



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Martin Veselý

**Poissonovo rozdělení s nadbytečnými  
nulami**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Arnošt Komárek, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Ďakujem vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Arnoštovi Komárkovi, Ph.D. za odborné vedenie, pomoc pri písaní práce a trpezlivosť.

Název práce: Poissonovo rozdělení s nadbytečnými nulami

Autor: Martin Veselý

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Arnošt Komárek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá Poissonovým rozdelením s nadbytočnými nulami. Ako prvé je zavedený model Poissonovho rozdelenia a jeho zovšeobecnenie na model s nadbytočnými nulami. Sú odvodené základné vlastnosti takto rozšíreného rozdelenia. Ďalej sú opísané základy momentovej metódy a metódy maximálnej vierohodnosti. Obidve sú použité na odhad parametrov tohto rozdelenia. Analyzuje sa uskutočniteľnosť výpočtu rozdelenia odhadov získaných momentovou metódou. Následne je odvodené asymptotické rozdelenie maximálne vierohodných odhadov a z neho vyplývajúcich intervalov spoľahlivosti. V poslednej kapitole je prevedená numerická simulácia odvodených asymptotických vlastností. Špeciálna pozornosť je venovaná situáciám, v ktorých nie sú splnené podmienky regularity.

Klíčová slova: metóda maximálnej vierohodnosti, Poissonovo rozdelenie s nadbytočnými nulami, asymptotické rozdelenie, Fisherova informácia

Title: Zero inflated Poisson model

Author: Martin Veselý

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Arnošt Komárek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This paper deals with the zero-inflated Poisson distribution. First the Poisson model is defined and generalized to a zero-inflated model. The basic properties of this generalized model are derived. Afterwards the basics of the method of moments and the maximum likelihood method are described. Both of these are used to derive parameter estimates of such distribution. The feasibility of calculating the distribution of moment method estimates is analyzed. Then the asymptotic distribution of maximum likelihood estimates is derived and used to create confidence intervals. In the last chapter a numeric simulation of the derived asymptotic properties is performed. Special attention is paid to situations where regularity conditions are not met.

Keywords: maximum likelihood estimation, zero-inflated Poisson distribution, asymptotic distribution, Fisher information

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Model</b>	<b>3</b>
<b>2 Odhady parametrov</b>	<b>4</b>
2.1 Momentová metóda . . . . .	4
2.2 Metóda maximálnej vierohodnosti . . . . .	6
2.3 Intervalové odhady . . . . .	11
<b>3 Simulačná štúdia</b>	<b>15</b>
3.1 Intervalové odhady . . . . .	15
3.2 Asymptotická normalita odhadov . . . . .	16
<b>Záver</b>	<b>21</b>
<b>Základy teórie maximálnej vierohodnosti</b>	<b>22</b>
<b>Zoznam ďalších použitých viet</b>	<b>24</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>25</b>

# Úvod

Poissonove rozdelenie je jedným zo základných rozdelení používaných v štatistike a teórií pravdepodobnosti na modelovanie počtu udalostí za určité časové obdobie. V niektorých situáciách však nie je úplne ideálne, a je potrebné ho zobecníť. Jedným z rozdelení vychádzajúcich z Poissonovho rozdelenia je takzvané Poissonove rozdelenie s nadbytočnými nulami. V práci sa budeme venovať predovšetkým teórií odhadu aplikovanej práve na parametre Poissonovho rozdelenia s nadbytočnými nulami.

V prvej kapitole zavedieme potrebné značenie pre náš model, začneme základmi Poissonovho rozdelenia ktoré potom rozšírime na Poissonovo rozdelenie s nadbytočnými nulami a odvodíme jeho základné vlastnosti.

V druhej kapitole priblížime dva často používané spôsoby odhadu náhodných parametrov - momentovú metódu a metódu maximálnej vierohodnosti. Obidve metódy priamo aplikujeme na odvodenie odhadov pre naše rozdelenie a budeme diskutovať ich využitie. Následne aplikujeme hlbšiu teóriu maximálnej vierohodnosti a odvodíme asymptotické vlastnosti takto získaných odhadov, vrátane asymptotickej normality ktorú použijeme pri odvodení intervalový odhadov.

V tretej kapitole použijeme štatistický software R Core Team (2017) na simuláciu štúdiu. Budeme sa snažiť porovnať z numerického hľadiska asymptotické vlastnosti odvodené v tretej kapitole. Zvláštnu pozornosť budeme venovať aj prípadu, v ktorom nie sú splnené niektoré predpoklady odvodených vlastností, a pokúsime sa zistiť, či sa dajú naše výsledky v praxi použiť aj bez týchto predpokladov.

# 1. Model

**Definícia 1** (Poissonove rozdelenie). *Povieme, že náhodná veličina  $X$  má Poissonove rozdelenie s parametrom  $\lambda$ , značíme  $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$ , pokiaľ platí*

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

**Tvrdenie 1.** *Pre náhodnú veličinu  $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$  platí  $EX = \text{var}(X) = \lambda$ .*

*Dôkaz.* Plynie z definície a využitia vzťahu  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . □

Poissonove rozdelenie sa využíva najmä pri modelovaní počtu výskytu javu v danom časovom intervale, kde  $\lambda$  určuje frekvenciu daného javu. Príklady využitia v tomto kontexte sú napríklad počet poistných udalostí za rok, počet zemetrasení za rok, alebo počet zákazníkov ktorí zavolajú na technickú podporu každý deň. Rovnako sa Poissonove rozdelenie používa ako aproximácia binomického rozdelenia.

