



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kamil Cinkraut

Elektrické obvody se zdroji harmonického napětí ve výuce fyziky

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Žilavý Peter, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval RNDr. Peteru Žilavému, Ph.D., svému vedoucímu práce, za jeho nekonečnou trpělivost, odborné konzultace a skvělý osobní přístup. Mimo něj bych rád poděkoval své rodině, bez které by mé studium na vysoké škole nebylo možné. Konkrétně svým rodičům nejen za psychickou, finanční a celkovou podporu při studiu, a svému bratrovi za to, že pro mě je po celou dobu mého studia vzorem.

Název práce: Elektrické obvody se zdroji harmonického napětí ve výuce fyziky

Autor: Kamil Cinkraut

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Peter Žilavý, Ph.D., Katedra didaktiky fyziky

Abstrakt: Tato práce má za cíl definovat pojmy fázor a fázorový diagram pro žáky na úrovni střední školy. Zároveň propojuje tyto pojmy s dostupnými matematickými učebnicemi na teoretické úrovni a motivuje jejich zavedení. Pojmy fázor a fázorový diagram jsou aplikovány v elektrických obvodech se zdrojem harmonického napětí, ve kterém se nachází některý z lineárních prvků (rezistor, cívka, kondenzátor). Následně je na stejnou problematiku použito symboliky komplexních čísel, abychom čtenáři ukázali jedno z jejich konkrétních využití. Čtenář zde také nalezne řešení sériového a paralelního RLC obvodu právě za pomoci fázorového diagramu a také za pomoci komplexních čísel. Na konci je i několik početně řešených úloh. Přínosem této práce je především ucelené shrnutí poznatků ohledně fázorů a fázorových diagramů a jejich aplikace a dále propojení těchto pojmů s komplexní symbolikou a teoretickým podkladem.

Klíčová slova: fázor, fázorový diagram, komplexní čísla, RLC obvod

Title: Alternating current circuits in physics education

Author: Kamil Cinkraut

Department: Department of Physics Education

Supervisor: RNDr. Peter Žilavý, Ph.D., Department of Physics Education

Abstract: The aim of the paper is to define and explain terms of phasor and phasor diagram for students of secondary education level in the Czech republic. It is providing a link between the theoretical foundation of the terms in the mathematics based textbooks available on the market and its establishment and practical use in the teaching process. The purpose of the thesis is to explain the problematic of phasor and phasor diagram in the electric load with the alternating current power supply, which consists of resistor (R), inductor (L) and capacitor (C). In the second part of the paper, the problematic of the complex numbers and its use is described. In this part, the solution of series or parallel RLC circuit is found by the use of phasor diagram or complex numbers. The paper is furthermore providing reader with problems with solution, which serve as an example for the teaching purposes. The paper is providing the reader with a combination of the theoretical foundation of phasor and phasor diagram with their practical use and application, in order to enable a coherent and understandable explanation of the terms.

Keywords: phasor, phasor diagram, complex number, RLC circuit

Obsah

Úvod	3
Motivace	3
Struktura práce	3
Cíl práce	3
1 Rešerše vybraných materiálů	5
1.1 Středoškolské učebnice	5
1.1.1 Fyzika II pro střední školy	5
1.1.2 Fyzika pro gymnázia – mechanické kmitání a vlnění	5
1.1.3 Fyzika pro gymnázia – elektřina a magnetismus	6
1.1.4 Přehled středoškolské fyziky	7
1.1.5 Odmaturoj z fyziky	7
1.1.6 Elektrotechnika II	7
1.1.7 Příručka pro elektrotechniku	8
1.1.8 Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU	8
1.1.9 Fyzika – Sbírka úloh pro střední školy	9
1.1.10 Fyzikální úlohy pro střední školy	9
1.1.11 Sbírka řešených úloh	9
1.1.12 Příručka pro učitele fyziky na střední škole	9
1.1.13 Matematika pro gymnázia – Goniometrie	10
1.1.14 Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla	10
1.2 Vysokoškolské materiály	11
1.2.1 Elektřina a magnetismus	11
1.2.2 Všeobecná fyzika 2 – Elektrina a magnetismus	11
1.3 Shrnutí rešerše	12
2 Zavedení matematických pojmů	15
2.1 Goniometrie	15
2.2 Komplexní čísla	16
2.2.1 Vybrané vlastnosti komplexních čísel	17
3 Elektrický obvod se zdrojem harmonického napětí	21
3.1 Zdroj harmonického napětí	21
3.2 Součet dvou harmonických napětí	22
3.3 Prvky elektrického obvodu	23
3.3.1 Rezistor	23
3.3.2 Cívka	24
3.3.3 Kondenzátor	25
3.4 RLC obvod	26
4 Hrajeme si s fázory	27
4.1 Motivace k zavedení fázorů	27
4.1.1 Otáčíme vektorem	27
4.1.2 Sčítáme otáčející se vektory	29
4.2 Fázor a fázorový diagram	32

4.3	Součet tří a více harmonických napětí	34
5	Řešení elektrických obvodů	35
5.1	1. a 2. Kirchhoffův zákon	35
5.1.1	1. Kirchhoffův zákon	35
5.1.2	2. Kirchhoffův zákon	35
5.2	Řešení sériového RLC obvodu	35
5.3	Řešení paralelního RLC obvodu	37
6	Využití komplexní symboliky	41
6.1	Fázory v Gaussově rovině	41
6.2	Komplexní impedance RLC obvodu	42
6.2.1	Komplexní impedance sériového RLC obvodu	42
6.2.2	Komplexní admitance paralelního RLC obvodu	44
6.3	Shrnutí komplexní symboliky	45
7	Řešené úlohy	47
7.1	Příklad 1	47
7.2	Příklad 2	50
7.3	Příklad 3	53
	Závěr	57
	Seznam použité literatury	59
	Seznam obrázků	61

Úvod

Motivace

V mé předchozí cestě za vzděláním jsem se vždy snažil najít odpověď na otázku „proč?“, kterou jistě všichni důvěrně známe z našich mladých let. Tuto otázku jsem si položil také na střední škole v době, kdy jsme se v matematice učili komplexní čísla. Říkal jsem si: „Proč by se měly na střední škole vyučovat komplexní čísla?“

Stejnou otázku mi položil i můj zvědavý mladší spolužák, který chtěl odmocnit záporné číslo a nevěděl, k čemu by to použil. I on mě tedy inspiroval k vybrání tohoto tématu bakalářské práce, díky které by i čtenář z řad střední školy mohl nahlédnout do aplikací komplexních čísel v konkrétním oboru fyziky. Tímto vybraným oborem jsou právě elektrické obvody se zdroji harmonického napětí, při jejichž řešení je mimo jiné typické použití komplexního popisu této problematiky.

Struktura práce

Práce je rozdělena na úvod a 7 kapitol. V úvodu uvádíme motivaci, strukturu a cíl práce. V první kapitole se zaměříme na rešerši vybraných učebnic a sbírek úloh pro žáky středních škol, mimo to představíme i některé z dostupných vysokoškolských materiálů.

Ve druhé kapitole zavedeme matematické pojmy, které budeme dále v práci využívat. V dalších kapitolách se již začneme zabývat fyzikálním popisem a řešením naší problematiky.

Ve třetí kapitole konkrétně popíšeme, co je myšleno slovním spojením „elektrický obvod se zdrojem harmonického napětí“, popíšeme si zdroj a prvky takového obvodu a seznámíme se s pojmem RLC obvod. Ve čtvrté kapitole uvedeme motivaci pojmu fázor ve středoškolské fyzice a následně se jej pokusíme správně zavést tak, aby byla jasná možnost sčítání fázorů jako vektorů.

V páté kapitole si připomeneme Kirchhoffovy zákony a pomocí nich vyřešíme sériově a paralelně zapojený RLC obvod se zdrojem harmonického napětí. V šesté kapitole dále ukážeme možnost popisu fázorů pomocí komplexní symboliky a ukážeme konkrétní aplikaci tohoto popisu.

V poslední, sedmé, kapitole ukážeme početní řešení tří konkrétních příkladů. První dva z nich vyřešíme pomocí vztahů známých ze středoškolských učebnic a také pomocí zavedené komplexní symboliky. Čtenář tak bude mít možnost porovnat výhody a nevýhody těchto postupů řešení. Třetí příklad již bude řešen pouze pomocí komplexní symboliky.

Cíl práce

Hlavním cílem tohoto textu je seznámit čtenáře s využitím komplexních čísel ve fyzice, konkrétně pak s jejich použitím při řešení elektrických obvodů s harmonickým průběhem proudu a napětí. Toho chceme docílit pomocí postupného

odvození řešení těchto obvodů, a to s teoretickým podkladem z učebnic matematiky i fyziky nejen pro gymnázia.

Dalším cílem této práce je navrhnout řešení těchto obvodů pomocí komplexního popisu na úrovni střední školy a porovnat navrhovaná řešení s řešeními v dostupné literatuře. V souvislosti s tím má práce ukázat motivaci k zavedení pojmů *fáze* a *fázorový diagram* ve středoškolské fyzice a odůvodnit, proč je možné s fázory ve fázorovém diagramu pracovat jako s vektory.

1. Rešerše vybraných materiálů

Ze středoškolských učebnic vybíráme ty, které se v současné době využívají pro výuku na vybraných středních školách nebo se vyskytují v doporučené literatuře pro obory zaměřující se na fyziku. Mimo to okomentujeme i příručku pro učitele fyziky, která je téměř jediná svého druhu. Z matematických zdrojů uvádíme pouze učebnice pro gymnázia, ze kterých v práci budeme čerpat definice pro zavedení potřebných matematických pojmů. Mimo učebnice zmíníme také některé z dostupných sbírek příkladů pro žáky SŠ a nezapomeneme ani na internetovou sbírku úloh.

Z textů pro studenty vysokých škol vybíráme dvě publikace. První z nich je v současné době doporučovaná na některých oborech se zaměřením na fyziku. Druhá z nich je vybraná především z toho důvodu, že je v ní uvedena přímá analogie SŠ pojmů *fázoru* a *fázorového diagramu*.

Kvůli sjednocení formy uvádíme, jak v textu níže budeme odkazovat na literaturu:

[XY] – odkaz na použitou literaturu, seznam této literatury najdete na straně 60;

kap. – odkazuje na kapitolu dané literatury;

str. – odkazuje na stranu dané literatury;

obr. – odkazuje na obrázek v dané literatuře.

Jen upozorníme, že se čísla stránek mohou v závislosti na čísle vydání dané publikace lišit.

1.1 Středoškolské učebnice

1.1.1 Fyzika II pro střední školy

Učebnice [1] je podle předmluvy knihy určena pro výuku fyziky ve vzdělávacích programech všech typů středních škol. V tištěné verzi učebnice je v kapitole *Střídavý proud* (kap. 5, str. 101) popsán vznik střídavého proudu a jsou zde také odvozeny rovnice pro rezistanci, kapacitanci a induktanci. Standardní knižní podoba je doplněna o CD obsahující především rozšiřující učivo. Toto CD [2] pak v kapitole *Složený obvod střídavého proudu* (kap. R5.1) představuje *fázorový diagram* a seznamuje čtenáře s pojmem *fázor*. Konkrétně je zde napsáno:

Jednotlivá napětí na částech obvodu jsou symbolicky znázorněna jako vektory, jejichž délka je určena velikostí napětí a směr vektoru určuje počáteční fáze veličiny. Poněvadž nejde o skutečné vektory, ale jen o symbolické vyjádření, používáme k označení těchto vektorů název *fázor*. [2] (kap. 5.1, str. 3).

V CD je dále vysvětleno, jak lze pomocí fázorového diagramu a Pythagorovy věty vypočítat výslednou impedanci obvodu. V textu však není uvedeno, proč je možné fázory ve fázorovém diagramu počítat stejně jako vektory.

1.1.2 Fyzika pro gymnázia – mechanické kmitání a vlnění

Učebnice [3] je určena pro výuku fyziky na gymnáziu s větší hodinovou dotací. V prvních kapitolách je zavedeno harmonické kmitání a je popsána jeho fáze.

V kapitole *Složené kmitání* (kap. 1.5, str. 27) jsou popsány dva nejjednodušší příklady skládání vlnění se stejnou frekvencí. V CD [4], které je nedílnou součástí učebnice a obsahuje rozšiřující učivo, je popsán *fázorový diagram* a zaveden pojem *fázor* (kap. R1.1.). Konkrétně je zde napsáno:

Např. výchylka kmitu je symbolicky znázorněna vektorem \mathbf{Y} , jehož délka je úměrná amplitudě kmitání. Směr vektoru v pravouhlé souřadnicové soustavě je určen počáteční fází φ_0 (obr. R1-1). Aby se toto symbolické znázornění veličin odlišilo od skutečných vektorů, je pro ně použit termín **fázor**. [4] (str. 1)

Následně jsou odvozeny vztahy pro fázi a amplitudu výsledného napětí vyplývající z geometrie ve fázorovém diagramu. Učebnice však nijak zvlášť neodůvodňuje, proč je možno fázory sčítat jako vektory a proč je v každém časovém okamžiku výsledné napětí určeno vektorovým součtem fázorů skládaného vlnění.

1.1.3 Fyzika pro gymnázia – elektřina a magnetismus

Tato učebnice [5] je používána na středních školách se všeobecně vzdělávacím programem a jiných školách podobného typu. V úvodu (str. 10) je napsáno (podobně jako v [3]), že je určena především pro výuku na gymnáziích ve vzdělávacích programech s větší hodinovou dotací předmětu fyzika. V Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia [6] nejsou fázorové diagramy obsaženy, proto je i tato učebnice uvádí jako doporučené rozšiřující učivo (v učebnici graficky vyznačeno barevnou čarou podél textu).

V kapitole *Střídavé proudy* (kap. 9, str.175) je použito řešení obvodů se zdrojem harmonického napětí pomocí fázorových diagramů. Učebnice (str. 178) uvádí, že kromě časového diagramu se ke grafickému znázornění ve střídavých obvodech používá *fázorový diagram*. Ve stejné sekci také zavádí pojem *fázor*, o kterém mluví jako o orientované úsečce v souřadnicové soustavě. Následně pomocí obrázku (kap. 9, obr. 9-3, str. 178) ukazuje souvislost fázorového a časového diagramu.

Poznatky o obvodech střídavého proudu s rezistancí, indukčností a kapacitancí jsou nejprve teoreticky odvozeny na základě známých zákonů (např. Lenzův) a následně ověřeny pomocí naměřených časových diagramů, které jsou vytištěny v učebnici. Poté autor ukazuje možnost vypočtení velikosti výsledného fázoru napětí pomocí Pythagorovy věty.

Tato učebnice (str. 183) také v jednotné tabulce shrnuje všechny možnosti RLC obvodů a jejich konkrétní časové a fázorové diagramy, mimo to i vztahy pro výpočet výsledné impedance.

V učebnici však chybí jakékoliv odůvodnění faktu, že je možno s nově zavedenou grafickou interpretací fyzikálních veličin (*fázory*) pracovat jako s vektory v matematice. Není tedy uvedeno, proč je možno je sčítat stejně jako vektory a díky tomu získat výsledné fázové posunutí proudu a napětí a jejich amplitudy. S danou látkou je zde nakládáno velmi intuitivně a dané souvislosti jsou zde spíše předkládány než odůvodňovány. To je však důsledek toho, že je látka podávána jako doporučené rozšiřující učivo, a není tedy potřeba vše odvozovat.

1.1.4 Přehled středoškolské fyziky

Učebnice [7] je velmi podobná učebnici [5] či [3], které byly vydány stejným vydavatelstvím.

Už v kapitole *Kmitání mechanického oscilátoru* (kap. 4.1, str. 216) je uvedeno:

Souvislost kmitavého pohybu s pohybem rovnoměrným po kružnici je taková, že polohový vektor bodu N kmitajícího po přímce (tožné např. s osou y vztažné soustavy) je vlastně průmětem (složkou) polohového vektoru bodu M do osy y . Harmonické kmitání je pak popsáno souřadnicí y (popř. x) polohového vektoru \mathbf{r} . [7] (kap. 4.1, str. 216, obr. 4-3)

Následně je v podkapitole *skládání kmitů v jedné přímce* (str. 221) popsáno skládání kmitů se stejnou frekvencí, kde je využíváno symbolické znázornění kmitání pomocí polohových vektorů v souřadnicové soustavě. Autoři uvádí, že výsledné kmitání můžeme graficky získat pomocí vektorového součtu polohových vektorů reprezentujících sčítané kmity. Na základě této skutečnosti autoři odvozují amplitudu a fázi výsledného kmitání pomocí geometrie vektorů a jejich vektorového součtu (str. 222, obr.4-7).

V kapitole *Střídavý proud* (kap. 5.6, str. 335–342) jsou postupně představeny vztahy pro obvod s rezistorem, indukčností a kapacitou. Dále zde můžeme nalézt (podobně jako v [5]) tabulku s přehledem obvodů střídavého proudu, ve které je schématické znázornění obvodu, vztahy pro výpočet charakteristických veličin daného obvodu, fázorový diagram a časové znázornění průběhu a proudu pro dané schéma.

Pojem *fázor* je zde zaveden jako orientovaná úsečka v souřadnicové soustavě, která reprezentuje danou veličinu. Stejně jako [5] učebnice ukazuje souvislost časového diagramu a fázorového diagramu (obr. 5-73, str. 337).

1.1.5 Odmaturuj z fyziky

Publikace [8] je pomocným materiálem pro žáky středních škol, kteří se připravují na maturitu nebo k přijímacímu řízení na vysoké školy.

V kapitole *Střídavý proud* (kap. 5.4, str.132) postupně představuje platné vztahy pro obvody střídavého proudu s rezistorem, cívkou a kondenzátorem. Tomu následuje kapitola *Složený obvod střídavého proudu* (str. 134), ve které je pomocí Pythagorovy věty z fázorového diagramu odvozen vztah pro celkovou impedanci obvodu.

Ani v této publikaci autoři nezdůvodňují možnost sčítání *fázorů* jako vektorů.

1.1.6 Elektrotechnika II

Učebnice [9] je publikace určená pro studenty středních škol, žákům učilišť a všem zájemcům o elektroniku, jak je uvedeno na obálce knihy.

Tato učebnice je oproti [5] a [7] více zaměřena na praktickou elektroniku. Na začátku učebnice je popsán střídavý proud, vznik sinusového napětí a následně i samostatná kapitola *Fázory* (str. 22, kap. 1.5). V této kapitole je také analytické odvození sčítání nebo odčítání dvou harmonických veličin se stejnou frekvencí

a dále i popis grafického sčítání a odčítání těchto veličin. Ohledně pojmu *fázor* se zde píše:

Poloha rotující úsečky v rovině určuje tedy jednoznačně danou sinusovou veličinu a nazýváme ji *fázor*. [9] (kap. 1.5, str. 22)

Následuje kapitola *Jednoduché obvody se sinusovým střídavým proudem* (str. 27, kap. 2), ve které jsou odvozeny vztahy pro napětí a proud v obvodu střídavého proudu postupně pro ideální rezistor, ideální cívku a ideální kondenzátor. Kromě odvození zde autor také uvádí grafické znázornění těchto veličin, a to časový průběh a *fázorový diagram*.

Další kapitola *Složené obvody se sinusovým střídavým proudem* (str. 41, kap. 3) se zabývá odvozením vztahů pro proud a napětí v obvodech se zdrojem harmonického napětí, kde jsou zapojeny sériově nebo paralelně ideální rezistor, ideální cívka či ideální kondenzátor.

1.1.7 Příručka pro elektrotechnika

Český překlad původně německé příručky pro elektrotechniky [10] je rozsáhlou publikací zpracovávající problematiku širokého spektra tématů elektrotechniky.

Příručka tam, kde je to technicky možné, nabádá čtenáře k tomu, aby si věci doma sám vyzkoušel. V textu je tedy často popsán reálný pokus, který ukazuje to, co je v příručce právě probíráno.

