratším než 1 rok.*

Značení
$i_{ef} \ldots$ efektivní úroková sazba
$i \ldots$ roční úroková sazba úroková
$\frac{i}{p} \ldots$ sazba pro p-tinu roku

Je-li roční úroková sazba $i = 2\,\%$ a úrokovací období je půlroční (tj. $p = 2$), pak $\frac{i}{p} = \frac{i}{2} = 1\,\%$.

Různé frekvence - jednoduché úročení

Nejdříve si odvodíme vztah mezi efektivní úrokovou sazbou a úroková sazba pro 12tinu roku pro jednoduché úročení na následujícím příkladu.

Kapitál $K_0 = 1\,$Kč chceme uložit na bankovní účet na 1 rok. Uvažujme následující dva způsoby úročení. Daň z úroku neuvažujeme.

1. způsob: Banka jednorázové připisuje úrok na konci roku, tzn. roční úroková sazba je též efektivní úroková sazba.

2. způsob: Banka připíše na konci každého měsíce úrok, který se počítá z počátečního kapitálu $K_0 = 1\,$Kč. Roční úroková sazba je $i = 2\,\%$.

Bude nás zajímat stav účtu pro oba způsoby, vše je názorně ukázáno v tabulce 2.5.

	1. způsob v Kč			**2. způsob v Kč**		
Měsíc	**Úrok**	**Celkový úrok**	**Stav účtu**	**Úrok**	**Celkový úrok**	**Stav účtu**
1. měsíc	0	0	1	$1 \cdot \frac{0{,}02}{12}$	$\frac{0{,}02}{12}$	$1 + \frac{0{,}02}{12}$
2. měsíc	0	0	1	$\frac{0{,}02}{12}$	$2 \cdot \frac{0{,}02}{12}$	$1 + 2 \cdot \frac{0{,}02}{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12. měsíc	i_{ef}	i_{ef}	$1 + i_{ef}$	$\frac{0{,}02}{12}$	$12 \cdot \frac{0{,}02}{12}$	$1 + 12 \cdot \frac{0{,}02}{12}$

Tabulka 2.5: Měsíční úrokovací období - jednoduché úročení

Kapitál v Kč na konci roku dle 1. způsobu bude $1 + i_{ef}$.
Kapitál v Kč na konci roku dle 2. způsobu bude $1 + 12 \cdot \frac{0{,}02}{12} = 1 + 0{,}02$.
Požadujeme$1 + i_{ef} = 1 + 0{,}02$.
V tomto konkrétním příkladu platí $i_{ef} = 0{,}02$, tedy 2 %.

Nyní si obecně odvodíme vztah pro efektivní úrokovou sazbu u jednoduchého úročení.

Kapitál chceme uložit na bankovní účet na 1 rok. Uvažujme následující dva způsoby úročení. Daň z úroku neuvažujeme.

1. způsob: Banka jednorázové připisuje úrok na konci roku, tzn. roční úroková sazba je též efektivní úroková sazba.

2. způsob: Banka připíše každou p-tinu roku (např. $p = 12$, tj. měsíčně) úrok, který se počítá z počátečního kapitálu $K_0 = 1$ Kč. Roční úroková sazba je i.

Bude nás zajímat stav účtů pro oba způsoby, vše je názorně ukázáno v tabulce 2.6.

	1. způsob v Kč			**2. způsob v Kč**		
čas v p-tinách roku	**Úrok**	**Celkový úrok**	**Stav účtu**	**Úrok**	**Celkový úrok**	**Stav účtu**
0			1			1
1	0	0	1	$1 \cdot \frac{i}{p}$	$\frac{i}{p}$	$1 + \frac{i}{p}$
2	0	0	1	$\frac{i}{p}$	$2 \cdot \frac{i}{p}$	$1 + 2 \cdot \frac{i}{p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	i_{ef}	i_{ef}	$1 + i_{ef}$	$\frac{i}{p}$	$p \cdot \frac{i}{p}$	$1 + p \cdot \frac{i}{p}$

Tabulka 2.6: Frekvence úročení p-krát ročně - jednoduché úročení

Kapitál v Kč na konci roku dle 1. způsobu bude $1 + i_{ef}$.
Kapitál v Kč na konci roku dle 2. způsobu bude $1 + p \cdot \frac{i}{p} = 1 + i$.
Požadujeme $1 + i_{ef} = 1 + i$.

Vztah mezi efektivní úrokovou sazbou i_{ef} a roční úrokovou sazbou i s úrokovacím obdobím kratším než rok u jednoduchého úročení je $i_{ef} = i$.

Různé frekvence - složené úročení

Nejdříve si odvodíme vztah mezi efektivní úrokovou sazbou a roční úrokovou sazbou u složeného úročení na následujícím příkladu.

Kapitál $K_0 = 1$ Kč chceme uložit na bankovní účet na 1 rok. Uvažujme následující dva způsoby úročení. Daň z úroku neuvažujeme.

1. způsob: Banka jednorázové připisuje úrok na konci roku, tzn. roční úroková sazba je též efektivní úroková sazba.

2. způsob: Banka připíše na konci každého měsíce úrok, který se přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí. Roční úroková sazba je 2 %.

Bude nás zajímat stav účtů pro oba způsoby, vše je názorně ukázáno v tabulce 2.7.

	1. způsob v Kč		**2. způsob v Kč**	
Měsíc	**Úrok**	**Stav účtu**	**Úrok**	**Stav účtu**
1. měsíc	0	1	$1 \cdot \frac{0{,}02}{12}$	$1 + \frac{0{,}02}{12}$
2. měsíc	0	1	$\left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right) \cdot \frac{0{,}02}{12}$	$\left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12. měsíc	i_{ef}	$1 + i_{ef}$	$\vdots$	$\left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12}$

Tabulka 2.7: Měsíční úrokovací období - složené úročení

Kapitál v Kč na konci roku dle 1. způsob bude $1 + i_{ef}$.

Kapitál v Kč na konci roku dle 2. způsob bude $\left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12}$.

Požadujeme $1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}02}{p}\right)^{12}$.

V tomto konkrétním příkladu platí $i_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}02}{p}\right)^{12} - 1$.

Nyní si odvodíme obecný vztah pro efektivní úrokovou sazbu u složeného úročení.

Kapitál $K_0 = 1\,$Kč chceme uložit na bankovní účet na 1 rok. Uvažujme následující dva způsoby úročení. Daň z úroku neuvažujeme.

1. způsob: Banka jednorázové připisuje úrok na konci roku, tzn. roční úroková sazba je též efektivní úroková sazba.

2. způsob: Banka připíše každou p-tinu roku (např. $p = 12$, tj. měsíčně) úrok, který se přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí. Roční úroková sazba je i.

Bude nás zajímat stav účtů pro oba způsoby, vše je názorně ukázáno v tabulce 2.8.

Kapitál v Kč na konci roku dle 1. způsob bude $1 + i_{ef}$.

Kapitál v Kč konci roku dle 2. způsob bude $\left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$.

Požadujeme rovnost $1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$.

Vztah mezi efektivní úrokovou sazbou i_{ef} a roční úrokovou sazbou i s frekvencí úročení p-krát ročně u složeného úročení je $1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$.

Úloha

Chceme uložit kapitál na termínovaný vklad do banky na jeden rok. Banka A úročí denně a má roční úrokovou sazbu 1,29 %. Banka B úročí půlročně a má roční úrokovou sazbu 1,30 %.

	1. způsob v Kč		**2. způsob v Kč**	
Čas v p-tinách roku	**Úrok**	**Stav účtu**	**Úrok**	**Stav účtu**
0	0	1	0	1
1	0	1	$1 \cdot \frac{i}{p}$	$1 + \frac{i}{12}$
2	0	1	$\left(1 + \frac{i}{p}\right) \cdot \frac{i}{p}$	$\left(1 + \frac{i}{p}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	i_{ef}	$1 + i_{ef}$	$\vdots$	$\left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$

Tabulka 2.8: Frekvence úročení p-krát ročně - složené úročení

Obě banky úročí složeným úročením. Jaká bude efektivní úroková míra termínovaného vkladu zaokrouhlená na tisíciny procenta pro obě banky? Který termínovaný vklad je finančně výhodnější?

Řešení

Roční úroková sazba pro banku A je $i_A = 0{,}0129$.
Roční úroková sazba pro banku B je $i_B = 0{,}013$.
Ze vztahu $1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$ vyjádříme $i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - 1$.
Pro banku A dostáváme: $i_{ef} = \left(1 + \frac{i_A}{365}\right)^{365} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}0129}{365}\right)^{365} - 1 \approx 0{,}01298$, tj. $1{,}298\,\%$.
Pro banku B dostáváme: $i_{ef} = \left(1 + \frac{i_B}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{0{,}013}{2}\right)^2 - 1 \approx 0{,}01304$, tj. $1{,}304\,\%$.
Finančně výhodnější je termínovaný vklad banky B, neboť má větší efektivní úrokovou sazbu.

Uvažujme počáteční kapitál je $K_0 = 1\,000\,000$ Kč. Roční úroková sazba je $i = 0{,}1$ a úroková sazba pro p-tinu roku je $\frac{i}{p}$. Vklad úročíme složeným úročením. Daň z úroku neuvažujeme.

V tabulce 2.9 ukazujeme, jak se mění hodnota kapitálu po jednom roce K_1, pokud volíme různé úrokovací období.

Pokud neuvažujeme daň z úroku, pak platí:
*kapitál, který se úročí pomocí **jednoduchého** úročení, po n letech je*

$$K_n = K_0\left(1 + i \cdot n\right),$$

*kapitál, který se úročí pomocí **složeného** úročení, po n letech je*

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n \cdot p},$$

kde K_0 je počáteční kapitál, i je roční úroková sazba a p je počet úročení v jednom roce.

p	$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$
1	1 100 000 Kč
2	1 102 500 Kč
4	1 103 813 Kč
12	1 104 713 Kč
52	1 105 065 Kč
365	1 105 156 Kč

Tabulka 2.9: Hodnota kapitálu po jednom roce - různé úrokovací období

2.4 Vliv daně a inflace

Vliv daně z úroku

Podle zákona o daních z příjmů jsou výnosy z úroků na spořicích účtech a termínovaných vkladech zdaněny sazbou 15 %. Dani z úroku jsme se již věnovali v kapitole Úrok.

Označme daň z úroků ve formě desetinného čísla jako i_{tax}. Pro připomenutí zde uvádíme, jak se spočítá úrok po zdanění.

Úrok po zdanění u' spočítáme jako

$$u' = K_0 \cdot i \cdot (1 - i_{tax}),$$

kde je K_0 počáteční kapitál, i je roční úroková sazba a daň z úroku i_{tax}.

Nejprve ukážeme vliv daně z úroku při použití jednoduchého a složeného úročení na konkrétním příkladu.

Příklad

Vložíme na bankovní účet 1 000 000 Kč na 3 roku. Úrokovací období je jeden rok a roční úroková sazba je 3 %. Daň z úroku je 15 %.

Jaký bude výsledný kapitál po třech letech zaokrouhlený na koruny,

a) pokud banka použije jednoduché úročení,

b) pokud banka použije složené úročení?

Řešení

$K_0 = 1\,000\,000\,\text{Kč}, i = 0{,}03, i_{tax} = 0{,}15$

Při roční úrokové sazbě 3 % a dani z úroku 15 % dostaneme za rok navíc $0{,}03 \cdot (1 - 0{,}85) = 0{,}03 \cdot 0{,}85 = 0{,}0255$, tj. 2,55 % z počátečního vkladu.

a) Výsledná částka po třech letech pomocí jednoduchého úročení byla $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}0255 \cdot 3) \approx 1\,076\,500\,\text{Kč}$.

b) Výsledná částka po třech letech pomocí složeného úročení byla $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}0255)^3 \approx 1\,078\,467\,\text{Kč}$.

Jelikož se daní pouze úrok, z původního vzorce pro jednoduché úročení $K_n = K_0\Big(1 + i \cdot n\Big)$, resp. složené úročení $K_n = K_0\Big(1 + i\Big)^n$ dostáváme $K_n = K_0\Big(1 + i \cdot (1 - i_{tax}) \cdot n\Big)$, resp. $K_n = K_0\Big(1 + i \cdot (1 - i_{tax})\Big)^n$.

Vzorec pro jednoduché úročení při zahrnutí daně z úroku je

$$K_n = K_0\Big(1 + i \cdot (1 - i_{tax}) \cdot n\Big).$$

Vzorec pro složené úročení při zahrnutí daně z úroku je

$$K_n = K_0\Big(1 + i \cdot (1 - i_{tax})\Big)^n.$$

Kde K_n je výsledný kapitál, je K_0 počáteční kapitál, i je roční úroková sazba, daň z úroku je i_{tax} a n je počet úrokovacích obdobích v letech.

Vliv inflace

V kapitole Motivace jsme se zmínili, že při řešení problémů ve finančním světě vstupuje do hry inflace. Také jsme si v této kapitole ukázali, jak se míra inflace počítá.

V této části se budeme zabývat, jaký vliv má inflace na kapitál, který se úročí. Roční míru inflace budeme značit i_{inf}. Zejména nás bude zajímat tzv. reálná úroková míra, která právě zohlední inflaci.

Reálná úroková míra vzniká úpravou nominální úrokové míry o inflaci.

Nejprve ukážeme vliv inflace na konkrétním příkladu.

Příklad

Vložili jsme na bankovní účet 1 000 000 Kč na jeden rok. Úrokovací období je jeden rok a roční úroková sazba je 5 %. Míra inflace byla v tomto roce 2 %. Daň z úroku neuvažujeme. Jaká byla reálná úroková míra zaokrouhlená na setiny procenta?

Řešení

1. Po jednom roce budeme mít částku na bankovním účtě
$K_1 = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}05)$.

2. Vloženou částku musíme navýšit o inflaci, tj. $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02)$. To si můžeme představit tak, že pro nákup stejného množství zboží jako minulý rok, potřebujeme reálně částku o 2 % vyšší. Abychom měli částku K_1, musíme částku $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02)$ navýšit o reálnou úrokovou míru i_{real}.

Platí tedy $K_1 = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + i_{real})$.

3. Dostáváme tedy
$K_1 = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}05) = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + i_{real})$.

A po úpravě platí
$1 + 0{,}05 = (1 + 0{,}02) \cdot (1 + i_{real})$, to dále upravíme $1 + i_{real} = \dfrac{1 + 0{,}05}{1 + 0{,}02}$.

Reálná úroková míra je $i_{real} = \dfrac{1 + 0{,}05}{1 + 0{,}02} - 1 = \dfrac{0{,}05 - 0{,}02}{1 + 0{,}02} \approx 0{,}294$, tj. 2,94 %.

Všimněme si, že rozdíl roční úrokové sazby a roční míry inflace je $5\,\% - 2\,\% = 3\,\%$, což se nerovná reálné úrokové míře $i_{real} = 2{,}94\,\%$.

Odvození vzorce pro reálnou úrokovou sazbu

Uvažujme vklad K_0 na účtě na jeden rok, který se bude úročit jednou a to na konci roku s roční úrokovou sazbou i.

Po jednom roce bude mít vklad hodnotu
$K_1 = K_0(1 + i) = K_0(1 + i_{inf}) \cdot (1 + i_{real})$.

Dostáváme $1 + i = (1 + i_{inf}) \cdot (1 + i_{real})$ a po úpravě dostaneme $i_{real} = \dfrac{i - i_{inf}}{1 + i_{inf}}$.

Neuvažujeme-li daň z úroku, pak reálnou úrokovou sazbu spočítáme následovně

$$i_{real} = \frac{i - i_{inf}}{1 + i_{inf}},$$

kde i je roční úroková sazba a i_{inf} je roční míra inflace.

Často se mylně uvádí, že $i_{real} = i - i_{inf}$. Tento vztah lze považovat pouze za odhad i_{real}, a to navíc za předpokladu, že je malá míra inflace (velmi blízká 0).

Pokud platí, že míra inflace je kladná, tedy jedná se o inflace (nikoli deflaci) platí, že reálná úroková sazba je menší než roční úroková sazba. Předpoklad, že míra inflace je kladná, je velice reálný, neboť v letech 2002 až 2018 byla v České republice míra inflace vždy kladná. Míra inflace v jednotlivých letech v České republice je zobrazena na obrázku 1.1 a v tabulce 1.1 v kapitole Motivace.

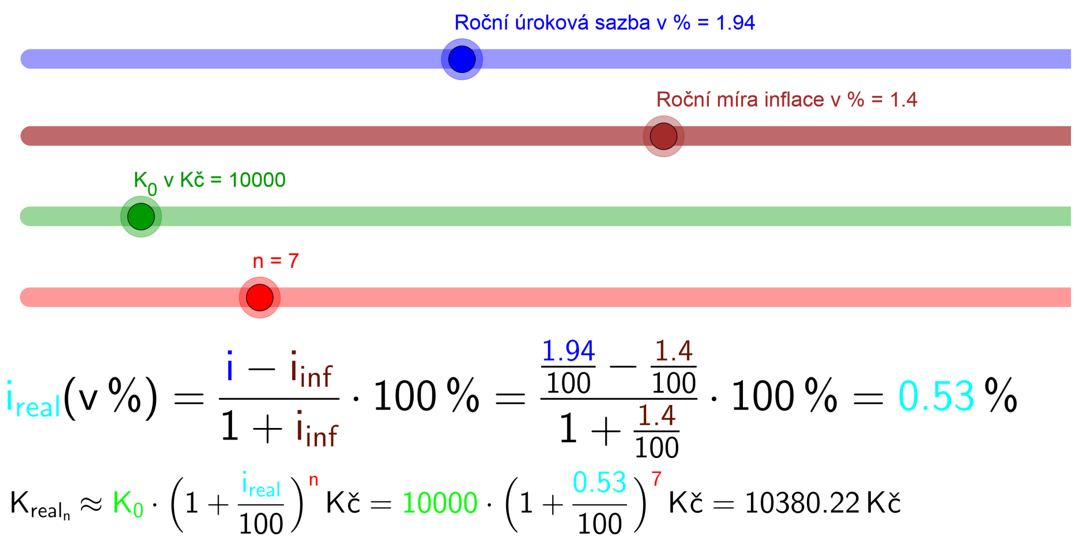
Poznámka. Pokud $i_{inf} > 0$, pak $i_{real} < i$, kde i je roční úroková sazba, i_{inf} je roční míra inflace a i_{real} je reálná úroková sazba.

Uložíme-li na začátku roku kapitál K_0 (a úročení probíhá jednou ročně), **reálná hodnota kapitálu** K_{real} je dána vztahem $K_{real} = K_0 \cdot (1 + i_{real})$.

Podobně bychom mohli definovat $K_{real_n} \approx K_0 \cdot (1+i_{real})^n$ jako reálnou hodnotu kapitálu po n letech. Avšak zde nastává problém, jak volit míru inflace, když po dobu n let byla vždy inflace různá. Proto vztah pro budeme považovat spíše jako aproximaci (přibližný odhad) reálné hodnoty kapitálu po n letech a jako hodnotu i_{inf} ve vzorci pro i_{real} můžeme volit průměrnou míru inflace po n letech.