Nevýhodou Poissonovho rozdelenia v praxi je, že v mnohých prípadoch „podhodnocuje“ nulu, teda priradzuje nule nižšiu pravdepodobnosť než je vhodné. Napríklad v prípade havarijnej poistky je pravdepodobnosť, že vodič za rok nespôsobí dopravnú nehodu, typicky omnoho vyššia než by určilo Poissonove rozdelenie, ktorého stredná hodnota zodpovedá strednej hodnote počtu poistných udalostí. Na modelovanie podobných situácií sa často používa mierne upravené Poissonove rozdelenie:

**Definícia 2.** *Povieme, že náhodná veličina  $X$  má Poissonove rozdelenie s nadbytočnými nulami s parametrami  $\lambda$  a  $\pi$ ,  $\lambda > 0, \pi \in [0,1]$ , značíme <sup>1</sup>  $X \sim \text{ZIP}(\lambda, \pi)$ , pokiaľ platí*

$$P[X = k] = \begin{cases} \pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}, & \text{pre } k = 0, \\ (1 - \pi) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & \text{pre } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Skôr než sa začneme venovať metódam odhadov parametrov  $\lambda$  a  $\pi$ , odvodíme strednú hodnotu a rozptyl ZIP rozdelenia:

**Tvrdenie 2.** *Pre náhodnú veličinu  $X \sim \text{ZIP}(\lambda, \pi)$  platí*

- (i)  $EX = (1 - \pi)\lambda$ ,
- (ii)  $\text{var}(X) = \lambda(1 - \pi)(1 + \pi\lambda)$ .

*Dôkaz.*

- (i)  $EX = (1 - \pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$  a zo znalosti strednej hodnoty Poissonovho rozdelenia plynie  $EX = (1 - \pi)\lambda$ .
- (ii)  $EX^2 = (1 - \pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ , čo opäť vieme vyjadriť pomocou druhého momentu Poissonovho rozdelenia ako  $(1 - \pi)\lambda(\lambda + 1)$ , a teda  $\text{var}(X) = (\lambda + 1)(1 - \pi)\lambda - ((1 - \pi)\lambda)^2 = (1 - \pi)\lambda(1 + \lambda - \lambda + \pi\lambda) = \lambda(1 - \pi)(1 + \pi\lambda)$ . □

---

<sup>1</sup>Skratka ZIP pochádza z anglického názvu Zero-Inflated Poisson

## 2. Odhady parametrov

**Motivácia:** V praxi sa často stretávame so situáciou, v ktorej máme merania z neznámeho rozdelenia, pre ktoré vieme aspoň špecifikovať množinu rozdelení, do ktorej patrí. Napríklad pri predvolebných prieskumoch vieme, že názory respondentov majú multinomické rozdelenie, a zaujímajú nás jeho parametre, teda popularita každého z kandidátov. V takých prípadoch sa snažíme nájsť spôsob, ako aproximovať skutočné parametre v populácii pomocou vhodnej funkcie pozorovaného náhodného výberu - tzv. štatistiky.

Skôr, než sa začneme zaoberať špecifickými metódami odhadu, zavedieme najprv základné pojmy odhadovania parametrov. Nech  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  je náhodný výber z rozdelenia  $F_0 \in \mathcal{F}$ , kde  $\mathcal{F}$  je naša množina rozdelení, často nazývaná **model**. Nech  $\theta = t(F_0)$ , kde  $t$  je nejaký funkcionál. Keby sme teda poznali rozdelenie  $F_0$ , dokážeme priamo vyjadriť parameter  $\theta$ . **Bodovým odhadom** parametra  $\theta$  rozumieme ľubovoľnú merateľnú funkciu  $S(\mathbf{X})$  náhodného výberu  $\mathbf{X}$ . Samozrejme, nie všetky odhady sú rovnako užitočné. Zavedme si dve základné vlastnosti bodových odhadov, ktorými dokážeme čiastočne posúdiť ich kvalitu.

**Definícia 3.** *Majme náhodný výber  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  z rozdelenia  $F_0 \in \mathcal{F}$ . Povieme, že  $S(\mathbf{X})$  je*

1. *nestranným odhadom parametra  $\theta$  v modele  $\mathcal{F}$ , ak  $ES(\mathbf{X}) = \theta$  pre každé rozdelenie  $F \in \mathcal{F}$ ,*
2. *konzistentným odhadom parametra  $\theta$  v modele  $\mathcal{F}$ , ak  $S(\mathbf{X}) \xrightarrow{p} \theta$  pre  $n \rightarrow \infty$  pre každé rozdelenie  $F \in \mathcal{F}$ .*

Obecne sa konzistencia považuje za dôležitejšiu vlastnosť než nestrannosť. Konzistencia totiž zaručuje, že parameter dokážeme odhadnúť s ľubovoľnou presnosťou, pokiaľ máme dostatočne veľký náhodný výber, zatiaľ čo nestrannosť nám o asymptotických vlastnostiach nájdeneho odhadu nehovorí vôbec nič. Napríklad odhad  $\hat{\mu} = X_1$  je nestranným odhadom strednej hodnoty pre výber z ľubovoľného rozdelenia, no očividne jeho presnosť sa s rastúcim rozsahom náhodného výberu nemení.

### 2.1 Momentová metóda

Prvou metódou na získanie bodového odhadu parametra, ktorou sa budeme zaoberať, je momentová metóda. Momentová metóda (pre rozdelenie s dvomi parametrami) vychádza z troch základných tvrdení:

**Tvrdenie 3.** *Nech  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výber z rozdelenia s konečnou strednou hodnotou a konečným druhým momentom. Potom platí:*

1.  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  je konzistentným odhadom  $EX$ ,
2.  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$  je konzistentným odhadom  $\text{var}(X)$ ,



3. Pokiaľ  $f$  je spojité zobrazenie a  $\hat{\theta}$  je konzistentným odhadom  $\theta$ ,  $f(\hat{\theta})$  je konzistentným odhadom  $f(\theta)$ .

*Dôkaz.* Plynie z triviálnych úprav a Vety o spojitej transformácii. □

Ak teda vieme vyjadriť vektor  $(EX_i, \text{var}X_i)^T$  ako  $f(\theta)$  pre nejakú spojité funkciu  $f$ , môžeme hľadať konzistentný odhad parametra  $\theta$  zo vzťahu  $(\bar{X}_n, S_n^2)^T = f(\hat{\theta})$ . Pokiaľ je totiž  $g(\hat{\pi}, \hat{\lambda})$  konzistentný odhad funkcie  $g(EX_i, \text{var}X_i)$ , z aritmetiky konvergenzie v pravdepodobnosti plynie, že aj  $\hat{\pi}, \hat{\lambda}$  vyjadrené z tohto vzťahu budú konzistentnými odhadmi  $EX_i, \text{var}X_i$ .