V kapitole *Základy techniky střídavého proudu* (kap. 7, str. 117) jsou zavedeny základní potřebné pojmy (např. perioda a amplituda; sinusové střídavé veličiny či fázový posun). Podkapitola *Vektorové znázornění sinusových veličin* zavádí pojem *časový vektor*, který je dle textu také označován jako *fázor*. Dále je zde na obrázku ukázána souvislost mezi grafem funkce sinus a časovým vektorem. Tuto skutečnost autoři navíc komentují a pomocí kolmých průmětů na osu i dokazují.

V dalších podkapitolách se autoři věnují obvodům se zdrojem střídavého napětí, do kterých je postupně přidáván činný odpor, indukance a jalový kapacitní odpor.

Tato publikace používá pojmy *Vektorový diagram efektivních hodnot* či *Trojúhelník napětí* (např. obr. 2 a 3, str. 129). Tyto pojmy jsou zde použity pro stejný diagram a formálně jsou stejné jako *fázorové diagramy* například v [5] nebo [9].

1.1.8 Sběrka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU

Sběrka úloh [11] navazuje na učebnici Fyzika II pro střední školy [1]. Slouží k procvičení znalostí, které žák nabyl v průběhu svého studia na střední škole právě pomocí této učebnice.

Sběrka [11] v kapitole *Střídavý proud* (kap. 5.5., str. 211) (př. 396. až 422.) procvičuje žákově porozumění učivu z učebnice [1] z kapitoly *Střídavý proud* (kap. 5, str. 101). Tyto příklady procvičují pochopení pojmu rezistance, kapacitance a indukance. Ve sbírce není ve zmíněné kapitole úloha k rozšiřujícímu učivu z CD [2], tedy úloha na složený obvod střídavého proudu.

1.1.9 Fyzika – Sbírka úloh pro střední školy

Sbírka úloh [12] v kapitole *Střídavý proud* (kap. 5.4, str. 163–172) v úlohách 324. až 366. různého typu testuje žákově porozumění učivu střídavých proudů, konkrétně obvodům se střídavým napětím a zapojenými rezistory, cívkami či kondenzátory. Nejen řešení těchto úloh je součástí přiloženého CD.

1.1.10 Fyzikální úlohy pro střední školy

Sbírka úloh [13] v části *Elektřina a magnetismus* v kapitole *Střídavé proudy* (kap. 4, str. 166–170) v úlohách A4.2 až A4.6 testuje porozumění vztahům odvozeným pro obvody se střídavým proudem a zapojeným kondenzátorem, cívkou či kondenzátorem. Úlohy jsou autorem hned po zadání řešeny a komentovány.

1.1.11 Sbírka řešených úloh

Internetová sbírka řešených úloh [14] postupně vytvářená nejen studenty učitelských oborů se zaměřením na fyziku v současné době nabízí více než 1 000 detailně komentovaných řešených úloh. Velkou výhodou této sbírky je možnost „rozkliknutí“ sekce nápověda či řešení až v době, kdy se žák či student sám rozhodne na danou sekci podívat.

V současné době sbírka v kapitole *Obvody se střídavými proudy* nabízí 49 komentovaných řešených úloh. Z toho se 23 zabývá problematikou RLC obvodů. Jsou zde tři příklady vypočtené s využitím komplexní symboliky.

Úloha *Sériový RLC obvod* [15] uvádí detailní popis postupu kreslení fázorového diagramu. Dále pak úloha *Cívka s komplexní impedancí* [16] ukazuje možnost vypočtení celkové impedance pomocí komplexní symboliky, kterou v závěru řešení porovnává s metodou řešení pomocí fázorů, resp. fázorového diagramu. Také v úloze *Celková admitance v obvodu* [17] uvádí početní důkaz ekvivalentnosti mezi řešením obvodu za pomoci komplexní symboliky a užitím fázorového diagramu pro admitance.

1.1.12 Příručka pro učitele fyziky na střední škole

V příručce [18] je součástí kapitoly *Elektřina a magnetismus* (kap. 3.5) také podkapitola s názvem *Střídavý proud* (str. 196). V ní se autor zmiňuje o možnosti řešit elektrický obvod se zdrojem harmonického napětí grafickou metodou, konkrétně pak pomocí *fázorů* proudu a napětí umístěných ve *fázorovém diagramu*. Dále text uvádí:

Z hlediska teorie elektrických obvodů je fázor umístěn v Gaussově rovině komplexních čísel, ve které ho můžeme rozložit na reálnou a imaginární složku. [18] (str. 197)

Autor pokračuje možností metodiky výkladu dané látky, kterou shrnuje do tří bodů, z nichž je pro účely naší práce nejdůležitější druhý bod:

2. stanovení celkové charakteristiky obvodu (rezistance, induk-tance, kapacitance, impedance). [18] (str. 197)

1.1.13 Matematika pro gymnázia – Goniometrie

Tato učebnice [19] je součástí ucelené řady učebnic, v níž se autoři zabývají problematikou středoškolské matematiky, a je určena především pro žáky studující na gymnáziích. Autor v kapitole *Goniometrické funkce* (kap. 2., str. 20–36) nejprve definuje pojmy potřebné k zavedení matematických funkcí sinus a kosinus a postupně definuje i samotné funkce (str. 36–37).

Další část je věnována vlastnostem a grafu funkcí sinus a kosinus. V kapitole *Goniometrické vzorce* (kap. 3., str. 78–99) jsou zformulovány a dokázány známé vztahy mezi těmito funkcemi, včetně tzv. součtových vzorců.

1.1.14 Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla

Další z ucelené řady učebnic pro gymnázia, kterou v naší práci využijeme, je učebnice [20]. Hned v úvodu (str. 7) autor uvádí, že dnes již mají komplexní čísla využití i v technické praxi. V posledním odstavci a v poslední větě této učebnice je uvedeno něco podobného:

Dnes jsou komplexní čísla neodmyslitelnou součástí matematiky a pomáhají řešit i mnohé úlohy z technické praxe (elektrotechnika, hydromechanika apod.). [20] (str. 125)

V kapitole *Zavedení komplexních čísel* (kap. 1.2, str. 14) jsou zavedeny komplexní čísla. Motivací pro toto zavedení je snaha o nalezení řešení kvadratické rovnice, pro kterou v oboru reálných čísel řešení nenajdeme. Následují kapitoly (kap. 1.3 a 1.4., str. 15–25), které zavádějí operace s komplexními čísly, a kapitola definující absolutní hodnotu komplexního čísla (kap. 1.5, str. 26).

Kapitola *Geometrické znázornění komplexních čísel* (kap. 2, str. 36) uvádí možnost znázornění komplexních čísel jako bodů v Gaussově rovině a také představuje možnost zapsání komplexního čísla v goniometrickém tvaru. V podkapitole *Komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině* (kap. 2.5, str. 58) autor také zavádí znázornění komplexního čísla jako vektoru. Tuto interpretaci komplexních čísel odůvodňuje faktem, že operace s komplexními čísly splňují stejné vlastnosti jako operace s vektory.

V poslední kapitole *Tucet netuctových úloh na závěr* (kap. 4, str. 98) autoři například dokazují sinovu a kosinovu větu pomocí komplexních čísel (Příklad 8, str. 113) nebo řeší úlohu převzatou z matematické olympiády nejen s využitím komplexních čísel (Příklad 12, str. 119). Jako jeden z posledních příkladů této knihy, jehož řešení je ponecháno samotným žákům, je úloha o dvou hmotných bodech (Úloha 4.4., str. 122), které konají rovnoměrný pohyb po kružnici.

Tato učebnice po celou dobu, co jsou komplexní čísla žákům představována, zůstává v teoretických matematických souvislostech, a aplikaci komplexních čísel z technické praxe se v průběhu knihy příliš nevěnuje. Na druhou stranu se domníváme, že důležitost tohoto faktu je autorem vysoce vnímána. Využití komplexních čísel v technické praxi totiž uvádí jak na úvod knihy, tak jako „třešničku na dortu“ v poslední větě této knihy. Pro žáka gymnázia se však tato informace může v celkovém textu ztratit a proto by, dle našeho názoru, mohlo být aplikacím komplexních čísel v technické praxi věnováno v této učebnici o trochu více prostoru.

1.2 Vysokoškolské materiály

1.2.1 Elektřina a magnetismus

Publikace [21] určená pro posluchače vysokých škol fyzikálně zaměřených oborů obsahuje v kapitole *Kvazistacionární elektrický obvod* (kap. 4.2, str. 281) zobecnění teorie elektrických obvodů pro stejnosměrný proud na proud střídavý, konkrétně kvazistacionární. Autoři zde postupně odvozují Kirchhoffova pravidla pro kvazistacionární proud a následně tato pravidla aplikují na obvodech se zdrojem harmonického napětí s rezistancí, indukčností a kapacitou. Mimo ustálený stav zde autoři řeší i neustálený stav těchto obvodů. Kapitola vrcholí odvozením výsledné impedance pro sériový rezonanční obvod (RLC obvod).

Dále se naší problematice elektrických obvodů se zdroji harmonického napětí autoři věnují v kapitole *Stejnoseměrné a lineární obvody v ustáleném stavu* (kap. 8.2, str. 504), kde jsou Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla odvozena pomocí komplexní symboliky. Autoři užívají pojmu *dvojpól*, který popisují jako elektrickou součástku, zapojenou do obvodu dvěma póly (např. rezistor, kondenzátor, cívka). Fázové poměry na těchto dvojpólech jsou znázorněny ve *fázovém diagramu* (kap. 8.2.2, obr. 8.4, str. 509), jenž je totožný s *fázorovými diagramy*, které se zavádějí ve SŠ učebnicích (např. [5] nebo [9]).

Všechny další vztahy jsou zde odvozeny především formálně. Autoři zde nevyužívají pojmu *fázor* či *fázorový diagram*, jako je tomu ve SŠ učebnicích. Oproti SŠ učebnicím místo *fázorového diagramu* užívá pojmu *fázový diagram*.

1.2.2 Všeobecná fyzika 2 – Elektrina a magnetismus

Autor této učebnice [22] se naší problematice věnuje v kapitole *Striedavé prúdy* (kap. 6., str. 386). Na začátku této kapitoly autor charakterizuje střídavé proudy, popisuje periodicitu střídavého proudu a možnost vytvoření periodického napětí v síti. Zabývá se také problematikou kvazistacionárnosti dějů, a následně omezuje řešení těchto obvodů na případy kvazistacionární. Autor zde dokonce ověřuje omezení platnosti Ohmova a druhého Kirchhoffova zákona pomocí RLC obvodu při velkých frekvencích střídavého napětí v tomto obvodu. Konkrétně zmiňuje, že jsou tyto zákony v laboratorních podmínkách platné pouze pro vlny o vlnové délce, která je v řádu decimetrů.

V kapitole *Harmonicky budené sériové obvody RL, RC, RLC* (kap. 3.3., str. 398–406) je odvozen průběh napětí a proudu v těchto obvodech v závislosti na rezistanci, induktanci a kapacitanci zapojených v obvodu pomocí dříve odvozených zákonů.

Kapitola *Vektorové znázornenie striedavých napätí a prúdov. Symbolická komplexná metóda* (kap. 6.6., str. 411) uvádí možnost interpretovat napětí jako vektor a také ukazuje princip sčítání těchto dvou vektorů. A to jak analyticky, tak pomocí obrázků. Autor pokračuje *komplexní symbolickou metodou*, navrhnutou O. Heavisidem, který se zasloužil o rozvoj této metody. [22] (str. 412)

Autor zde vysvětluje zásady této reprezentace a zavádí pojmy jako *imaginární jednotka*, *absolutní hodnotu reálného čísla* a další. Pomocí Eulerovy věty ukáže souvislost mezi komplexním číslem v goniometrickém tvaru a jeho grafické interpretaci v *Gaussově komplexní rovině*. Díky těmto poznatkům následně odvodí (podobně jako Sedlák a Štoll v [21]) průběh napětí a proudu v obvodech

s rezistancí, kapacitancí a impedancí.

Výsledek řešení obvodů se zdrojem harmonického napětí v reálné rovině se samozřejmě shoduje s výsledky řešení těchto obvodů v rovině komplexní (Gaussově). Oproti řešení v reálné rovině však autor nevidí výrazné zjednodušení tohoto problému, dokud se však nezačneme zabývat obvody s větším počtem lineárních prvků v obvodu (tedy rezistorů, cívek a kondenzátorů).

Autor uvádí, pro naši práci klíčový, závěr:

Všimneme si ešte niektoré vlastnosti komplexnej impedancie rezonančného RLC obvodu. Môžeme ju znázorniť graficky ako súčet troch komplexných vektorov. [22] (kap. 6.6., obr. 6.28, str. 418–419)

Povšimněme si ještě poslední věci na této VŠ učebnici, totiž že stejně jako [21] nemluví ani o *fázorech*, ani o *fázorovém diagramu*. Autor ve své učebnici užívá pojmu *komplexný časový vektor*, který je v přímé analogii s pojmem *fázor* z učebnic pro SŠ (konkrétně [5] a [9]).

1.3 Shrnutí rešerše

Učebnice [3] nebo [7] uvádějí možnost reprezentace veličin s harmonickým průběhem pomocí otáčejícího se vektoru v souřadnicové soustavě. Tuto myšlenku v naší práci použijeme také a uvedeme její možné rozšíření.

V CD [2] a uvedených učebnicích ([5] a [9]) pro střední školy je použito *fázorových diagramů* k řešení RLC obvodů se zdroji harmonického napětí. Míra, do jaké se danému tématu věnují, odpovídá rámcovým vzdělávacím programům pro dané obory. Kupříkladu Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Elektrotechnika (26-41-M/01) uvádí v sekci *Elektrotechnický základ*:

Vyjádření fázoru komplexním číslem, komplexní výraz impedance a admitance; [23] (str. 49)

jako učivo, které žák ovládá. Naopak Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [6] pojem *fázor* vůbec neuvádí.

Zajímavé však je, že ani jeden z námi vybraných VŠ materiálů se o *fázorovém diagramu* ani o *fázoru* nezmiňuje. CD [2] a učebnice [5] pojmu *fázor* využívá spíše intuitivně, není zde odůvodněno, proč můžeme fázory sčítat jako vektory. Učebnice [9] pojem *fázor* definuje a je zde dokonce hojně využíván také *fázorový diagram*, jeho použití a možnost sčítání fázorů jako vektorů je částečně odůvodněno aritmetickým výpočtem (str. 23).

Učebnice ze série Matematika pro gymnázia (konkrétně [19] a [20]) jsou zde uvedeny spíše pro zavedení důležitých matematických pojmů, na které se v našem textu budeme odkazovat. V učebnici goniometrie [19] se jedná především o zavedení funkcí sinus a kosinus. V učebnici o komplexních číslech [20] to je potom zavedení komplexní jednotky a možné grafické interpretace komplexního čísla. Tato učebnice dle našeho názoru postrádá větší množství technických aplikací komplexních čísel. Tato práce je tedy možným doplněním učebnice [20] pro „zklamané žáky“, kteří technickou aplikaci v této učebnici postrádají stejně jako my.

Ani jedna z námi vybraných SŠ učebnic fyziky přímo neodůvodňuje možnost pracovat s fázory jako s vektory. Tuto skutečnost komentuje až Čičmanec ve svém textu [22], kde je přímo tato souvislost uvedena (str. 418–419).

V této práci se tedy zaměříme především na to, jaká je souvislost mezi *fázory* a veličinami s harmonickým průběhem a ukážeme, proč je možno *fázory* ve *fázorovém diagramu* počítat jako vektory. K popsání této problematiky použijeme také komplexní symboliky a ukážeme tím, jak se dá této symboliky využít v tomhle konkrétním případě.

2. Zavedení matematických pojmů

Pro účely této práce nyní zavedeme matematické pojmy, které budeme pro řešení obvodů s harmonickými zdroji využívat. Definice přejímáme ze současně používaných učebnic pro žáky středních škol ([19] a [20]). Nejprve se budeme zabývat definicí goniometrických funkcí sinus a kosinus. Následně definujeme aritmetický a goniometrický tvar komplexního čísla a nakonec definujeme pojem Gaussovské roviny, ve které budeme také obvody s harmonickými zdroji řešit. V definicích tam, kde by mohla označení daných pojmů zapadnout, zvýrazňujeme značení také tučně.

2.1 Goniometrie

V této části postupně definujeme funkce *sinus* a *kosinus*, a to podle definic dnes používaných ve středoškolské výuce. Níže uvedené definice v této části jsou přejaty z učebnice goniometrie [19].

Definice 1. *Radián je takový středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku o délce 1.*

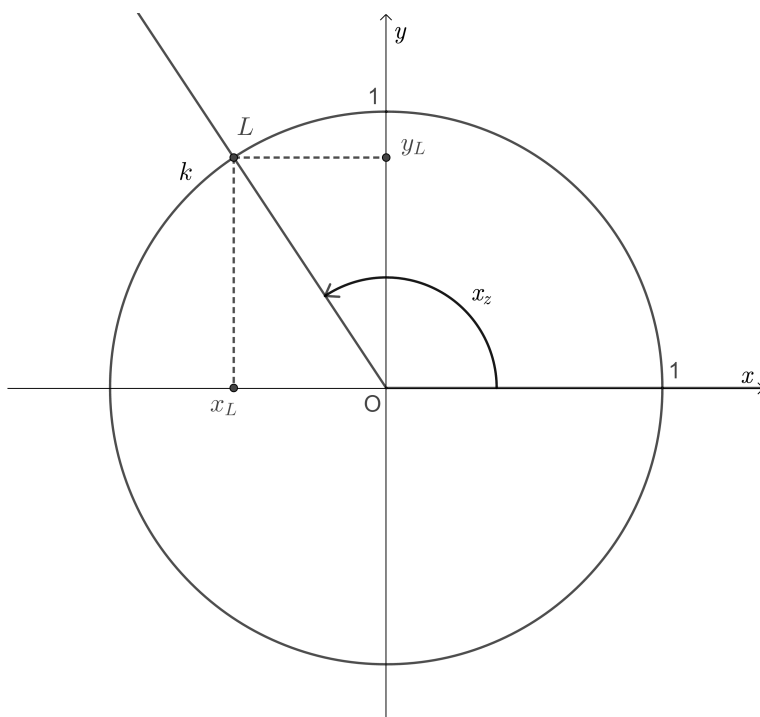
Definice 2. *Uspořádaná dvojice polopřímek \overrightarrow{VA} , \overrightarrow{VB} , se společným počátkem V se nazývá **orientovaný úhel** \widehat{AVB} . Tento úhel označme \widehat{AVB} . Polopřímka \overrightarrow{VA} se nazývá počáteční rameno, polopřímka \overrightarrow{VB} koncové rameno orientovaného úhlu \widehat{AVB} .*

Definice 3. *Základní velikost orientovaného úhlu \widehat{AVB} je velikost úhlu v kladném smyslu, který opíše polopřímka při otáčení z počátečního ramene \overrightarrow{VA} do koncového ramene \overrightarrow{VB} .*

Definice 4. *Velikostí orientovaného úhlu, jehož základní velikost v obloukové míře je α , se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.*

V soustavě souřadnic O_{xy} nyní sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem O . Uvažujme orientované úhly s velikostí tohoto orientovaného úhlu $x \in \mathbb{R}$ (rad) a základní velikostí x_z , jejichž vrchol je bod O a počáteční rameno kladná poloosa x . Koncové rameno tohoto orientovaného úhlu protne kružnici v jediném bodě $L[x_L, y_L]$ (viz obr. 2.1).

Definice 5. *Funkcí **sinus** se nazývá funkce na množině \mathbb{R} , kterou je každému x přiřazeno číslo y_L . Funkcí **kosinus** se nazývá funkce na množině \mathbb{R} , kterou je každému x přiřazeno číslo x_L .*



Obrázek 2.1: K definici funkcí sinus a kosinus.

2.2 Komplexní čísla

Komplexní čísla jsou v současně používané učebnici matematiky pro gymnázia [20] zavedena následujícím způsobem podle definic 6 až 10, které jsou z této učebnice převzaté.

Definice 6. *Komplexním číslem* nazveme výraz ve tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je číslo, pro něž platí $i^2 = -1$. Číslo a nazveme **reálná část**, číslo b nazveme **imaginární část** a číslo i nazveme **imaginární jednotka**.