Kdybychom chtěli přesně spočítat K_{real_n}, museli bychom pro každý rok spočítat i_{real} a postupně počítat $K_{real_1}, K_{real_2}, \dots, K_{real_n}$, kde $K_{real_n} = K_{n-1} \cdot (1+i_{real})$ a $K_{real_1} = K_{real} = K_0 \cdot (1 + i_{real})$.

Následující aplikace v appletu na obrázku 2.7 počítá reálnou úrokovou míru a aproximaci reálné hodnoty kapitálu po n letech. V tomto apletu lze dále měnit roční úrokovou sazbu, roční míru inflace a počáteční kapitál.



Obrázek 2.7: Applet: Reálná úroková míra

Hodnota K_{real_n} nevyjadřuje, jakou částku budeme mít v budoucnu.

Vliv zdanění a inflace

Uvažujme vklad K_0 na jeden rok, který se bude úročit jednou a to na konci roku. Mějme roční úrokovou sazbu i a daň z úroku i_{tax}.

Po jednom roce budeme na účtě mít kapitál $K_1 = K_0 \cdot (1 + i \cdot (1 - i_{tax}))$.

Z přechozí sekce Vliv inflace víme, že platí $K_1 = K_0(1 + i_{inf}) \cdot (1 + i_{real})$.
Tedy dostáváme $K_1 = K_0 \cdot (1 + i \cdot (1 - i_{tax})) = K_0(1 + i_{inf}) \cdot (1 + i_{real})$.
To upravíme do tvaru $1 + i \cdot (1 - i_{tax}) = (1 + i_{inf}) \cdot (1 + i_{real})$.
Dostaneme $i_{real} = \dfrac{1 + i \cdot (1 - i_{tax})}{1 + i_{inf}} - 1 = \dfrac{i \cdot (1 - i_{tax}) - i_{inf}}{1 + i_{inf}}$.

Reálná úroková sazba se zdaněním úroku a po inflaci je

$$i_{real} = \frac{1 + i \cdot (1 - i_{tax})}{1 + i_{inf}} - 1 = \frac{i \cdot (1 - i_{tax}) - i_{inf}}{1 + i_{inf}},$$

kde i je roční úroková sazba, i_{tax} je daň z úroku a i_{inf} je roční míra inflace.

Podobně bychom moli definovat reálnou hodnotu kapitálu při úročení jako $K_{real} = K_0 \cdot (1 + i_{real})$.

Reálná hodnota kapitálu po n letech při složeném úročení se dá odhadnout jako $K_{real_n} \approx K_0 \cdot (1 + i_{real})^n$.

Příklad

Roční úroková sazba je 1,8 %. Roční míra inflace je 2 %, daň z úroku je 15 %. Jaká je reálná úroková sazba zaokrouhlená na setiny procenta?

Řešení

$i = 0{,}018, i_{inf} = 0{,}02, i_{tax} = 0{,}15$
$i_{real} = \dfrac{1 + i \cdot (1 - i_{tax})}{1 + i_{inf}} - 1 = \dfrac{1 + 0{,}018 \cdot (1 - 0{,}15)}{1 + 0{,}02} - 1 =$
$\dfrac{1 + 0{,}018 \cdot 0{,}85}{1{,}02} - 1 = -0{,}0046078 \cdots \approx -0{,}0046$
Reálná úroková sazba je přibližně $-0{,}46\,\%$. Kapitál se tedy znehodnocuje.

Příklad

Jaká by musela být úroková sazba na termínovaném vkladu, aby reálná úroková sazba byla kladná? Opět předpokládejme, že je roční míra inflace 2 % a daň z úroku je 15 %.

Řešení

$\dfrac{1 + i \cdot 0{,}85}{1{,}02} - 1 > 0$
$\dfrac{1 + i \cdot 0{,}85}{1{,}02} > 1$
$1 + i \cdot 0{,}85 > 1{,}02$
$i \cdot 0{,}85 > 0{,}02$
$i > \dfrac{0{,}02}{0{,}85} \approx 0{,}0235$
Úroková sazba by musela být 2,35 %, aby nedošlo ke znehodnocení peněz.

2.5 Diskontování a diskont

Diskontování

Občas se dostaneme do situace, že budete znát hodnotu kapitálu v budoucnu, ale nebudeme znát současnou hodnotu. Přesně pro tuto situaci slouží diskontování.

Opět použijeme již zavedené značení.
$i \dots$ roční úroková sazba (míra) ve tvaru desetinného čísla
$i_{tax} \dots$ roční míra inflace ve tvaru desetinného čísla
$n \dots$ počet úrokovacích období
$K_0 \dots$ základ, jistina, počáteční kapitál
$K_n \dots$ výsledný kapitál po n úrokovacích obdobích

Ze vzorce pro složené úročení:
$K_n = K_0(1+i)^n$
vyjádříme K_0 :
$K_0 = K_n \dfrac{1}{(1+i)^n} = K_n \left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n.$

Definice 14. ***Diskontní faktor*** *označujeme* $v = \dfrac{1}{1+i}$*, pokud neuvažujeme daň z úroku.*
Pokud zahrneme daň z úroku, pak diskontní faktor je dán vztahem
$v = \dfrac{1}{1+i\cdot(1-i_{tax})}.$

Poznámka. Platí $K_0 = K_n v^n$.

Příklad

Kolik korun musíme vložit do banky, abychom po pěti letech měli na účtě 1 milion Kč? Banka používá složené úročení a má roční úrokovací období. Roční úroková sazba je 2 %.
a) Daň z úroků neuvažujte.
b) Daň z úroků je 15 %.

Řešení

a) Ze zadání známe následující údaje:
$K_5 = 1\,000\,000\,\text{Kč}$,
$i = 0{,}02$.
Diskontní faktor je dán vztahem
$v = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+0{,}02} = \dfrac{1}{1{,}02}.$
Pak platí
$K_0 = K_5 v^5 = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot \left(\dfrac{1}{1{,}02}\right)^5 \approx 905\,731\,\text{Kč}.$
Abychom po pěti letech měli na účtě 1 milion Kč, musíme vložit do banky alespoň 905 731 Kč.

b) Víme:
$K_5 = 1\,000\,000\,\text{Kč}$,
$i \cdot (1-i_{tax}) = 0{,}02 \cdot (1-0{,}15) = 0{,}02 \cdot 0{,}85 = 0{,}017.$

$K_0 = K_5\left(\frac{1}{1 + i \cdot (1 - i_{tax})}\right)^5 = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot \left(\frac{1}{1{,}017}\right)^5 \approx 919\,169\,\text{Kč}$
Pokud uvažujeme daň z úroku, musíme do banky vložit alespoň 919 169 Kč, abychom po pěti letech měli na účtě 1 milion Kč.

Při úročení posouváme čas dopředu, naopak při diskontování posouváme čas dozadu.

Diskont

Diskont je úrok, který se nevztahuje k počátečnímu vloženému kapitálu či k poskytnutému úvěru, nýbrž ke splatné částce, tj. částce, kterou vyplácí dlužník věřiteli na konci úrokové doby.

Pojem, který se pojí s diskontem, je diskontní míra. **Diskontní míra** je úroková míra vázaná na splatnou částku.

Pozor, neplést diskontování a diskont.

Diskontování si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad

Zažádáme banku o úvěr na jeden rok ve výši 1 milion Kč s diskontní mírou 10 %. Banka při poskytnutí částky 1 milion Kč odečte 10 % a po jednom roce zaplatíme 1 milion Kč.

a) Kolik korun nám banka vyplatí při poskytnutí výše uvedeného úvěru?
b) Kolik korun zaplatíme bance navíc?

Řešení

a) Banka nám vyplatí z 1 milionu Kč částku, která bude o 10 % menší, tedy dostaneme vyplaceno 90 % z 1 milionu Kč.
Banka nám vyplatí $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}1) = 1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}9 = 900\,000\,\text{Kč}$.
b) Banka navíc zaplatíme 10 % z 1 milionu Kč, tedy
$1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}1 = 100\,000\,\text{Kč}$.
Diskont se také využívá v bezkupónových dluhopisech.

Úlohy

1. Požádáme banku o úvěr ve výši 500 000 Kč na jeden rok.

   Banka A nám nabízí úvěr s roční úrokovou mírou 7 %. Úrokovací období je rok. Daň z úroku neuvažujte.

   Banka B nám nabízí úvěr s diskontem, diskontní míra je 7 %. Daň z úroku neuvažujte.

   a) Kolik Kč celkem zaplatíme bance A, kdybychom ji požádali o úvěr?
   b) Kolik Kč by nám vyplatila banka B, kdybychom ji požádali o úvěr?
   c) Jaký úvěr je výhodnější?

Řešení

a) Bance A bychom zaplatili po jednom roce částku

$500\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}07) = 500\,000\,\text{Kč} \cdot 1{,}07 = 535\,000\,\text{Kč}.$

b) Banka B by nám vyplatila
$500\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}07) = 500\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}93 = 465\,000\,\text{Kč}.$

c) Bance A bychom navíc zaplatili úrok
$535\,000\,\text{Kč} - 500\,000\,\text{Kč} = 35\,000\,\text{Kč}.$

Bance B bychom navíc zaplatili diskont $500\,000\,\text{Kč} - 465\,000\,\text{Kč} = 35\,000\,\text{Kč}.$

V obou případech zaplatíme navíc stejnou částku 35 000 Kč. V bance A nám ale půjčí 500 000 Kč, kdežto v bance B nám půjčí 465 000 Kč. Výhodnější je tedy úvěr od banky A.

2. Banka nám nabízí úvěr s diskontem, diskontní míra je 6,5 %. O jak vysoký úvěr bychom museli požádat banku, abychom získali 1 000 000 Kč? Výslednou částku zaokrouhlete na koruny.

Řešení

Banka nám zaplatí částku $100\,\% - 6{,}5\,\% = 93{,}5\,\%$ z částky K a po jednom roce zaplatíme 1 000 000 Kč.

Tedy platí $K \cdot 0{,}935 = 1\,00\,000\,\text{Kč}.$

Musíme požádat o úvěr alespoň ve výši $\dfrac{1\,000\,000\,\text{Kč}}{0{,}935} \approx 1\,069\,518\,\text{Kč}.$

3. Společnost A nabízí úvěr ve výši 500 000 Kč na jeden rok.

   Úvěr I: Společnost A nabízí klientům úvěr s roční úrokovou mírou 7 %. Úrokovací období je rok. Daň z úroku je 15 %.

   Úvěr II: Společnost A nabízí klientům úvěr s diskontem, diskontní mírou je 7 %. Daň z diskontu je 15 %.

   a) Kolik Kč celkem klient zaplatí společnost A, když požádá o úvěr I?
   b) Kolik Kč společnost A vyplatí klientovi, pokud klient požádá o úvěr II?
   c) Jaký úvěr je pro společnost A výhodnější?

Řešení

a) Klient zaplatí společnosti A po jednom roce částku
$500\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 0{,}85) = 529\,750\,\text{Kč}$, pokud klient požádá o úvěr I.

b) Klientovi vyplatíme $500\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}07 \cdot 0{,}85) = 470\,250\,\text{Kč}$, pokud klient požádá o úvěr II.

c) Při úvěru I dostane společnost A od klienta navíc úrok
$529\,750\,\text{Kč} - 500\,000\,\text{Kč} = 29\,750\,\text{Kč}.$

Při úvěru II dostane společnost A od klienta navíc diskont
$500\,000\,\text{Kč} - 470\,250\,\text{Kč} = 29\,750\,\text{Kč}.$

V obou případech získáme navíc stejnou částku 29 750 Kč. U úvěru II poskytne společnost A klientovi pouze 470 250 Kč, kdežto u úvěru I poskytne vyšší částku, a to 500 000 Kč. Výhodnější pro společnost A je tedy úvěr II.

2.6 Úlohy

1. Pan A si na začátku roku na spořicí účet uloží 20 000 Kč. Roční úroková sazba tohoto účtu je 2,5 %. Úrokovací období je rok.

   a) Vypočtěte, jakou částku bude mít pan A po dvou letech. Daň z úroků neuvažujte.

   Řešení

   Po jednom roce bude mít pan A na účtě
   $20\,000\text{ Kč} + 20\,000\text{ Kč} \cdot \frac{2{,}5}{100} = 20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025) = 20\,500\text{ Kč}.$
   Po dvou letech bude mít pan A na účtě
   $\big((20\,000\text{ Kč} \cdot 1{,}025\big) \cdot 1{,}025 = 20\,000\text{ Kč} \cdot 1{,}025^2 \approx 21\,013\text{ Kč}.$

   b) Vypočtěte, jakou částku bude mít pan A po dvou letech. Daň z úroků je ve výši 15 %.

   Řešení

   Po jednom roce bude mít pan A na účtě po zdanění
   $20\,000\text{ Kč} + 20\,000\text{ Kč} \cdot \frac{2{,}5 \cdot (100\,\% - 15\,\%)}{100\,\%} =$
   $20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) = 20\,425\text{ Kč}.$
   Po dvou letech bude mít pan A na účtě po zdanění
   $\big((20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)\big) \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) =$
   $20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^2 \approx 20\,859\text{ Kč}.$

   c) Vypočtěte, jakou částku bude mít pan A po deseti letech. Daň z úroků neuvažujte.

   Řešení

   Po jednom roce bude mít pan A na účtě $20\,000\text{ Kč} + 20\,000\text{ Kč} \cdot \frac{2{,}5}{100} = 20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025) = 20\,500\text{ Kč}.$

   Po dvou letech bude mít pan A na účtě $\big((20\,000\text{ Kč} \cdot 1{,}025\big) \cdot 1{,}025 = 20\,000\text{ Kč} \cdot 1{,}025^2 \approx 21\,013\text{ Kč}.$

   Po deseti letech bude mít pan A na účtě $20\,000\text{ Kč} \cdot (1{,}025)^{10} \approx 25\,602\text{ Kč}.$

   d) Vypočtěte, jakou částku bude mít pan A po deseti letech. Daň z úroků je ve výši 15 %.

   Řešení

   Po jednom roce bude mít pan A na účtě po zdanění
   $20\,000\text{ Kč} + 20\,000\text{ Kč} \cdot \frac{2{,}5 \cdot (100 - 15)}{100} = 20\,000\text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) = 20\,425\text{ Kč}.$

Po dvou letech bude mít pan A na účtě po zdanění
$\Big((20\,000 \text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)\Big) \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) = 20\,859 \text{ Kč}.$
Po deseti letech bude mít pan A na účtě po zdanění
$20\,000 \text{ Kč} \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^{10} \approx 24\,680 \text{ Kč}.$

2. Studentka B se rozhodla uložit své vydělané peníze z brigády na termínovaný vklad do banky ve výši 50 000 Kč na začátku měsíce. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 1,5 % a úrokovací období je 1 měsíc. Banka deklaruje připisování úroku na konci každého měsíce k již dosažené částce. Na jaký minimální počet měsíců musí studentka B uložit své úspory, aby na úrocích získala alespoň 5 000 Kč? Daň z úroků neuvažujme.

Řešení

Známe $K_0 = 50\,000\,\text{Kč}$, $i = 0{,}015$.
K_n získáme jako $K_0 + 5\,000\,\text{Kč}$, tedy $K_n = 50\,000\,\text{Kč} + 5\,000\,\text{Kč} = 55\,000\,\text{Kč}$.

Jelikož banka uvádí připisování úroku na konci každého měsíce k již dosažené částce, znamená to, že se jedná o složené úročení.

Ze vzorce pro složené úročení $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n$ vyjádříme neznámou n. Pokud vzorec pro K_n uvádíme v této podobě, pak n představuje počet měsíců.

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n$
$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n$
$\log \frac{K_n}{K_0} = \log \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n$
$\log \frac{K_n}{K_0} = n \cdot \log \left(1 + \frac{i}{12}\right)$
$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log \left(1 + \frac{i}{12}\right)}$

Dosadíme do vztahu:
$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log \left(1 + \frac{i}{12}\right)} = \frac{\log \frac{55\,000}{50\,000}}{\log \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)} = 76{,}2958\ldots$$

Jelikož banka připisuje úrok na konci každého měsíce, studentka B musí uložit své úspory minimálně na 77 měsíců, což je 6 let a 5 měsíců.

3. Mějme úrokovou sazbu 2 %, daň z úroku ve výši 15 %. Úrokovací období je měsíc. Za jak dlouho se naše úspory zvýší o 5 %, pokud použijeme složené úročení?

Řešení

Použijeme složené úročení $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{12} \cdot 0{,}85\right)^n$.

A víme, že platí $\frac{K}{K_0} = 1{,}05$.

Dostáváme následující rovnici $1{,}05 = (1 + \frac{0{,}02}{12} \cdot 0{,}85)^n$.

$\log 1{,}05 = \log \left(1 + \frac{0{,}02}{12} \cdot 0{,}85\right)^n$

$\log 1{,}05 = n \cdot \log \left(1 + \frac{0{,}02}{12} \cdot 0{,}85\right)$

$n = \dfrac{\log 1{,}05}{\log \left(1 + \dfrac{0{,}02}{12} \cdot 0{,}85\right)}$

$n \approx 34{,}46$

Naše úspory se zvýší o 5 % za 2 roky a 11 měsíců.

4. Pan C si vložil do banky 50 000 Kč. Po pěti letech měl na účtu 52 603 Kč. Úrokovací období je rok a daň z úroků je ve výši 15 %. Na konci každého úrokovacího období banka přičítá úrok k již dosažené hodnotě kapitálu. Vypočtěte, jaká byla roční úroková sazba banky. Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.

Řešení

Použijeme složené úročení $52\,603$ Kč $= 50\,000$ Kč$\cdot \left(1+i\cdot 0{,}85\right)^5$ a vyjádříme neznámou i.

$\frac{52\,603}{50\,000} = \left(1 + i \cdot 0{,}85\right)^5$

$\sqrt[5]{\frac{52\,603}{50\,000}} = 1 + i \cdot 0{,}85$

$\sqrt[5]{\frac{52\,603}{50\,000}} - 1 = i \cdot 0{,}85$

$i = \dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{52\,603}{50\,000}} - 1}{0{,}85} \approx 0{,}012$

Roční úroková sazba byla 1,2 %.

5. Paní D vložila do banky vklad 100 000 Kč, který se bude úročit konci každého měsíce z již dosaženého kapitálu. Daň z úroků je ve výši 15 %. Jaká musí být roční úroková sazba, aby po deseti letech měla paní D na účtě 110 000 Kč? Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.

Řešení

Použijeme složené úročení $110\,000$ Kč Kč $= 100\,000$ Kč $\cdot \left(1 + \frac{i}{12} \cdot 0{,}85\right)^{10\cdot 12}$ a vyjádříme neznámou i.

$\frac{110\,000}{100\,000} = \left(1 + \frac{i}{12} \cdot 0{,}85\right)^{120}$

$$\sqrt[120]{\frac{110\,000}{100\,000}} = 1 + \frac{i}{12} \cdot 0{,}85$$

$$\sqrt[120]{\frac{110\,000}{100\,000}} - 1 = \frac{i}{12} \cdot 0{,}853$$

$$\frac{i}{12} = \frac{\sqrt[120]{\dfrac{110\,000}{100\,000}} - 1}{0{,}85}$$

$$i = \frac{\sqrt[120]{\dfrac{110\,000}{100\,000}} - 1}{0{,}85} \cdot 12 \approx 0{,}011$$

Roční úroková sazba musí být 1,1 %, aby paní D po deseti letech měla na účtě 110 000 Kč.