**Tvrdenie 4.** Nech  $X_1, \dots, X_n \sim ZIP(\lambda, \pi)$  je náhodný výber,  $\lambda \in [0, +\infty), \pi \in [0, 1]$ . Potom momentové odhady  $\hat{\lambda}_{MO}, \hat{\pi}_{MO}$  parametrov  $\lambda$  a  $\pi$  sú dané vzťahmi

$$\hat{\pi}_{MO} = \frac{S_n^2 - \bar{X}_n}{\bar{X}_n^2 + S_n^2 - \bar{X}_n},$$

$$\hat{\lambda}_{MO} = \bar{X}_n + \frac{S_n^2}{\bar{X}_n} - 1.$$

*Dôkaz.* Vieme, že  $EX = (1 - \pi)\lambda$ ,  $\text{var}X = \lambda(1 - \pi)(1 + \pi\lambda)$ . Položíme teda

$$\bar{X}_n = (1 - \hat{\pi}_{MO})\hat{\lambda}_{MO}, \quad S_n^2 = \hat{\lambda}_{MO}(1 - \hat{\pi}_{MO})(1 + \hat{\pi}_{MO}\hat{\lambda}_{MO}).$$

Potom  $\hat{\lambda}_{MO} = \frac{\bar{X}_n}{1 - \hat{\pi}_{MO}}$  a

$$S_n^2 = \bar{X}_n \left(1 + \frac{\bar{X}_n \hat{\pi}_{MO}}{1 - \hat{\pi}_{MO}}\right) \implies \frac{\bar{X}_n \hat{\pi}_{MO}}{1 - \hat{\pi}_{MO}} = \frac{S_n^2}{\bar{X}_n} - 1 \implies$$

$$\hat{\pi}_{MO} = \frac{\frac{S_n^2}{\bar{X}_n} - 1}{\bar{X}_n + \frac{S_n^2}{\bar{X}_n} - 1} = \frac{S_n^2 - \bar{X}_n}{\bar{X}_n^2 + S_n^2 - \bar{X}_n},$$

$$\hat{\lambda}_{MO} = \frac{\bar{X}_n}{1 - \hat{\pi}_{MO}} = \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{S_n^2 - \bar{X}_n}{\bar{X}_n^2 + S_n^2 - \bar{X}_n}} = \frac{\bar{X}_n^2 + S_n^2 - \bar{X}_n}{\bar{X}_n} = \bar{X}_n + \frac{S_n^2}{\bar{X}_n} - 1.$$

□

Nášli sme teda momentový odhad pre parametre ZIP rozdelenia. Z predchádzajúcej úvahy vieme, že tento odhad je konzistentný, pretože sa jedná o spojité zobrazenie výberového rozptylu a výberového priemeru. Samotná konzistencia však častokrát v praxi nie je dostatočnou informáciou. Pokiaľ máme záujem robiť komplexnejšiu analýzu (napríklad intervalový odhad parametrov), budeme potrebovať poznať rozdelenie týchto odhadov. Analyticky odvodiť rozdelenie momentových odhadov nevyzerá vôbec prakticky - pre začiatok budeme určite potrebovať minimálne rozdelenie výberového priemeru, začneme teda súčtom dvoch ZIP veličín (pre prehľadnosť budeme označovať  $Po_\lambda(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \dots$ ).

**Tvrdenie 5.** Pre nezávislé veličiny  $X_1 \sim ZIP(\lambda, \pi), X_2 \sim ZIP(\lambda, \pi)$  platí:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 0) &= (\pi + (1 - \pi) \cdot \text{Po}_\lambda(0))^2, \\ P(X_1 + X_2 = k) &= (1 - \pi)^2 \text{Po}_{2\lambda}(k) + 2\pi(1 - \pi) \text{Po}_\lambda(k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Vzťah pre  $P(X_1 + X_2 = 0)$  očividne platí. Pre  $k \neq 0$  potom

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^k P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k - i) \\ &= 2P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = k) + \sum_{i=1}^{k-1} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k - i) \\ &= (\pi + (1 - \pi) \text{Po}(0))(1 - \pi) \text{Po}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} (1 - \pi)^2 \text{Po}(i) \text{Po}(k - i) \\ &= (1 - \pi)^2 \sum_{i=0}^k \text{Po}(i) \text{Po}(k - i) + 2\pi(1 - \pi) \text{Po}(k) \\ &= (1 - \pi)^2 \text{Po}_{2\lambda}(k) + 2\pi(1 - \pi) \text{Po}_\lambda(k), \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. □

Bohužiaľ je jasné, že ZIP rozdelenie nezachováva vlastnosť Poissonovho rozdelenia, a teda súčet dvoch nezávislých premenných nebude mať opäť ZIP rozdelenie. Zdá sa teda veľmi nepraktické snažiť sa odvodiť rekurzívny vzorec pre rozdelenie súčtu celého náhodného výberu (obzvlášť keď vezmeme do úvahy, že by sme museli dokázať analyticky vyjadriť aj rozdelenie omnoho komplikovanejších výrazov, ako napríklad  $\frac{S_n^2}{X_n}$ ). Preto sa budeme vo zvyšku práce zaoberať radšej odhadmi získanými metódou maximálnej vierohodnosti, ku ktorým poznáme hlbšiu asymptotickú teóriu.

## 2.2 Metóda maximálnej vierohodnosti

Druhá metóda odhadovania parametrov, ktorá sa v štatistike často využíva, je tzv. metóda maximálnej vierohodnosti<sup>1</sup>. Výhodou metódy maximálnej vierohodnosti sú užitočné asymptotické vlastnosti parametrov získaných touto metódou, o ktorých budeme bližšie rozprávať v kapitole neskôr. V celej kapitole sa budeme odkazovať na značenie a pojmy definované v apendixe A. Základy teórie maximálnej vierohodnosti.