Definice 7. *Komplexní číslo sdružené s číslem $a+bi$ je číslo $a-bi$. Komplexní číslo sdružené ke komplexnímu číslu z značíme \bar{z} .*

Definice 8. *Absolutní hodnota komplexního čísla z je číslo $\sqrt{z\bar{z}}$, značíme:*

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Definice 9. *Rovina komplexních čísel neboli Gaussova rovina je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel.*

Definice 10. *Goniometrický tvar komplexního čísla $z \neq 0$ je jeho vyjádření ve tvaru*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

číslo φ je **argument** komplexního čísla z , r je jeho absolutní hodnota.

Tyto definice nebudeme blíže komentovat. Všechny komentáře ohledně těchto definic jsou uvedeny v původním zdroji [20].

Všimněme si ovšem jisté skutečnosti. Totiž že sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel je definováno tak, aby tyto operace fungovaly stejně jako u dvojčlenů. Vezměme si příklad:

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i. \quad (2.1)$$

Vidíme, že se sčítá reálná a imaginární část (viz definice 6) zvlášť.

Komplexní číslo tedy nemusíme chápat pouze jako výraz, jak je uvedeno v definici 6, můžeme na něj nahlížet i jako na uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$, kde a je reálná část a b je imaginární část komplexního čísla. Pokud budeme chtít dále sečíst (resp. odečíst) takovéto uspořádané dvojice, budeme postupovat podobně jako v příkladu 2.1:

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + [-c, -d] = [a - c, b - d].$$

Uvědomme si nyní, že pokud uspořádané dvojici reálných čísel $[a, b]$ přiřadíme bod roviny, v níž jsme určili osy x a y protínající se v počátku O , hovoříme o lineární soustavě souřadnic. Pokud interpretujeme tuto uspořádanou dvojici čísel jako komplexní číslo podle definice 6, můžeme přejít k zobrazení komplexních čísel do roviny, kterou podle definice 9 nazveme Gaussovou rovinou. Vzájemné přiřazení komplexních čísel a bodů Gaussovy roviny nám zprostředkuje právě kartézská souřadnicová soustava O_{xy} , na jejíž ose x jsou zobrazena čísla reálná a na ose y čísla ryze imaginární.¹ [20]

Vzhledem k tomu, že komplexní čísla mají podobné vlastnosti jako vektory:

- sečtením dvou komplexních čísel získáme komplexní číslo;
- vynásobením komplexního čísla číslem reálným získáme opět komplexní číslo,

můžeme libovolnému komplexnímu číslu přiřadit vektor v Gaussově rovině. Počátečním bodem tohoto vektoru bude počátek O souřadnicové soustavy O_{xy} a koncovým bodem bude obraz tohoto komplexního čísla v Gaussově rovině.[20] Poznámenejme navíc, že vektor je určený směrem a velikostí. Z čehož vyplývá, že bez ohledu na to, kam vektor s daným směrem a velikostí v souřadnicové soustavě O_{xy} umístíme, jedná se vždy o tentýž vektor se souřadnicemi (a, b) . Z toho vyplývá následující definice.

Definice 11. *Vektor o souřadnicích (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , kde \mathbf{a} je reálná část a \mathbf{b} imaginární část komplexního čísla, umístěný v Gaussově rovině, nazveme vektorem Gaussovy roviny.*

2.2.1 Vybrané vlastnosti komplexních čísel

Zde vybíráme několik vlastností komplexních čísel, které dále v práci budeme využívat. Tyto vlastnosti jsou kompletně popsány a dokázány v učebnici [20] (kap. 2.5, str. 61).

¹Tedy čísla, která mají nenulovou pouze imaginární část.

Mějme čísla $z_1 = a + bi$ a $z_2 = k$, absolutní hodnota jejich součinu je rovna:

$$\begin{aligned} |z| &= |z_1 \cdot z_2| = |k \cdot (a + bi)| = |ka + kbi| = \\ &= \sqrt{(ka + kbi)(ka - kbi)} = \sqrt{k^2(a + bi)(a - bi)} = \\ &= k\sqrt{(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Vidíme, že absolutní hodnota čísla z_1 je po vynásobení číslem $z_2 = k$ rovna:

$$|z| = |z_1||z_2| = k|z_1|. \quad (2.2)$$

Tedy po vynásobení komplexního čísla číslem $z_2 = k$ (ryze reálným) jsme dostali komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je k krát větší. Podíváme-li se na toto číslo jako na vektor Gaussovy roviny, pak vidíme, že se velikost tohoto vektoru k krát zvětší.

Připomeňme ještě další vlastnost komplexních čísel, konkrétně imaginární jednotky i . Vynásobením libovolného komplexního čísla v goniometrickém tvaru $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a imaginární jednotky i získáme (podle [19] (str. 61)):

$$z = r \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (2.3)$$

Podíváme-li se na tato čísla jako na vektory Gaussovy roviny, vidíme otočení původního vektoru o souřadnicích $(a, b)^2$ o orientovaný úhel $\frac{\pi}{2}$. Naopak vynásobením stejného čísla z „mínus“ imaginární jednotkou, tedy číslem $-i$, získáme:

$$z = r \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (2.4)$$

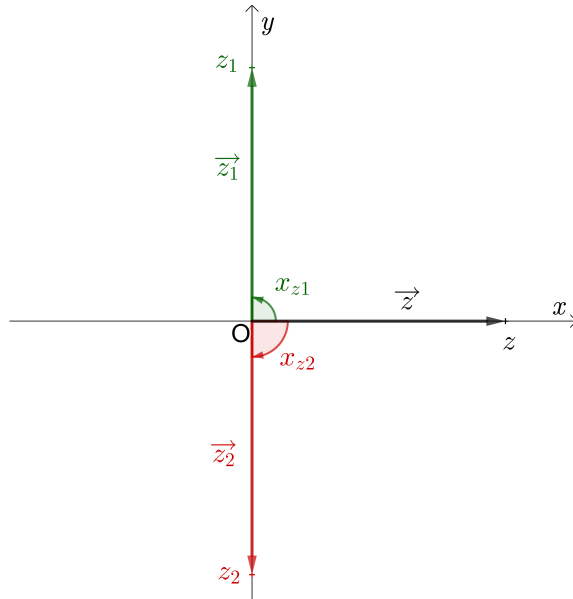
Po vynásobení komplexního čísla z číslem $-i$ v interpretaci pomocí vektorů Gaussovy roviny získáme vektor otočený o orientovaný úhel $-\frac{\pi}{2}$.

Speciálně pro komplexní čísla, jež mají komplexní část nulovou, ve tvaru $z = a$ získáme vynásobením „plus“ nebo „mínus“ imaginární jednotkou číslo $z_1 = ai$ nebo $z_2 = -ai$. Znázorníme-li komplexní čísla z , z_1 a z_2 jako vektory Gaussovy roviny, uvidíme, že vektor \vec{z}_1 znázorňující číslo z_1 je otočený o orientovaný úhel $x_{z_1} = \frac{\pi}{2}$ a vektor \vec{z}_2 znázorňující číslo z_2 o orientovaný úhel $x_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$ okolo svého počátku oproti vektoru \vec{z} znázorňující číslo z (viz obr. 2.2).

Dělením komplexního čísla z_1 komplexní jednotkou $\pm i$ získáme komplexní číslo z :

$$z = \frac{z_1}{i} = \frac{z_1}{\pm i} \cdot \frac{i}{i} = \mp iz_1. \quad (2.5)$$

²Souřadnice a a b získáme převedením čísla z do tvaru $a + bi$.



Obrázek 2.2: Znázornění otáčení vektorů Gaussovy roviny.

Násobením dvou libovolných nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ získáme komplexní číslo z (viz [20]):

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (2.6)$$

Podívejme se opět na tato komplexní čísla jako na vektory Gaussovy roviny. Po vynásobení těchto dvou komplexních čísel získáme komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna součinu absolutních hodnot činitelů a jehož argument je roven součtu argumentů činitelů. To znamená, že násobením komplexních čísel můžeme také vhodně operovat s vektory, konkrétně při zvětšování či zmenšování jejich velikostí a jejich otáčení okolo svého počátku. Této vlastnosti komplexních čísel využívají obory jak fyziky, tak i informatiky. My tuto „krásnou“ vlastnost komplexních čísel využijeme právě při řešení elektrických obvodů se zdrojem harmonického napětí, když přejdeme k řešení pomocí komplexní symboliky.

3. Elektrický obvod se zdrojem harmonického napětí

Elektrickým obvodem zde rozumíme uzavřené vodivé spojení elektrických prvků (rezistor, kondenzátor, cívka aj.) se zdrojem elektrického napětí. Nutno dodat, že se omezíme pouze na *obvody lineární*, tedy takové, které jsou tvořené jen z lineárních prvků (viz [21] kap. 8, str. 497–498)). Linearitu prvků podrobně vysvětluje a dokazuje například Bakalářská práce *Metody řešení elektrických obvodů ve výuce fyziky* [24] (kap. 3.1, str. 6).

Další omezení vyplývá z omezující podmínky pro platnost 2. Kirchhoffova zákona v reálném obvodu (viz např. [24], kap. 4.2, str. 23). V obvodu budeme tedy uvažovat dostatečně nízké úhlové frekvence, při kterých se neuplatní vlastní a vzájemná indukčnost smyček. Toto je úzce spojeno i s rozměry obvodu (viz [22] na str. 393¹).

V textu také budeme nadále uvažovat, že prvky jsou v obvodu zapojeny dostatečně dlouho na to, aby nastal tzv. ustálený stav. Ustáleným stavem myslíme stav, kdy už v obvodu odezněly účinky přechodového jevu, který nastane okamžitě po zapojení cívky či kondenzátoru ke zdroji střídavého napětí (blíže např. [22], kap. 6.3, str. 399).

3.1 Zdroj harmonického napětí

Vzpomeňme nejprve stejnosměrné napětí, které se vyznačuje tím, že jsme schopni rozlišit, který pól zdroje je kladný a který záporný. U střídavého napětí se polarita zdroje časem mění.

Harmonickým střídavým napětím nazveme takové napětí, jehož časový průběh je popsán rovnicí:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

kde $u(t)$ je okamžitá hodnota napětí v čase t , U_m amplituda napětí, ω úhlová frekvence a φ je počáteční fáze v čase $t = 0$ s.² Úhlovou rychlost ω můžeme určit podle vztahu:

$$\omega = 2\pi f, \quad (3.2)$$

kde f je frekvence střídavého napětí. Blíže se významu jednotlivých veličin věnuje například učebnice *Elektřina a magnetismus* [5] (kap. 8-9) nebo publikace *Střídavé proudy* [25] (kap. 2).

Zdroj elektrického napětí nazveme **zdrojem harmonického napětí**, jestliže v elektrickém obvodu budí napětí odpovídající rovnici (3.1).

Harmonické napětí bývá kromě maximální hodnoty U_m také charakterizováno efektivní hodnotou U_{ef} ([5], kap. 9.2, str. 179), kterou ukazují měřící přístroje, podle vztahu:

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.3)$$

¹Například pro frekvence 50 Hz je možno použít 2. Kirchhoffova zákona v el. síti do délky asi 150 km ([22], str. 393).

²Sami si volíme začátek měření a měříme po uplynutí přechodového jevu.

Zde jen poznamenáme, že zbytek textu se již bude zabývat pouze maximální hodnotou. Všechny další vztahy jdou také upravit pro efektivní hodnoty podle (3.3).

3.2 Součet dvou harmonických napětí

Mějme dvě napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ jako funkce času s harmonickým průběhem se stejnou úhlovou frekvencí ω :

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

kde U_{1m} a U_{2m} jsou amplitudy napětí a kde φ_1 a φ_2 jsou fáze (v čase $t = 0$). Ukažme, že sečtením těchto dvou napětí získáme výsledné napětí také s harmonickým průběhem, s výslednou amplitudou U_m a s fází φ :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.4)$$

Součet

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

rozezpíšeme pomocí součtového vzorce pro funkci *sinus*:³

$$u(t) = U_{1m}(\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1) + U_{2m}(\sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2).$$

Roznásobením součinů a vytknutím společných členů $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ dostaneme:

$$u = \sin \omega t (U_{1m} \cos \varphi_1 + U_{2m} \cos \varphi_2) + \cos \omega t (U_{1m} \sin \varphi_1 + U_{2m} \sin \varphi_2). \quad (3.5)$$

Označíme nyní konstanty („závorky“) u členů $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$:

$$U_{1m} \cos \varphi_1 + U_{2m} \cos \varphi_2 = a;$$

$$U_{1m} \sin \varphi_1 + U_{2m} \sin \varphi_2 = b.$$

Všimněme si, že jsme dostali dvě rovnice pro dvě nové neznámé a a b . Po dosazení do (3.5) dostaneme:

$$u(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Připomeňme, že chceme dostat výsledné napětí podle vztahu (3.4). Jaké musí být tedy konstanty a a b , abychom splnili rovnost:

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = a \sin \omega t + b \cos \omega t?$$

Rozepsáním levé strany rovnice s užitím součtového vzorce dostaneme:

$$U_m \cos \varphi \sin \omega t + U_m \sin \varphi \cos \omega t = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (3.6)$$

Z rovnosti (3.6) bezprostředně plyne, že součet napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ je v každém časovém okamžiku roven $u(t)$, pokud je splněna následující soustava rovnic:

$$U_{1m} \cos \varphi_1 + U_{2m} \cos \varphi_2 = U_m \cos \varphi; \quad (3.7)$$

$$U_{1m} \sin \varphi_1 + U_{2m} \sin \varphi_2 = U_m \sin \varphi. \quad (3.8)$$

Tím jsme ukázali, že součtem dvou harmonických napětí se stejnou úhlovou frekvencí ω získáme opět harmonické napětí s touto společnou úhlovou frekvencí, pokud vhodnými konstantami U_m a φ splníme rovnice (3.7) a (3.8).

³Tedy $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, důkaz viz např. [20] (str. 87).

3.3 Prvky elektrického obvodu

Jak je zmíněno výše, omezíme se pouze na tzv. lineární prvky, tedy rezistor, kondenzátor a cívku. Šipkami napětí na prvcích ve schématech a šipkou proudu myslíme následující:

- je-li proud $i(t)$ v daný časový okamžik t kladný, pak má proud směr skutečně ve směru šipky jako na obrázku a naopak;
- má-li napětí $u(t)$ v čase t kladnou hodnotu, šipka směřuje od bodu s vyšším potenciálem k bodu s nižším potenciálem a naopak (například pro zdroj je na začátku šipky kladný pól zdroje a na konci šipky záporný pól zdroje).

3.3.1 Rezistor

Rezistor, charakterizovaný konstantním odporem R , zapojíme do jednoduchého obvodu se zdrojem harmonického napětí podle obrázku 3.1, potom je proud $i(t)$ procházející rezistorem v každém časovém okamžiku určen vztahem (Ohmův zákon):

$$i(t) = \frac{u_r(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi),$$

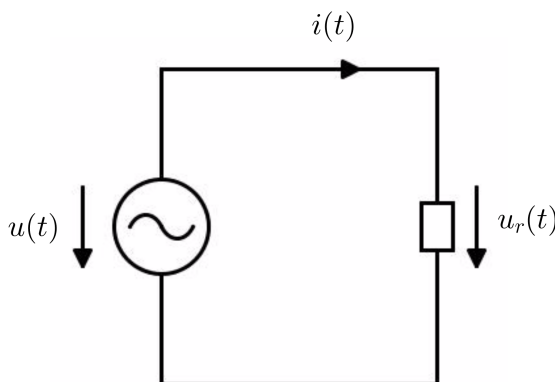
z čehož získáme:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.9)$$

kde R je *odpor* rezistoru (v obvodu se střídavým napětím nazýván také *rezistance*) a I *amplituda proudu* (např. [9] kap 3.1). Říkáme, že napětí je s proudem ve fázi, jelikož počáteční fáze proudu (procházejícího rezistorem) a napětí na rezistoru jsou stejné.

Je zřejmé, že pro amplitudu proudu a napětí platí:

$$U_m = RI_m. \quad (3.10)$$



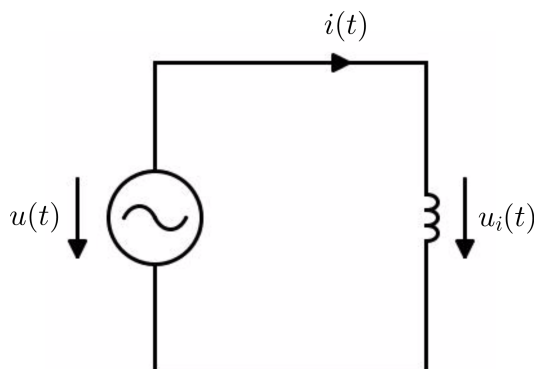
Obrázek 3.1: Zapojení rezistoru ke zdroji harmonického napětí.

3.3.2 Cívka

Je-li cívka zapojena v elektrickém obvodu podle obrázku 3.2 a prochází jí proud $i(t)$, potom je na ní indukováno napětí $u_i(t)$ podle vztahu:

$$u_i(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (3.11)$$

kde L je *indukčnost* cívky a $\frac{di(t)}{dt}$ časová derivace proudu procházejícího cívkou (viz [21] (kap. 4.1.4, str. 273)).



Obrázek 3.2: Zapojení cívky ke zdroji harmonického napětí.

Zapojíme-li cívku do obvodu pouze se zdrojem harmonického napětí, do cívky vstupuje proud:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.12)$$

Na cívce je potom indukováno napětí podle vztahu (3.11):

$$u_i(t) = L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \varphi)],$$

z čehož získáme:

$$u_i(t) = LI_m \omega \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.13)$$

Označíme $U_m = LI_m \omega$ jako amplitudu indukovaného napětí $u_i(t)$. Přepsáním vztahu pro maximální hodnoty proudu a napětí získáme vztah formálně připomínající Ohmův zákon:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (3.14)$$

Zavedeme tedy novou veličinu *induktance* (značíme X_L), která charakterizuje cívku v obvodu se střídavým proudem (např. [9] kap. 2.2):

$$X_L = \omega L. \quad (3.15)$$

Pokud přepíšeme indukované napětí $u_i(t)$ na cívce následujícím způsobem:⁴

$$u_i(t) = U_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.16)$$

vidíme z rovnic (3.12) a (3.16), že rozdíl fází mezi napětím na cívce a proudem jí procházejícím je $\frac{\pi}{2}$. Říkáme, že napětí předbíhá proud.

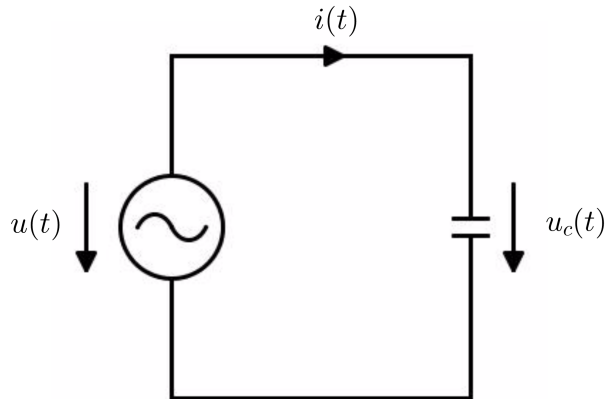
⁴Využijeme identity $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

3.3.3 Kondenzátor

Pro kondenzátor zapojený v elektrickém obvodu podle obrázku 3.3 platí následující závislost mezi proudem a napětím:

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}, \quad (3.17)$$

kde C je kapacita kondenzátoru a $\frac{du_c(t)}{dt}$ časová derivace napětí na kondenzátoru ([21] kap. 1.4.5, str. 103).



Obrázek 3.3: Zapojení kondenzátoru ke zdroji harmonického napětí.