3. Dluhopisy

V této kapitole se seznámíme s dluhopisy, zároveň si ukážeme praktické příklady dluhopisů vydávaných v České republice.

Definice 15. ***Dluhopis (též obligace)*** *(penize.cz, 2019) je cenný papír, kterým se dlužník, jenž tento papír vydává, zavazuje jeho majiteli, že mu splatí dlužnou částku včetně příslušného úroku, a to ve stanovených termínech.*

V kapitole Investice, kde jsme definovali cenné papíry, jsme rovněž definovali termín **emitent** jako společnost nebo jiný subjekt vydávající cenný papír.

S dluhopisy se pojí termín **nominální (jmenovitá) hodnota**, která je přímo na dluhopisu uvedena. Pořizovací cena dluhopisu nemusí být vždy shodná s nominální hodnotou. Také částka, kterou emitent zaplatí věřiteli po době splatnosti, nemusí být shodná s nominální hodnotou, této částce se říká **amortizační hodnota**. Ale často platí, že amortizační hodnota je shodná s nominální hodnotou.

Dluhopisy můžeme dělit podle různých kritérií, které obvykle dělíme podle rizika, emitenta a doby splatnosti.

Dělení podle emitenta

Rozdělení na dluhopisy podle emitenta spočívá v dělení podle toho, kdo a za jaké situace tyto dluhopisy vydal.

Státní dluhopisy

Státní dluhopisy emituje stát. V České republice stát emituje dluhopisy prostřednictvím Ministerstva financí. ČNB se pak stará o vyplácení úroků. Půjčené peníze stát nejčastěji vkládá do rozvoje infrastruktury nebo se používají ke splácení státního dluhu.

Komunální dluhopisy

Emitentem je územní samosprávný celek. V České republice je podmínkou emitování tohoto typu dluhopisu souhlas Ministerstva financí.

Korporátní dluhopisy (podnikové)

Jedná se o dluhopisy, jejichž emitentem je obchodní korporace. Cílem takové emise je získání kapitálu k nějaké činnosti, například k modernizaci výroby nebo odvrácení bankrotu.

Bankovní dluhopisy

Emitentem je peněžní ústav. Tento typ dluhopisů je někdy považován za součást korporátních dluhopisů se specifickými právními i finančními možnostmi (např. banka může být distributorem).

Pokladniční poukázky (T-bills)

Jedná se o krátkodobé cenné papíry (doba splatnosti je řádově měsíce) sloužící k tomu, aby si emitent jejím prodejem opatřil peníze, které po uplynutí doby splatnosti musí vrátit majiteli. Emitentem může být stát (Ministerstvo financí ČR), pak primární prodej má na starosti ČNB formou Holandské aukce, kterou si vysvětlíme na konci této kapitoly. Poukázky T-bills můžou emitovat i banky.

Dělení podle doby splatnosti

Krátkodobé dluhopisy
Doba splatnosti je do jednoho roku.

Střednědobé dluhopisy
Doba splatnosti se pohybuje od jednoho do deseti let.

Dlouhodobé dluhopisy
Doba splatnosti je nad deset let.

Dělení podle způsobu úročení

Dluhopisy s pevným kupónem

Obligace s pohyblivým kupónem (floater)

Indexované dluhopisy

Bezkupónové dluhopisy

Podrobnosti k jednotlivým typům dluhopisů jsou uvedeny v samostatných kapitolách.

Holandská aukce

Občas se stane, že emise cenných papírů probíhá formou Holandské aukce. Princip Holandské aukce ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad

Mějme emisi T-bills v objemu 5 miliard kusů. Investoři A, B, C, D uvedou, kolik kusů požadují a jakou chtějí roční úrokovou sazbu.

Investoři se seřadí vzestupně podle požadované roční úrokové sazby. Poté se postupuje od nejmenší roční úrokové sazby, dokud se nenaplní nabízený objem kusů. Roční úroková sazba bude pro všechny stejná a určí se jako požadovaná roční úroková sazba posledního investora, který se vejde do nabízeného objemu, tj. 5 miliard kusů. Investoři, kteří požadovali vyšší roční úrokovou sazbu než poslední investor, který se vešel do nabízeného objemu, nedostanou žádný cenný papír.

Tabulka 3.1 ukazuje, jak bude aukce probíhat.

Investor	**Objednávka (ks)**	**Požadovaná roční úroková sazba - seřazená vzestupně**	**Uspokojení objednávky**	**Roční úroková sazba**
A	2,5 mld.	2 %	plně	3 %
B	2 mld.	2,5 %	plně	3 %
C	3 mld.	3 %	částečně (0,5 mld.)	3 %
D	4 mld.	3,5 %	nic	žádná

Tabulka 3.1: Průběh Holandské aukce

Výsledná úroková sazba pro investory bude v tomto případě 3 %.

3.1 Dluhopisy s pevným kupónem

U **dluhopisů s pevným kupónem** emitent pravidelně vyplácí majiteli úrok (platby), tento úrok se označují jako kupónové platby, zkráceně **kupón**. U kupónových dluhopisů se vyskytuje termín **kupónová sazba**, což značí roční úrokovou sazbu v procentech. Kupónové platby se vždy počítají na základě kupónové sazby z nominální hodnoty. Kupónové platby představují zisk, který se u nás daní sazbou 15 %. Obvykle platí, že na konci doby splatnosti kromě poslední kupónové platby majitel dostane vyplacenou i nominální hodnotu.

Kupón uzavřený při emisi se nemění po celou dobu životnosti dluhopisu. Výhodou je, že lze snadno spočítat zisk, nevýhodou je jejich nerentabilnost při růstu úrokových sazeb.

Příklad

Stát se rozhodl emitovat tříleté dluhopisy s nominální hodnotou 1 000 Kč a roční kupónovou sazbou 2 %. Kupónové platby se vždy vyplácí na začátku roku. Po třech letech se majiteli dluhopisu včetně kupónové platby za poslední rok vyplatí nominální částka. Kupónové platby podléhají dani 15 %.

Předpokládejme, že na začátku roku nakoupíme jeden dluhopis. Kolik dostaneme celkem vyplaceno na kupónových platbách? Jaká bude hodnota našeho vloženého kapitálu po třech letech?

Řešení

Řešení je zobrazeno v tabulce 3.2.

Rok	**Kupónová platba v Kč**	**Celkem v Kč**	**Transakce**
1	$1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot (1 - 0{,}15) = 17$	17	$+17$ Kč
2	$1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 = 17$	$1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85+$ $1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 =$ $2 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 = 34$	$+17$ Kč
3	$1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 = 17$	$2 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85+$ $1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 =$ $3 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85 = 51$	$+17$ Kč $+1\,000$ Kč

Tabulka 3.2: Kupónový dluhopis

Na kupónových platbách celkem dostaneme zaplaceno
$3 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85\,\text{Kč} = 3 \cdot 17 = 51\,\text{Kč}$.

Hodnota našeho vloženého kapitálu po třech letech bude
$1\,000\,\text{Kč} + 3 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85\,\text{Kč} = 51\,\text{Kč} = 1\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}85) = 1\,051\,\text{Kč}$.
Můžeme si všimnout, že jsme dostali vztah pro jednoduché úročení.

Poznámka. Dluhopisy s pevným kupónem se úročí dle jednoduchého úročení.

Běžný výnos

U dluhopisů se často používá pojem běžný výnos, který lépe charakterizuje výhodnost dluhopisů.

Běžný výnos (Current Yield) je poměr ročního výnosu k tržní ceně dluhopisu.

Například dluhopis s 10 % kupónovou sazbou (někdy označováno jako 10% výnos) a nominální hodnotou 1 000 Kč se obchoduje na burze za 800 Kč. Běžný výnos je $y_c = \frac{100\,\text{Kč}}{800\,\text{Kč}} \cdot 100\,\% = 12{,}5\,\%$.

Zde se budou vyskytovat pouze příklady dluhopisů, které mohli občané nakupovat při emisi, tj. v primárním prodeji. Tedy nebudeme uvažovat nákup dluhopisů na burze, tj. v sekundárním prodeji. To znamená, že u kupónových dluhopisů v případě primárního prodeje bude nákupní cena stejná jako nominální hodnota.

Příklad

Firma A se rozhodla emitovat tzv. **korunové dluhopisy** s nominální hodnotou 1 Kč a roční kupónovou sazbou 6 % na deset let. Kupónové platby se vyplácí každý rok a zaokrouhlují se na haléře. Po deseti letech firma A vyplatí nominální hodnotu panu B. Pan B se rozhodl v roce 2012 nakoupit 1 mil. kusů dluhopisů firmy A. Daň z úroku je 15 %.

Dluhopisy emitované státem či firmou, jejichž nominální hodnota činí 1 Kč (tzv. korunové dluhopisy) využívaly pravidlo zákona o správě daní a poplatků, podle kterého se daň vybíraná zvláštní sazbou zaokrouhlovala na celé koruny dolů. Daň z příjmu vybíraná zvláštní sazbou se v případě korunových dluhopisů počítala za každý jeden cenný papír zvlášť.

Vypočtěte,

a) kolik Kč dostane pan B zaplaceno každý rok od firmy A na kupónových platbách,
b) kolik Kč dostane pan B za 10 let zaplaceno od firmy A na kupónových platbách,
c) kolik Kč budeme mít po deseti letech,
d) o kolik procent se zvýší vložený kapitál.

Řešení

a) Kupónová platba jednoho dluhopisu bez daně je $1\,\text{Kč} \cdot 0{,}06 = 0{,}06\,\text{Kč}$. Daň z kupónové platby u jednoho dluhopisu se spočítá jako $0{,}06\,\text{Kč} \cdot 0{,}15 = 0{,}009\,\text{Kč}$, a to po zaokrouhlení na koruny dostáváme nulu, tedy žádnou daň není třeba odvádět. Jelikož pan B nakoupil 1 mil. dluhopisů firmy A, každý rok dostane zaplaceno na kupónových platbách $10^6 \cdot 0{,}06\,\text{Kč} = 60\,000\,\text{Kč}$.
b) Pan B dostane zaplaceno od firmy A za 10 let na kupónových platbách $10 \cdot 60\,000\,\text{Kč} = 600\,000\,\text{Kč}$.
c) Po 10 letech pan B bude mít $600\,000\,\text{Kč} + 1\,000\,000\,\text{Kč} = 1\,600\,000\,\text{Kč}$.
Ke stejnému výsledku dojdeme, když použijeme vztah pro jednoduché úročení $1\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}06) = 1\,600\,000\,\text{Kč}$ a dostaneme stejný výsledek.
d) Vložený kapitál se zvýší o $\frac{600\,000\,\text{Kč}}{1\,000\,000\,\text{Kč}} \cdot 100\,\% = 60\,\%$.

Úlohy

1. Firma X emituje 1. ledna 2019 sedmileté kupónové dluhopisy v nominální hodnotě 5 000 Kč. Kupónová sazba je 3 % a daň z úroku činí 15 %. Každý rok 1. ledna (počínaje rokem 2020) jsou vypláceny pravidelné kupónové platby. Dne 1. ledna 2026 emitent vyplatí poslední kupónovou platbu a také nominální částku dluhopisu všem majitelům.

   Nakoupíme 5 dluhopisů firmy X. Předpokládejme, že kupónové platby se zaokrouhlují na haléře.

   Vypočítejte,

   a) kolik Kč je kupónová platba u jednoho dluhopisu firmy X,
   b) kolik Kč dostaneme za 7 let zaplaceno od firmy X na kupónových platbách,
   c) kolik Kč budeme mít po 7 letech.

   Řešení

   a) Kupónová platba se spočítá následovně: $5\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}03 \cdot (1 - 0{,}15) = 5\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}85 = 127{,}50\,\text{Kč}$.

   b) Celkem dostaneme na kupónových platbách $7 \cdot 5 \cdot 127{,}5\,\text{Kč} = 4\,462{,}50\,\text{Kč}$.

   c) Částku po sedmi letech lze spočítat jako součet všech kupónových plateb a nominálních hodnot nakoupených dluhopisů $5 \cdot 5\,000\,\text{Kč} + 4\,462{,}50\,\text{Kč} = 29\,462{,}5\,\text{Kč}$.
   Nebo využijeme jednoduché úročení a dostaneme stejnou částku
   $5 \cdot 5\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 7 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}85) = 29\,462{,}50\,\text{Kč}$.

2. Firma Y na začátku roku emituje desetileté kupónové dluhopisy v nominální hodnotě 1 000 Kč. Daň z úroku je 15 %. Na začátku každého roku jsou vypláceny pravidelné kupónové platby. Po deseti letech emitent vyplatí nominální částku dluhopisu všem majitelům.

   Máme k dispozici 100 000 Kč, které chceme investovat.

   Jaká musí být minimální roční kupónová sazba, abychom získali nákupem dluhopisů 120 000 Kč? Výsledek zaokrouhlete na setiny procenta.

   Řešení

   Jelikož máme k dispozici 100 000 Kč, můžeme nakoupit $\frac{100\,000\,\text{Kč}}{1\,000\,\text{Kč}} = 100$ dluhopisů firmy Y.

   Získanou částku po deseti letech lze vyjádřit pomocí jednoduchého úročení, tj. $100 \cdot 1\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 10 \cdot i \cdot 0{,}85) = 120\,00\,\text{Kč}$, kde i je roční kupónová sazba, kterou chce vyjádřit.

   Postupnými úpravami dostáváme $(1 + 10 \cdot i \cdot 0{,}85) = \frac{120\,000}{100\,000}$.

Odečteme 1 a následně vydělíme $10 \cdot 0{,}85$ a dostáváme následující vztah pro kupónovou sazbu $i = \dfrac{\dfrac{120\,000}{100\,000} - 1}{10 \cdot 0.85} \approx 0{,}0235$.
Abychom měli 120 000 Kč, musí být kupónová sazba alespoň 2,35 %.

3.2 Dluhopisy s pohyblivým výnosem

V této kapitole se budeme věnovat dluhopisům, kde je úrok pohyblivý, konkrétně se budeme zabývat dluhopisům s pohyblivým kupónem a indexovaným dluhopisům. U obou těchto typů dluhopisů majitel dopředu neví, kolik bude od emitenta dostávat.

Dluhopisy s pohyblivým kupónem

Kupón je závislý na úrokové sazbě, často jde o mezibankovní sazbu jako například PRIBOR nebo LIBOR.

PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate) je průměrná úroková sazba, za kterou si banky půjčují na pražském mezibankovním trhu.

LIBOR (London InterBank offered rate) je průměrná úroková sazba, za kterou si banky půjčují na londýnském mezibankovním trhu.

Indexované dluhopisy

Kupónové platby u indexových dluhopisů jsou vázány na vývoj indexů, například na vývoj inflace, mezd, cen zlata, ropy či jiných komodit nebo na vývoj akciového indexu.

Příkladem indexového dluhopisu je Povodňový dluhopis emitovaný Ministerstvem financí České republiky v roce 1997.

Příklad

Povodňový dluhopis 1997 (zdroj: MF ČR (2019))
V létě 1997 se Českem prohnala ničivá povodeň, která za sebou nechala škody ve výši téměř miliard korun. To představovalo 12 % tehdejšího státního rozpočtu. Stát tudíž potřeboval peníze, a proto nabídl občanům dluhopisy v celkové hodnotě 2,8 miliardy korun na dobu pěti let.

Povodňové dluhopisy byly emitovány celkem ve třech emisích (1. 8. 1997, 29. 8. 1997, 29. 8. 1997). V tomto příkladu se zaměříme na první emisi, která probíhala 1. 8. 1997 a doba splatnosti byla 1. 8. 2002. Celková nominální hodnota emise byla 1 000 000 000 Kč v počtu 600 000 dluhopisů nominální hodnoty 1 000 Kč a 40 000 hromadných dluhopisů. Jeden hromadný dluhopis zahrnoval 10 dluhopisů nominální hodnoty 1 000 Kč.

Emitentem těchto Povodňových dluhopisů bylo Ministerstvu financí České republiky. Dluhopisy mohli v primárním prodeji kupovat právnické a fyzické osoby se sídlem nebo bydlištěm na území České republiky.

Kupónové platby byly vypláceny každý rok vždy 1. 8. Úroková sazba dluhopisu pro 1. rok byla stanovena pevnou úrokovou sazbou ve výši 12,5 % Úroková sazba pro 2. až 5. rok je pohyblivá a je vázána na index spotřebitelských cen (consumer price index, odtud CPI) a stanovila se jako roční nárůst CPI v červnu proti červnu minulého roku oficiálně zveřejňovaný Českým statistickým úřadem v červenci běžného roku navýšený o 2,5 %. Úrok byl zatížen daní 25 %. Minimální roční úroková sazba dluhopisu byla 2,5 %. Nominální hodnota dluhopisu byla splacena majiteli 1. 8. 2002.

Hlavní otázka, kterou si budeme v souvislosti s těmito dluhopisy pokládat je, jaký zisk nám tato investice přinese. Pokud bychom si tuto otázku kladli předtím, než si tento dluhopis koupíme, neznali bychom přesnou odpověď díky pohyblivému kupónu.

Předpokládejme, že 1. 8. 1997 jsme koupili 10 kusů Povodňových dluhopisů v nominální hodnotě jednoho dluhopisu 1 000 Kč. Dále předpokládejme, že stát vyplácí platby vždy zaokrouhlené na koruny, každý dluhopis se zaokrouhluje zvlášť.

V tomto příkladu budeme chtít zpětně určit:

a) kolik korun dostaneme vyplaceno v jednotlivých letech na kupónových platbách,
b) kolik korun celkem dostaneme vyplaceno na kupónových platbách,
c) o kolik procent se za pět let zvýší vložený kapitál,
d) jaký byl průměrný roční výnos v procentech.

Nárůst indexu spotřebitelských cen CPI v červnu proti červnu minulého roku oficiálně zveřejňovaný Českým statistickým úřadem v červenci běžného roku je zobrazený v tabulce 3.3.

Rok	1999	2000	2001	2002
CPI	12 %	2,2 %	4,1 %	5,5 %

Tabulka 3.3: Index spotřebitelských cen od roku 1999 do roku 2002

Řešení

a) V tabulce 3.4 si ukážeme, jak vypadaly jednotlivé kupónové platby.