Jednou z najdôležitejších viet s ktorou budeme pracovať je Veta A.1. Tá nám popisuje asymptotické správanie MLE odhadu nájdeného pomocou riešenia systému vierohodnostných rovníc, bude teda veľmi dôležitá pri odvodzovaní rozdelenia nášho nájdeného odhadu. Teraz nájdeme MLE odhad  $(\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML})$  parametra  $\theta = (\lambda, \pi)$ . Pripomeňme, že hustota náhodnej veličiny so ZIP rozdelením voči

<sup>1</sup>anglický názov Maximum Likelihood Estimation - MLE

počítacej miere má tvar

$$f(x, \lambda, \pi) = \begin{cases} \pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}, & \text{pre } x = 0, \\ (1 - \pi)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

Túto hustotu vieme zapísať aj kompaktnejšie ako

$$f(x, \lambda, \pi) = (\pi + (1 - \pi)e^{-\lambda})^{I(x)} * \left( (1 - \pi)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right)^{(1-I(x))},$$

kde  $I(x) = 1$  pre  $x = 0$  a  $I = 0$  inak. Pretože o náhodnom vektore  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  predpokladáme, že je náhodným výberom, a teda sú jeho zložky navzájom nezávislé, vierohodnostná funkcia bude mať tvar

$$f(\mathbf{x}, \lambda, \pi) = \prod_{i=1}^n (\pi + (1 - \pi)e^{-\lambda})^{I_i} \prod_{i=1}^n \left( (1 - \pi)e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right)^{(1-I_i)},$$

kde indikátor  $I_i$  nadobúda hodnotu 1 ak  $x_i = 0$  a hodnotu 0, ak  $x_i > 0$ . Logaritmovaním tohto vzťahu dostávame tvar logaritmickej vierohodnostnej funkcie

$$\ell(\lambda, \pi) = \sum_{i=1}^n I_i \log(\pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}) + \sum_{i=1}^n (1 - I_i)(\log(1 - \pi) - \lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)).$$

Najprv nájdeme optimálnu hodnotu parametra  $\pi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \pi}(\lambda, \pi) &= \sum_{i=1}^n -\frac{1 - I_i}{1 - \pi} + \sum_{i=1}^n \frac{I_i(1 - e^{-\lambda})}{e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi} \\ &= -\frac{n - n_0}{1 - \pi} + n_0 \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi}, \end{aligned}$$

kde  $n_0 = \sum_{i=1}^n I_i$ , teda počet náhodných veličín z náhodného výberu, ktoré nadobudli hodnotu 0. Ak položíme  $\frac{\partial \ell}{\partial \pi}(\lambda, \pi) = 0$  a označíme  $r_0 = \frac{n_0}{n}$ , po úprave výrazov dostávame:

$$\hat{\pi}_{ML}(\lambda) = \frac{r_0 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Po dosadení  $\hat{\pi}_{ML}$  do vierohodnostnej funkcie a následnom upravení výrazov dostávame funkciu, ktorá už závisí iba na parametri  $\lambda$ , označme ju  $\ell_1(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \ell_1(\lambda) &= \ell(\hat{\pi}_{ML}(\lambda), \lambda) \\ &= n \log \left( \frac{r_0 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} + \left( 1 - \frac{r_0 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) e^{-\lambda} \right) + n(1 - r_0) \left( \log \left( 1 - \frac{r_0 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) - \lambda \right) \\ &\quad + n\bar{X}_n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n (1 - I_i) \log(x_i!) \\ &= n \log(r_0) - n(1 - r_0)(\lambda + \log(1 - e^{-\lambda})) + n\bar{X}_n \log(\lambda) + n(1 - r_0) \log(1 - r_0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (1 - I_i) \log(x_i!). \end{aligned}$$

Po ďalšom parciálnom zderivovaní dostávame:

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \lambda}(\lambda) = n \left( \frac{\bar{X}_n}{\lambda} - (1 - r_0) \left( 1 + \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right) = n \left( \frac{\bar{X}_n}{\lambda} - \frac{1 - r_0}{1 - e^{-\lambda}} \right).$$

Túto parciálnu deriváciu opäť položíme rovnú 0 a dostávame vzťah na výpočet  $\hat{\lambda}_{ML}$  (a teda aj  $\hat{\pi}_{ML}$ ). Táto rovnica však nemá analytické riešenie, je preto nutné  $\hat{\lambda}_{ML}$  dopočítať numericky. Problém pri tomto prístupe môže nastať z toho dôvodu, že nedokážeme garantovať, že  $r_0 \geq e^{-\hat{\lambda}_{ML}}$ , a teda ani to, že  $\hat{\pi}_{ML} \geq 0$ . Náš model však funguje na parametrickom priestore  $\pi \in [0,1], \lambda > 0$ , a teda v tomto priestore musia ležať aj naše maximálne vierohodné odhady. Pokiaľ sa tak nestane, je celkom jasné, že vierohodnostná funkcia buď nadobúda maximum na jednej z hraníc parametrického priestoru (teda  $\pi = 0$ ,  $\pi = 1$ , alebo  $\lambda = 0$ ), alebo maximum na danom priestore nenadobúda vôbec a potom musí supremum buď existovať limitne na jednej z týchto hraníc, alebo v  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Postupne skontrolujeme všetky štyri prípady. V troch z nich však vierohodnostná funkcia neexistuje, a limitne nadobúda hodnotu  $-\infty$ . Pre  $\lambda = 0$  je to kvôli členu  $x_i \log(\lambda)$ , pre  $\lambda \rightarrow +\infty$  kvôli členu  $-\lambda$  a pre  $\pi = 1$  zase kvôli členu  $\log(1 - \pi)$ . Naopak, pre  $\pi = 0$  dostávame

$$\ell(\lambda, 0) = \sum_{i=1}^n I_i(-\lambda) + \sum_{i=1}^n (1 - I_i)(-\lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)),$$

čo je (pre nenulové konečné hodnoty  $\lambda$ ) reálne číslo. Z toho nutne vyplýva, že ak nám pri predchádzajúcom výpočte vyšiel výsledok  $\hat{\pi}_{ML} < 0$ , skutočný maximálne vierohodný odhad pre  $\pi$  je rovný  $\hat{\pi}_{ML} = 0$ . Z toho už ľahko dopočítame maximálne vierohodný odhad pre parameter  $\lambda$ , pretože

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}(\lambda, 0) = -nr_0 + n(1 - r_0)(-1) + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda},$$

a teda

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{X}_n.$$

Tento výsledok nám potvrdzuje to čo by sa intuitívne dalo očakávať: pokiaľ náš náhodný výber obsahuje menej núl než by sme čakali od obyčajného Poissonovho rozdelenia, nemá cenu zaoberať sa ZIP modelom a mali by sme predpokladať, že sa jedná o výber z Poissonovho rozdelenia. Zaujímavý prípad nastáva, keď nepozorujeme nič iné ako nuly. Pozrime sa, ako bude vyzeráť vierohodnostná funkcia, pokiaľ  $X_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

$$\ell(\lambda, \pi) = n \log(\pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}).$$

Môžeme jednoducho vidieť, že táto funkcia je na našom definičnom obore maximalizovaná v bodoch  $(\lambda, 1), \lambda \in [0, +\infty)$  a  $(0, \pi), \pi \in [0, 1]$ . Pokiaľ by sme v tomto prípade použili predchádzajúci vzťah, po dosadení dostávame riešenie v tvare  $(\lambda, 1), \lambda \in [0, +\infty)$ . Aj v krajnom prípade teda dokážeme nejaké maximum vierohodnostnej funkcie nájsť použitím rovnakého postupu, no toto maximum nebude jednoznačne určené.