Zapojíme-li kondenzátor ke zdroji střídavého napětí, bude na něm napětí:

$$u_c(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.18)$$

a bude jím procházet proud podle vztahu (3.17):

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [U_m \sin(\omega t + \varphi)],$$

derivací dostaneme:

$$i(t) = CU_m \omega \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.19)$$

Označme $I_m = CU_m \omega$ jako amplitudu proudu. Po úpravě do tvaru:

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} \quad (3.20)$$

získáme opět vztah připomínající Ohmův zákon. Zavedeme tedy novou veličinu *kapacitance* (značíme X_C), která charakterizuje kondenzátor v obvodu se střídavým proudem (např. [9] kap. 2.3):

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.21)$$

Přepsáním vztahu (3.19) do tvaru:

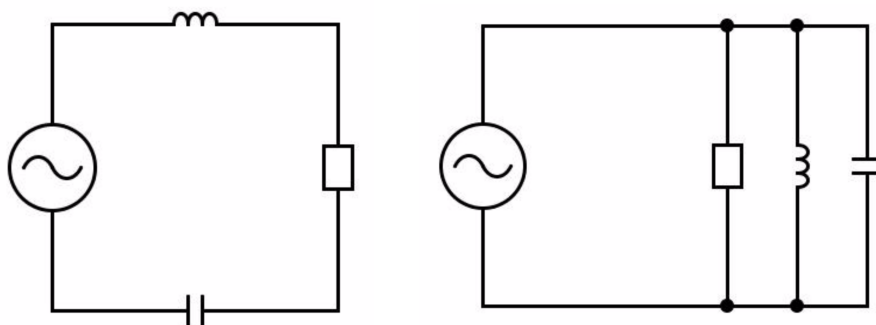
$$i(t) = I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.22)$$

uvidíme fázový rozdíl mezi proudem, který jím prochází, a napětím na kondenzátoru roven hodnotě $\frac{\pi}{2}$. Říkáme, že proud předbíhá napětí.

Jenom dodáme, že na rozdíl od rezistance jsou vztahy pro indukanci a kapacitanci ((3.15) a (3.21)) platné pouze pro maximální (resp. efektivní) hodnoty proudu a napětí. Chceme-li zjistit okamžitou hodnotu napětí nebo proudu na cívice (resp. na kondenzátoru), musíme použít vztah (3.11) (resp. (3.17)).

3.4 RLC obvod

RLC obvodem nazveme takové zapojení, ve kterém se vyskytují všechny tři z výše vyjmenovaných prvků, tedy rezistor, cívka a kondenzátor, spolu se zdrojem harmonického napětí. Tyto prvky mohou být zapojeny jak sériově, tak paralelně, nebo jinou složitější kombinací. Příklady takového zapojení jsou na obrázku 3.4. Vlevo na obrázku je sériové RLC zapojení, vpravo je paralelní RLC zapojení.



Obrázek 3.4: Sériové a paralelní RLC zapojení.

4. Hrajeme si s fázory

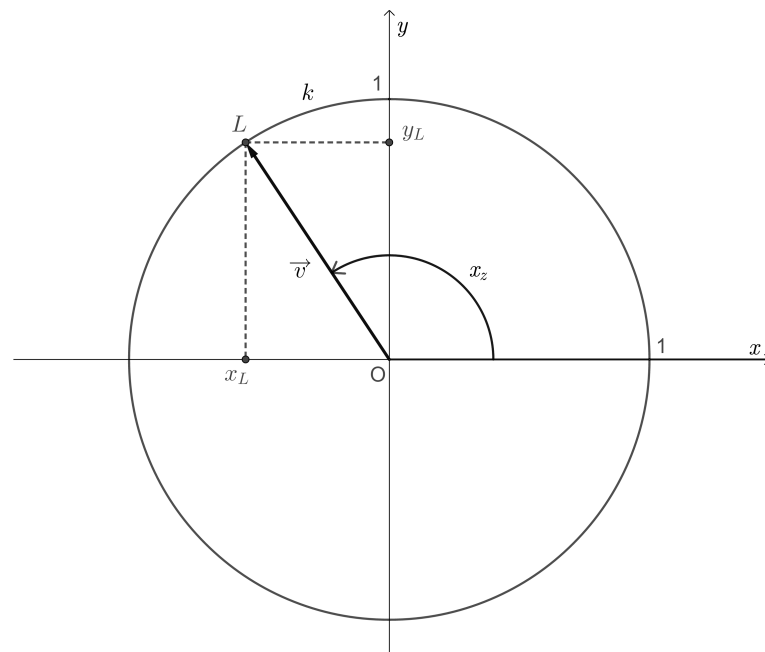
Pojem *fázor* je dnes využíván v několika SŠ učebnicích (viz kap. 1.1). My se v této kapitole budeme zabývat definováním pojmů *fázor* a *fázorový diagram* a ukážeme souvislost fázorů mezi veličinami s harmonickým (rozumějte „sinusovým“) průběhem.

4.1 Motivace k zavedení fázorů

V této části motivujeme zavedení nového, ve SŠ fyzice často využívaného, pojmu *fázor*. Nejprve se podíváme na to, jak můžeme „vykreslit“ graf funkce sinus pomocí otáčejícího se vektoru. Potom se zaměříme na to, jak by se daly „sčítat sinusovky“. A nakonec uvidíme, jak toto sčítání vede k zavedení pojmu *fázor*.

4.1.1 Otáčíme vektorem

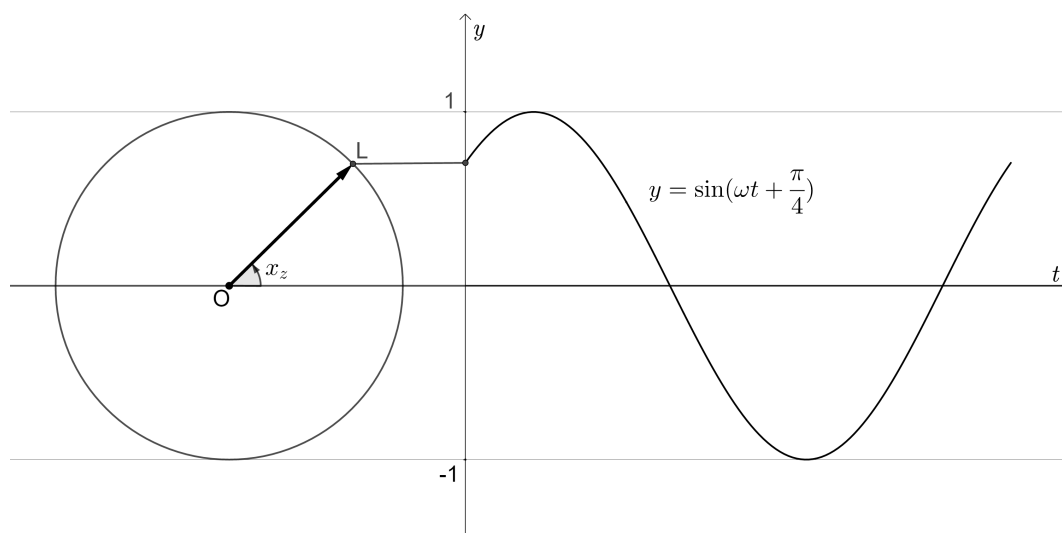
Při pohledu na definici funkcí sinus a kosinus (viz definice 5) můžeme místo koncového ramene orientovaného úhlu umístit takový vektor \vec{v} , jehož koncový bod leží na dané jednotkové kružnici a jehož počáteční bod je v počátku O souřadnicové soustavy O_{xy} . Souřadnice $[x_L, y_L]$ tohoto vektoru, a v tomhle případě i souřadnice $[x_L, y_L]$ koncového bodu tohoto vektoru, nám určují hodnoty funkcí sinus a kosinus podle definice 5 (viz obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Vektor určující goniometrické funkce sinus a kosinus.

Představme si nyní, že vektor necháme otáčet úhlovou rychlostí ω v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Jinými slovy necháme „souvisle“ měnit velikost (a tedy i základní velikost) orientovaného úhlu nyní určeného kladnou

poloosou x a vektorem \vec{v} . V každém časovém okamžiku nám, jak již bylo zmíněno, druhá souřadnice y_L vektoru \vec{v} určuje hodnotu funkce sinus v daný čas t (viz obr. 4.2)¹. Příklad takového otáčení s počáteční základní velikostí $x_z = \frac{\pi}{4}$ orientovaného úhlu vidíme na obrázku. V levé části obrázku 4.2 je vektor, který určuje orientovaný úhel se základní velikostí $x_z = \frac{\pi}{4}$ a v pravé části je naznačen graf sinusovky, který vykreslí takto rotující vektor po otočení o úhel 2π v kladném smyslu. Záměrně zde není určeno měřítko časové osy. To bude totiž záviset na zvolené úhlové rychlosti ω otáčení vektoru.



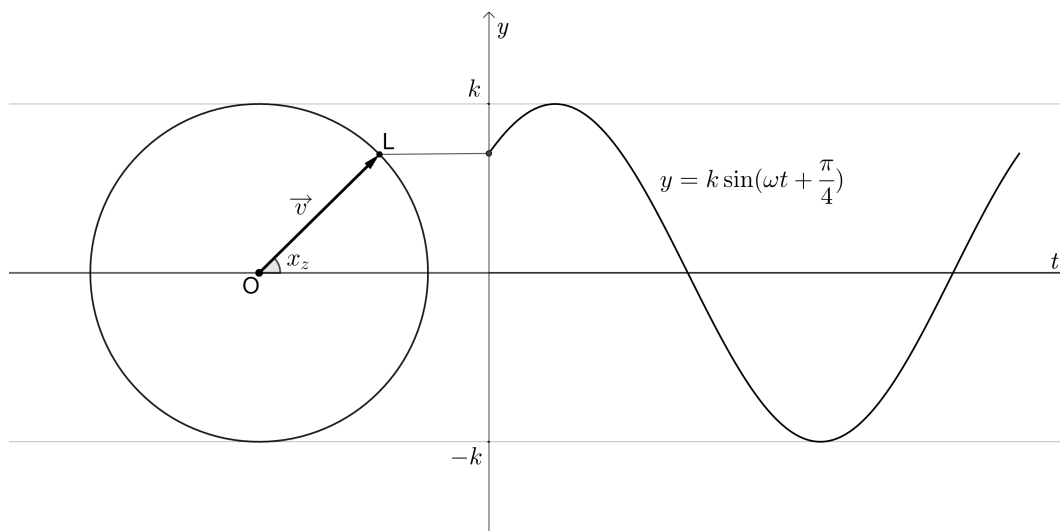
Obrázek 4.2: Otáčející se vektor určující postupně graf funkce sinus.

Pokud bychom chtěli vykreslit „sinusovku“, která má maximum rovno naší zvolené hodnotě $k \in \mathbb{R}_+$, a tedy minimum hodnotě $-k$, museli bychom vektor vynásobit právě tímto kladným číslem $k \in \mathbb{R}_+$. Po vynásobení vektoru číslem k bude velikost tohoto vektoru k . Pro libovolnou hodnotu času t dostaneme hodnotu funkce sinus přenásobenou právě hodnotou k . Potom bychom pro předchozí naší zvolený příklad získali graf funkce $y(t) = k \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ jako na obrázku 4.3.

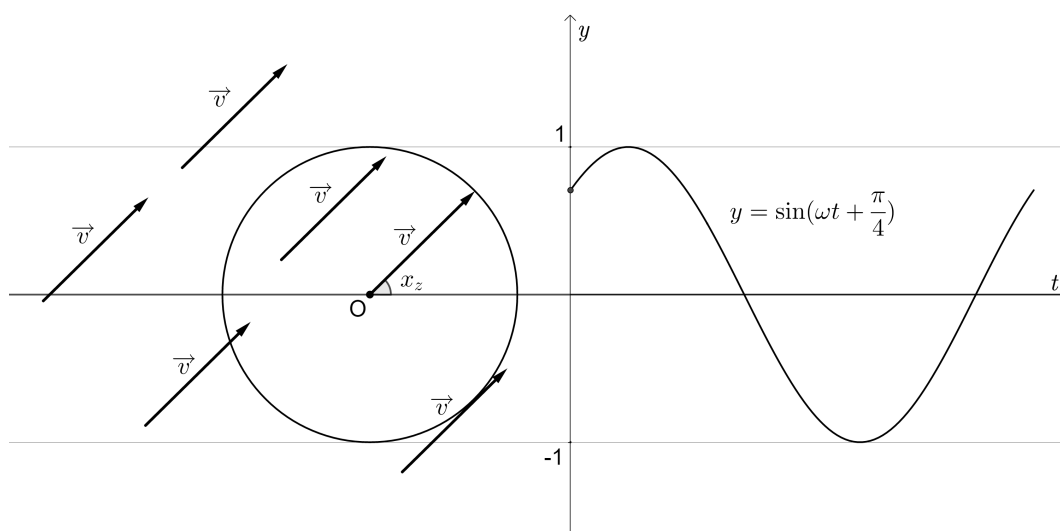
Vzpomeňme si nyní na to, že souřadnice vektoru nejsou závislé na poloze tohoto vektoru v souřadnicové soustavě. Proto zaměříme-li se pouze na jeho ypsilonovou (chcete-li druhou) souřadnici, otáčející se vektor nám vždy — bez ohledu na umístění v souřadnicové soustavě — vykreslí naši sinusovku. Viz obr. 4.4, kde jsme pro ilustraci vybrali několik takových vektorů. Tato skutečnost bude pro nás velmi podstatná, protože se nám bude hodit vybírat si „vhodné vektorové reprezentanty“ naší funkce sinus.

Nakonec dodejme, že v představě s otáčejícím se vektorem místo koncového ramene orientovaného úhlu odpovídá naší zavedená úhlová rychlost ω úhlové frekvenci ω ze vztahu 3.1 (proto jsme zvolili stejné značení) a počáteční velikost orientovaného úhlu x_z počáteční fázi φ v čase $t = 0$ s. Po přenásobení vektoru konstantou k jsme získali vztah formálně odpovídající vztahu 3.1 pro harmonické napětí, kde se tato konstanta nazvala amplitudou napětí. Proto dále v textu budeme tyto konstanty nazývat *úhlová frekvence*, *počáteční fáze* a *amplituda napětí*.

¹V tomto a dalších obrázcích jsou pro větší přehlednost v levých částech obrázků vynechány osy x a y .



Obrázek 4.3: Otáčející se vektor určující postupně graf funkce sinus přenásobenou hodnotou k .



Obrázek 4.4: Několik vybraných vektorů vykreslujících stejnou funkci sinus.

4.1.2 Sčítáme otáčející se vektory

V kapitole 4.1.1 jsme ukázali, že ypsilonová souřadnice vektoru otáčejícího se kolem svého počátku nám vykreslí graf funkce sinus. V této kapitole se zaměříme na to, jak můžeme pomocí dvou otáčejících se vektorů sečíst dvě „sinusovky“.

Již v kapitole 3.2 jsme zjistili, že součet dvou harmonických napětí se stejnou úhlovou frekvencí ω můžeme vyjádřit jako napětí s novou amplitudou U_m a počáteční fází φ . Jak ale najdeme takové konstanty, abychom splnili rovnice (3.7) a (3.8)? K určení těchto konstant nám pomůže právě spojení mezi grafem funkce sinus a otáčejícím se vektorem.

Napětí se stejnou fází

Začněme jednodušším případem, kdy budeme sčítat napětí se stejnou počáteční fází. Bez újmy na obecnosti² budeme předpokládat počáteční fází $\varphi = 0$ (vždy totiž můžeme čas posunout tak, abychom splnili tuto podmínku). A tedy máme napětí o rovnicích:

$$u_1(t) = U_1 \sin(\omega t),$$

$$u_2(t) = U_2 \sin(\omega t).$$

Sečteme-li tato napětí analyticky, získáme jednoduše:

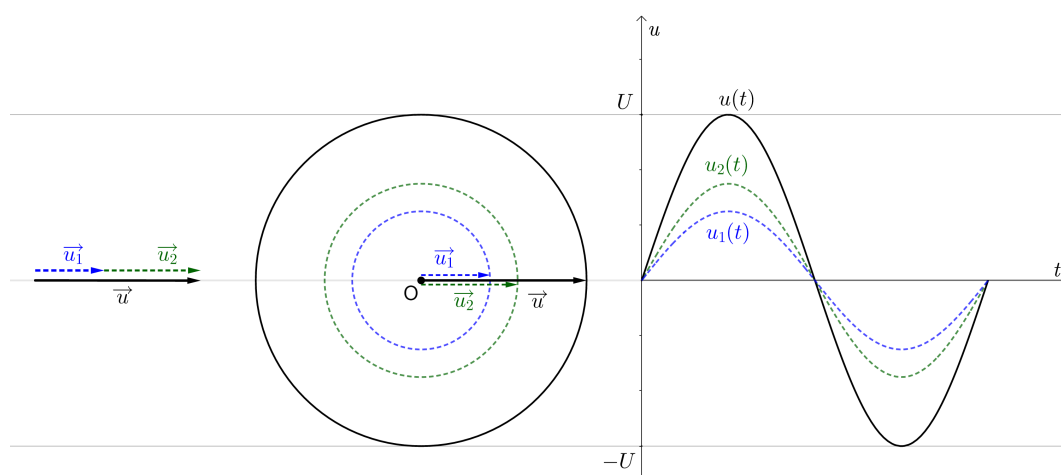
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_1 \sin(\omega t) + U_2 \sin(\omega t).$$

Po vytknutí dostaneme:

$$u(t) = (U_1 + U_2) \sin(\omega t). \quad (4.1)$$

Co to ale znamená pro naše otáčející se vektory? Znázorníme napětí $u_1(t)$ vektorem \vec{u}_1 , napětí $u_2(t)$ vektorem \vec{u}_2 a napětí $u(t)$ vektorem \vec{u} . Vzhledem k tomu, že velikost vektoru určuje amplitudu napětí, ze vztahu (4.1) zjistíme, že výsledné napětí $u(t)$ je určeno vektorem \vec{u} , který je vektorovým součtem vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 (viz obrázek 4.5). Vlevo na tomto obrázku je naznačen vektorový součet vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 . Uprostřed pro větší přehlednost vektory \vec{u}_1 a \vec{u}_2 v obrázku nesplývají s prodloužením časové osy t . Kružnice, které opisují koncové body vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 , jsou v obrázku znázorněny přerušovaně.

Vektorovým součtem získáme výsledné napětí se stejnou počáteční fází a s amplitudou rovnou součtu amplitud napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$, což odpovídá rovnici (4.1). Vidíme, že v tomto případě můžeme vektorový součet pro vyjádření výsledného vektoru \vec{u} napětí $u(t)$ opravdu využít.



Obrázek 4.5: Grafický součet průběhů dvou napětí se stejnou fází.

²Toto tvrzení znamená, že si sice zvolíme jeden speciální příklad daného problému, ale nic to nezmění na obecnosti našeho tvrzení.

Napětí s opačnou fází

Jak dopadne sčítání dvou napětí s opačnou počáteční fází?³ Tzn. napětí o rovnicích:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= U_1 \sin(\omega t); \\ u_2(t) &= U_2 \sin(\omega t + \pi).\end{aligned}$$

Rozepíšeme si napětí u_2 podle součtového vzorce pro funkci sinus:

$$u_2(t) = U_2[\sin(\omega t) \cos \pi + \sin \pi \cos(\omega t)] = -U_2 \sin(\omega t).$$

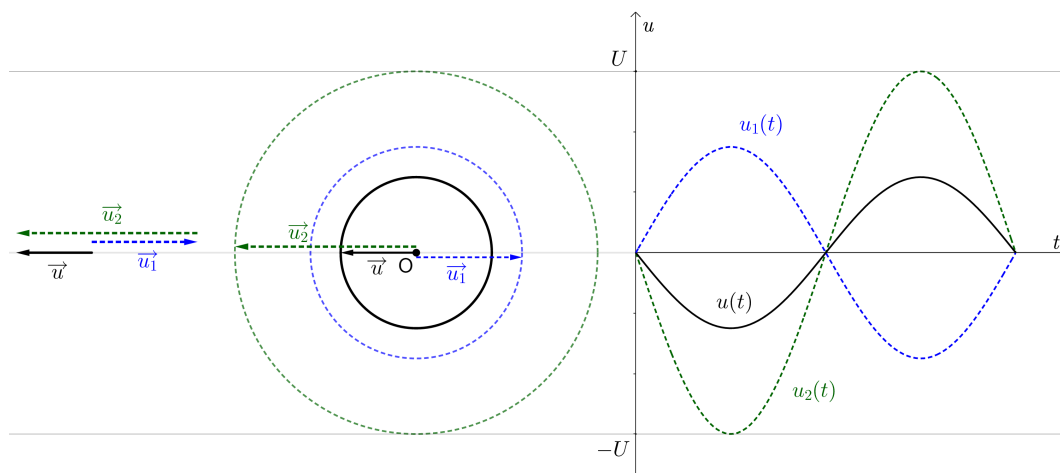
Výsledné napětí je tedy rovno:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_1 \sin(\omega t) - U_2 \sin(\omega t).$$

Analogicky k příkladu sčítání napětí se stejnou fází získáme výsledné napětí $u(t)$ podle vztahu:

$$u(t) = (U_1 - U_2) \sin(\omega t). \quad (4.2)$$

Zachováme-li označení, které jsme zavedli u příkladu 4.1, bude výsledné napětí $u(t)$ reprezentováno opět vektorovým součtem vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 (viz obrázek 4.6).