		Kupónové platby jednoho dluhopisu v Kč		
Datum	**Kupónová sazba**	**Bez daně**	**S daní**	**Transakce**
1.8. 1997				$-10\,000$ Kč
1. 8. 1998	12,5 %	$1\,000 \cdot 0{,}125 = 125$	$125 \cdot 0{,}75 = 93{,}75 \approx 94$	+940 Kč
1. 8. 1999	$12\% + 2{,}5\,\% = 14{,}5\,\%$	$1\,000 \cdot 0{,}145 = 145$	$145 \cdot 0{,}75 = 108{,}75 \approx 109$	+1 090 Kč
1. 8. 2000	$2{,}2\% + 2{,}5\,\% = 4{,}7\,\%$	$1\,000 \cdot 0{,}047 = 47$	$47 \cdot 0{,}75 = 35{,}25 \approx 35$	+352 Kč
1. 8. 2001	$4{,}1\% + 2{,}5\,\% = 6{,}6\,\%$	$1\,000 \cdot 0{,}066 = 66$	$66 \cdot 0{,}75 = 49{,}5 \approx 50$	+500 Kč
1. 8. 2002	$5{,}5\% + 2{,}5\,\% = 8\,\%$	$1\,000 \cdot 0{,}08 = 80$	$80 \cdot 0{,}75 = 60$	+600 Kč +10 000 Kč = 10 600 Kč

Tabulka 3.4: Kupónové platby

b) Dostaneme vyplaceno na kupónových platbách za 5 let:
$(940 + 1\,090 + 352 + 500 + 600)$ Kč $= 3\,482$ Kč.
c) Celkem nakoupíme dluhopisy za 10 000 Kč a od státu dostaneme vyplaceno na kupónových platbách 3 482 Kč.
Vložený kapitál se za pět let zvýší o $\frac{3\,482\,\text{Kč}}{10\,000\,\text{Kč}} \cdot 100\,\% = 34{,}82\,\%$.
d) Průměrný roční výnos můžeme spočítat pomocí průměrné roční kupónové platby, která je $\frac{3\,482\,\text{Kč}}{5} = 696{,}4$ Kč, pak průměrný roční výnos je $\frac{696{,}4\,\text{Kč}}{10\,000\,\text{Kč}} = 6{,}964\,\%$. Nebo průměrný roční výnos spočítáme jako $\frac{34{,}82\,\%}{5} = 6{,}964\,\%$.

Úloha

Firma A se rozhodne vydat tříleté dluhopisy, protože chce investovat do nové továrny. Toto se rozhodne emitovat indexové dluhopisy vázané na vývoj inflace v České republice. Datum emise je stanoveno na 1. leden 2010 a výplata nominální hodnoty se koná 1. ledna 2013. Kupónové platby budou probíhat vždy 1. ledna a úroková sazba se stanoví jako míra inflace za daný rok navýšená o 0,5 %.

Předpokládejme, že si koupíme 50 dluhopisů firmy A v nominální hodnotě jednoho dluhopisu 500 Kč. U dluhopisů emitovaných v roce 2000 a později platí, že sazba srážkové daně je 15 % a tato daň je odvedena emitentem. Dále předpokládejme, že firma A vyplácí platby vždy zaokrouhlené na koruny.

Vypočtěte,

a) kolik korun dostaneme vyplaceno v jednotlivých letech na kupónových platbách,
b) kolik korun celkem dostaneme vyplaceno na kupónových platbách,
c) o kolik procent se za tři roky zvýší vložený kapitál,
d) jaký byl průměrný roční výnos v procentech.

Míra inflace v jednotlivých letech je zobrazena v tabulce 3.5.

2005	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
1,9 %	2,5 %	2,8 %	6,3 %	1,0 %	1,5 %	1,9 %	3,3 %	1,4 %	0,4 %	0,3 %	0,7 %	2,5 %

Tabulka 3.5: Index spotřebitelských cen od roku 2005 do roku 2017

Řešení

a) První kupónová platba proběhne 1. leden 2011. Inflace v roce 2010 byla 1,5 %. Celková kupónová sazba pro první rok je $1{,}5\,\% + 0{,}5\,\% = 2\,\%$.
První kupónová platba bez daně se spočítá jako $50 \cdot 500\,\text{Kč} \cdot 0{,}02 = 500\,\text{Kč}$ s daní je to $500\,\text{Kč} \cdot 0{,}85 = 425\,\text{Kč}$.
Kupónová sazba pro druhý rok je $1{,}9\,\% + 0{,}5\,\% = 2{,}4\,\%$. Druhá kupónová platba se spočítá jako $50 \cdot 500\,\text{Kč} \cdot 0{,}024 \cdot 0{,}85 = 510\,\text{Kč}$.
Kupónová sazba pro třetí rok je $3{,}3\,\% + 0{,}5\,\% = 3{,}8\,\%$. Třetí kupónová platba se spočítá jako $50 \cdot 500\,\text{Kč} \cdot 0{,}038 \cdot 0{,}85 \approx 808\,\text{Kč}$.
b) Celkem dostane od firmy A vyplaceno na kupónových platbách
$(425 + 510 + 808)$ Kč $= 1\,743$ Kč.

c) Vložený kapitál se za tři roky zvýší o $\dfrac{1\,743}{50 \cdot 500} \cdot 100\,\% = 6{,}972\,\%$.

d) Průměrný roční výnos byl $\dfrac{6{,}972\,\%}{3} = 2{,}324\,\%$.

3.3 Bezkupónové dluhopisy

Během doby splatnosti těchto dluhopisů nejsou vypláceny žádné kupónové platby. Zisku dosahují věřitelé tím, že cenný papír nakupují s diskontem, tedy pod nominální hodnotou, kterou musí dlužník splatit.

Například dluhopis nominální hodnoty 1 000 Kč nakoupíme za 900 Kč a po době splatnosti dostaneme vyplacenou nominální částku.

Příklad

Město A emituje osmileté bezkupónové dluhopisy s nominální hodnotou 10 000 Kč. Dluhopisy se prodávají s diskontem, diskontní míra je 10 % a daň z diskontu je 15 %.

Rozhodneme se nakoupit dluhopisy města A.

a) Jaká je pořizovací cena jedno dluhopisu města A? Zaokrouhlete na koruny.
b) Kolik dluhopisů města A můžeme nakoupit za 200 000 Kč?
c) Jaký zisk realizujeme na nákupu dluhopisů města A za 8 let, pokud máme k dispozici 200 000 Kč?

Řešení

a) Nákupní cena jednoho dluhopisu města A je
$10\,000\,\text{Kč}\cdot\Big(1-0{,}1\cdot(1-0{,}15)\Big) = 10\,000\,\text{Kč}\cdot\Big(1-0{,}1\cdot 0{,}85\Big) = 10\,000\,\text{Kč}\cdot 0{,}915 = 9\,150\,\text{Kč}.$
b) Za 200 000 Kč nakoupíme $\frac{200\,000}{9\,150} \approx 21$ dluhopisů města A.
c) Celkové nakoupíme dluhopisy za $21 \cdot 9\,000\,\text{Kč} = 99\,001\,\text{Kč}$.
Od města A dostaneme po třech letech zaplaceno $11 \cdot 10\,000\,\text{Kč} = 192\,150\,\text{Kč}$.

Zisk bude rozdíl mezi nominální a nákupní cenou, což je
$210\,000\,\text{Kč} - 192\,150\,\text{Kč} = 17\,850\,\text{Kč}$.

Úlohy

1. Rozhodneme se nakoupit roční dluhopisy, na výběr máme dluhopisy buď firmy A, nebo firmy B.

   Firma A nabízí nákup ročních dluhopisů v nominální hodnotě 20 000 Kč s roční kupónovou sazbou 2 % a daň z úroku je 15 %.

   Firma B nabízí nákup bezkupónových ročních dluhopisů v nominální hodnotě 20 000 Kč. Dluhopisy se prodávají s diskontem, diskontní míra je 2 % a daň z diskontu je 15 %.

   Která firma nabízí finančně výhodnější dluhopisy?

   Řešení

   Po jednom roce firma A vyplatí za každý dluhopis částku
   $20\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 0{,}85) = 20\,340\,\text{Kč}$.

   Dluhopisy firmy B se nakupují za $20\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}02 \cdot 0{,}85) = 19\,660\,\text{Kč}$.

V obou případech je zisk z jednoho dluhopisu 340 Kč. U firmy B zisk realizuje s menším počátečním kapitálem, tedy dluhopisy firmy B jsou finančně výhodnější.

2. Stát emituje bezkupónové desetileté dluhopisy.

   Státní dluhopisy mají nominální hodnotu 10 000 Kč. Dluhopisy se prodávají s diskontem, diskontní míra je 15 % a daň z diskontu je 15 %.

   Jaký zisk realizujeme po 10 letech, pokud nakoupíme 10 kusů těchto dluhopisů?

   Řešení

   Státní dluhopisy se nakupují za $10\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}15 \cdot 0{,}85) = 8\,725\,\text{Kč}$ za 1 kus.

   Celkem nakoupíme 10 kusů státních dluhopisů za $10 \cdot 8\,725\,\text{Kč} = 87\,250\,\text{Kč}$.

   Zisk po deseti letech je $100\,000\,\text{Kč} - 87\,250\,\text{Kč} = 12\,750\,\text{Kč}$.

3. Chceme investovat 100 000 Kč do dluhopisů. Máme na výběr dva dluhopisy firmy C a firmy D.

   Firma C nabízí nákup pětiletých kupónových dluhopisů v nominální hodnotě jednoho dluhopisu 1 000 Kč. Roční kupónová sazba je 1,5 % a daň z úroku je 15 %.

   Firma D nabízí nákup bezkupónových šestiletých dluhopisů v nominální hodnotě 10 000 Kč. Dluhopisy se prodávají s diskontem, diskontní míra je 8 % a daň z diskontu je 15 %.

   Do kterých dluhopisů je finančně výhodnější investovat 100 000 Kč, pokud preferujeme větší zisk?

   Řešení

   Za 100 000 Kč nakoupíme $\frac{100\,000\,\text{Kč}}{1\,000\,\text{Kč}} = 100$ dluhopisů města C.
   Po 5 letech nám firma C vyplatí za 100 dluhopisů částku
   $100\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 0{,}85 \cdot 5) = 106\,375\,\text{Kč}$.

   Zisk ze 100 dluhopisů firmy je $106\,375\,\text{Kč} - 100\,000 = 6\,375\,\text{Kč}$. Ke stejnému zisku dojdeme i následovně $100\,000\,\text{Kč} \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}85 \cdot 5 = 6\,375\,\text{Kč}$.

   Dluhopisy firmy D se nakupují za $10\,000\,\text{Kč} \cdot (1 - 0{,}08 \cdot 0{,}85) = 9\,320\,\text{Kč}$ za 1 kus. To znamená, že za 100 000 Kč nakoupíme 10 dluhopisů firmy D.

   Celkem nakoupíme 10 kusů bezkupónových dluhopisů firmy D za
   $10 \cdot 9\,235\,\text{Kč} = 92\,350\,\text{Kč}$.

   Zisk z 10-ti dluhopisů firmy D je $10 \cdot 10\,000\,\text{Kč} - 93\,200\,\text{Kč} = 6\,800\,\text{Kč}$.

   Větší zisk nám přinese investovat do bezupónových dluhopisů firmy D.

4. Úvěry a půjčky

4.1 Motivace

Každý z nás se setkal ve svém okolí s někým, kdo měl úvěr, resp. půjčku na bydlení.

Uvedeme si konkrétní příklad půjčky a odvodíme si vzorec pro částku, kterou budeme pravidelně splácet. Zatím nebudeme definovat žádné nové pojmy a vyjdeme ze znalostí, které již známe. V tomto motivačním příkladu budeme uvažovat takový model půjčky, při kterém si jednorázově půjčíme danou částku a splátky budeme pravidelně platit každý rok.

Příklad

V bance si půjčíme 1 milion Kč s roční úrokovou sazbou 3 %. Úrokovací období bude rok a částku budeme splácet ve třech ročních splátkách vždy na konci roku. Částku, kterou budeme pravidelně splácet, označíme s.

Bude nás zajímat:

a) výše splátky s v Kč,

b) částka v Kč, kterou celkově za půjčku zaplatíme,

c) částka v Kč, kterou zaplatíme navíc, a kolik procent zaplatíme navíc.

Řešení

Postup řešení uvádíme přehledně v následující tabulce 4.1.

	Dluh v Kč		
Rok	**Před splátkou**	**Po splátce**	**Transakce**
2019		$1\,000\,000 = 10^6$	+ 1 mil. Kč
2020	$10^6 \cdot 1{,}03$	$10^6 \cdot 1{,}03 - s$	-s Kč
2021	$(10^6 \cdot 1{,}03 - s) \cdot 1{,}03 =$ $10^6 \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03$	$10^6 \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s$	-s Kč
2022	$(10^6 \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s) \cdot 1{,}03 =$ $10^6 \cdot 1{,}03^3 - s \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03$	$10^6 \cdot 1{,}03^3 - s \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s$	-s Kč

Tabulka 4.1: Postup řešení pro výpočet splátky.

Samozřejmě požadujeme, abychom po třech splátkách splatili celou částku. Tedy po poslední splátce nebudeme mít žádný dluh:
10^6 Kč $\cdot\, 1{,}03^3 - s$ Kč $\cdot\, 1{,}03^2 - s$ Kč $\cdot\, 1{,}03 - s$ Kč $= 0$ Kč.

Na následující vztah můžeme nahlížet jako na lineární rovnici s neznámou s
10^6 Kč $\cdot\, 1{,}03^3 - s$ Kč $\cdot\, 1{,}03^2 - s$ Kč $\cdot\, 1{,}03 - s$ Kč $= 0$ Kč, rovnici postupně upravíme
10^6 Kč $\cdot\, 1{,}03^3 = s$ Kč $\cdot\, 1{,}03^2 + s$ Kč $\cdot\, 1{,}03 + s$ Kč,
10^6 Kč $\cdot\, 1{,}03^3 = s$ Kč $\cdot\, (1{,}03^2 + 1{,}03 + 1)$.

Na pravé straně rovnice v závorce dostáváme první tři členy geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 1, q = 1{,}03$. Použijeme vzorec pro součet prvních tří členů geometrické posloupnosti $s_3 = a_1 \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$.

$$10^6 \text{ Kč} \cdot 1{,}03^3 = s \text{ Kč} \cdot 1 \cdot \frac{1{,}03^3 - 1}{1{,}03 - 1} \quad / \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03^3 - 1}$$

a) Výše splátky činí $s = \dfrac{10^6\ \text{Kč} \cdot 1{,}03^3 \cdot 0{,}03}{1{,}03^3 - 1} \approx 353\,530\ \text{Kč}$.

b) Celkem zaplatíme $3 \cdot 353\,530\ \text{Kč} = 1\,060\,591\ \text{Kč}$.

c) Určíme $\dfrac{1\,060\,591\ \text{Kč}}{1\,000\,000\ \text{Kč}} - 1 \approx 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

Zaplatíme navíc 60 591 Kč, což je přibližně 6 % zapůjčené částky.

Tento příklad vyvrací často mylnou představu o půjčkách, že při úrokové sazbě 3 % zaplatíme navíc pouze 3 % půjčené částky. V našem příkladu jsme měli úrokovou sazbu 3 % a zaplatili jsme navíc 6 % z půjčené částky. Z postupu, který jsme provedli, plyne, že kdybychom zvyšovali počet splátkových období, tak by rostla částka, kterou celkově zaplatíme. Tedy čím déle splácíme, tím více zaplatíme.

Anuitní splátka

V našem příkladu jsme pravidelně platili splátku s, takovéto splátce budeme říkat **anuitní splátka**.

Úvěr

Úvěrem rozumíme dočasné postoupení finančních prostředků věřitelem dlužníkovi. Dlužník se zavazuje uhradit původní částku s určitým úrokem, a to po uplynutí, nebo v průběhu doby splatnosti.

Úvěr je vymezen v občanském zákoníku, kde jsou uvedeny následující vlastnosti.

- Úvěr musí být pouze peněžitý.
- Úroky musí být sjednány vždy.
- Úvěr nemůže nabízet kdokoliv, ale pouze společnosti, pro které je to předmět podnikání.

U úvěrů pro podnikatele je časté, že splátky nejsou stejně velké. Například majitel firmy si půjčí peníze od banky na rozšíření výroby. Očekává, že rozšíření výroby bude trvat 10 měsíců a další 2 měsíce bude trvat nábor nových zaměstnanců. Z tohoto důvodu je pro podnikatele výhodnější mít první rok menší splátku. Další roky už je nová výroba v provozu a firmě přináší zisk, tedy podnikatel může splácet větší část úvěru.

Příklad

Podnikatel požádá banku o úvěr ve výši 10 mil. Kč. Podnikatel chce úvěr splatit ve třech ročních splátkách. Podnikatel odhaduje, že první rok zaplatí splátku 2 000 000 Kč.

Banka firmě vyhoví a poskytne ji úvěr s úrokovou sazbou 10 % p.a. Úrokovací období je rok. Banka požaduje, aby druhá splátka byla 3 900 000 Kč.

a) Kolik korun činí poslední splátka?

b) Kolik korun podnikatel zaplatí bance celkem na úrocích?

Řešení

a) Banka připíše nejdříve na konci prvního roku úrok a firma bude dlužit
$10\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}1) = 10\,000\,000\,\text{Kč} \cdot 1{,}1 = 11\,000\,000\,\text{Kč}$.
Firma zaplatí první splátku
$2\,000\,000\,\text{Kč}$ a bude dlužit $11\,000\,000\,\text{Kč} - 2\,000\,000\,\text{Kč} = 9\,000\,000\,\text{Kč}$.
Na konci druhého roku banka opět připíše úrok a firma bude dlužit
$9\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}1) = 9\,000\,000\,\text{Kč} \cdot 1{,}1 = 9\,900\,000\,\text{Kč}$.
Firma zaplatí druhou splátku $3\,900\,000\,\text{Kč}$ a bude dlužit
$9\,900\,000\,\text{Kč} - 3\,900\,000\,\text{Kč} = 6\,000\,000\,\text{Kč}$.
Banka na konci třetího roku připíše úrok a firma bude dlužit
$6\,000\,000\,\text{Kč} \cdot (1 + 0{,}1) = 6\,000\,000\,\text{Kč} \cdot 1{,}1 = 6\,600\,000\,\text{Kč}$.
Poslední splátka je $6\,600\,000\,\text{Kč}$.
b) Firma celkem zaplatí na úrocích
$1\,000\,000\,\text{Kč} + 900\,000\,\text{Kč} + 600\,000\,\text{Kč} = 1\,500\,000\,\text{Kč}$.

Všimneme si, že podnikatel zaplatil první splátku 2 mil. Kč, z toho zaplatil 1 mil. Kč jako úrok a pouze o 1 mil. Kč snížil dlužnou částku. V dalších letech už podnikatel díky větším splátkám platil menší úroky.

Konkrétně se problematice úroku a snižování dlužné částky budeme věnovat v samostatné sekci Úmor. V následující sekci se zaměříme na výpočet anuitní splátky.

4.2 Anuitní splátka

V této kapitole ukážeme postup, jak vypočítat anuitní splátku úvěru. Postup bude podobný tomu, co jsme ukazovali v motivačním příkladu.

Odvození vzorce pro anuitní splátku

Banka poskytne na začátku roku úvěr ve výši V Kč s roční úrokovou sazbou i. Dlužník splatí úvěr n ročními anuitními splátkami vždy na konci roku.

Koncem prvního úrokovacího období banka připíše úrok:
$V + i \cdot V = V \cdot (1 + i)$
Dlužník zaplatí první anuitní splátku ve výši s Kč, kterou sníží dluh:
$V \cdot (1 + i) - s$

Tímto způsobem se bude postupovat po dobu n let, postup je znázorněn v následující tabulce 4.2.