Výsledky našich výpočtov zhrnieme v nasledujúcom tvrdení:

**Veta 6.** Nech  $X_1, \dots, X_n \sim ZIP(\lambda, \pi)$  je náhodný výber,  $\lambda \in [0, +\infty)$ ,  $\pi \in [0, 1]$ . Nech  $\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML}$  sú riešením nasledujúcich rovníc:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X}_n}{\hat{\lambda}_{ML}} &= \frac{1 - r_0}{1 - e^{-\hat{\lambda}_{ML}}}, \\ \hat{\pi}_{ML} &= \frac{r_0 - e^{-\hat{\lambda}_{ML}}}{1 - e^{-\hat{\lambda}_{ML}}}, \\ \hat{\pi}_{ML} &\in [0, 1], \hat{\lambda}_{ML} \geq 0.\end{aligned}$$

Pokiaľ takéto riešenie neexistuje, položíme  $\hat{\pi}_{ML} = 0, \hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}_n$ . Potom  $\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML}$  sú maximálne vierohodnými odhadmi parametrov  $\lambda, \pi$ . Pokiaľ navyše aspoň jedno z pozorovaní  $X_i$  je nenulové, tieto odhady sú určené jednoznačne.

*Dôkaz.* Plynie z výpočtov uvedených pred Vetou. □

Získali sme teda maximálne vierohodný odhad  $\hat{\theta}_{ML} = (\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML})$ , teraz nájdeme jeho asymptotické rozdelenie. Podľa Vety A.1 nám stačí vypočítať Fisherovu informačnú maticu. Tú však nebudeme počítat z definície, ale využijeme Vetu A.2.

V našom prípade teda opäť máme  $f(x, \theta) = f(x, \lambda, \pi) = (\pi + (1 - \pi e^{-\lambda}))^I \cdot \left( (1 - \pi) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right)^{(1-I)}$ . Je potrebné si uvedomiť, že ZIP je diskrétné rozdelenie, a teda miera  $\mu$  voči ktorej integrujeme je sčítacia. Všetky uvedené integrály sú teda v skutočnosti sumy. Najprv overíme nulovosť integrálov z Vety A.2. Derivácie budeme počítat zvlášť pre  $x = 0$  a pre  $x > 0$ , kvôli prehľadnosti. Pre  $x = 0$  máme  $f(x, \lambda, \theta) = \pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}$ , a teda

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi} &= 1 - e^{-\lambda}, & \frac{\partial f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda} &= -(1 - \pi)e^{-\lambda}, \\ \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \pi} &= 0, & \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \lambda} &= e^{-\lambda}, & \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda \partial \lambda} &= (1 - \pi)e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Pre  $x > 0$  máme  $f(x, \lambda, \pi) = (1 - \pi) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ , a teda

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi} &= -\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & \frac{\partial f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda} &= \frac{e^{-\lambda} x (1 - \pi) \lambda^{x-1} - \lambda^k e^{-\lambda} (1 - \pi)}{x!} \\ \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \pi} &= 0, & \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \lambda} &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda} - x \lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{x!}, \\ \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda \partial \lambda} &= -\frac{\lambda^{x-2} e^{-\lambda} (\pi - 1) (\lambda^2 - \lambda x + x(x - 1))}{x!}.\end{aligned}$$

Očividne platí  $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \pi} = 0$ . Pre zvyšné parciálne derivácie vieme cez mocninový rozvoj exponenciály ukázať, že platí

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \lambda} &= -e^{-\lambda}, & \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda \partial \lambda} &= (\pi - 1)e^{-\lambda}, \\ \implies \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \pi} &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \pi \partial \lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, \lambda, \pi)}{\partial \lambda \partial \lambda} = 0,\end{aligned}$$

a teda je splnený predpoklad Vety A.2. Fisherovu informačnú maticu môžeme teda počítať využitím Vety A.2. Spočítame teda opäť parciálne derivácie druhého rádu, tentokrát z funkcie  $\log f(x, \lambda, \pi)$ . Pre  $x = 0$  po zjednodušení výrazov:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi} &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi}, & \frac{\partial \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \lambda} &= -\frac{e^{-\lambda}(1 - \pi)}{e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi}, \\ \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \pi} &= -\frac{(1 - e^{-\lambda})^2}{(e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi)^2}, & \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \lambda} &= \frac{e^\lambda}{(1 + (e^\lambda - 1)\pi)^2}, \\ \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \lambda \partial \lambda} &= -\frac{e^\lambda \pi (\pi - 1)}{(1 + (e^\lambda - 1)\pi)^2}.\end{aligned}$$

Pre  $x > 0$  potom:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi} &= -\frac{1}{1 - \pi}, & \frac{\partial \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \lambda} &= \frac{x}{\lambda} - 1, \\ \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \pi} &= -\frac{1}{(1 - \pi)^2}, & \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \lambda} &= 0, & \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \lambda \partial \lambda} &= -\frac{x}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Teraz už vieme priamo vypočítať Fisherovu informačnú maticu ako strednú hodnotu napočítaných parciálnych derivácií druhého rádu. Pre  $J_{22}$  dostávame vzťah

$$\begin{aligned}J_{22}(\lambda, \pi) &= -\left( \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \log(f(x, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \pi} f(x, \lambda, \pi) + \frac{\partial^2 \log(f(0, \lambda, \pi))}{\partial \pi \partial \pi} f(0, \lambda, \pi) \right) \\ &= -\left( \sum_{x=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{(1 - \pi)^2} (1 - \pi) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right) - \frac{(1 - e^{-\lambda})^2}{(e^{-\lambda}(1 - \pi) + \pi)^2} (\pi + (1 - \pi)e^{-\lambda}) \right) \\ &= \frac{1 - e^\lambda}{(\pi - 1)(1 + (e^\lambda - 1)\pi)}.\end{aligned}$$