Obrázek 4.6: Grafický součet průběhu dvou napětí s opačnou fází.

Napětí s rozdílnou fází

Nyní nám zbývá vyřešit obecný případ, ve kterém bude rozdíl fází φ_1 a φ_2 napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ obecně v intervalu $(0, 2\pi)$. Máme tedy napětí o rovnicích:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= U_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \\ u_2(t) &= U_2 \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Dostali jsme se k příkladu, který jsme analyticky řešili už v kapitole 3.2. Můžeme se pokusit hledat takové konstanty, abychom splnili rovnice (3.7) a (3.8). Vidíme, že to nebude nejjednodušší. Pojďme to zkusit jinak.

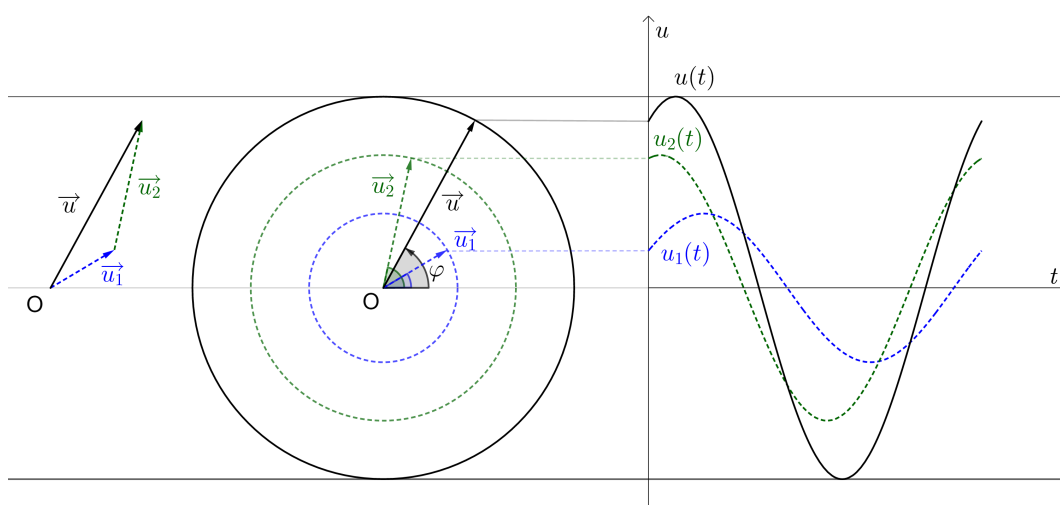
³Pojmu opačná fáze zde není použito náhodou. Znamená to, že vektory, jimiž znázorníme tato napětí, budou mít opačný směr.

Pro napětí se stejnou i s opačnou fází platilo, že jsme výsledné napětí $u(t)$ mohli určit jako vektorový součet vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 , které nám znázorňovaly příslušná napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$. To jsme dokonce ověřili výpočtem. Nepůjde to i v tomto nejobecnějším příkladu tak, že pouze vektorově sečteme příslušné vektorové interpretace napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$?

Podívejme se ještě jednou na obrázek 4.4, kde je zachyceno několik vektorů vykreslujících stejnou funkci sinus. Vzhledem k tomu, že nezáleží na umístění vektoru, kterým interpretujeme naše napětí, můžeme si zvolit „vhodného reprezentanta“ obou napětí.

Vyberme reprezentanty pro náš příklad sčítání napětí s rozdílnou fází následovně. Napětí u_1 je znázorněno vektorem \vec{u}_1 a jeho počáteční bod je v počátku O naší souřadnicové soustavy. Napětí u_2 je znázorněno vektorem \vec{u}_2 , jehož počáteční bod je v koncovém bodě vektoru \vec{u}_1 (viz levá část obrázku 4.7). Vektor u je pak znázorněn jako vektorový součet vektorů \vec{u}_1 a \vec{u}_2 .

V každém časovém okamžiku t totiž ypsilonová souřadnice vektoru \vec{u}_1 určuje okamžitou hodnotu napětí u_1 a ypsilonová souřadnice vektoru \vec{u}_2 zase určuje okamžitou hodnotu napětí u_2 . Z této úvahy jednoduše plyne, že vektorovým součtem těchto vektorů dostaneme pro libovolný časový okamžik t výsledné napětí u .⁴ Na obrázku 4.8 vybíráme tři časové okamžiky a znázorňujeme, jak se otočili naši reprezentanti.



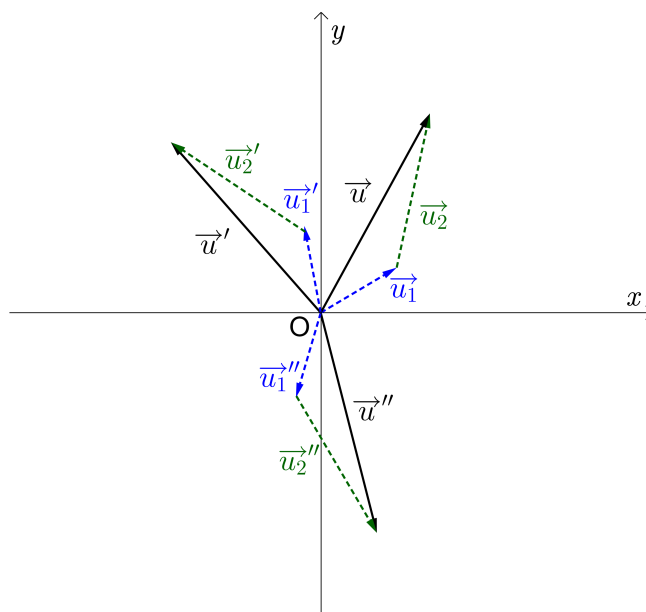
Obrázek 4.7: Grafický součet dvou obecných průběhů napětí.

4.2 Fázor a fázorový diagram

V kapitole 4.1 jsme ukázali, že součet průběhu dvou napětí můžeme jednoduše získat pomocí vektorového součtu dvou vektorů otáčejících se stejnou⁵ úhlovou rychlostí ω . Záměrně jsme se celou kapitolu 4.1 drželi vyjádření otáčející se vektor. Nyní označme počáteční polohu tohoto vektoru v čase $t = 0$ s, znázorňující časový průběh napětí $u(t)$, jako fázor napětí. Jak je vidět už z minulých úvah (viz

⁴Podle vztahu $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

⁵Znovu zdůrazněme, že pro naše úvahy je podmínka stejných úhlových rychlostí nutná.



Obrázek 4.8: Otáčející se vektory zobrazené ve třech časových okamžicích.

obr. 4.4), nezáleží na umístění fázoru v souřadnicové soustavě. **Fázor** je jednoznačně určen svou velikostí a orientovaným úhlem, který svírá s kladnou poloosou x . Velikostí fázoru je zde myšlena velikost otáčejícího se vektoru, který vykresluje průběh veličiny s harmonickým průběhem. Orientovaným úhlem x_z myslíme úhel určený kladnou poloosou x jakožto počátečním ramenem, a polopřímku s počátečním bodem v počátku O souřadnicové soustavy O_{xy} jakožto koncovým ramenem. Tato polopřímka má směr tohoto otáčejícího se vektoru v počátečním čase $t = 0$ s (viz obrázky 2.1 a 4.1).

V následující definici pojem fázor zobecníme pro libovolnou veličinu s harmonickým průběhem. Namísto velikosti fázoru v následující definici uijeme pojmu amplituda dané veličiny a budeme ji značit A a namísto velikosti orientovaného úhlu dále použijeme vyjádření počáteční fáze a označíme ji φ (viz str. 28).

Definice 12. Vektor otáčející se úhlovou rychlostí ω okolo svého počátečního bodu, umístěný do souřadnicové soustavy O_{xy} , o velikosti A a s počáteční fází φ , kterou má v čase $t = 0$ s nazveme **fázor** časově závislé veličiny $a(t)$:

$$a(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Fázor veličiny $a(t)$ budeme značit \bar{A} .

Má-li fázor velikost U_m , nazveme jej **fázorem napětí** a označíme \bar{U} . Podobně fázor s velikostí I_m nazveme **fázorem proudu** a označíme \bar{I} .

Umístíme-li do souřadnicové soustavy O_{xy} jeden a více fázorů, vytvoříme fázorový diagram. Fázorový diagram nejčastěji zobrazujeme v čase $t = 0$ s a zohledníme tím i počáteční fázi φ , která pak bude viditelná jako orientovaný úhel, jehož určení je popsáno výše. Můžeme si však vybrat i jiný čas $t = t_0$, ve kterém budeme fázorový diagram zobrazovat. Otočení fázorů okolo svého počátečního bodu totiž nemění úhly ani velikosti těmito fázory určené (viz obr. 4.8).

Definice 13. Souřadnicovou soustavu O_{xy} , do které umísťujeme jeden a více fázorů v čase $t = t_0$, nazveme **fázorový diagram**.

Takto definované pojmy **fázor** napětí a **fázorový diagram** nám umožní graficky zjišťovat konstanty U_m a φ soustavy rovnic (3.7) a (3.8) pro součet napětí s obecnou fází (viz. podkapitola *Napětí s rozdílnou fází* na str. 31).

4.3 Součet tří a více harmonických napětí

Pokud budeme chtít sečíst tři a více napětí s harmonickým průběhem podle rovnic:

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2);$$

...

$$u_n = U_{nm} \sin(\omega t + \varphi_n),$$

získáme opět napětí $u(t)$ s harmonickým průběhem:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Stačí si uvědomit, že sečtením napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ získáme napětí s harmonickým průběhem:

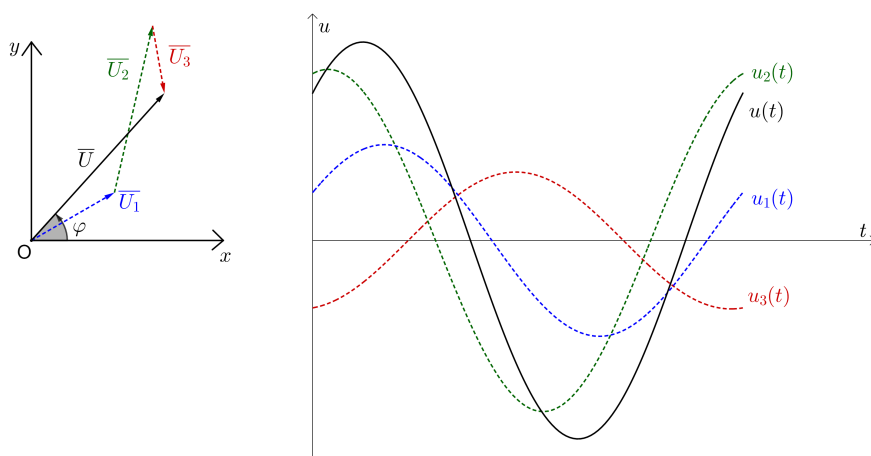
$$u_{12}(t) = U_{12} \sin(\omega t + \varphi_{12}),$$

které budeme sčítat s napětím $u_3(t)$, čímž vznikne výsledné napětí:

$$u_{123}(t) = U_{123} \sin(\omega t + \varphi_{123}).$$

Pokud bychom pokračovali ve sčítání daných napětí dále, získali bychom po $(n-1)$ krocích výsledné napětí $u(t)$. Dokážete si však představit, že analytické zjišťování tohoto napětí bude přinejmenším velmi zdlouhavé. Grafické znázornění těchto napětí pomocí fázorů ve fázorovém diagramu nám tento problém velmi zjednoduší.

Na obrázku 4.9 je ukázán příklad fázorového diagramu, v němž jsme sečetli napětí $u_1(t)$, $u_2(t)$ a $u_3(t)$ s obecnou počáteční fází s pomocí jejich fázorové interpretace \bar{U}_1 , \bar{U}_2 a \bar{U}_3 .



Obrázek 4.9: Fázorový diagram a grafický součet tří obecných průběhů napětí.

5. Řešení elektrických obvodů

V následující kapitole si předvedeme, jak můžeme získané poznatky z kapitol 2, 3 a 4 aplikovat při řešení obvodů se zdrojem harmonického napětí, do kterého jsou zapojeny pouze lineární prvky. Předpokládáme zde, že začínáme měřit dostatečně dlouho po zapojení prvků do obvodu a že reálné rozměry obvodu splňují omezující požadavky na platnost 2. Kirchhoffova zákona (viz úvod kapitoly 3).

5.1 1. a 2. Kirchhoffův zákon

Při řešení elektrických obvodů se zdrojem harmonického napětí použijeme 1. a 2. Kirchhoffova zákona. Jejich podrobné odvození uvádí například [21] (kap. 4.2, str. 281). My však využijeme formulace z [24] (str. 21–22), která využívá stejného značení jako my na obrázcích 3.1, 3.2 a 3.3.

5.1.1 1. Kirchhoffův zákon

Algebraický součet všech proudů v uzlu elektrického obvodu se pro libovolný časový okamžik rovná nule.¹ Tento zákon můžeme matematicky napsat takto:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0, \quad (5.1)$$

kde n je počet vodičů, které jsou spojeny v daném uzlu.

5.1.2 2. Kirchhoffův zákon

Algebraický součet všech svorkových napětí zdrojů a všech úbytků napětí na spotřebičích se pro libovolný časový okamžik v uzavřené smyčce rovná nule. Matematický zápis tohoto zákona potom napíšeme takto:²

$$\sum_{l=1}^m u_l(t) = 0, \quad (5.2)$$

kde m je součet počtu zdrojů napětí a počtu lineárních prvků v uzavřené smyčce.

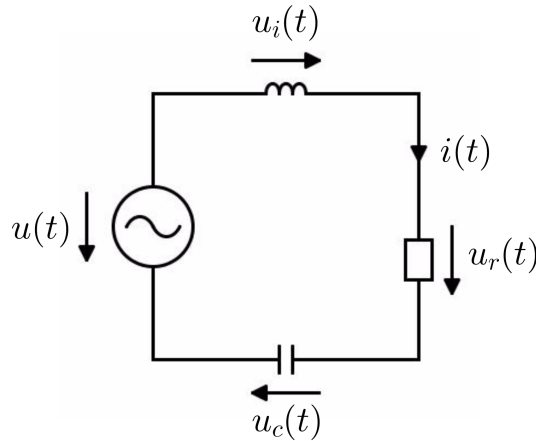
5.2 Řešení sériového RLC obvodu

Podívejme se nyní na řešení sériového RLC obvodu (viz obr. 5.1). Mějme rezistor o odporu R , cívku o indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C . V obvodu je zapojen zdroj harmonického napětí s úhlovou frekvencí ω , díky kterému všemi prvky prochází stejný proud $i(t)$:

$$i(t) = I_m \sin \omega t. \quad (5.3)$$

¹Požadujeme totiž splnění rovnice kontinuity v každém časovém okamžiku (viz. [21], kap. 4.2.1, str. 285).

²Takto vyjádřený 2. Kirchhoffův zákon bude odpovídat značení šipek, které jsme použili pro napětí již dříve ve schématech.



Obrázek 5.1: Sériové RLC zapojení.

Napětí $u_r(t)$ na rezistoru je dáno vztahem (3.9), a je tedy ve fázi s proudem. Indukované napětí na cívce u_i předbíhá proud (viz (3.16)) o úhel $\frac{\pi}{2}$. Proud procházející kondenzátorem naopak předbíhá napětí na kondenzátoru $u_c(t)$ také o úhel $\frac{\pi}{2}$ (viz (3.22)). Svorkové napětí zdroje $u(t)$ určuje hodnoty napětí na jednotlivých prvcích. Z 2. Kirchhoffova zákona totiž dostaneme:

$$u(t) - u_r(t) - u_i(t) - u_c(t) = 0.$$

Jednoduchou úpravou pak získáváme:

$$u(t) = u_r(t) + u_i(t) + u_c(t). \quad (5.4)$$

Vzhledem k tomu, že v obvodu není žádný uzel, 1. Kirchhoffův zákon se neuplatní a všemi prvky prochází stejný proud. Znázorníme tento proud $i(t)$ fázorem \bar{I} , napětí $u_r(t)$, $u_i(t)$ a $u_c(t)$ postupně fázory \bar{U}_R , \bar{U}_L a \bar{U}_C ve fázorovém diagramu v čase $t = 0$ s (obr. 5.2). Velikosti těchto fázorů jsou dány amplitudami³ napětí na jednotlivých prvcích, ty jsou popsány vztahy (3.10), (3.14) a (3.20). Aby bylo vidět, že nezáleží na umístění fázorů v souřadnicové soustavě O_{xy} , umístili jsme je různě. Čárkovaně je pak označen jiný způsob získání výsledného napětí.

Z kapitoly 4.2 již víme, že stačí určit pouze velikost U a počáteční fázi φ výsledného fázoru \bar{U} . Velikost tohoto fázoru získáme pomocí Pythagorovy věty (viz také [9], kap. 3.4):

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (5.5)$$

Dosažením za amplitudy napětí dostaneme:

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = IZ, \quad (5.6)$$

kde Z nazveme výslednou impedancí ([9], kap. 3.4), charakterizující daný sériový RLC obvod⁴:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (5.7)$$

³Amplitudy pro rezistor, cívku a kondenzátor postupně značíme U_R , U_L a U_C .

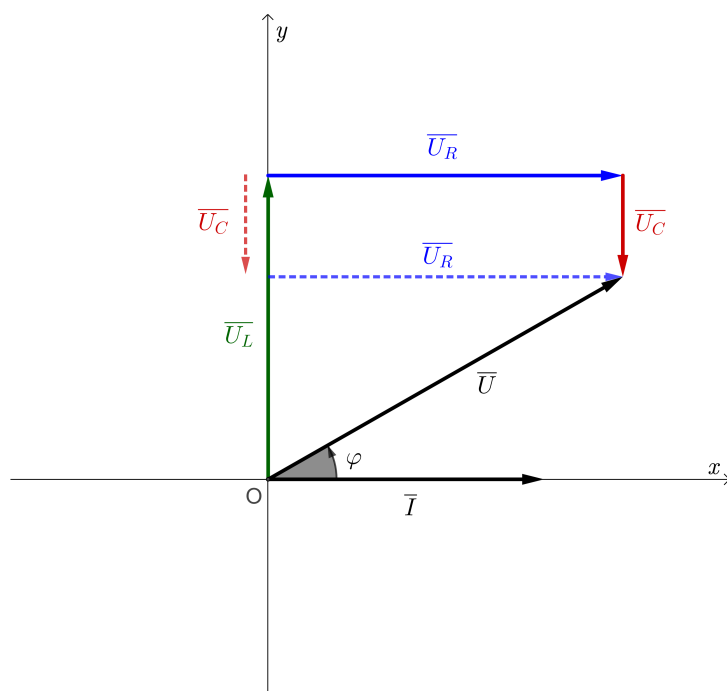
⁴Všimněme si opět toho, že se snažíme najít vztah podobající se Ohmovu zákonu $U = IR$.