Úrokovací období v letech	Dluh v Kč po připsání úroku	Dluh v Kč po zaplacení anuitní splátky
1	$V + i \cdot V = V \cdot (1+i)$	$V + i \cdot V = V \cdot (1+i) - s$
2	$\Big(V \cdot (1+i) - s\Big) \cdot (1+i)$	$\Big(V \cdot (1+i) - s\Big) \cdot (1+i) - s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\Big\{\Big[\Big(V \cdot (1+i) - s\Big) \cdot (1+i) - s\Big] \dots\Big\} \cdot (1+i)$	$\Big\{\Big[\Big(V \cdot (1+i) - s\Big) \cdot (1+i) - s\Big] \dots\Big\} \cdot (1+i) - s$

Tabulka 4.2: Odvození anuitní splátky.

Platí, že po n anuitních splátkách dlužník zaplatí celý dluh. Tento vztah lze popsat následující lineární rovnice s neznámou s:
$\Big\{\Big[\Big(V \cdot (1+i) - s\Big) \cdot (1+i) - s\Big] \dots\Big\} \cdot (1+i) - s = 0.$

Výraz na levé straně rovnice můžeme postupně roznásobit:
$V \cdot (1+i)^n - s \cdot (1+i)^{n-1} - s \cdot (1+i)^{n-2} \dots - s \cdot (1+i) - s = 0.$

Z tohoto výrazu vytkneme neznámou s, kterou chceme vyjádřit:
$V \cdot (1+i)^n - s \cdot \Big((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1\Big) = 0.$

Poté sečteme členy geometrické posloupnosti v závorce:
$V \cdot (1+i)^n - s \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 0.$

Následně vyjádříme neznámou s a dostaneme:
$s = \dfrac{V \cdot (1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}.$

Výraz na pravé straně rozšíříme $(1+i)^{-n}$ a dostaneme vztah:
$s = \dfrac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}.$

Věta 3. *Pro úvěr ve výši V Kč spláceným n ročními anuitními splátkami a roční úrokovou sazbu i platí:*

$$s = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}},$$

kde s je roční ***anuitní splátka*** *v Kč.*

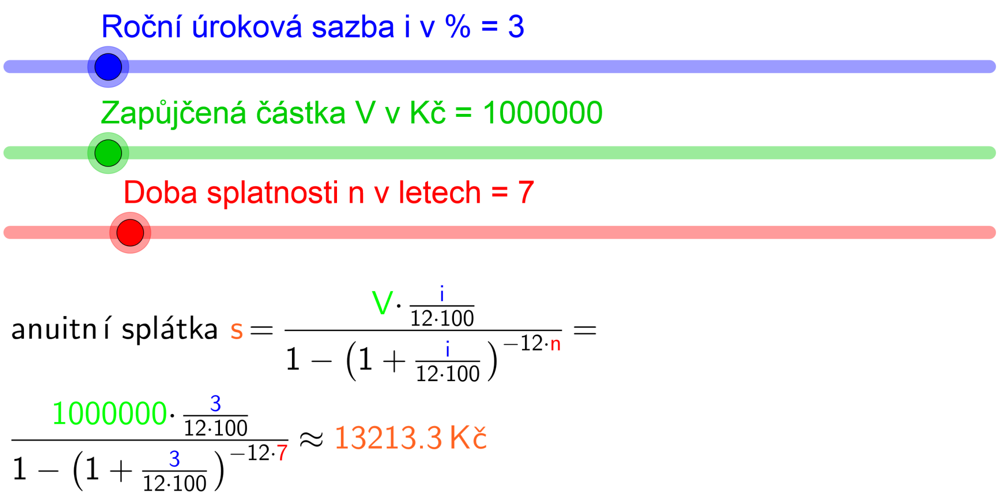
V praxi však většinou platí, že dlužník platí každý měsíc anuitní splátku a banka (nebo jiná instituce) deklaruje roční úrokovou sazbu. Pro tento případ ještě vzorec upravíme, a to podle vztahu mezi efektivní úrokovou sazbou a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení p-krát ročně $(1 + i_{ef}) = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$, kde i je roční úroková sazba s frekvencí úročení p-krát ročně. Poté dostaneme následující vzorec pro anuitní splátku.

Věta 4. *Pro úvěr ve výši V Kč s roční úrokovou sazbou i, splácený měsíčními anuitními splátkami po dobu n letý platí:*

$$s = \frac{V \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}},$$

kde s je měsíční ***anuitní splátka*** *v Kč.*

Následující aplikace v appletu na obrázku 4.1 počítá měsíční anuitní splátku úvěru ve výši V Kč s roční úrokovou sazbou i. V aplikaci lze měnit roční úrokovou sazbu i, zapůjčenou částku V Kč a dobu splatnosti n v letech.

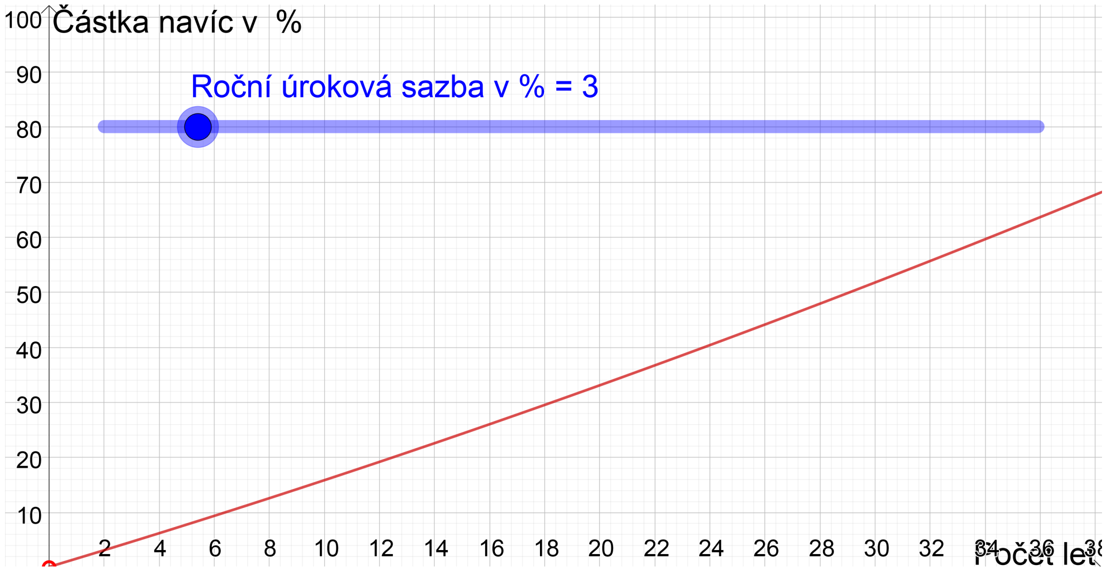


Obrázek 4.1: Applet: Měsíční anuitní splátka

Následující graf v appletu na obrázku 4.2 ukazuje, kolik dlužník zaplatí navíc v závislosti na délce úvěru, tj. počtu měsíčních splátek. V appletu lze měnit roční úrokovou sazbu.

V této kapitole jsme platili splátky na konci úrokovacího období, tomuto způsobu se říká **polhůtní** režim. Pokud bychom platili splátky na začátku úrokovacího období, jednalo by se o **předlhůtní** režim.

V České republice u úvěrů se výhradně používá polhůtní režim. Nyní u úvěrů budeme používat pouze polhůtní režim, tedy splátky jsou placeny na konci úrokovacího období.



Obrázek 4.2: Applet: Částka navíc u úvěru

4.3 Úmor

V této kapitole se budeme věnovat výši úroku a snižování dlužné částky.

Definice 16. ***Úmor dluhu*** *je ta část splátky úvěru (dluhu), která snižuje dlužnou částku.*

Splátka každého úvěru se skládá z úmoru a úroku.

Na následujícím příkladu si ukážeme, jak se anuitní splátka rozkládá na úrok a úmor. Využijeme stejný příklad jako v sekci Motivace.

Příklad

Půjčíme si v bance 1 milion Kč s roční úrokovou sazbou 3 %. Úrokovací období u půjčky bude rok a částku budeme chtít splatit ve třech ročních anuitních splátkách. Označíme s částku, kterou budeme splácet.

Jaký je úrok a úmor v jednotlivých splátkách?

Řešení

Z motivačního příkladu známe vztah pro splátku s. Splátku lze také spočítat již z odvozeného vztahu pro anuitní splátku.

$$s = \frac{V \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-3}} \approx 353\,531 \text{ Kč}.$$

Jak se postupně mění úrok a úmor v tomto příkladu, je zobrazeno v následující tabulce 4.3.

Rok	Dluh na začátku v Kč	Úrok v Kč	Úmor v Kč	Dluh na konci v Kč
0				1 000 000
1	$10^6 \cdot 1{,}03 =$ 1 030 000	$10^6 \cdot 1{,}03 - 10^6 =$ 30 000	$353\,531 - 30\,000 =$ 323 531	$10^6 \cdot 1{,}03 - 353\,531 =$ 676 469
2	$676\,469 \cdot 1{,}03 \approx$ 696 763	$696\,763 - 676\,469 =$ 20 294	$353\,531 - 20\,294 =$ 333 237	$696\,763 - 353\,531 =$ 343 232
3	$343\,232 \cdot 1{,}03 \approx$ 353 528	$353\,528 - 343\,232 =$ 10 296	343 232	0

Tabulka 4.3: Změna úroku a úmoru

Poslední splátka je menší než ostatní, a to z důvodu zaokrouhlování.

Na následujícím grafu na obrázku 4.3 je graficky zobrazen poměr úmoru a úroku v jednotlivých splátkách.

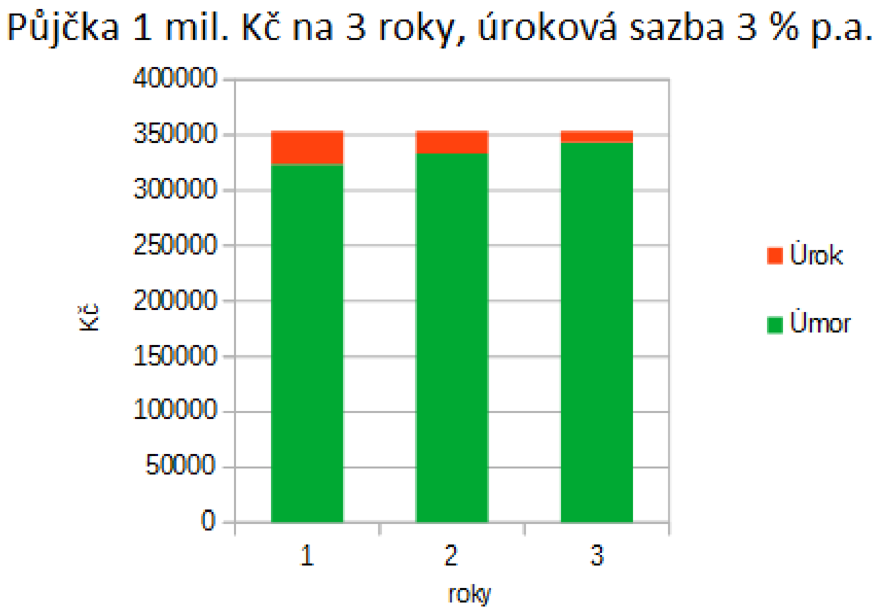
Platí, že úrok klesá a úmor roste s rostoucím počtem úrokovacích období. Při bezúročné půjčce se úmor rovná výši splátky.

Abychom si lépe ukázali, jak se mění úrok a úmor, zvyšme v následujícím příkladu počet splátek.

Příklad

Půjčíme si v bance 1 milion Kč s roční úrokovou sazbou 3 %. Úrokovací období u půjčky bude rok a částku budeme chtít splatit v deseti ročních anuitních splátkách. Označíme s částku, kterou budeme splácet.

Graficky znázorněte úrok a úmor v jednotlivých splátkách.



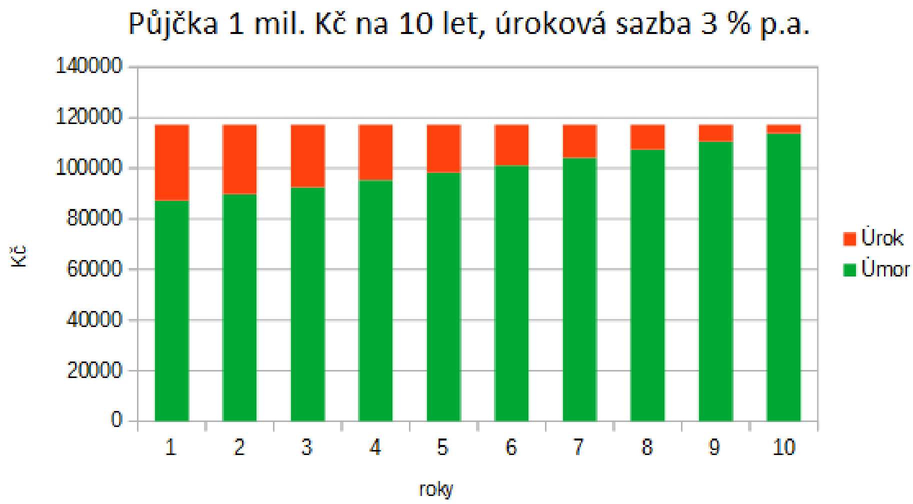
Obrázek 4.3: Poměr úroku a úmoru na půjčce na 1 mil. Kč na 3 roky s úrokovou sazba 3 % p.a.

Řešení

Splátku s spočítáme pomocí již odvozeného vztahu pro anuitní splátku.

$$s = \frac{V \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-10}} \approx 117\,231 \text{ Kč}$$

Na následujícím grafu na obrázku 4.4 je zobrazen poměr úmoru a úroku v jednotlivých splátkách.



Obrázek 4.4: Poměr úroku a úmoru na půjčce na 1 mil. Kč na 10 let s úrokovou sazba 3 % p.a.

4.4 Úvěrové produkty

V této kapitole si představíme některé úvěrové produkty. Zaměříme se na nejpoužívanější úvěry. Cílem není popsat všechny možné úvěrové produkty. Popíšeme si detaily, kde se úvěrové produkty liší.

Hypotéka

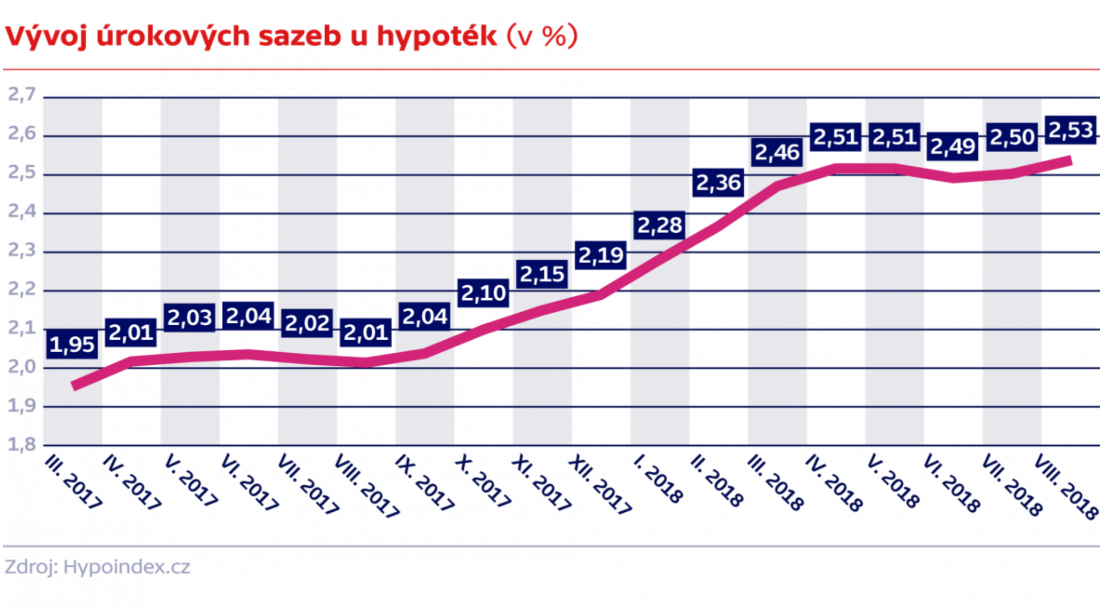
Nejznámější a nejpoužívanější úvěrový produkt je hypoteční úvěr (hypotéka).

Definice 17. ***Hypoteční úvěr*** *je úvěr zajištěný zástavním právem (hypotéka = zástava) k nemovitosti. Nejčastěji je využit k nákupu či rekonstrukci nemovitosti za účelem bydlení či pronájmu (účelová hypotéka).*

V České republice je tento úvěr určený fyzickým i právnickým osobám, ovšem vždy musí být zajištěný zástavním právem k nemovitosti na území ČR.

Hypotéky bývají spláceny pravidelnými měsíčními splátkami.

Následující graf na obrázku 4.5 zachycuje vývoj úrokových sazeb u hypoték v ČR v období od března 2017 do srpna 2018.



Obrázek 4.5: Vývoj úrokových sazeb u hypoték v ČR v období od března 2017 do srpna 2018 (zdroj: ČT (2019), hypoindex.cz (2019))

Úrokové sazby u hypoték jsou obvykle nižší než u jiných úvěrů, neboť u hypotéky dlužník ručí nemovitostí.

Hypotéky jsou většinou sjednané na delší dobu, ale poskytovatel hypoték (např. banka) neví, jaká bude ekonomická situace za několik let, zejména jaká bude úroková reposazba ČNB. Proto poskytovatelé hypoték fixují úrokové sazby na určitý časový úsek.

Definice 18. ***Fixace úrokové sazby*** *u hypotečního úvěru je časový úsek, po který je úroková sazba úvěru neměnná.*

Po ukončení fixace se úroková sazba mění dle aktuální ekonomické situace a úrokové reposazby ČNB. Banky většinou fixují úrokovou sazbu po dobu od 1 roku až 5 let.

Po ukončení fixace může nastat jedna z možností:

- banka nabídne klientovi nové podmínky (změní úrokovou sazbu),
- klient může refinancovat hypotéku (klient odejde ze stávající banky a pokračuje s hypotékou u nové banky),
- klient může splatit zbytek dlužné částky.

Spotřebitelský úvěr

Další úvěrový produkt, který je hojně používané občany je spotřebitelský úvěr.

Definice 19. ***Spotřebitelský úvěr*** *je úvěr, který umožňuje financovat nepodnikatelské potřeby občanů.*

Spotřebitelský úvěr (spotřební úvěr) dělíme na účelový spotřební úvěr a neúčelový spotřební úvěr.

Účelový spotřební úvěr je určen k získání konkrétního zboží či služeb. Používá se k nákupu spotřebních předmětů (např. elektronika), k zaplacení dovolené, k rekonstrukci bytu či domu atd.

Neúčelový spotřební úvěr je určen na řešení libovolných osobních potřeb klienta. Nezkoumá se účel a užití zapůjčených finančních prostředků.

RPSN

RPSN je termín, který se k úvěrovým produktům přímo vztahuje a zahrnuje náklady spojené s úvěrem. Navíc od 1. ledna 2002 je poskytovatel spotřebitelského úvěru ze zákona povinen uvádět u své nabídky i RPSN, u ostatních úvěru není povinné uvádět RPSN.