Analogicky vieme vyjadriť  $J_{12}(\lambda, \pi) = J_{21}(\lambda, \pi) = \frac{-1}{1 + (e^\lambda - 1)\pi}$  a

$J_{11}(\lambda, \pi) = \frac{(1 - \pi)(1 + \pi(e^\lambda - 1 - \lambda))}{\lambda(1 + \pi(e^\lambda - 1))}$ . Ostáva nám ešte nájsť inverznú maticu k  $\mathbf{J}(\lambda, \pi)$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{(1 - \pi)(1 + \pi(e^\lambda - 1 - \lambda))}{\lambda(1 + \pi(e^\lambda - 1))} & \frac{-1}{1 + (e^\lambda - 1)\pi} \\ \frac{-1}{1 + (e^\lambda - 1)\pi} & \frac{1 - e^\lambda}{(\pi - 1)(1 + (e^\lambda - 1)\pi)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\pi - 1)\left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda}\right)} & \frac{1}{e^\lambda - \lambda - 1} \\ \frac{1}{e^\lambda - \lambda - 1} & (\pi - 1)\left(\frac{1}{\lambda + 1 - e^\lambda} - \pi\right) \end{pmatrix}.$$

Označme si túto maticu  $\Sigma$ . Pri výpočte samotných maximálne vierohodných odhadov nenastali problémy pokiaľ boli parametre na hranici parametrického priestoru, teda  $\pi \in \{0, 1\}$ , alebo  $\lambda = 0$ . Pri asymptotických výsledkoch však tieto prípady musíme odstrániť, pretože budeme predpokladať regulárny systém hustôt.

**Veta 7.** *Nech  $X_1, \dots, X_n \sim ZIP(\lambda, \pi)$  je náhodný výber,  $\lambda \in (0, +\infty)$ ,  $\pi \in (0, 1)$ . Nech  $\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML}$  sú jednoznačne určené maximálne vierohodné odhady parametrov  $\lambda, \pi$  také, že  $\hat{\lambda}_{ML} \in (0, +\infty)$ ,  $\hat{\pi}_{ML} \in (0, 1)$ . Potom platí*

$$\sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Sigma).$$

*Dôkaz.* Plynie z Vety A.1 a predchádzajúceho výpočtu Fisherovej informácie.  $\square$

V praxi samozrejme nepoznáme presné hodnoty  $\lambda$  a  $\pi$ , takže by sa mohlo zdať, že pre nás toto asymptotické rozdelenie nemá veľkú informačnú hodnotu. Predpokladajme však, že dokážeme nájsť konzistentný odhad matice  $J(\boldsymbol{\theta})$  (v praxi je tento predpoklad jednoducho splniteľný, jedným známym konzistentným odhadom ktorý uvádza Welsh (1996) je tzv. pozorovaná Fisherova informácia  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})$ ). Potom asymptotická normalita ostáva platná aj v prípade, že pracujeme s týmto konzistentným odhadom, o čom hovorí nasledujúce tvrdenie.

**Tvrdenie 8.** *Nech  $X_1, \dots, X_n \sim ZIP(\lambda, \pi)$  je náhodný výber,  $\lambda \in (0, +\infty)$ ,  $\pi \in (0, 1)$ . Nech  $\hat{\lambda}_{ML}, \hat{\pi}_{ML}$  sú jednoznačne určené maximálne vierohodné odhady parametrov  $\lambda, \pi$  také, že  $\hat{\lambda}_{ML} \in (0, +\infty)$ ,  $\hat{\pi}_{ML} \in (0, 1)$ . Nech  $\mathbf{S}$  je konzistentný odhad matice  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Potom platí*

$$\sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{S}).$$

*Dôkaz.* Z definície vieme, že Fisherova informácia je Hermitovská a pozitívne definitná a teda dokážeme aplikovať Choleského rozklad (Veta B.1)  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2})^T$ . Potom pomocou aplikácie maticovej verzie Cramer Slutskeho (Veta B.2) vety a jednoduchých úprav dostávame

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ \sqrt{n} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \\ \sqrt{n} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \\ \sqrt{n} \mathbf{S}^{1/2} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \\ \sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix} \right) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{S}), \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.  $\square$

## 2.3 Intervalové odhady

Po samotnom bodovom odhadnutí parametra nás spravidla zaujíma, ako veľmi sa môže tento odhad líšiť od skutočnej hodnoty parametra s určitou pravdepodobnosťou. Na riešenie tohto problému si zavedieme definíciu intervalového odhadu.

**Definícia 4.** *Majme náhodný výber  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  z rozdelenia  $F_0 \in \mathcal{F}$ . Povieme, že  $B_n(\mathbf{X})$  je intervalový odhad parametra  $\theta$  s pravdepodobnosťou pokrytia  $1 - \alpha$ , pokiaľ platí  $P[B_n(\mathbf{X}) \ni \theta] = 1 - \alpha$ . Pokiaľ sa táto rovnosť blíži k  $1 - \alpha$*

aspoň limitne pre  $n \rightarrow \infty$ , hovoríme o asymptotickom intervalovom odhade. Ak pracujeme s vektorovým parametrom  $\boldsymbol{\theta} \subset \mathbb{R}^n$ , množinu  $B_n(\mathbf{X})$  nazývame oblasť spoľahlivosti.