Počáteční fázi φ výsledného napětí $u(t)$ pak získáme pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (5.8)$$

Po dosazení do vztahu (5.4) získáme hodnotu napětí $u(t)$ v libovolném čase t :

$$\begin{aligned} u(t) &= U_R \sin \omega t + U_L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + U_C \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right); \\ u(t) &= IZ \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} \right). \end{aligned}$$



Obrázek 5.2: Fázorový diagram sériového RLC zapojení.

5.3 Řešení paralelního RLC obvodu

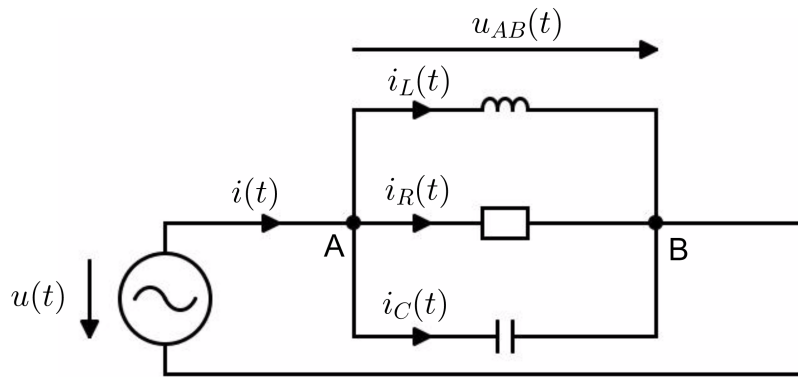
Mějme opět rezistor o odporu R , cívku o indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C zapojené v elektrickém obvodu se zdrojem harmonického napětí podle obrázku 5.3. Z 2. Kirchhoffova zákona vidíme, že napětí mezi uzly A a B je ve všech větvích stejné. Obvod je zde totiž vytvořen ze tří uzavřených smyček a na každé z nich je úbytek napětí na spotřebičích roven svorkovému napětí zdroje. Necht' je toto společné napětí zobrazeno ve fázorovém diagramu fázorem \bar{U} a zároveň je jeho počáteční fáze nulová.

Z 1. Kirchhoffova zákona dále dostaneme:⁵

$$i(t) - i_R(t) - i_L(t) - i_C(t) = 0.$$

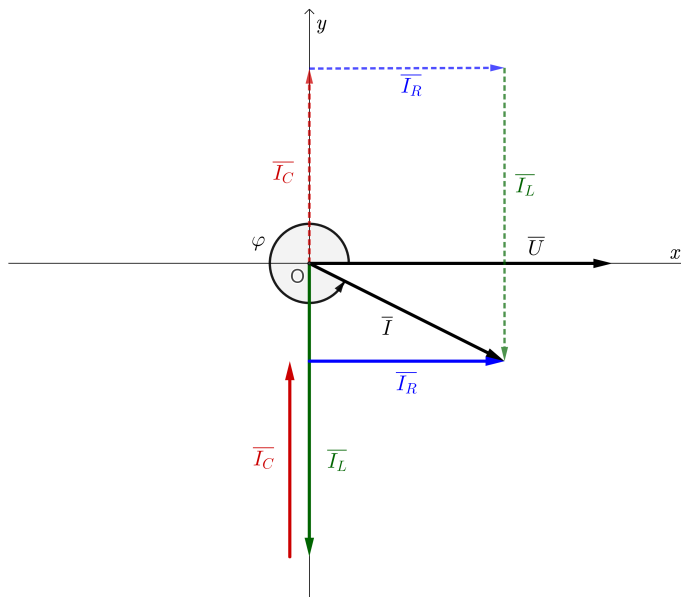
Převedením členů $i_R(t)$, $i_L(t)$ a $i_C(t)$ na druhou stranu pak získáme:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t). \quad (5.9)$$



Obrázek 5.3: Schéma zapojení paralelního RLC obvodu.

Proud $i_R(t)$ nyní zobrazme fázorem \bar{I}_R o velikosti I_R s počáteční fází rovné nule (na rezistoru je proud ve fázi s napětím). Proud $i_L(t)$ zobrazme fázorem \bar{I}_L o velikosti I_L s počáteční fází $-\frac{\pi}{2}$ (viz vztah (3.16)) a proud $i_C(t)$ zobrazme fázorem \bar{I}_C o velikosti I_C s počáteční fází $\frac{\pi}{2}$ (viz vztah (3.22)). Fázorový diagram je zobrazen na obrázku 5.4. Amplituda výsledného proudu I je pak dána výsledným fázorem \bar{I} , který je součtem fázorů \bar{I}_R , \bar{I}_L a \bar{I}_C . Na obrázku je čárkovaně vyznačena jiná možnost sčítání těchto fázorů.



Obrázek 5.4: Fázorový diagram paralelního RLC zapojení.

Z diagramu můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat velikost výsledného fázoru \bar{I} (viz také [9], kap. 3.5):

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}.$$

⁵Šipky proudu jsou záměrně voleny tak, aby proud do uzlu vstupoval pouze ze zdroje a vystupoval do všech tří větví zároveň.

A po dosazení ze vztahů (3.10), (3.14) a (3.20) dostaneme:

$$I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} = UY, \quad (5.10)$$

kde Y nazveme výslednou admitancí paralelního RLC obvodu (viz [9], kap. 3.5):

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}. \quad (5.11)$$

Počáteční fázi výsledného proudu získáme (podobně jako u (5.8)) pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}. \quad (5.12)$$

Po dosazení do rovnice (5.9) můžeme dopočítat hodnotu proudu $i(t)$ v libovolném čase t :

$$\begin{aligned} i(t) &= I_R \sin \omega t + I_C \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + I_L \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right); \\ i(t) &= IY \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \right). \end{aligned}$$

Bližší významu těchto vztahů věnuje učebnice fyziky pro elektrotechniky [9]. My zde jen shrneme, že:

- sériový RLC obvod je charakteristický svou *impedancí* Z , která má stejný rozměr jako odpor;
- paralelní RLC obvod je charakteristický svou *admitancí* Y , která má stejný rozměr jako převrácená hodnota odporu.

Zajímavé také je, že po zavedení veličin impedance a admitance již platí Ohmův zákon pro maximální (resp. efektivní) hodnoty napětí a proudu stejně jako pro stejnosměrný proud. Tedy pro sériové zapojení:

$$U = ZI$$

a pro paralelní RLC zapojení

$$U = \frac{I}{Y}.$$

Z čehož můžeme vidět, že impedance paralelního RLC zapojení je rovna převrácené hodnotě admitance:

$$Z = \frac{1}{Y}.$$

6. Využití komplexní symboliky

Na začátek zdůrazněme, že imaginární jednotku i budeme v této a dalších kapitolách značit j , a to především z toho důvodu, aby se nám nepletla s okamžitou hodnotou proudu, která je označena $i(t)$.

Z předchozích kapitol již víme, jak otáčející se vektor vykresluje graf harmonických funkcí. Zavedli jsme pojmy *fázor* a *fázorový diagram* a pomocí těchto pojmů jsme již dokonce vyřešili sériové i paralelní RLC zapojení se zdrojem harmonického napětí. V této kapitole ukážeme, jak se dá při řešení RLC obvodů využít komplexní symboliky, kterou jsme zavedli v kapitole 2.2.

Naší snahou v této kapitole bude „zachování“ Ohmova zákona i v komplexní symbolice pro obvody se zdrojem harmonického napětí. Z toho důvodu chceme najít následující vztah:

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I},$$

kde \bar{Z} nazveme komplexní impedance daného zapojení. Jak to ale udělat tak, abychom zachovali obecnost daného postupu a zohlednili všechny skutečnosti, které již známe z dřívějších kapitol?

6.1 Fázory v Gaussově rovině

Myšlenku zavedení fázorů v Gaussově rovině jsme převzali z tvrzení uvedeného v příručce pro učitele fyziky [18], které citujeme na straně 9. V této kapitole toto tvrzení rozepíšeme podrobněji a ukážeme jeho důsledky.

Podívejme se ještě jednou na definici 13, ve které jsme zavedli pojem *fázorový diagram* tak, že do souřadnicové soustavy O_{xy} umísťujeme fázory v daném čase $t = t_0$. Podle definice 12 je fázor vektor, který rotuje¹ okolo svého počátku v souřadnicové soustavě O_{xy} . Z definice 11 dále víme, že komplexní čísla můžeme zobrazit jako vektor také do souřadnicové soustavy O_{xy} , kde jsou vektory obrazy komplexních čísel ve tvaru $z = a + bi$.

Představme si nyní, že fázory ve fázorovém diagramu jsou právě obrazy komplexních čísel v této souřadnicové soustavě O_{xy} , kterou umístíme do Gaussovy roviny. Do souřadnicové soustavy tedy budeme umísťovat fázory jakožto *vektory Gaussovy roviny*. Z toho vychází následující definice.

Definice 14. *Souřadnicovou soustavu O_{xy} umístěnou v Gaussově rovině, do níž zakreslujeme jeden a více fázorů v čase $t = t_0$, nazveme **fázorový diagram v Gaussově rovině**.*

Do Gaussovy roviny můžeme podle definice 11 umístit vektory o souřadnicích (a,b) . Ztotožníme-li takovýto vektor s fázorem v námi zvoleném čase $t = t_0$ podle definice 12, můžeme fázorový diagram řešit užitím vlastností komplexních čísel. Vektor Gaussovy roviny je totiž vektor se souřadnicemi (a,b) , kde a je reálná a b imaginární část komplexního čísla z (viz definice 6).

Pro větší srozumitelnost budeme i nadále rozumět značením \bar{A} fázor veličiny $a(t)$ (viz definice 12). Takovýto fázor v Gaussově rovině budeme značit stejně,

¹Rozumějte otáčí se okolo svého počátku úhlovou rychlostí ω .

jen namísto dvojice souřadnic jej budeme určovat právě komplexním číslem z ve smyslu definice 11.

Velikost vektoru Gaussovy roviny je dána absolutní hodnotou $|z|$ komplexního čísla podle definice 8. Orientovaný úhel, který určuje tento vektor (viz obr. 4.1) je dán argumentem φ komplexního čísla² podle definice 10. To znamená, že pokud určíme absolutní hodnotu $|z|$ a argument φ komplexního čísla, určíli jsme jednoznačně fázor (viz strana 33). Jen dodejme, že absolutní hodnota komplexního čísla bude odpovídat amplitudě A veličiny s harmonickým průběhem a argument φ počáteční fázi veličiny (viz definice 12).

6.2 Komplexní impedance RLC obvodu

V kapitolách 5.2 a 5.3 jsme již vyřešili výslednou impedanci sériového a paralelního RLC zapojení se zdrojem harmonického napětí. Díky zavedení fázorového diagramu v Gaussově rovině a znalostí vlastností komplexních čísel můžeme nyní zavést komplexní impedanci sériového a paralelního RLC obvodu.

6.2.1 Komplexní impedance sériového RLC obvodu

Naším úkolem je opět vyřešit rovnici (5.4) vyplývající z 2. Kirchhoffova zákona:

$$u(t) = u_r(t) + u_i(t) + u_c(t). \quad (6.1)$$

Znázorníme tato napětí a společný proud procházející všemi prvky ve fázorovém diagramu fázory \bar{I} , \bar{U} , \bar{U}_R , \bar{U}_L a \bar{U}_C , podobně jako jsme to udělali v kapitole 5.2. Jediným rozdílem nyní bude to, že fázory budeme určovat odpovídajícím komplexním číslem z , a tedy je umístíme do Gaussovy roviny. Představme si, že umístíme fázor proudu \bar{I} libovolně do naší souřadnicové soustavy.

Nejprve najdeme vztah mezi fázorem napětí na rezistoru \bar{U}_R a proudem \bar{I} tak, aby byl analogií Ohmova zákona:

$$\bar{U}_R = \bar{R} \bar{I}, \quad (6.2)$$

kde \bar{R} je takové komplexní číslo, které tuto rovnici splní pro fázory \bar{U}_R a \bar{I} .³ Velikost napětí na rezistoru U_R je určena Ohmovým zákonem a napětí na tomto rezistoru $u_R(t)$ je ve fázi s proudem $i(t)$, který jím prochází. Proto můžeme říct, že hledáme komplexní číslo, které odpovídajícím způsobem změní velikost fázoru \bar{I} , ale nezmění jeho fázi (viz vztahy (3.9) a (3.10)). Tuto vlastnost mají komplexní čísla bez imaginární složky (viz kapitola 2.2.1 vztah (2.2)). Tím najdeme komplexní číslo \bar{R} , které splní námi požadované vlastnosti:

$$\bar{R} = R + j \cdot 0 = R.$$

Podobně se pokusme najít analogii Ohmova zákona pro cívku:

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \bar{I}, \quad (6.3)$$

²Pro zjednodušení uvažujeme φ z polootevřeného intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, a tedy základní velikost.

³Velikost fázorů je zde ztotožnitelná s absolutní hodnotou komplexního čísla, které daný fázor určuje.

kde komplexní číslo $\overline{X_L}$ splní poměr mezi absolutními hodnotami napětí na cívce U_L a proudu I a zároveň bude výsledný fázor napětí $\overline{U_L}$ otočen o orientovaný úhel $\frac{\pi}{2}$ oproti fázoru proudu \overline{I} (viz (3.14) a (3.16)). Takové vlastnosti bude mít komplexní číslo s absolutní hodnotou X_L a argumentem $\frac{\pi}{2}$ (viz kapitola 2.2.1 vztah (2.6)):

$$\overline{X_L} = 0 + jX_L = jX_L .$$

Dále bychom pro kondenzátor rádi získali vztah:

$$\overline{U_C} = \overline{X_C} \overline{I} , \quad (6.4)$$

kde komplexní číslo $\overline{X_C}$ má — podobně jako u rezistoru a cívky — splnit tuto rovnici pro fázory $\overline{U_C}$ a \overline{I} . Z rovnic (3.20) a (3.22) vidíme, že poměr mezi amplitudami napětí U_C na kondenzátoru a proudu I jím protékajícím je roven právě hodnotě X_C a že fázor napětí je oproti fázoru proudu otočen o orientovaný úhel $-\frac{\pi}{2}$. Proto komplexní číslo X_C musí mít tvar (viz kapitola 2.2.1 a vztah (2.6)):

$$\overline{X_C} = 0 - j \cdot X_C = -jX_C .$$

Získali jsme tak komplexní impedance jednotlivých prvků, které splní rovnice (6.2), (6.3) a (6.4):

$$\overline{R} = R; \quad (6.5)$$

$$\overline{X_L} = jX_L; \quad (6.6)$$

$$\overline{X_C} = -jX_C. \quad (6.7)$$

Přejdeme nyní k řešení sériového RLC obvodu. Přepíšeme rovnici (6.1) vyplývající z 2. Kirchhoffova zákona pomocí fázorů:

$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C} \quad (6.8)$$

a dosadíme do ní ze vztahů, které jsme získali výše:⁴

$$\overline{U} = \overline{R} \overline{I} + \overline{X_L} \overline{I} + \overline{X_C} \overline{I} = R\overline{I} + jX_L\overline{I} - jX_C\overline{I} = \overline{I}(R + jX_L - jX_C).$$

Dále dostaneme

$$\overline{U} = \overline{I}(R + j(X_L - X_C)) = \overline{I} \overline{Z}. \quad (6.9)$$

Vidíme, že nám opět vyšel vztah podobný Ohmovu zákonu, a můžeme proto zavést komplexní impedanci sériového RLC obvodu \overline{Z} určenou vztahem:

$$\overline{Z} = R + j(X_L - X_C). \quad (6.10)$$

Takto zavedená komplexní impedance v sobě „obsahuje“ informaci nejen o poměru amplitud výsledného napětí U a proudu I , ale i rozdíl fází mezi napětím $u(t)$ a proudem $i(t)$. Komplexní impedance sériového RLC obvodu tak v sobě nese kromě informace o poměru výsledných amplitud napětí a proudu také informaci o vzájemném otočení příslušných fázorů proudů a napětí v souřadnicové soustavě. Tady vidíme největší přidanou hodnotu zavedené komplexní symboliky.

⁴Máme na mysli vztahy (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) a (6.7).

Vyjádříme-li absolutní hodnotu výsledné impedance sériového RLC obvodu \bar{Z} , získáme vztah (viz definice 8):

$$|\bar{Z}| = |R + j(X_L - X_C)| = \sqrt{[R + j(X_L - X_C)][R - j(X_L - X_C)]}$$

a po vynásobení máme absolutní hodnotu komplexní impedance sériového obvodu:

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (6.11)$$

Rozdíl fází mezi fázorem napětí a fázorem proudu (tedy argument komplexní impedance) získáme pomocí funkce tangens (viz [20], kap. 2.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (6.12)$$

V této kapitole jsme tudíž našli komplexní impedance pro jednotlivé lineární prvky a následně výslednou komplexní impedanci \bar{Z} sériového RLC obvodu:

$$\bar{Z} = \bar{R} + \bar{X}_C + \bar{X}_L.$$

Vidíme, že komplexní impedance se v sériovém zapojení pouze sečtou, stejně jako je tomu u sčítání odporů rezistorů v obvodech se zdrojem stejnosměrného napětí. Upozorňujeme však, že zde musíme značení \bar{R} , \bar{X}_L , \bar{X}_C a \bar{Z} chápat pouze jako komplexní čísla (tedy konstanty).

6.2.2 Komplexní admittance paralelního RLC obvodu

Označme společné napětí na všech prvcích fázorem \bar{U} (viz obr. 5.3). Pro paralelní RLC obvod jsme již v kapitole 5.3 dostali z 1. Kirchhoffova zákona podmínku pro proudy v jednotlivých větvích (vztah (5.9)). Přepsáním pomocí fázorů dostaneme:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C.$$

Analogicky ke způsobu, který jsme použili u sériového zapojení, po dosazení ze vztahů (6.5), (6.6) a (6.7) dostaneme⁵:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{R}} + \frac{\bar{U}}{\bar{X}_L} + \frac{\bar{U}}{\bar{X}_C} = \bar{U} \left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{j\bar{X}_L} + \frac{1}{-j\bar{X}_C} \right),$$

z čehož podle (2.5) máme:

$$\bar{I} = \bar{U} \left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{j}{\bar{X}_C} - \frac{j}{\bar{X}_L} \right) = \bar{U} \bar{Y}.$$

Znovu jsme dostali vztah formálně shodný s Ohmovým zákonem, veličinu \bar{Y} tedy nazveme komplexní admítancí:⁶

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{R}} + j \left(\frac{1}{\bar{X}_C} - \frac{1}{\bar{X}_L} \right). \quad (6.13)$$

⁵Nechť jsou R , X_L , a X_C nenulové. V opačném případě bychom řešili některý ze speciálních případů zvlášť.

⁶Vzhledem k tomu, že jsme již v reálném oboru tuto veličinu označili jako admítanci.

Stejně jako dříve vidíme, že:

$$\bar{I} = \bar{U} \bar{Y} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}.$$

Z čehož okamžitě plyne vztah mezi komplexní admitancí a komplexní impedancí:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}.$$

Vyjádřením absolutní hodnoty komplexní admitance získáme velikost výsledné admitance obvodu (viz definice 8):

$$|\bar{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}. \quad (6.14)$$

Rozdíl fází mezi proudem a napětím (tedy argument komplexní admitance) získáme pomocí funkce tangens (viz [20], kap. 2.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}. \quad (6.15)$$

A tak jsme získali výslednou komplexní admitanci Y sériového RLC obvodu. Představíme-li si místo cívky a kondenzátoru rezistory, vidíme formálně stejný vztah, jako je pro sčítání odporů rezistorů při paralelním zapojení se zdrojem stejnosměrného napětí.

Poznamenejme ještě, že při určování argumentu komplexní impedance či komplexní admitance je výhodné hledat hodnotu argumentu v otevřeném intervalu $\varphi \in (-\pi, \pi)$. U komplexní impedance potom zjistíme rozdíl fází pomocí orientovaného úhlu určeného fázorem proudu jakožto počátečním ramenem a fázorem napětí jakožto ramenem koncovým. Naopak u zjišťování rozdílu fází u komplexní admitance je orientovaný úhel určený fázorem napětí jakožto počátečním ramenem a fázorem proudu jakožto koncovým ramenem. Pro φ určené na tomto intervalu pak rovnou vidíme, jestli proud předbíhá napětí, či naopak.