Definice 20. ***RPSN (roční procentní sazba nákladů)*** *udává procentuální podíl z dlužné částky, který musí spotřebitel zaplatit za období jednoho roku v souvislosti se splátkami, správou a dalšími výdaji spojenými s čerpáním úvěru.*

RPSN umožní přesnější porovnání výhodnosti úvěrů, neboť kromě úroku vstupují do hry další faktory jako:

- poplatky za uzavření smlouvy,
- poplatky za správu úvěru,
- poplatky za vedení účtu,
- pojištění,
- atd.

Příklad

Banka poskytla klientce na konci roku 2015 hypotéku na 5 let ve výši 2 000 000 Kč se tříletou fixací. Roční úroková sazba hypotéky byla 3 %, úrokovací období je jeden rok a klientka má platit splátky vždy na konci roku. Výše jedné splátky je stanovena tak, že by úvěr měl být splacen v pěti stejných splátkách. Pro výpočet anuitní splátky předpokládejte neměnnou roční úrokovou sazbu.

Vypočítejte

a) výši jedné splátky, částku zaokrouhlete na koruny,
b) kolik korun klientce bude bance dlužit po ukončení fixace.

Řešení

a) Označme s anuitní splátku v korunách.
Dluh po zaplacení první splátky bude $2\,000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03 - s$.
Dluh po zaplacení druhé splátky bude $2\,000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s$.
$\vdots$
Dluh po zaplacení páté splátky bude
$2\,000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03^5 - s \cdot 1{,}03^4 - s \cdot 1{,}03^3 - s \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s$.
Po pěti letech by klientka již bance splatila celou hypotéku. Tudíž platí
$000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03^5 - s \cdot 1{,}03^4 - s \cdot 1{,}03^3 - s \cdot 1{,}03^2 - s \cdot 1{,}03 - s = 0$ Kč.
Postupnými úpravami dostáváme
$2\,000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03^5 = s \cdot (1{,}03^4 - 1{,}03^3 - 1{,}03^2 - 1{,}03 - 1)$,
$2\,000\,000$ Kč $\cdot\, 1{,}03^5 = s \cdot \dfrac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1}$.
$$s = \frac{2\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}03^5 \cdot 0{,}03}{1{,}03^5 - 1} \approx 436\,709 \text{ Kč}$$
Výši jedné splátky je $436\,709$ Kč.

b) Klientka po třech letech splatí $4 \cdot 436\,709$ Kč $= 1\,310\,127$ Kč.
Klientka bude tedy ještě dlužit $2\,000\,000$ Kč $- 1\,310\,127$ Kč $= 689\,873$ Kč.

4.5 Úlohy

1. Banka poskytla panu A na konci roku 2018 úvěr ve výši 2 000 000 Kč. Roční úroková sazba úvěru je 8 % (úrokovací období je jeden rok) a pan A má úvěr splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2019, 2020 a 2021).

   a) Výši jedné splátky v Kč označte s. V závislosti na neznámé s doplňte volná pole v následující tabulce 4.4.

	Dluh v Kč		
Konec roku	**Před splátkou**	**Po splátce**	**Stav v Kč**
2018	X	X	2 000 000
2019			X
2020			X
2021			0

Tabulka 4.4: Úloha 1 úvěry - zadání

   b) Sestavte rovnici s neznámou s a vypočtěte výši jedné splátky, částku zaokrouhlete na koruny.

   c) Dále vypočtěte, kolik Kč zaplatí pan A na úrocích a kolik procent z půjčené částky pan A bance zaplatí na úrocích.

Řešení

a) Řešení je v tabulce 4.5.

	Dluh v Kč		
Konec roku	**Před splátkou**	**Po splátce**	**Stav v Kč**
2018	X	X	2 000 000
2019	$2\,000\,000 \cdot 1{,}08$	$2\,000\,000 \cdot 1{,}08 - s$	X
2020	$(2\,000\,000 \cdot 1{,}08 - s) \cdot 1{,}08 =$ $2\,000\,000 \cdot 1{,}08^2 - s \cdot 1{,}08$	$2\,000\,000 \cdot 1{,}08^2 -$ $s \cdot 1{,}08 - s$	X
2021	$(2\,000\,000 \cdot 1{,}08^2 - s \cdot 1{,}08 - s) \cdot 1{,}08 =$ $2\,000\,000 \cdot 1{,}08^3 - s \cdot 1{,}08^2 - s \cdot 1{,}08$	$2\,000\,000 \cdot 1{,}08^3 -$ $s \cdot 1{,}08^2 - s \cdot 1{,}08 - s$	0

Tabulka 4.5: Úloha 1 úvěry - řešení

b) Na konci roku 2021 bude celá půjčka splacena, dostáváme následující rovnici pro neznámou s.

$2\,000\,000 \cdot 1{,}08^3 - s \cdot 1{,}08^2 - s \cdot 1{,}08 - s = 0$

Převedeme všechny členy s neznámou s na pravou stranu rovnice. Poté nám vznikne geometrická posloupnost, kterou sečteme a následně vyjádříme neznámou s.

$2\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}08^3 = s \cdot 1{,}08^2 + s \cdot 1{,}08 + s$

$2\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}08^3 = s \cdot (1{,}08^2 + 1{,}08 + 1)$

$2\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}08^3 = s \cdot \dfrac{1{,}08^3 - 1}{1{,}08 - 1}$

$s = \dfrac{2\,000\,000 \cdot 1{,}08^3 \cdot 0{,}08}{1{,}08^3 - 1}$ Kč $\approx 779\,067{,}03$ Kč $\approx 779\,067$ Kč

Výše jedné anuitní splátky je 779 067 Kč.

c) Celkem pan A zaplatí $3 \cdot 779\,067$ Kč $= 2\,328\,201$ Kč.

Pan A zaplatí na úrocích $(2\,328\,201 - 2\,000\,000)$ Kč $= 328\,201$ Kč.

Pan A zaplatí navíc $\frac{328\,201 \text{ Kč}}{2\,000\,000 \text{ Kč}} \cdot 100\,\% \approx 16\,\%$.

Banka poskytla paní B na konci roku 2018 úvěr na 10 let ve výši 4 000 000 Kč. Roční úroková sazba úvěru je 6 %, úrokovací období je jeden rok a paní B má úvěr splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku.

Vypočtěte výši jedné splátky, částku zaokrouhlete na koruny. Dále vypočtěte, kolik korun zaplatí paní B na úrocích a kolik procent z půjčené částky paní B bance zaplatí na úrocích.

Řešení

Označme výši anuitní splátky s.

Dluh po první splátce bude $(4\,000\,000 \cdot 1{,}06 - s)$ Kč.

Dluh po druhé splátce bude $(4\,000\,000 \cdot 1{,}06^2 - s \cdot 1{,}06 - s)$ Kč.

Takto budeme postupovat až do 10 splátek, kdy paní B bude dlužit 0 Kč.

$4\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}06^{10} - s \cdot 1{,}06^9 - \ldots - s \cdot 1{,}06 - s = 0$

$4\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}06^{10} = s \cdot (1{,}06^9 - \ldots - 1{,}06 - 1)$

$4\,000\,000 \text{ Kč} \cdot 1{,}06^{10} = s \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1}$

$s = \dfrac{4\,000\,000 \cdot 1{,}06^{10} \cdot 0{,}06}{1{,}06^{10} - 1}$ Kč $\approx 543\,472$ Kč

Výše jedné anuitní splátky je 543 472 Kč.

Celkem paní B zaplatí $10 \cdot 543\,472$ Kč $= 5\,434{,}720$ Kč.

Paní B zaplatí na úrocích $(5\,434{,}720 - 4\,000\,000)$ Kč $= 1\,434\,720$ Kč.

Paní B zaplatí navíc $\frac{1\,434\,720}{4\,000\,000} \cdot 100\,\% \approx 36\,\%$.

2. Banka poskytla panu C nav konci roku 2018 hypoteční úvěr ve výši 2 000 000 Kč. Hypoteční úvěr je sjednán na 10 let, s roční úrokovou sazba fixovanou na celou dobu splácení na 5 % a měsíčním úrokovacím obdobím. Úvěr je splácen pravidelnými měsíčními anuitními splátkami, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 10 let.

   Vypočtěte výši jedné splátky, částku zaokrouhlete na koruny. Dále vypočtěte, kolik korun zaplatí pan C na úrocích a kolik procent z půjčené částky pan C bance zaplatí na úrocích.

Řešení

Důležité je si uvědomit, že banka úročí měsíčně, ale banka uvádí roční úrokovou sazbu.

Nejdříve odvodíme vztah pro roční úrokovací období a následně použijeme vztah mezi efektivní a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení $p-$krát ročně.

Označme si půjčenou částku jako V, roční úrokovou sazbu i a n dobu splacení v letech. Budeme chtít vyjádřit výši anuitní splátky s.

Dluh po první roční splátce je $V \cdot (1+i) - s$.

Dluh po druhé roční splátce je $V \cdot (1+i)^2 - s \cdot (1+i) - s$.

Takto budeme postupovat až do n splátek, kdy budeme dlužit 0 Kč.

$V \cdot (1+i)^n - s \cdot (1+i)^{n-1} - \ldots - s = 0$

$V \cdot (1+i)^n - s \cdot \Big((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1\Big) = 0$

Následně vyjádříme neznámou s a dostaneme:

$s = \dfrac{V \cdot (1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \dfrac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}.$

Poté využijeme vztah mezi efektivní a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení $p-$krát ročně $(1 + i_{ef}) = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p$, kde i je roční úroková sazba s frekvencí úročení p-krát ročně. Poté dostaneme následující vztah pro anuitní splátku.

$$s = \frac{V \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}}$$

$$s = \frac{2\,000\,000 \cdot \frac{0{,}05}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{-12 \cdot 10}} \text{ Kč} \approx 21\,213 \text{ Kč}$$

Celkem pan C zaplatí $12 \cdot 10 \cdot 21\,213$ Kč $= 2\,545\,572$ Kč.

Pan C zaplatí na úrocích $(2\,545\,572 - 2\,000\,000)$ Kč $= 545\,572$ Kč.

Pan C zaplatí navíc $\frac{545\,572}{2\,000\,000} \cdot 100\,\% \approx 27\,\%$.

3. Lichvář nabízí půjčku 10 000 Kč. Požaduje ji splatit ve dvou stejných splátkách 6 000 Kč. První splátku vyžaduje splatit po 1. roce a druhou po uplynutí 2. roku. Jaká je roční úroková sazba úvěru lichváře zaokrouhlená na celá procenta?

Řešení

Označme úrokovou sazbu i.

Dluh po první splátce bude $\Big(10000 \cdot (1+i) - 6000\Big)$ Kč.

Dluh po druhé splátce bude $\Big(10000 \cdot (1+i)^2 - 6000 \cdot (1+i) - 6000\Big)$ Kč.

Dluh pak bude 0 Kč.

Označme $x = 1 + i$.

Pak platí: $10000x^2 - 6000x - 6000 = 0$.

Kvadratickou rovnici upravíme na tvar $5x^2 - 3x - 3 = 0$.

$D = 9 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 69$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{69}}{10}$

Dostáváme $x = 1{,}1307$, pak $i = 0{,}1307$.

Roční úroková sazba úvěru lichváře je 0,1307, což je přibližně 13 %.

5. Spoření

5.1 Motivace spoření

Asi jen málokdo z nás si může říci, že je na tom tak dobře, že nepotřebuje šetřit. Co člověk, to asi jiná motivace ke spoření. Myslet na budoucnost je důležité, proto si ukážeme, jak spoření funguje a jaké jsou možnosti spořit v dnešní době.

Nejprve si ukážeme jednoduchý motivační příklad, na kterém odvodíme, jak spočítat naspořenou částku.

Budeme uvažovat zjednodušený případ, kdy nezahrneme daň z úroku a úrokovací období bude rok. V praxi však bývá častější měsíční úrokovací období.

Příklad

Založíme si v bance spořicí účet na konci roku 2019 a bude na něm mít zůstatek 0 Kč. Na začátku každého roku vložíme na účet 10 000 Kč. Banka úročí kapitál jednou ročně, a to vždy na konci roku s roční úrokovou sazbou 2 %. Daň z úroku neuvažujeme.

Jakou částku zaokrouhlenou na koruny naspoříme na konci roku 2022?

Řešení

Tabulka 5.1 ukazuje, jak spoření funguje a jaký je pohyb na spořicím účtu.

	1.1.		**31.12.**
Rok	**Vklad v Kč**	**Stav účtu v Kč**	**Stav účtu v Kč**
2019		není založen	0
2020	+10 000	$0 + 10\,000$	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}02 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02) = 10\,200$
2021	+10 000	10 200	$\Big(10\,000 \cdot 1{,}02 + 10\,000\Big) \cdot 1{,}02 = 10\,000 \cdot 1{,}02^2 + 10\,000 \cdot 1{,}02 = 20\,604$
2022	+10 000	20 604	$\Big(10\,000 \cdot 1{,}02^2 + 10\,000 \cdot 1{,}02 + 10\,000\Big) \cdot 1{,}02 = 10\,000 \cdot 1{,}02^3 + 10\,000 \cdot 1{,}02^2 + 10\,000 \cdot 1{,}02 = 31\,216{,}08 \approx 31\,216$

Tabulka 5.1: Spoření motivační příklad - naspořená částka po 3 letech

Na konci roku 2022 budeme mít naspořeno 31 216 Kč.

Připomínáme, že banky dnes pracují s počítačovým softwarem, který obvykle zaokrouhluje částky na dvě desetinná místa (haléře). Avšak vybrat lze pouze částku v korunách (bez haléřů).

Režimy spoření

V tomto příkladu jsme kapitál ukládali na začátku roku, tedy na začátku úrokovacího období. Jedná se tedy o **předlhůtní spoření**.

Kdybychom kapitál v příkladu ukládali na konci roku, tedy na konci úrokovacího období, jednalo by se o **polhůtní spoření**.

Dnes vklady probíhají často pomocí bankovních online aplikací. Vklad lze většinou provést v rozmezí několika dní. Polhůtní a předlhůtní režim úročení závisí na tom, k jakému datu banka vklad započítá.

Například můžeme mít polhůtní spoření a úrokovací období měsíc. Vklady probíhají přes online bankovnictví a vklad lze provést vždy do konce posledního pracovního dne v měsíci. Banka pak úročí vklad, jako by byl vložen na konci měsíce, tedy na konci úrokovacího období.

V této kapitole u příkladů a úloh pro přehlednost vždy uvedeme konkrétní dny vkladů.

V další sekci si můžete ověřit, že se kapitál naspořený pomocí polhůtního a předlhůtního spoření liší v současné době velice málo.

5.2 Spoření

V této kapitole si odvodíme vztah pro naspořenou částku u polhůtního a předlhůtního spoření. Použijeme podobný postup, který jsme použili v sekci Motivace spoření.

Polhůtní spoření (kapitál je ukládán na konci každého úrokovacího období)

Na konci každého roku budeme ukládat na spořicí účet v bance kapitál K po dobu n let. Roční úroková sazba na spořicím účtu je i a kapitál se úročí vždy na konci roku. Daň z úroku neuvažujeme.

Bude nás zajímat naspořený kapitál po n letech.

Na konci prvního roku budeme mít naspořeno K, neboť vklad byl vložen do banky až na konci prvního roku, a proto se vklad neúročí.
Na konci druhého roku budeme mít naspořeno $K \cdot (1+i) + K$.
Na konci třetího roku budeme mít naspořeno
$\Big(K \cdot (1+i) + K\Big) \cdot (1+i) + K = K \cdot (1+i)^2 + K \cdot (1+i) + K$.
$\vdots$
Na konci n-tého roku budeme mít naspořeno
$K_n = K \cdot (1+i)^{n-1} + K \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + K \cdot (1+i) + K$.
Dále upravíme $K_n = K \cdot \Big((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1\Big)$.

V závorce je prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1+i$ a prvním členem $a_1 = 1$, s využitím vztahu pro součet prvních n členů této posloupnosti dostáváme naspořený kapitál po n letech
$K_n = K \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = K \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Předlhůtní spoření (kapitál je ukládán na začátku každého úrokovacího období)

Na začátku každého roku budeme ukládat na spořicí účet v bance kapitál K po dobu n let. Roční úroková sazba na spořicím účtu je i a kapitál se úročí vždy na konci roku. Daň z úroku neuvažujeme.

Bude nás zajímat naspořený kapitál po n letech.

Na konci prvního roku budeme mít naspořeno $K \cdot (1+i)$, neboť vklad byl vložen do banky na začátku prvního roku a banka vklad úročí na konci roku.
Na konci druhého roku budeme mít naspořeno
$\Big(K \cdot (1+i) + K\Big) \cdot (1+i) = K \cdot (1+i)^2 + K \cdot (1+i)$.
Na konci třetího roku budeme mít naspořeno
$\Big(K \cdot (1+i)^2 + K \cdot (1+i) + K\Big) \cdot (1+i) = K \cdot (1+i)^3 + K \cdot (1+i)^2 + K \cdot (1+i)$.
$\vdots$
Na konci n-tého roku budeme mít naspořeno
$K_n = K \cdot (1+i)^n + K \cdot (1+i)^{n-1} + \cdots + K \cdot (1+i)$.
Dále upravíme
$K_n = K \cdot \Big((1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i)\Big) =$

$K \cdot (1+i) \cdot \Big((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1\Big).$

V závorce je prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1+i$ a prvním členem $a_1 = 1$, s využitím vztahu pro součet prvních n členů této posloupnosti dostáváme naspořený kapitál po n letech

$K_n = K \cdot (1+i) \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = K \cdot (1+i) \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Věta 5. *Při* ***polhůtním spoření****, kdy kapitál K je ukládán na konci každého ročního úrokovacího období, i je roční úroková sazba a neuvažujeme daň z úroku, je dán naspořený kapitál po n letech vztahem*

$$K_n = K \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Při ***předlhůtním spoření****, kdy kapitál K je ukládán na začátku ročního úrokovacího období, i je roční úroková sazba a neuvažujeme daň z úroku, je dán naspořený kapitál po n letech vztahem*

$$K_n = K \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

V praxi však většinou platí, že klient vkládá částku každý měsíc, banka (nebo jiná instituce) deklaruje roční úrokovou sazbu a měsíční úrokovací období. Pro tento případ ještě vzorec upravíme, a to podle vztahu mezi efektivní úrokovou sazbou a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení p-krát ročně $(1 + i_{ef}) = \Big(1 + \frac{i}{p}\Big)^p$, kde i je roční úroková sazba s frekvencí úročení p-krát ročně. Navíc ze zákona platí, že klient je povinen zaplatit daň z úroku. Poté dostaneme následující vzorec pro naspořenou částku.