Množina  $B_n(\mathbf{X})$  sa často značí iba  $B_n$ , no je dôležité si uvedomiť, že táto množina je náhodnou veličinou (pretože je tvorená funkciou náhodného výberu), zatiaľ čo parameter  $\theta$  je pevný. Vytvárať presné intervalové odhady je v praxi často nepraktické, pretože väčšinou nepoznáme presné rozdelenie našich bodových odhadov. Preto sa zvykne využívať asymptotická normalita, ktorá plynie z teórie maximálne vierohodných odhadov. Názorne ilustrujeme, ako nájsť intervalový odhad pre  $\pi$ , alebo  $\lambda$  pri náhodnom výbere zo ZIP rozdelenia:

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že

$$\sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{ML} \\ \hat{\pi}_{ML} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Odtiaľ môžeme zobrať jednotlivé parametre jednotlivo po zložkách a dostávame nasledovné rozdelenia:

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_{ML} - \lambda) \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{1}{(\pi - 1) \left( \frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} \right)} \right)$$

a

$$\sqrt{n}(\hat{\pi}_{ML} - \pi) \xrightarrow{d} N \left( 0, (\pi - 1) \left( \frac{1}{\lambda + 1 - e^\lambda} - \pi \right) \right).$$

Pre prehľadnosť v ďalších úpravách si označme rozptyly týchto (limitných) normálnych rozdelení  $\text{var}_\lambda$  a  $\text{var}_\pi$ . Potom samozrejme platí

$$\sqrt{\frac{n}{\text{var}_\lambda}}(\hat{\lambda}_{ML} - \lambda) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Odtiaľ teda

$$P \left[ u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{\frac{n}{\text{var}_\lambda}}(\hat{\lambda}_{ML} - \lambda) < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \rightarrow 1 - \alpha,$$

kde  $u_\alpha$  je  $\alpha$ -kvantil rozdelenia  $N(0,1)$  a jednoduchými úpravami plynúcimi zo symetrie normálneho rozdelenia okolo 0 dostávame

$$P \left[ \hat{\lambda}_{ML} - \sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \lambda < \hat{\lambda}_{ML} + \sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \rightarrow 1 - \alpha,$$

čo nám priamo z definície dáva tvar asymptotického intervalového odhadu pre parameter  $\lambda$ . Asymptotický intervalový odhad parametra  $\pi$  nájdeme úplne analogicky a zistíme, že má tvar

$$\left( \hat{\pi}_{ML} - \sqrt{\frac{\text{var}_\pi}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \hat{\pi}_{ML} + \sqrt{\frac{\text{var}_\pi}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Rovnako analogicky by sme dokázali nájsť tzv. dolný interval spoľahlivosti tvaru  $(C_L(\mathbf{X}), \infty)$  a horný interval spoľahlivosti tvaru  $(-\infty, C_U(\mathbf{X}))$ . V týchto odhadoch by sme však používali  $\alpha$ -kvantil  $u_{1-\alpha}$  na dosiahnutie spoľahlivosti  $\alpha$ .



V praxi by sme samozrejme opäť použili konzistentný odhad prvkov  $\text{var}_\pi$  a  $\text{var}_\lambda$  ktorý sme získali pomocou maximálne vierohodných odhadov parametrov  $\pi$  a  $\lambda$ .

Opäť sa však môže stať, že bude problematický náš obmedzený parametrický priestor. V prípade intervalového odhadu pre parameter  $\lambda$  totiž nedokážeme garantovať, že bude platiť vzťah

$$\hat{\lambda}_{ML} - \sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} > 0.$$

Riziko, že táto nerovnosť nebude platiť existuje hlavne pri nízkom počte pozorovaní a pri odhade parametra  $\lambda$  veľmi blízko nule. V tom prípade samozrejme nemá veľký význam tvrdiť napríklad, že intervalový odhad pre parameter  $\lambda$  je  $(-1,1)$ , keď vieme, že tento parameter určite nemôže mať hodnotu z intervalu  $(-1,0)$ . Jedným z riešení tohto problému je použiť namiesto pôvodného parametra nejakú jeho transformáciu, ktorá bude mať väčší obor hodnôt. Následne môžeme aplikáciou delta metódy vypočítať asymptotické rozdelenie takto transformovaného parametra, použiť ho na získanie jej intervalového odhadu a spätnou transformáciou dopočítať nový intervalový odhad pre pôvodný parameter  $\lambda$ . Pre parameter  $\lambda$  sa intuitívne ponúka logaritmická transformácia. Vieme, že odhad  $\hat{\lambda}_{ML}$  musí patriť do intervalu  $(0, +\infty)$  (pokiaľ sa nebudeme zaoberať degenerovaným prípadom kde je každé pozorovanie nulové), a teda patrí do definičného oboru logaritmu. Zároveň dostaneme obor hodnôt  $\log(\lambda) \in (-\infty, +\infty)$ , čím vyriešime potenciálny problém nášho odhadu presahujúceho mimo parametrického priestoru.

Uvažujeme teda  $g(x) = \log(x) \implies g'(x) = \frac{1}{x}$ . Podľa delta metódy (Veta B.3) platí

$$\sqrt{n}(g(\hat{\lambda}_{ML}) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N\left(0, \text{var}_\lambda[g'(\lambda)]^2\right),$$

teda

$$\sqrt{n}(\log(\hat{\lambda}_{ML}) - \log(\lambda)) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\text{var}_\lambda}{\lambda^2}\right).$$

Rovnako ako pri odvodzovaní pôvodného intervalového odhadu môžeme použiť Cramer-Slutského vetu a aproximovať rozptyl tohto rozdelenia pomocou konzistentných odhadov parametrov  $\lambda$  a  $\pi$  (pripomeňme, že maximálne vierohodné odhady sú konzistentné). Jednoduchými úpravami dostávame (asymptotický) intervalový odhad pre náhodnú veličinu  $\log(\lambda)$  v tvare

$$\left(\log(\hat{\lambda}_{ML}) - \sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{\lambda^2 n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \log(\hat{\lambda}_{ML}) + \sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{\lambda^2 n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Spätnou substitúciou, teda aplikovaním exponenciály na obidve strany nerovnosti jednoducho dostávame intervalový odhad pre pôvodný parameter  $\lambda$  v tvare

$$\left(\hat{\lambda}_{ML} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{\lambda^2 n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \hat{\lambda}_{ML} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{\text{var}_\lambda}{\lambda^2 n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right).$$