Pro případ, kdy některý z prvků není v obvodu zapojen, musíme „vynechat“ příslušnou komplexní impedanci (odpor, induktanci či kapacitanci) ve výše uvedených vztazích. Fázory napětí na těchto prvcích (příp. proudu, který jimi prochází) budou totiž nulové a v Kirchhoffových zákonech se tedy tyto členy neobjeví.

Dodejme, že v našich odvozeních jsme celou dobu uvažovali ideální cívku. Kdyby v obvodu nebyl zapojen žádný rezistor a velikost impedance cívky by byla rovna velikosti kapacitance kondenzátoru, výsledná impedance obvodu by byla nulová. Teoreticky by tak došlo ke zkratu.⁷ V reálných obvodech však většinou musíme s odporem cívky (vinutí jejího drátu) počítat, protože je nezanedbatelný. V obvodech s reálnou cívkou pak tuto cívku nahrazujeme sériovým zapojením rezistoru s ideální cívkou.

6.3 Shrnutí komplexní symboliky

Zavedením komplexní symboliky pro řešení sériového či paralelního RLC obvodu se zdrojem harmonického napětí jsme určením komplexní impedance či komplexní admitance získali i jejich vzájemný rozdíl fází, to je první přidaná hodnota

⁷Proud by rostl nade všechny meze.

tohoto pohledu na řešení obvodů. Pro reálné hodnoty odporu, indukance a kapacitance jsme totiž měli pouze informaci o poměru amplitud proudu a napětí.

Pro ukotvení představy počítání s fázory (chcete-li komplexními čísly) ještě jednou shrneme jejich vlastnosti:

- Sčítáním a odečítáním dvou a více fázorů pomocí komplexní symboliky nezískáme nic jiného než sčítání fázorů ve fázorovém diagramu tak, jak jsme toto sčítání a odčítání zavedli v kapitole 4. Toto můžeme odůvodnit například náhledem na komplexní čísla jako na uspořádané dvojice, jak jsme ukázali v příkladu (2.1).
- Násobením fázorů reálným číslem získáme fázory (resp. vektory) odpovídajícím způsobem prodloužené nebo zkrácené (viz (2.2)). Toto násobení fázorů reálným číslem se projeví změnou amplitudy veličiny, kterou daný fázor znázorňuje.
- Násobením nebo dělením dvou komplexních čísel získáváme kromě prodloužení a zkracování fázorů také otočení jednotlivých fázorů okolo počátku souřadnicové soustavy. Toto jsme pro speciální případy ukázali v rovnicích (2.3) a (2.4). Obecně násobení a dělení dvou komplexních čísel komentuje například [20] v kapitole 2.5. Dodejme, že otočení fázorů v souřadnicové soustavě nezmění vztahy mezi nimi (viz např. obr. 4.8).

V této kapitole jsme tedy ukázali možnost umístění fázorů do Gaussovy roviny a jejich interpretaci pomocí komplexních čísel a operace s nimi. Vidíme, že tato metoda nám dává shodné výsledky s již dříve použitou metodou, ve které jsme se zabývali geometrií trojúhelníků ve fázorovém diagramu pomocí Pythagorovy věty. Na druhou stranu se nám může jevit, že je zde komplexní symbolika zavedená poměrně uměle a nevidíme možná její větší opodstatnění. Je pravdou, že pro fázorové diagramy jednoduchých RLC obvodů, jejichž řešení jsme zde ukázali, komplexní symbolika nepřináší příliš velké zvyhodnění či zjednodušení. Na druhou stranu (jak uvádí i [22]) pro složitější RLC zapojení či jiné problémy zkoumající veličiny,⁸ kde se vyskytují veličiny s harmonickým průběhem, může vést tato metoda ke značnému zjednodušení problému.

Při takto zavedených komplexních impedancích (viz výše) jednotlivých lineárních prvků je možno pracovat s obvody se zdrojem harmonického napětí stejně jako s obvody s rezistory, které jsou připojeny ke zdroji stejnosměrného napětí. Tuto skutečnost ilustrujeme v posledním řešeném příkladu následující kapitoly. Zavedení komplexní symboliky do obvodů s harmonickým napětím a lineárními prvky nám tak dalo velmi silný nástroj, pomocí něhož můžeme určovat amplitudy proudu a napětí v obvodu (případně výsledný odpor obvodu) velmi rychlým a efektivním způsobem. Díky linearitě prvků v obvodu je totiž možno využít stejné metody, které máme k dispozici u rezistorů připojených ke zdroji stejnosměrného napětí. Tyto metody shrnuje například již zmiňovaná Bakalářská práce [24].

Nakonec poznamenejme, že, bohužel, zavedené značení pro komplexní impedance jednotlivých prvků v obvodu zde neznamená, že by to byly fázory ve smyslu definice 12. Abychom totiž splnili námi požadované vztahy, musíme tyto komplexní čísla považovat za konstanty.

⁸A že těchto veličin máme ve fyzice poměrně hodně.

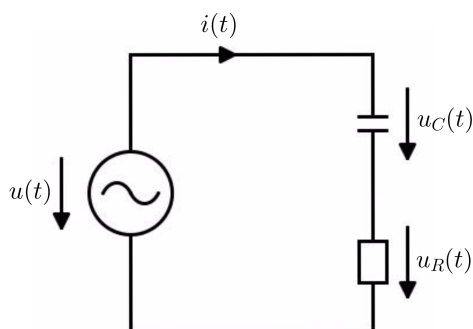
7. Řešené úlohy

V následující kapitole uvedeme tři řešené úlohy. První z nich je vytvořena pro účely této bakalářské práce. Druhou vybíráme ze sbírky úloh [12] pro střední školy, abychom porovnali řešení užitá v knize s řešením pomocí námi zavedené komplexní symboliky. Třetí úloha, také vytvořena pro účely této bakalářské práce, je zde řešena pro ilustraci zjednodušení řešení jinak složité úlohy díky použitím komplexní symboliky.

7.1 Příklad 1

Mějme sériové RC zapojení rezistoru o odporu $R = 1 \text{ k}\Omega$ s kondenzátorem o kapacitě $C = 100 \text{ nF}$ se zdrojem harmonického napětí, který v obvodě budí napětí o frekvenci $f = 1 \text{ kHz}$.

1. Zakreslete fázorový diagram pro napětí a proud tohoto zapojení;
2. vypočtete výslednou impedanci Z tohoto obvodu a rozdíl fází φ mezi počáteční fází napětí a proudem tohoto obvodu za užití fázorového diagramu z bodu 1.;
3. vypočtete výslednou impedanci tohoto obvodu s využitím komplexní symboliky.



Obrázek 7.1: Schéma zapojení k příkladu 1.

1. Zakreslení fázorového diagramu

V této části opět budeme předpokládat, že proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a jejich počáteční fáze je nulová ($\varphi_0 = 0$), proto jejich fázory zakreslíme ve směru kladné poloosy x . Nechť \bar{I} je fázorem proudu o velikosti I procházejícího kondenzátorem a rezistorem. Dále označme \bar{U}_R fázor napětí na rezistoru a \bar{U}_C fázor napětí na kondenzátoru. Velikost těchto fázorů pak určíme z Ohmova zákona (viz kap. 3):

$$U_R = RI;$$

$$U_C = X_C I.$$

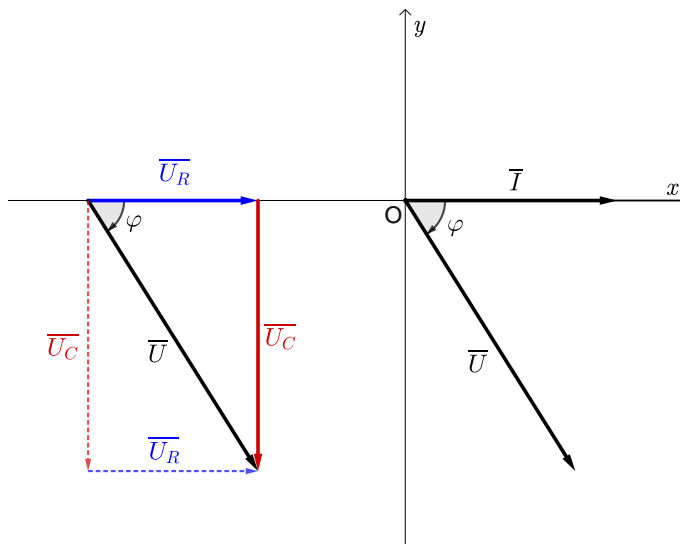
Abychom měli fázory \overline{U}_R a \overline{U}_C ve fázorovém diagramu zakreslené ve správném poměru, vypočteme nyní poměr jejich velikostí:

$$\frac{U_R}{U_C} = \frac{RI}{\frac{1}{\omega C}I} = R 2\pi f C.$$

Po číselném dosazení máme:

$$\frac{U_R}{U_C} = 1 \cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 2\pi \cdot 10^{3+3+2-9} = 2\pi \cdot 10^{-1} \doteq 0,63.$$

Ve fázorovém diagramu nebudeme zohledňovat poměr mezi velikostí fázoru proudu \overline{I} a fázoru napětí \overline{U}_R , protože nedává smysl porovnávat dvě veličiny s různými jednotkami.¹ Můžeme nakreslit fázorový diagram (obr. 7.2) podle postupu popsaného v kapitole 5.2. Rozdíl oproti obecnému řešení sériového RLC obvodu bude v tom, že ze všech vztahů „vymizí“ napětí U_L na cívce a indukčnosti X_L cívky.



Obrázek 7.2: Fázorový diagram sériového RC zapojení z příkladu 1.

Na obrázku 7.2 jsme záměrně nakreslili sčítání fázorů mimo počátek souřadnicové soustavy, aby byl obrázek přehlednější a byl vidět rozdíl φ počátečních fází fázorů \overline{U} a \overline{I} . Také jsme čárkovane znázornili druhou možnost sčítání vektorů.²

2. Výpočet výsledné impedance a rozdílu fází

Aniž bychom se teď museli znovu dívat na vzorečky odvozené v kapitole 5.2, můžeme ze znalosti Pythagorovy věty vypočítat výslednou impedanci sériového RC obvodu:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

¹Záleží nám pouze na fázovém rozdílu těchto veličin.

²Vidíme, že ze sčítaných vektorů vznikl rovnoběžník, proto se této metodě také říká doplnění na rovnoběžník.

Dosazením do tohoto vztahu získáme výslednou impedanci:

$$Z = \left(\sqrt{(10^3)^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-7}} \right)^2} \right) \text{ k}\Omega \doteq 1,88 \text{ k}\Omega .$$

Výsledná impedance tohoto obvodu je tedy 1,88 k Ω .

Rozdíl počátečních fází proudu a napětí φ určíme pomocí funkce kotangens:³

$$\text{cotg } \varphi = \frac{U_R}{U_C} \implies \varphi = \text{arccotg } \frac{U_R}{U_C} \doteq \text{arccotg}(-0,63) .$$

Dostaneme tedy rozdíl počátečních fází:

$$\varphi \doteq -57^\circ 47' .$$

Vzhledem k tomu, že jsme uvažovali počáteční fázi proudu jako nulovou, vidíme z fázorového diagramu, že napětí se zpožďuje za proudem právě o úhel $\varphi \doteq 57^\circ 47'$. Rovnice pro výsledné napětí potom bude vypadat takto⁴:

$$u(t) = 1,88 \cdot 10^3 \cdot I \cdot \sin(2 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot t - 57^\circ 47') .$$

3. Výpočet impedance a rozdílu fází pomocí komplexní symboliky

Na začátek zdůrazněme, že v obvodu nemáme žádnou cívku, proto se ve vztazích nikde neuplatní člen komplexní impedance cívky.

Fázor napětí na rezistoru \overline{U}_R je podle (6.2) dán vztahem: $\overline{U}_R = \overline{R} \overline{I}$. Dále pro napětí na kondenzátoru \overline{U}_C máme podle (6.4): $\overline{U}_C = \overline{X}_C \overline{I}$.

Z rovnice (6.10) potom máme:

$$\overline{Z} = R - jX_C .$$

Číselným dosazením vypočteme absolutní hodnotu tohoto komplexního čísla (viz definice 8), čímž získáme velikost výsledné impedance:

$$|\overline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2} \doteq 1,88 \text{ k}\Omega .$$

Zjištěním argumentu tohoto komplexního čísla získáme rozdíl počátečních fází proudu a napětí (viz [20]):

$$\text{tg } \varphi = \frac{-X_C}{R} \doteq -57^\circ 47' .$$

Výsledné napětí je tedy dáno vztahem:⁵

$$u(t) = 1,88 \cdot 10^3 \cdot I \cdot \sin(2 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot t - 57^\circ 47') .$$

Vidíme, že jsme s užitím komplexní symboliky dosáhli stejného výsledku jako s pomocí fázorového diagramu.

³Ypsilonová souřadnice fázoru \overline{U}_C je záporná, proto zde musíme zohlednit i znaménko.

⁴Pro přehlednost neuvádíme jednotky.

⁵Zde opět pro přehlednost neuvádíme jednotky.

7.2 Příklad 2

Tento příklad přebíráme ze sbírky úloh pro střední školy [12] (kap. 5.4, str. 167, př. 344.). Zadání a řešení trošku upravíme.

Cívka o indukčnosti 50 mH, jejíž vinutí má odpor 10 Ω , je sériově spojena s kondenzátorem o kapacitě 2 μF . Obvodem prochází střídavý proud o amplitudě 100 mA a frekvenci 0,5 kHz.

1. Určete výslednou impedanci obvodu a amplitudu napětí zdroje.
2. nakreslete fázorový diagram obvodu a určete fázový rozdíl mezi napětím na zdroji a proudem procházejícím prvky v obvodu.
3. určete amplitudu napětí na reálné cívce.
4. vypočtete s použitím komplexní symboliky výslednou impedanci obvodu, rozdíl fází napětí a proudu a amplitudu napětí zdroje.

1. Určení impedance obvodu a amplitudy proudu

Reálnou cívku s indukčností 50 mH a s odporem vinutí nahradíme ideální cívkou se stejnou indukčností, ke které sériově připojíme rezistor o odporu 10 Ω . Tím získáme sériové RLC zapojení tak, jak jsme jej řešili v kapitole 5.2. Pro impedanci obvodu platí vztahy (5.6) a (5.7). Ze vztahu (5.6) vyjádříme amplitudu napětí (zde označena U_m) a do obou rovnic číselně dosadíme:

$$Z = \left(\sqrt{10^2 + \left(50\pi - \frac{10^3}{2\pi}\right)^2} \right) \Omega \doteq 10 \Omega;$$

$$U_m \doteq (0,1 \cdot 10) \text{ V} \doteq 1 \text{ V}.$$

Výsledná impedance obvodu je 10 Ω a amplituda napětí na zdroji je 1 V.

2. Nakreslení fázorového diagramu a určení výsledného fázového rozdílu

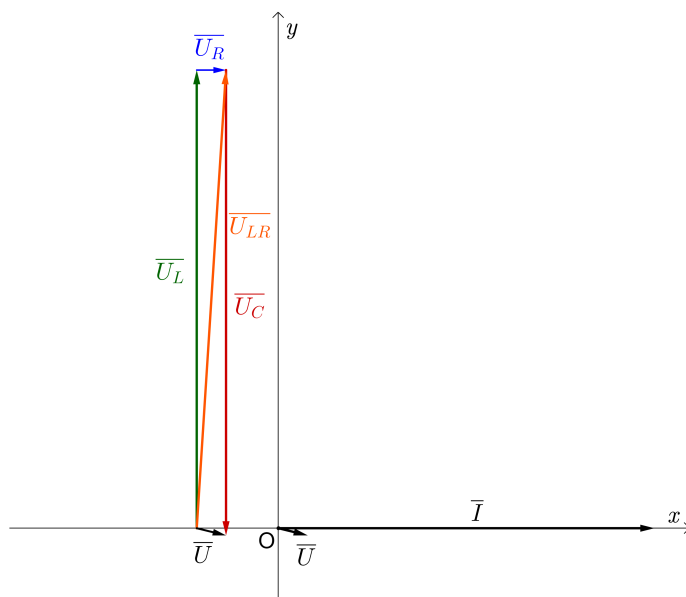
Abychom mohli správně nakreslit fázorový diagram, potřebujeme opět znát poměry velikosti fázorů, jak tomu bylo v příkladu 1 v kapitole 7.1. Ze vztahů pro U_R , U_C a U_L tedy dostáváme:

$$\frac{U_R}{U_L} = \frac{RI}{X_L I} = \frac{R}{X_L} = \frac{10}{50\pi} \doteq 0,064;$$

$$\frac{U_R}{U_C} = \frac{RI}{X_C I} = \frac{R}{X_C} = \frac{10}{\frac{10^3}{2\pi}} \doteq 0,063.$$

Vidíme, že velikosti fázorů napětí na kondenzátoru a na cívce ($\overline{U_C}$ a $\overline{U_L}$) budou co do velikosti téměř stejné. Vypočteme nyní rozdíl počátečních fází napětí a proudu ze vztahu (5.8):

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \implies \varphi = \text{arctg} \frac{50\pi - \frac{10^3}{2\pi}}{R} \doteq \text{arctg} \frac{-2}{10} \doteq -11^\circ 19'.$$



Obrázek 7.3: Fázorový diagram sériového RLC zapojení z příkladu 2.

Fázorový diagram jsme znázornili na obrázku 7.3. Pro přehlednost není rozdíl fází na obrázku vyznačen.

Výsledný fázový rozdíl mezi výsledným napětím zdroje a proudem, procházejícím cívku a kondenzátorem, je tedy $\varphi = -11^\circ 19'$. Řekneme, že proud v tomto zapojení předbíhá napětí.

3. Určení amplitudy napětí na reálné cívce

Z 2. Kirchhoffova zákona (viz (5.4)) vidíme, že součet úbytku napětí na cívce $u_{LR}(t)$ ⁶ a na kondenzátoru $u_C(t)$ musí být pro každý časový okamžik roven svorkovému napětí zdroje $u(t)$. Bohužel však nemůžeme pro tuto cívku uvažovat vztah (5.7), neboť se jedná o cívku s vnitřním odporem. Proto musíme, jak už jsme to udělali dříve, tuto cívku nahradit sériovým spojením rezistoru a cívky o celkové impedanci Z_{LR} . Musíme tedy sečíst pro všechny hodnoty času t napětí na této cívce a na rezistoru. To uděláme nám již dobře známým postupem (totiž za pomoci fázorového diagramu). V obrázku 7.3 jsme tento fázor vyznačili oranžově. Jeho velikost $U_{LR}(t)$ je dána vztahem:

$$U_{LR}(t) = I_m \cdot Z_{LR} = I_m \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

po dosazení pak získáme výslednou amplitudu napětí na reálné cívce:

$$U_{LR} = \left(0,1\sqrt{100^2 + (50\pi)^2}\right) \text{ V} \doteq 18,6 \text{ V} .$$

Maximální napětí na reálné cívce je 18,6 V.

Stojí za povšimnutí, že maximální hodnota svorkového napětí U_m je asi 19krát menší než maximální hodnota napětí na cívce. Zkuste si rozmyslet, proč tomu tak je.⁷

⁶Zde se nejedná o ideální cívku, záměrně tedy používáme značení $u_{LR}(t)$.

⁷V daný časový okamžik je napětí na kondenzátoru záporné a jeho součet s napětím na cívce nám dává právě výsledné napětí na zdroji 1 V.