Věta 6. *Při* ***polhůtním spoření****, kdy kapitál K je ukládán na konci každého měsíčního úrokovacího období s roční úrokovou sazbou i, daní z úroku i_{tax}, je dán naspořený kapitál po n letech vztahem*

$$K_n = K \cdot \frac{\Big(1 + \frac{i}{12} \cdot (1 - i_{tax})\Big)^{12n} - 1}{\frac{i}{12} \cdot (1 - i_{tax})}.$$

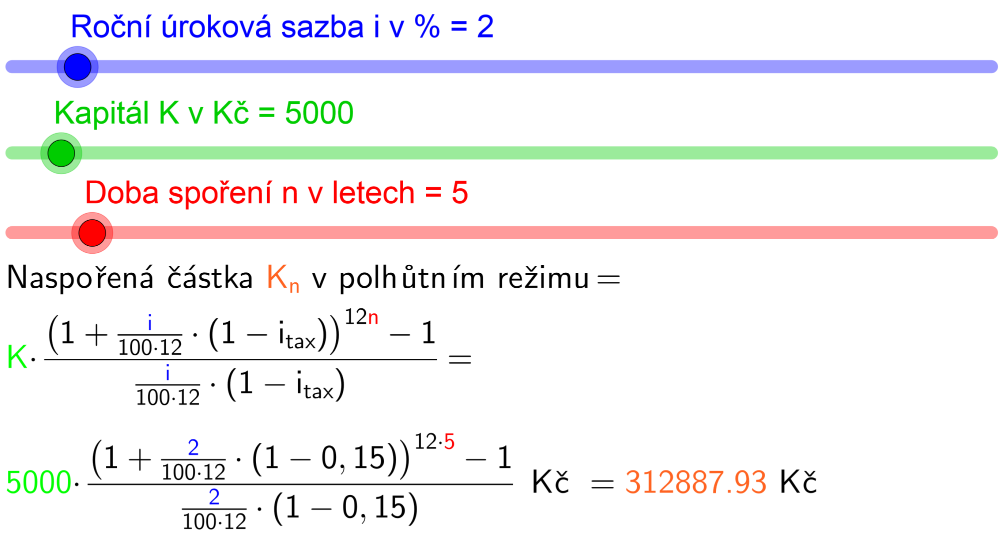
Při ***předlhůtním spoření****, kdy kapitál K je ukládán na začátku každého měsíčního úrokovacího období s roční úrokovou sazbou i, daní z úroku i_{tax}, je dán naspořený kapitál po n letech vztahem*

$$K_n = K \cdot \Big(1 + \frac{i}{12} \cdot (1 - i_{tax})\Big) \cdot \frac{\Big(1 + \frac{i}{12} \cdot (1 - i_{tax})\Big)^{12n} - 1}{\frac{i}{12} \cdot (1 - i_{tax})}.$$

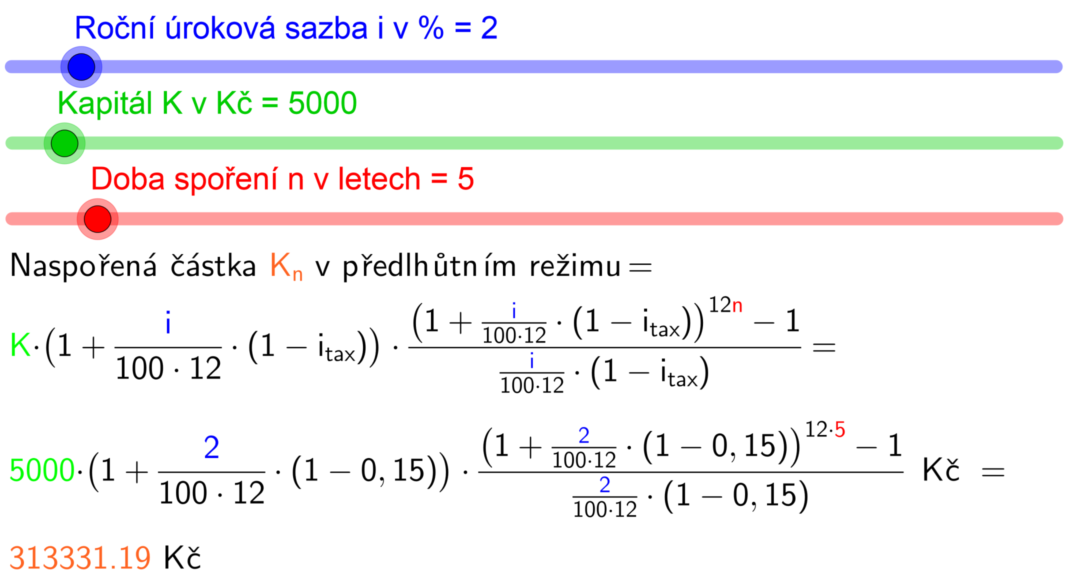
Applet na obrázku 5.1 počítá naspořenou částku v polhůtním režimu při pravidelném měsíčním spoření a měsíčním úrokovacím období. Daňová sazba daná zákonem je 15 %. V appletu lze měnit roční úrokovou sazbu i, kapitál K a délku spoření n v letech.

Další applet na obrázku 5.2 počítá naspořenou částku v předlhůtním režimu při pravidelném měsíčním spoření a měsíčním úrokovacím období. Daňová sazba daná zákonem je 15 %. V appletu lze měnit roční úrokovou sazbu i, kapitál K a délku spoření n v letech.

Pokud v obou appletech na obrázkách 5.1 a 5.2 nastavíme stejné parametry, zjistíme, že rozdíly v naspořeném kapitálu nejsou velké, zejména při nízkém kapitálu K a nízké roční úrokové sazbě i.



Obrázek 5.1: Applet: Naspořená částka v polhůtním režimu



Obrázek 5.2: Applet: Naspořená částka v předlhůtním režimu

5.3 Úlohy

1. Pan A chce pravidelně spořit. Rozhodl se každý měsíc ukládat na spořicí účet 2 000 Kč po dobu jednoho roku. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 3 % a úročí kapitál vždy na konci měsíce. Pro zjednodušení neuvažujte daň z úroků.

   a) Pan A ukládá svůj kapitál vždy na konci každého měsíce. Spočítejte, jakou částku bude mít pan A po roce spoření. Určete, kolik korun činí úroky z naspořené částky.

   Řešení

   Kapitál se ukládá na konci měsíce, jedná se tedy o polhůtní spoření.

   Jelikož máme roční úrokovou sazbu s měsíční frekvencí úročení, využijeme vztah mezi efektivní a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení p-krát ročně. Měsíční úroková sazba bude $\frac{3\,\%}{12} = 0{,}25\,\%$.

   Na konci prvního měsíci bude pan A mít naspořeno 2 000 Kč, úrok se nezapočítá.

   Po druhém měsíci bude pan A mít naspořeno $(2\,000 \cdot 1{,}0025 + 2\,000)$ Kč.

   Po třetím měsíci bude pan A mít naspořeno
   $\big((2\,000 \cdot 1{,}0025 + 2\,000) \cdot 1{,}0025 + 2\,000\big)$ Kč $=$
   $(2\,000 \cdot 1{,}0025^2 + 2\,000 \cdot 1{,}0025 + 2\,000)$ Kč.

   Po jednom roce bude pan A mít naspořeno
   $(2\,000 \cdot 1{,}0025^{11} + 2\,000 \cdot 1{,}0025^{10} + \cdots + 2\,000)$ Kč.

   Dostáváme geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1{,}0025$ a prvním členem $a_1 = 1$, využijeme vzorec pro součet prvních n členů této posloupnosti.

   $$2\,000 \cdot (1{,}0025^{11} + 1{,}0025^{10} + \cdots + 1)\ \text{Kč} = 2\,000 \cdot \frac{1{,}0025^{12} - 1}{1{,}0025 - 1}\ \text{Kč} = 2\,000 \cdot \frac{1{,}0025^{12} - 1}{0{,}0025}\ \text{Kč} \approx 24\,333\ \text{Kč}$$

   Pan A bude mít po roce spoření v polhůtním režimu naspořeno 24 333 Kč.

   Úroky jsou $(24\,333 - 12 \cdot 2\,000)$ Kč $= (24\,333 - 24\,000)$ Kč $= 333$ Kč.

   b) Pan A ukládá svůj kapitál vždy na začátku každého měsíce. Spočítejte, jakou částku bude mít pan A po roce spoření. Určete, kolik korun činí úroky z naspořené částky.

   Řešení

   Tentokrát je kapitál ukládán na začátku měsíce, jedná se tedy o předlhůtní spoření.

   Opět využijeme vztah mezi efektivní a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení p-krát ročně. Měsíční úroková sazba bude $\frac{3\,\%}{12} = 0{,}25\,\%$.

   Na konci prvního měsíci bude pan A mít naspořeno
   $2\,000 \cdot 1{,}0025$ Kč.

Po druhém měsíci bude pan A mít naspořeno
$(2\,000 \cdot 1{,}0025^2 + 2\,000 \cdot 1{,}0025)$ Kč.

Po jednom roce bude pan A mít naspořeno
$(2\,000 \cdot 1{,}0025^{12} + 2\,000 \cdot 1{,}0025^{10} + \cdots + 2\,000 \cdot 1{,}0025)$ Kč.

Dostáváme geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1{,}0025$ a prvním členem $a_1 = 1$, využijeme vzorec pro součet prvních n členů této posloupnosti.
$2\,000 \cdot 1{,}0025 \cdot (1{,}0025^{11} + 2\,000 \cdot 1{,}0025^{10} + \cdots + 1)$ Kč $=$
$2\,000 \cdot 1{,}0025 \cdot \dfrac{1{,}0025^{12} - 1}{1{,}0025 - 1}$ Kč $= 2\,000 \cdot 1{,}0025 \cdot \dfrac{1{,}0025^{12} - 1}{0{,}0025}$ Kč $\approx$
$24\,394$ Kč

Pan A bude mít po roce spoření v předlhůtním režimu naspořeno $24\,394$ Kč.

Úroky jsou $(24\,394 - 12 \cdot 2\,000)$ Kč $= (24\,394 - 24\,000)$ Kč $= 394$ Kč.

2. Paní B chce pravidelně spořit. Rozhodla se vždy na konci měsíce ukládat na spořicí účet částku 2 000 Kč po dobu jednoho roku. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 3 % a úročí kapitál vždy na konci měsíce. Tentokrát uvažujme daň z úroků ve výši 15 %. Spočítejte, jakou částku bude mít paní B po roce spoření. Určete v procentech, jakou část z našetřené částky tvoří úroky po zdanění vyplacené bankou.

Řešení

Kapitál se ukládá na konci měsíce, jedná se tedy o polhůtní spoření.

Opět máme roční úrokovou sazbu s měsíční frekvencí úročení, využijeme vztah mezi efektivní a roční úrokovou sazbou s frekvencí úročení p-krát ročně. Měsíční úroková sazba bude $\frac{3\,\%}{12} = 0{,}25\,\%$.

Na konci prvního měsíci bude mít paní B naspořeno $2\,000$ Kč.

Po druhém měsíci bude mít paní B naspořeno
$\Big(2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot (1 - 0{,}15)) + 2\,000\Big)$ Kč $=$
$\Big(2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85) + 2\,000\Big)$ Kč.

Po třetím měsíci bude mít paní B naspořeno
$\Big(\big(2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85) + 2\,000\big) \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85) + 2\,000\Big)$ Kč $=$
$\Big(2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^2 + 2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85) + 2\,000\Big)$ Kč.

Po jednom roce bude mít paní B naspořeno
$\Big(2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{11} + 2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{10} + \cdots + 2\,000\Big)$ Kč.

Dostáváme geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85$ a prvním členem $a_1 = 1$, využijeme vzorec pro součet prvních n členů této posloupnosti.
$2\,000 \cdot \Big((1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{11} + 2\,000 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{10} + \cdots + 1\Big)$ Kč $=$
$2\,000 \cdot \dfrac{(1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{12} - 1}{(1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85) - 1}$ Kč $=$
$2\,000 \cdot \dfrac{(1 + 0{,}0025 \cdot 0{,}85)^{12} - 1}{0{,}0025 \cdot 0{,}85}$ Kč $\approx 24\,282$ Kč

Paní B bude mít po roce spoření v polhůtním režimu naspořeno po zdanění 24 282 Kč.

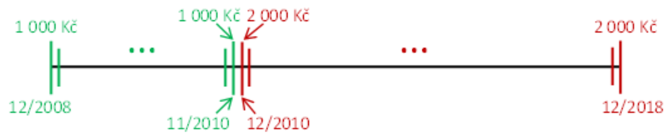
Úroky po zdanění jsou
(24 282 − 12 · 2 000) Kč = (24 282 − 24 000) Kč = 282 Kč.

3. Pan C si na konci roku 2008 založil spořicí účet s roční úrokovou sazbou 1 % a měsíčním úrokovacím obdobím. Banka úročí kapitál vždy na konci měsíce. Při založení účtu uložil 1 000 Kč a stejnou částku pak ukládal na konci každého dalšího měsíce až do konce listopadu roku 2010. Následně na konci každého dalšího měsíce vkládal 2 000 Kč, až do konce roku 2018. Daň z úroku je 15 %.

   a) Určete, jakou částku si tímto způsobem pan C našetří po zdanění.
   b) Určete, kolik činí vklady pana C.
   c) Určete, kolik korun jsou úroky po zdanění.
   d) Určete, kolik činí daň z úroků.

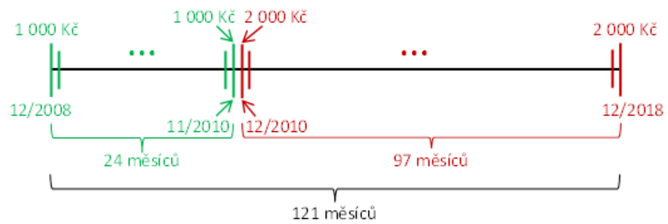
Řešení

Obrázek 5.3 ilustruje, jak jednotlivé vklady probíhají.



Obrázek 5.3: Úloha 3 spoření: vklady

Na obrázku 5.4 lze vidět počet vkladů ve výši 1 000 Kč a 2 000 Kč.



Obrázek 5.4: Úloha 3 spoření: počet vkladů ve výši 1 000 Kč a 2 000 Kč

Na konci prvního měsíce bude mít pan C na spořicím účtu po zdanění 1 000 Kč, neboť se jedná o polhůtní spoření.

Na konci druhého měsíce bude mít pan C na spořicím účtu po zdanění $1\,000\,\text{Kč} \cdot \frac{0{,}01}{12} \cdot 0{,}85 + 1\,000\,\text{Kč}$.

Označme $q = 1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}01}{12}$.

Na konci 24. měsíce bude mít pan C na spořicím účtu po zdanění
$\big(1\,000 \cdot q^{23} + 1\,000 \cdot q^{22} + \cdots + 1\,000\big)$ Kč.

Na konci 25. měsíce bude mít pan C na spořicím účtu po zdanění
$\big(1\,000 \cdot q^{24} + 1\,000 \cdot q^{23} + \cdots + 1\,000q + 2\,0000\big)$ Kč.

Pan C naspoří po 121. měsících po zdanění
$\left(1\,000 \cdot q^{120} + \cdots + 1\,000 \cdot q^{97} + 2\,000 \cdot q^{96} + \cdots + 2\,000\right)$ Kč $=$
$\left(1\,000 \cdot q^{97} \cdot \dfrac{q^{24}-1}{q-1} + 2\,000 \cdot \dfrac{q^{97}-1}{q-1}\right)$ Kč $\approx 226\,663$ Kč.

a) Pan C našetří od prosince 2008 do prosince 2018 kapitál 226 663 Kč po zdanění.

b) Pan C celkem vložil na spořicí účet $(1\,000 \cdot 24 + 2\,000 \cdot 97)$ Kč $= 218\,000$ Kč.

c) Úroky po zdanění jsou $(226\,663 - 218\,000)$ Kč $= 8\,663$ Kč.

d) Abychom mohli spočítat daň z úroků, určíme naspořenou částku bez daně. Následně od této částky odečteme naspořenou částku po zdanění, kterou už jsme vypočítali.

Budeme postupovat stejně jako při výpočtu naspořené částky po zdanění, jen vynecháme daň. Označme $k = \frac{0{,}01}{12}$.

Pak pan C naspoří bez daně
$\left(1\,000 \cdot k^{120} + \cdots + 1\,000 \cdot k^{97} + 2\,000 \cdot k^{96} + \cdots + 2\,000\right)$ Kč $=$
$\left(1\,000 \cdot k^{97} \cdot \dfrac{k^{24}-1}{k-1} + 2\,000 \cdot \dfrac{k^{97}-1}{k-1}\right)$ Kč $\approx 228\,239$ Kč.

Daň z úroků je $(228\,239 - 226\,663)$ Kč $= 1\,576$ Kč.

4. Paní D pravidelně ukládá na konci každého měsíce na spořicí účet částku 10 000 Kč. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 2 % a úročí kapitál vždy na konci měsíce. Daň z úroku je 15 %. Kolik měsíců nejméně musí paní D spořit, aby naspořila 1 000 000 Kč.

Řešení

Označme jako n počet měsíců spoření.

Paní D po n měsících naspoří v polhůtním režimu

$$10\,000 \text{ Kč} \cdot \frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}\right)^n - 1}{0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}}.$$

Dle zadání má být naspořená částka alespoň 1 000 000 Kč, to vyjádříme následující nerovnicí, ze které postupně vyjádříme n.

$$10\,000 \cdot \frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}\right)^n - 1}{0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}} \geq 1\,000\,0000$$

$$\frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}\right)^n - 1}{0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}} \geq 100$$

$$\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}\right)^n - 1 \geq 100 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}$$

$$\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12}\right)^n \geq 100 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{0{,}02}{12} + 1$$

$$\log\left(1+0{,}85\cdot\frac{0{,}02}{12}\right)^n \geq \log\left(100\cdot 0{,}85\cdot\frac{0{,}02}{12}+1\right)$$

$$n\cdot\log\left(1+0{,}85\cdot\frac{0{,}02}{12}\right) \geq \log\left(100\cdot 0{,}85\cdot\frac{0{,}02}{12}+1\right)$$

$$n \geq \frac{\log\left(100\cdot 0{,}85\cdot\dfrac{0{,}02}{12}+1\right)}{\log\left(1+0{,}85\cdot\dfrac{0{,}02}{12}\right)}$$

$$n \geq 93{,}6$$

Jelikož banka úročí kapitál na konci měsíce, je třeba spořit alespoň 94 měsíců. Paní D musí spořit 7 let a 10 měsíců, aby naspořila za výše uvedených podmínek alespoň částku 1 000 000 Kč.

5. Klient banky si na začátku každého roku ukládá na spořicí účet částku 10 000 Kč. Banka uvádí roční úrokovou sazbu 2,4 % a úročí kapitál vždy na konci měsíce. Daň z úroku je 15 %.

   Jakou částku bude mít klient po dvou letech? Zaokrouhlete na haléře.

Řešení

Jelikož klient banky ukládá kapitál na začátku úrokovacího období, jedná se o předlhůtní režim. Důležité je si uvědomit, že klient banky ukládá kapitál jednou ročně, ale banka má měsíční úrokovací období.

Na začátku prvního roku klient vloží 10 000 Kč na spořicí účet.

Tato částka se bude úročit každý měsíc v tomto roce (tj. 12krát ročně). Na konci prvního roku klient bude mít částku $10\,000\text{ Kč}\cdot\left(1+\frac{0{,}024}{12}\cdot(1-0{,}15)\right)^{12}$.

Na začátku druhého roku klient banky vloží 10 000 Kč na spořicí účet a bude na něm mít $10\,000\text{ Kč}\cdot(1+0{,}002\cdot 0{,}85)^{12}+10\,000\text{ Kč}$.