4. Výpočet charakteristických veličin obvodu s použitím komplexní symboliky

Reálnou cívku s vnitřním odporem nahradíme sériovým spojením rezistoru s odporem 10Ω a cívku s indukčností 50 mH , čímž dostaneme sériový RLC obvod. Označíme-li výslednou impedanci cívky fázorem \overline{Z}_{LR} , dostaneme pak z rovnice (6.10):

$$\overline{Z} = \overline{Z}_{LR} + \overline{X}_C = \overline{R} + \overline{X}_L + \overline{X}_C = R + j(X_L - X_C) .$$

Vypočtením absolutní hodnoty tohoto komplexního čísla (chcete-li fázoru) získáme výslednou impedanci obvodu:

$$|\overline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(50\pi - \frac{10^3}{2\pi}\right)^2} \doteq 10 \Omega .$$

Rozdíl fází napětí a proudu získáme určením argumentu komplexního čísla \overline{Z} podle vztahu (6.12):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{50\pi - \frac{10^3}{2\pi}}{R} \doteq \operatorname{arctg} \frac{-2}{10} \doteq -11^\circ 19' .$$

Amplitudu napětí pak dostaneme určením velikosti fázoru \overline{U} ze vztahu (6.9) (Ohmův zákon v komplexní symbolice):

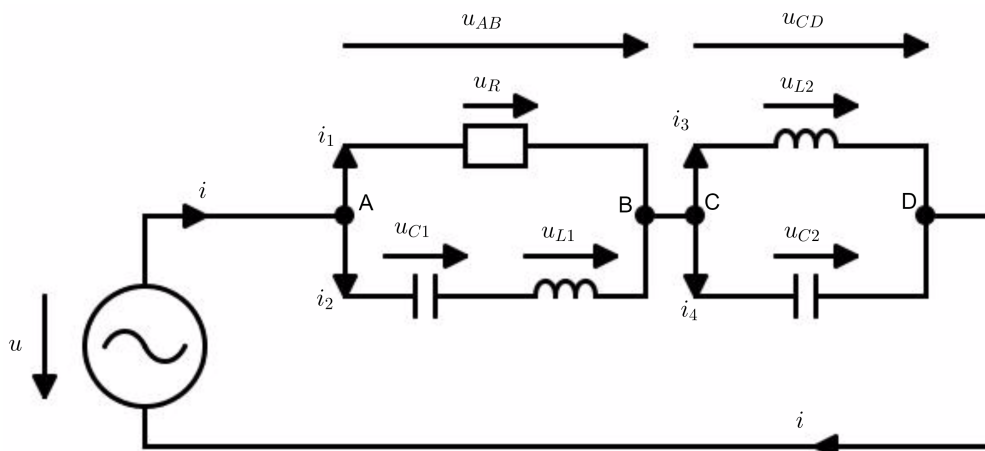
$$\overline{U} = \overline{I} \overline{Z} .$$

Číselným dosazením jednoduše dostaneme:

$$|\overline{U}| = I \cdot Z \doteq 1 \text{ V} .$$

Výsledná impedance tohoto obvodu je 10Ω . Rozdíl fází mezi napětím na zdroji a proudem, procházejícím všemi prvky, je $-11^\circ 19'$. Maximální hodnota napětí na zdroji je 1 V .

7.3 Příklad 3



Obrázek 7.4: Schéma zapojení k příkladu 3.

Pomocí komplexní symboliky obecně vyjádřete výslednou impedanci obvodu, který je zapojen podle schématu 7.4. V obvodu je zapojen rezistor o známém odporu R , cívky o známých indukčancích X_{L1} a X_{L2} a kondenzátory o známých kapacitancích X_{C1} a X_{C2} .⁸ V obrázku jsou časově závislé veličiny zapsány malými písmeny.⁹

Řešení

Zapišme nejprve 1. Kirchhoffův zákon (1. KZ) pro uzly tohoto obvodu. V obrázku vidíme celkem 4 uzly. Uzly B a C bychom však mohli nechat splynout, jelikož je mezi nimi nulový rozdíl potenciálů.¹⁰ Dále je zřejmé, že v uzlu A budou rovnice vypadat stejně (až na znaménko) oproti uzlu B. Stejně tak jsou z pohledu 1. KZ shodné i uzly C a D. Proto nám 1. KZ určí dvě rovnice o dvou neznámých (z uzlu A a C):

$$i = i_1 + i_2; \quad (7.1)$$

$$i = i_3 + i_4. \quad (7.2)$$

Podobně jako u jednoduchého paralelního RLC obvodu na obr. 5.3 je v našem zapojení úbytek potenciálů mezi uzly A a B stejný (platí také pro uzly C a D). Z 2. Kirchhoffova zákona (2. KZ) můžeme tedy psát následující rovnici:

$$u = u_{AB} + u_{CD}.$$

Pro jednotlivé větve mezi uzly A a B (respektive C a D) pak dostaneme:

$$u_{AB} = u_R = u_{C1} + u_{L1}; \quad (7.3)$$

$$u_{CD} = u_{L2} = u_{C2}. \quad (7.4)$$

⁸Předpokládáme tedy znalost frekvence zdroje a jednotlivých indukčností a kapacit.

⁹Pro přehlednost neuvádíme časovou závislost, takže např. $u(t) = u$.

¹⁰Uzly B a C jsme zvolili takto, abychom docílili větší přehlednosti ve schématu.

Přepišme 1. KZ a 2. KZ pro maximální hodnoty proudu a napětí, které budeme určovat pomocí komplexní symboliky zavedené v kapitole 6:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad (7.5)$$

$$\bar{I} = \bar{I}_3 + \bar{I}_4 \quad (7.6)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_{AB} + \bar{U}_{CD} \quad (7.7)$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_R = \bar{U}_{C1} + \bar{U}_{L1} \quad (7.8)$$

$$\bar{U}_{CD} = \bar{U}_{L2} = \bar{U}_{C2} \quad (7.9)$$

Z rovnice (7.8) získáme:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{AB} = \bar{R} \bar{I}_1 &\implies \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{R}}; \\ \bar{U}_{AB} = \bar{U}_{C1} + \bar{U}_{L1} = \bar{U}_{C1} \bar{I}_2 + \bar{U}_{L1} \bar{I}_2 &\implies \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}}. \end{aligned}$$

Toto dosadíme do rovnice (7.5):

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{R}} + \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}} \implies \bar{U}_{AB} = \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}} \right)^{-1}.$$

Z rovnice (7.9) pak máme:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{CD} = \bar{U}_{L2} = \bar{I}_3 \bar{X}_{L2} &\implies \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{CD}}{\bar{X}_{L2}}; \\ \bar{U}_{BC} = \bar{U}_{C2} = \bar{I}_4 \bar{X}_{C2} &\implies \bar{I}_4 = \frac{\bar{U}_{BC}}{\bar{X}_{C2}}. \end{aligned}$$

A dosazením do rovnice (7.6) dostaneme:

$$\bar{I} = \bar{I}_3 + \bar{I}_4 = \frac{\bar{U}_{CD}}{\bar{X}_{L2}} + \frac{\bar{U}_{CD}}{\bar{X}_{C2}} \implies \bar{U}_{CD} = \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{X}_{C2}} + \frac{1}{\bar{X}_{L2}} \right)^{-1}.$$

Získali jsme tedy rovnice pro \bar{U}_{AB} a \bar{U}_{CD} :

$$\bar{U}_{AB} = \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}} \right)^{-1}; \quad (7.10)$$

$$\bar{U}_{CD} = \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{X}_{C2}} + \frac{1}{\bar{X}_{L2}} \right)^{-1}. \quad (7.11)$$

Dosazením rovnice (7.10) a (7.11) do rovnice (7.7) pak získáme:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_{AB} + \bar{U}_{CD} = \\ &= \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}} \right)^{-1} + \bar{I} \left(\frac{1}{\bar{X}_{C2}} + \frac{1}{\bar{X}_{L2}} \right)^{-1} \\ &= \bar{I} \left[\left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L1}} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{\bar{X}_{C2}} + \frac{1}{\bar{X}_{L2}} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

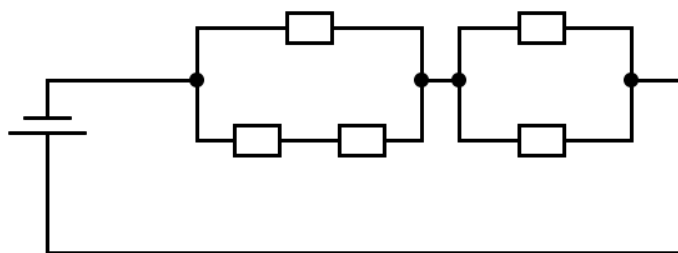
Z rovnic pro 1. KZ a 2. KZ jsme tedy dostali vztah ve tvaru:

$$\bar{U} = \bar{I} \bar{Z},$$

kde Z je výsledná impedance obvodu zapojeného podle schématu na obrázku 7.4. Výsledná impedance tohoto obvodu je tedy dána vztahem:

$$\bar{Z} = \left[\left(\frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{X}_{C1} + \bar{X}_{L2}} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{\bar{X}_{C2}} + \frac{1}{\bar{X}_{L2}} \right)^{-1} \right]. \quad (7.12)$$

Tímto komplikovaným postupem jsme došli ke krásnému závěru. Představíme-li si totiž místo cívek a kondenzátorů rezistory jako na obrázku 7.5¹¹, vidíme na výsledné komplexní impedanci obvodu z obrázku 7.4, že je analogií pro výsledný odpor zapojení podle našeho „náhradního“ schématu. Zjednodušeně můžeme říct, že po zavedení komplexních impedancí jednotlivých prvků a komplexní impedance celého zapojení již funguje sčítání „odporů“¹² lineárních prvků v obvodu (rezistor, cívka a kondenzátor) se zdrojem harmonického napětí stejně jako u sčítání odporů rezistorů v obvodu se zdrojem stejnosměrného napětí. Tento postup pak můžeme použít u libovolně složitějšího obvodu s lineárními prvky a zdrojem harmonického napětí (analogicky ke sčítání odporů rezistorů).



Obrázek 7.5: Schéma „náhradního“ zapojení k příkladu 3.

Při porovnání postupu, který jsme ukázali v kapitole 4.3 pro sčítání tří a více napětí s harmonickým průběhem, vidíme, že se problém určování amplitudy napětí na zdroji velmi zjednoduší. Nemusíme totiž opakovaně zjišťovat koeficienty soustavy rovnic (3.7) a (3.8). Dalším způsobem, který jsme v této práci již ukázali, je určování těchto konstant z geometrie fázorů ve fázorovém diagramu – na toto složitější zapojení bychom však potřebovali použít sinovy či kosinovy věty. Jestliže použijeme komplexní symboliku, postačí nám umět počítat s komplexními čísly a následně určit jejich goniometrický tvar (tedy absolutní hodnotu a argument tohoto komplexního čísla). Necháme již na vůli čtenáře, kterou cestu si vybere jako „nejschůdnější“.

¹¹Zde již nezakreslujeme šipky proudů a napětí.

¹²Zde máme na mysli komplexní impedanci.

Závěr

V této práci jsme v první kapitole provedli rešerši dostupných středoškolských učebnic a jiných materiálů, které zmiňují pojmy *fáze* a *fázorový diagram*, jež se dnes využívají ve středoškolské fyzice při řešení obvodů se zdrojem harmonického napětí.

Ve druhé a třetí kapitole jsme vytvořili teoretický podklad k zavedení fázorů, fázorových diagramů a komplexní symboliky pro účely odvození řešení obvodů se zdrojem harmonického napětí na úrovni střední školy s využitím několika vysokoškolských poznatků.

Vzhledem k tomu, že jsme v rámci rešerše dostupných učebnic pro střední školu nenašli přímé odůvodnění možnosti sčítání fázorů ve fázorovém diagramu jako vektorů, jsme se rozhodli toto sčítání fázorů postupně motivovat a následně i zavést. To jsme učinili s teoretickým podkladem přebraným z dostupných učebnic středoškolské matematiky a následným zadefinováním právě pojmů fázor a fázorový diagram. Při tom jsme vycházeli ze zdrojů, které tuto možnost odůvodňují na úrovni vysokoškolské matematiky. Zavedení těchto pojmů jsme využili při řešení sériového a paralelního RLC zapojení a také odvodili jsme vztahy mezi veličinami v tomto obvodu. Konkrétně jsme uvedli vztahy pro výslednou impedanci RLC obvodu a také pro fázové posunutí mezi proudem a napětím.

Poté jsme zavedli a částečně odůvodnili použití komplexní symboliky ve fázorovém diagramu na úrovni střední školy s teoretickým podkladem učebnic pro gymnázia. Pomocí této symboliky jsme také odvodili vztahy pro sériový a paralelní RLC obvod. Dále jsme konstatovali, že zavedení komplexní symboliky velmi zjednodušuje řešení elektrických obvodů se zdrojem harmonického napětí a umožňuje tyto obvody řešit pomocí již známých metod u obvodů s rezistory zapojenými ke zdroji stejnosměrného napětí.

Nakonec jsme vzorově vyřešili tři úlohy, a to za pomoci vztahů, které jsme v této práci odvodili. Ukazujeme také aplikaci fázorových diagramů při řešení těchto úloh a porovnáváme tuto metodu s použitím komplexní symboliky. Ve třetím příkladu jsme na konkrétním zapojení lineárních prvků v obvodu se zdrojem harmonického napětí ilustrovali zjednodušení řešení tohoto obvodu pomocí zavedené komplexní symboliky.

Největší přínos této práce spatřujeme v uceleném shrnutí poznatků ohledně pojmů *fáze* a *fázorový diagram* jako možné rozšíření poznání pro zájemce nejen z řad žáků střední školy, kteří chtějí hlouběji porozumět těmto pojmům a jejich využití. Mimo to také vidíme přínos v zavedení komplexních čísel do praktického řešení problémů ve výuce fyziky na úrovni střední školy, přičemž se celou dobu snažíme propojovat dostupné poznatky z učebnic fyziky a matematiky.

Tato práce se také může stát inspirací pro učitele, kteří hledají motivaci k zavedení komplexních čísel na střední škole ve výuce fyziky, případně pro učitele fyziky, kteří mají zájem si své již dostupné poznatky o fázorech znovu shrnout.

Seznam použité literatury

- [1] LEPIL, Oldřich a kolektiv. *Fyzika II pro střední školy*. Prometheus, 2012. ISBN: 978-80-7196-429-2.
- [2] LEPIL, Oldřich a kolektiv. *Fyzika II pro střední školy* [CD], 2012. CD je nedílnou součástí učebnice [1].
- [3] LEPIL, Oldřich a kolektiv. *Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění*. Prometheus, 2017. ISBN: 978-80-7196-468-1.
- [4] LEPIL Oldřich a kolektiv. *Fyzika pro gymnázia – mechanické kmitání a vlnění* [CD], 2017. CD je nedílnou součástí učebnice [3].
- [5] LEPIL, Oldřich a Přemysl Šedivý. *Fyzika pro gymnázia: Elektřina a magnetismus*. Prometheus, 1992. ISBN: 978-80-7196-385-1.
- [6] Národní ústav pro vzdělávání. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. http://www.nuv.cz/file/159_1_1/, 2007. [Online; dostupné 27.4.2019].
- [7] SVOBODA, Emanuel a kolektiv. *Přehled středoškolské fyziky*. Prometheus, 2014. ISBN: 978-80-7196-438-4.
- [8] TARÁBEK, Pavol, Petra Červinková a kolektiv. *Odmaturuj z fyziky*. Didaktis, 2006. ISBN: 80-7358-058-6.
- [9] BLAHOVEC, Antonín. *Elektrotechnika II*. Informatorium, 1995. ISBN: 978-80-7333-124-5.
- [10] TKOTZ, Klaus a kolektiv (překlad: HANDLÍŘ, Jiří). *Příručka pro elektrotechniku*. Europa-Sobotáles, 2002. ISBN: 80-86706-00-1. Český překlad německého originálu: Fachkunde Elektrotechnik.
- [11] MIKLASOVÁ, Věra. *Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU*. Prometheus, 1999. ISBN: 80-7196-135-3.
- [12] LEPIL, Oldřich, Milan Bednařík a Miroslava Široká. *Fyzika – Sbírka úloh pro střední školy*. Prometheus, 1995. ISBN: 978-80-7196-266-3.
- [13] ŽÁK, Vojtěch. *Fyzikální úlohy pro střední školy*. Prometheus, 2011. ISBN: 978-80-7196-411-7.
- [14] Kolektiv autorů, Katedra didaktiky fyziky Univerzity Karlovy. *Sbírka řešených úloh*. <http://reseneulohy.cz/cs/fyzika/elektrina-a-magnetismus>, 2006. [Online; dostupné 29.4.2019].
- [15] Kolektiv autorů, Katedra didaktiky fyziky Univerzity Karlovy. *Sbírka řešených úloh – sériový RLC obvod*. <http://reseneulohy.cz/73/seriovy-rlc-obvod>, 2016. [Online; dostupné 29.4.2019].

- [16] Kolektiv autorů, Katedra didaktiky fyziky Univerzity Karlovy. *Sbírka řešených úloh – cívka s komplexní impedancí* cívka s komplexní impedancí. <http://reseneulohy.cz/469/civka-s-komplexni-impedanci>, 2016. [Online; dostupné 29.4.2019].
- [17] Kolektiv autorů, Katedra didaktiky fyziky Univerzity Karlovy. *Sbírka řešených úloh – celková admitance v obvodu*. <http://reseneulohy.cz/606/celkova-admitance-v-obvodu>, 2016. [Online; dostupné 1.5.2019].
- [18] LEPIL, Oldřich a Emanuel Svoboda. *Příručka pro učitele fyziky na střední škole*. Prometheus, 2007. ISBN: 978-80-7196-328-8.
- [19] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*. Prometheus, 1994. ISBN: 978-80-7196-359-2.
- [20] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla*. Prometheus, 1994. ISBN: 978-80-7196-364-6.
- [21] SEDLÁK, Bedřich a Ivan Štoll. *Elektřina a magnetismus*. Academia, nakladatelství Akademie věd České republiky, 2002. ISBN: 80-200-1004-1.
- [22] ČIČMANEC, Pavol. *Všeobecná fyzika 2, Elektrina a magnetismus*. ALFA – vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry Bratislava, ve spolupráci s SNTL – nakladatelství technické literatury Praha, 1980. ISBN: 63-560-80.
- [23] Národní ústav pro vzdělávání. *Rámcový vzdělávací program pro obor Elektrotechnika*. <http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202641M01%20Elektrotechnika.pdf>, 2007. [Online; dostupné 27.4.2019].
- [24] MATOUŠ, Otakar. *Bakalářská práce – Metody řešení elektrických obvodů ve výuce fyziky*. <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130231875/?lang=cs>, 2018. [Online; dostupné 1.5.2019].
- [25] ŽILAVÝ, Peter. *Střídavé proudy*. P3K, 2012. ISBN: 978-80-87186-98-5.

Seznam obrázků

2.1	K definici funkcí sinus a kosinus.	16
2.2	Znázornění otáčení vektorů Gaussovy roviny.	19
3.1	Zapojení rezistoru ke zdroji harmonického napětí.	23
3.2	Zapojení cívky ke zdroji harmonického napětí.	24
3.3	Zapojení kondenzátoru ke zdroji harmonického napětí.	25
3.4	Sériové a paralelní RLC zapojení.	26
4.1	Vektor určující goniometrické funkce sinus a kosinus.	27
4.2	Otáčející se vektor určující postupně graf funkce sinus.	28
4.3	Otáčející se vektor určující postupně graf funkce sinus přenásobe- nou hodnotou k	29
4.4	Několik vybraných vektorů vykreslujících stejnou funkci sinus.	29
4.5	Grafický součet průběhů dvou napětí se stejnou fází.	30
4.6	Grafický součet průběhu dvou napětí s opačnou fází.	31
4.7	Grafický součet dvou obecných průběhů napětí.	32
4.8	Otáčející se vektory zobrazené ve třech časových okamžicích.	33
4.9	Fázorový diagram a grafický součet tří obecných průběhů napětí.	34
5.1	Sériové RLC zapojení.	36
5.2	Fázorový diagram sériového RLC zapojení.	37
5.3	Schéma zapojení paralelního RLC obvodu.	38
5.4	Fázorový diagram paralelního RLC zapojení.	38
7.1	Schéma zapojení k příkladu 1.	47
7.2	Fázorový diagram sériového RC zapojení z příkladu 1.	48
7.3	Fázorový diagram sériového RLC zapojení z příkladu 2.	51
7.4	Schéma zapojení k příkladu 3.	53
7.5	Schéma „náhradního“ zapojení k příkladu 3.	55