Celá tato částka se bude úročit každý měsíc v druhém roce. Na konci druhého roku klient bude mít částku
$\left(10\,000\text{ Kč}\cdot(1+0{,}002\cdot 0{,}85)^{12}+10\,000\text{ Kč}\right)\cdot(1+0{,}002\cdot 0{,}85)^{12}$.

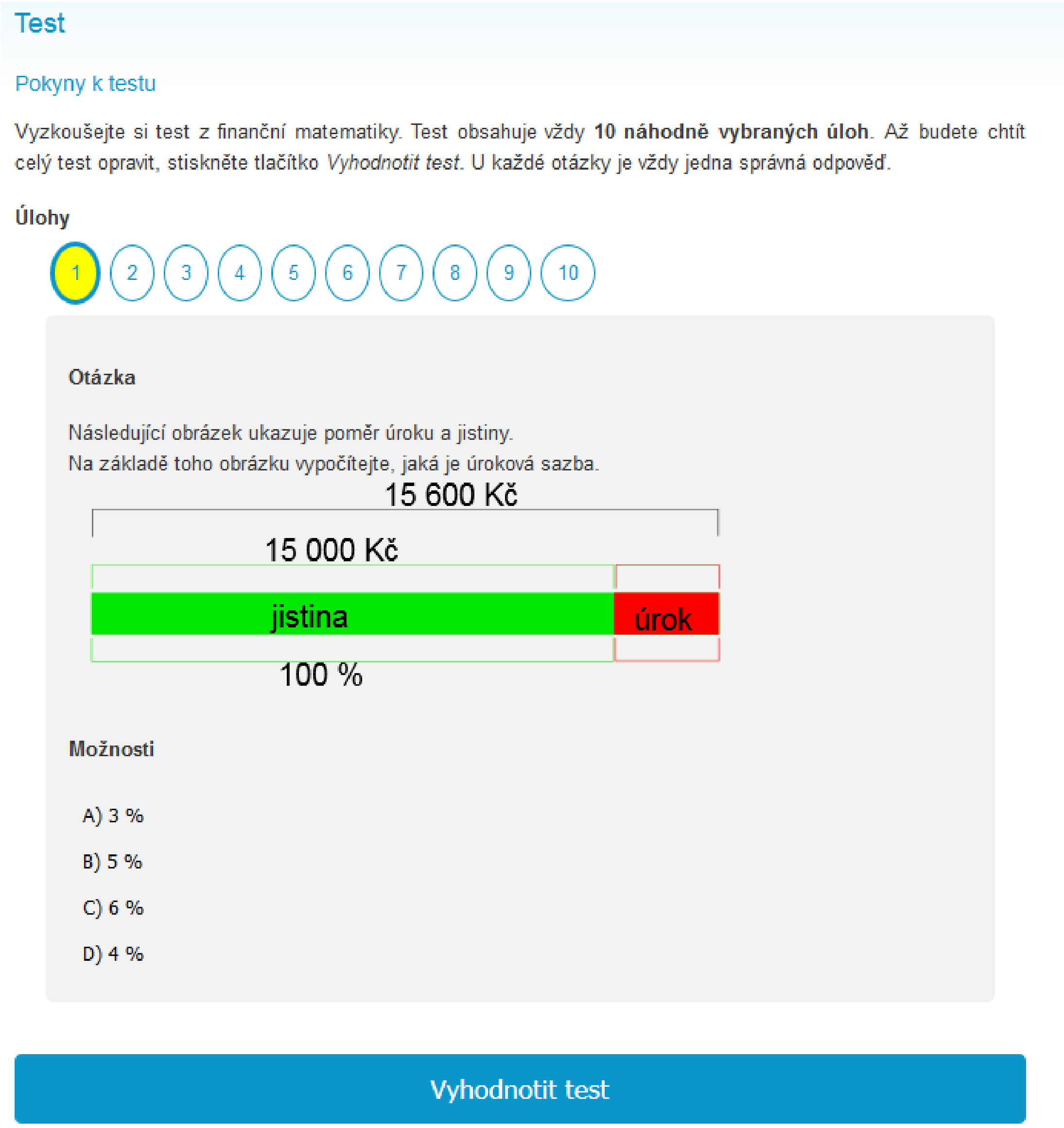
$10\,000\,\text{Kč}\cdot(1+0{,}002\cdot 0{,}85)^{24}+10\,000\,\text{Kč}\cdot(1+0{,}002\cdot 0{,}85)^{12}=$
$20\,621{,}994\ldots\ \text{Kč}\approx 20\,621{,}99\text{ Kč}$

Klient bude mít po dvou letech spoření na spořicím účtu po zdanění úroku částku 20 621,99 Kč.

6. Test

Test obsahuje 10 náhodně vygenerovaných úloh z vytvořené databáze úloh, která čítá 33 úloh. Pořadí možných odpovědí v testu je náhodně permutované. Test obsahuje vždy 3 teoretické otázky vybrané z 10 otázek, 3 jednoduché početní otázky vybrané z 10 otázek, kde je možné k řešení dojít i bez použití kalkulačky, 4 složitější početní otázky vybrané z 13 otázek.

Obrázek 6.1 ukazuje, jak test vypadá.



Obrázek 6.1: Ukázka testu

Poté, co uživatel dokončí svůj test, zobrazí se mu vyhodnocení testu, které je možné vidět na obrázku 6.2. Uživateli se zobrazí počet správně zodpovězených otázek, červená barva značí nesprávné odpovědi, zelená barva značí správné odpovědi. U špatně zodpovězených otázek se zobrazí zdůvodnění, které je možné vidět na obrázku 6.2.

Test

Výsledek testu

Počet bodů

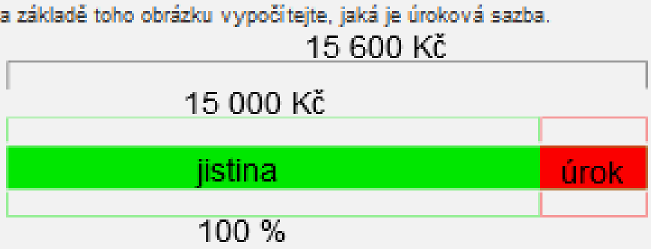
5/10 (50 %)

Úlohy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Otázka

Následující obrázek ukazuje poměr úroku a jistiny.
Na základě toho obrázku vypočítejte, jaká je úroková sazba.



Možnosti

Nebyla vyplněna žádná odpověď.

A) 3 % x

B) 5 % x

C) 6 % x

D) 4 % <-

Zdůvodnění

Úrok je (15 600 – 15 000) Kč = 600 Kč.

Úrokovou sazbu v procentech spočítáme následovně:

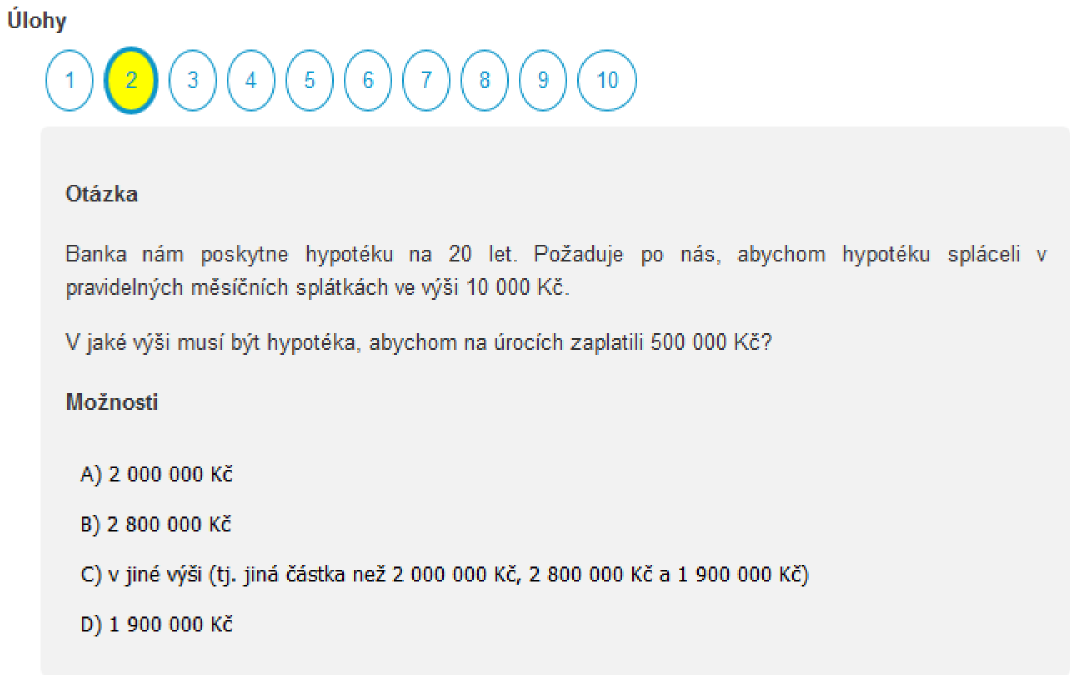
$$\left(\frac{600\ \text{Kč}}{15\,000\ \text{Kč}} \cdot 100\right)\,\% = 4\,\%.$$

Výsledek je zobrazen na následujícím obrázku.

Obrázek 6.2: Vyhodnocení testu

Následuje ukázka jedné možné podoby testu.

Obrázek 6.3: Test - Úloha č. 1



Obrázek 6.4: Test - Úloha č. 2

Úlohy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Otázka

Co je to úmor dluhu?

Možnosti

A) Úmor dluhu je ta část splátky úvěru (dluhu), která snižuje dlužnou částku.

B) Úmor dluhu je rozdíl zapůjčené částky a zaplacené částky.

C) Úmor dluhu je částka, kterou zaplatíme navíc při úvěru.

D) Úmor dluhu je rozdíl dluhu a úroku.

Obrázek 6.5: Test - Úloha č. 3

Úlohy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Otázka

Banka nám poskytne úvěr ve výši 1 000 000 Kč na 5 let. Požaduje po nás, abychom úvěr splatili v pravidelných měsíčních splátkách ve výši 20 000 Kč.

Kolik korun zaplatíme navíc nad výši úvěru, tj. kolik korun celkem zaplatíme bance na úrocích?

Možnosti

A) 200 000 Kč

B) 1 200 000 Kč

C) 20 000 Kč

D) 100 000 Kč

Obrázek 6.6: Test - Úloha č. 4

Úlohy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Otázka

Které z následujících tvrzení není pravdivé?

Možnosti

A) Hypotéku si můžeme vzít na stavbu rodinného domu.

B) Úroková sazba u hypotéky musí být menší než u jiných úvěrů.

C) Poskytovatelé hypoték většinou fixují úrokové sazby na určitý časový úsek.

D) Hypotéku si můžeme vzít na rekonstrukci bytu.

Obrázek 6.7: Test - Úloha č. 5

Úlohy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Otázka

Na začátku roku 2018 jsme koupili 100 000 kusů podílových listů. Jejich kurz byl 1,253. Vstupní poplatek činil 2 % z investované částky, správcovský poplatek činil 2 % z částky, kterou jsme měli na konci roku. Poplatky se zaokrouhlují na haléře. Na konci roku 2018 jsme prodali všechny podílové listy, kurz byl 1,752.

Jaký zisk jsme získali touto investicí?

Možnosti

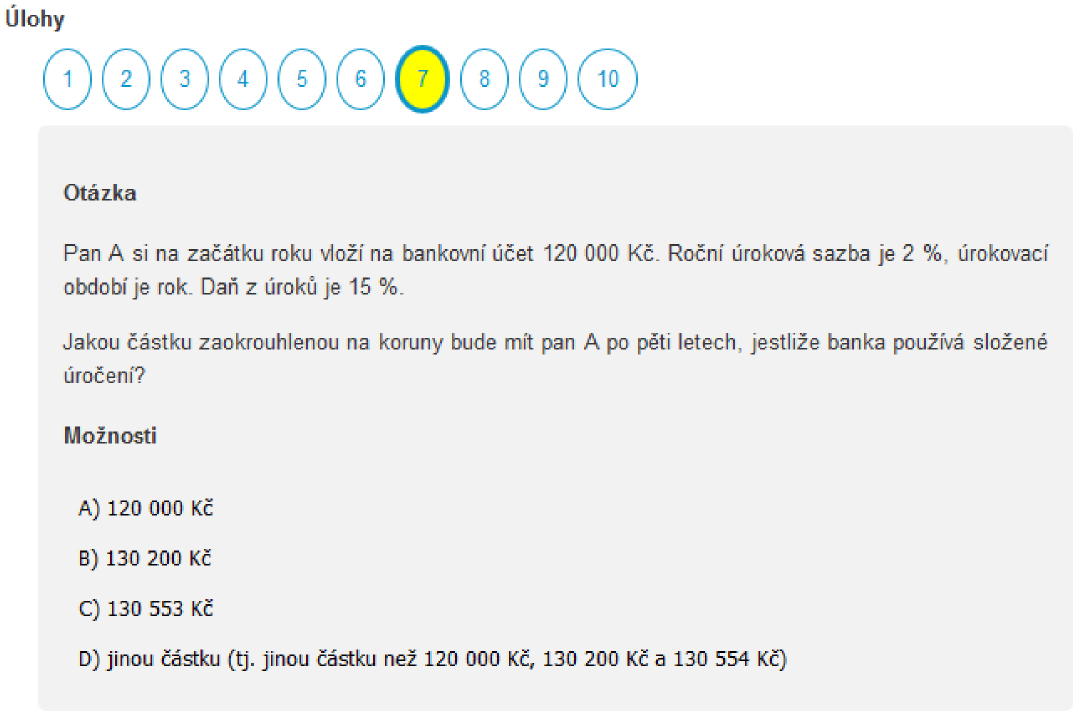
A) 43 890 Kč

B) 44 890 Kč

C) 42 890 Kč

D) jiný zisk (tj. jiný zisk než 43 890 Kč, 44 890 Kč a 42 890 Kč)

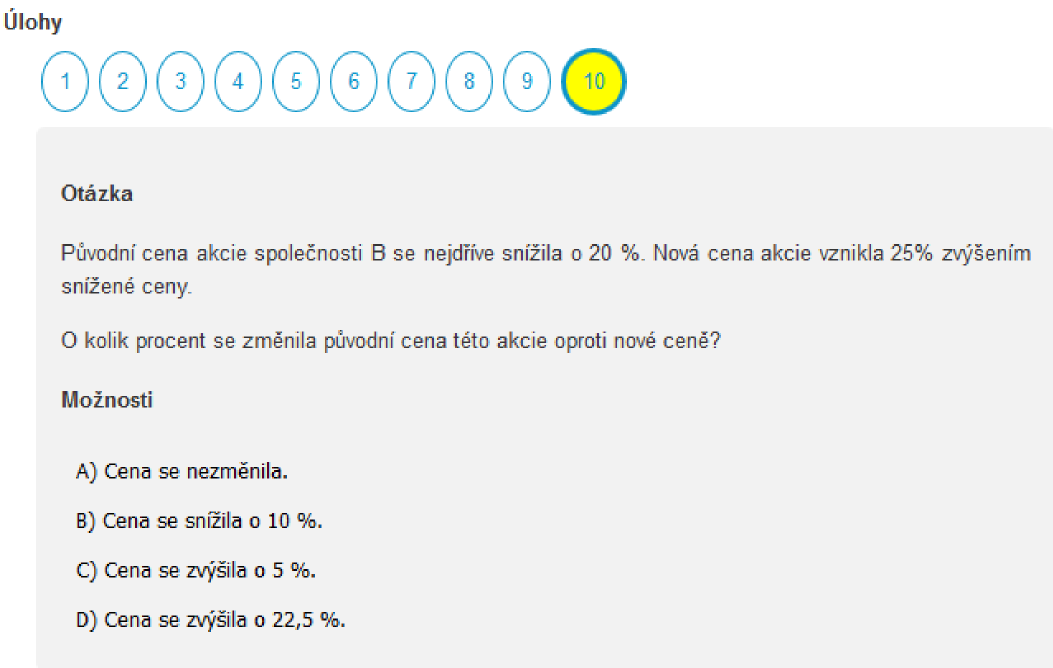
Obrázek 6.8: Test - Úloha č. 6



Obrázek 6.9: Test - Úloha č. 7

Obrázek 6.10: Test - Úloha č. 8

Obrázek 6.11: Test - Úloha č. 9



Obrázek 6.12: Test - Úloha č. 10

Závěr

V této práce jsme vytvořili webové stránky zaměřené na finanční matematiku na střední škole. Webové stránky budou po obhajobě umístěny na portál středoškolské matematiky vytvářený katedrou didaktiky matematiky, kde budou veřejně dostupné.

Webová stránka obsahuje výukový text zahrnující jednoduché a složené úročení, cenné papíry, úvěry a spoření. K jednotlivým tématům jsou k dispozici úlohy s krokovaným řešením a interaktivní applety. Webové stránky jsou završeny souhrnným testem.

Látka obsažena v této práci nepokrývá veškerou problematiku finanční matematiky. Dnešní svět financí je velice rozsáhlý, proto se tato práce zaměřila na témata, která jsou pro dnešní středoškoláky nejpodstatnější. Některé běžně používané finanční produkty nejsou v této práci uvedeny, a to z toho důvodu, aby se žáci nesoustředili na jednotlivé finanční produkty, které se liší pouze v detailech, ale aby se soustředili na matematickou problematiku, která je společná pro řadu finančních produktů. Rovněž bylo nutné z didaktických důvodů vynechat některé různé přístupy, které by snižovali porozumění problematice.

Práce by proto mohla být v budoucnu rozšířena o další témata a detaily, které by se však zařadily do rozšiřujícího učiva. Jistě se za pár let objeví nové možnosti ve světě financí, ale matematická podstata zahrnutá v této práci, zůstane neměnná.

Seznam použité literatury

golemfinance.cz (2019). Golem finance. https://golemfinance.cz.

google.com/finance (2019). Google finance. https://www.google.com/finance.

hypoindex.cz (2019). Hypoindex. https://www.hypoindex.cz.

MF ČR (2019). Ministerstvo financí ČR. https://www.mfcr.cz.

ČNB (2019). Česká národní banka. https://www.cnb.cz.

Odvárko, O. (2005). *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* 1. vydání. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-303-8.

Odvárko, O. (2012). *Matematika pro Gymnázia - Posloupnosti a řady.* 3. vydání. Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-391-2.

Odvárko, O. a Kadleček, J. (2014). *Matematika pro 9. ročník ZŠ - Finanční matematika.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-442-1.

peak.cz (2019). Peak.cz. https://www.peak.cz.

penize.cz (2019). Peníze.cz. https://www.penize.cz.

pse.cz (2019). Burza cenných papírů praha. https://www.pse.cz.

Radová, J., Dvořák, P. a Málek, J. (2013). *Finanční matematika pro každého.* 8. rozšířené vydání. Grada, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3.

realitymix.cz (2019). RealityMix. https://realitymix.cz.

ČSÚ (2019). Český statistický úřad. https://www.czso.cz.

ČSOB (2019). Československá obchodní banka. https://www.csob.cz.

ČT (2019). Česká televize. https://www.ceskatelevize.cz.

ČTK (2019). Česká tisková kancelář. https://www.ctk.cz.

tradingeconomics.com (2019). Trading economics. https://tradingeconomics.com.

Seznam obrázků

Seznam tabulek