Parametrický priestor parametra  $\pi$  je ešte restriktívnejší. Jedným riešením je najprv nájsť transformáciu, ktorá rozšíri obor hodnôt na kladné čísla, a následne aplikovať logaritmickú transformáciu ako v predchádzajúcom prípade. Jednou takou transformáciou je  $\frac{x}{1-x}$ , pričom dostávame výslednú funkciu  $g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$  s deriváciou  $g'(x) = \frac{1}{x-x^2}$ . Opäť teda použijeme delta metódu a dostávame

$$\sqrt{n} \left( \log \left( \frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \right) - \log \left( \frac{\pi}{1 - \pi} \right) \right) \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{\text{var}_{\pi}}{(\pi - \pi^2)^2} \right).$$

Odtiaľ opäť jednoduchými úpravami dostávame asymptotický interval spoľahlivosti pre  $g(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$ :

$$\left( \log \left( \frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \right) - \sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \log \left( \frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \right) + \sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Spätnou transformáciou po aplikovaní inverznej funkcie  $g^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  dostávame intervalový odhad pre parameter  $\pi$  v tvare

$$\left( \frac{\frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1 + \frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}}}, \frac{\frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} \cdot e^{\sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1 + \frac{\hat{\pi}_{ML}}{1 - \hat{\pi}_{ML}} e^{\sqrt{\frac{\text{var}_{\pi}}{n(\pi - \pi^2)^2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}}} \right).$$

V tomto prípade môže byť pomerne problematická interpretácia parametra v transformovanom priestore, ktorý je komplikovanejší než ten vytvorený samotným logaritmom. Zároveň si treba uvedomiť, že aj keď v teórii nula nepatrí do parametrického priestoru, v praxi môže byť informácia o tom, či je šanca že máme k dispozícii model bez nadbytočných núl užitočná. Jej umelým odstránením z konfidenčného intervalu tak môže tento interval v niektorých prípadoch stratiť časť svojej výpovednej hodnoty.

## 3. Simulačná štúdia

V tejto kapitole budeme aplikovať teoretické poznatky z predchádzajúcej kapitoly na konkrétne príklady. Pri každom teste budeme postupne generovať náhodný výber zo ZIP rozdelenia s predom definovanými parametrami. Následne numericky vypočítame maximálne vierohodné odhady pomocou vzorcov odvodených v predchádzajúcej kapitole, a porovnáme pre rôzne veľkosti náhodných výberov empirickú hladinu popísaných testov s teoretickou asymptotickou hladinou, ktorú by mali tieto testy dosahovať.

### 3.1 Intervalové odhady

Ako prvé sa zameriame na spoľahlivosť intervalových odhadov. Pri každej kombinácii skutočných parametrov budeme generovať 10 000 opakovaní pre rôzny počet pozorovaní ( $n$  od 20 po 500) a sledovať ako sa mení pokrytie skutočného parametra intervalom spoľahlivosti (v porovnaní s teoretickým pokrytím, ktoré je asymptoticky 0,95). Viac než správanie intervalov pri zmene parametra Poissonovho rozdelenia nás zaujíma, ako sa tieto intervaly menia keď meníme pomer núl (teda parameter  $\pi$ ), preto budeme tabuľky vytvárať pre fixný parameter  $\lambda$  (najprv  $\lambda = 1$  a následne  $\lambda = 5$ ) a pozorovať, ako sa mení pokrytie intervalov pre meniaci sa rozsah výberu  $n$  a parameter  $\pi$ . Ako prvé zafixujeme parameter  $\lambda = 1$ .

Vidíme, že pokrytie intervalov pre obidva parametre je už pre nízky rozsah výberu  $n$  pomerne blízko k deklarovanej teoretickej hodnote 0.95. Výnimkou je prípad, keď je rozsah výberu veľmi malý a zároveň pridaná pravdepodobnosť núl veľmi vysoká. To sa dá vysvetliť tým, že keď sa v našom náhodnom výbere vyskytujú takmer výlučne nuly, je veľmi ťažké odhadovať strednú hodnotu pôvodného Poissonovho rozdelenia (o tom máme v podstate desaťnásobne menšiu informáciu než by sme pri tom istom rozsahu výberu mali o obyčajnom Poissono-

$n$	$\pi$			
	0.1	0.3	0.6	0.9
20	0.9577	0.9560	0.9554	0.7290
50	0.9603	0.9552	0.9482	0.9065
100	0.9630	0.9589	0.9524	0.9385
500	0.9637	0.9509	0.9491	0.9516

Tabuľka 3.1: Skutočné pokrytie parametra  $\pi$  pri  $\lambda = 1$

$n$	$\pi$			
	0.1	0.3	0.6	0.9
20	0.9880	0.9685	0.8713	0.5672
50	0.9828	0.9494	0.9148	0.7436
100	0.9775	0.9482	0.9345	0.8733
500	0.9571	0.9466	0.9494	0.9410

Tabuľka 3.2: Skutočné pokrytie parametra  $\lambda$  pri  $\lambda = 1$

$n$	$\pi$			
	0.1	0.3	0.6	0.9
20	0.8837	0.9333	0.9279	0.8740
50	0.9006	0.9499	0.9391	0.8954
100	0.9383	0.9409	0.9447	0.9251
500	0.9508	0.9519	0.9485	0.9454

Tabulka 3.3: Skutočné pokrytie parametra  $\pi$  pri  $\lambda = 5$

$n$	$\pi$			
	0.1	0.3	0.6	0.9
20	0.9474	0.9468	0.9431	0.9073
50	0.9481	0.9485	0.9457	0.9320
100	0.9470	0.9516	0.9514	0.9486
500	0.9457	0.9533	0.9483	0.9449

Tabulka 3.4: Skutočné pokrytie parametra  $\lambda$  pri  $\lambda = 5$

vom rozdelení). Nevieme potom spoľahlivo určiť, či problém spočíva v extrémne nízkej strednej hodnote tohto rozdelenia, alebo v extrémne vysokej pravdepodobnosti nadbytočných núl.

Ďalej sa pozrieme na tú istú tabuľku pre  $\lambda = 5$ . Môžeme si všimnúť, že už nevidíme rovnaké extrémne nízke pokrytie pre vysoké  $\pi$  ako v predchádzajúcom prípade. Pre vysoké hodnoty  $\lambda$  je totiž šanca, že budeme pozorovať takmer výlučne nuly omnoho nižšia.

## 3.2 Asymptotická normalita odhadov

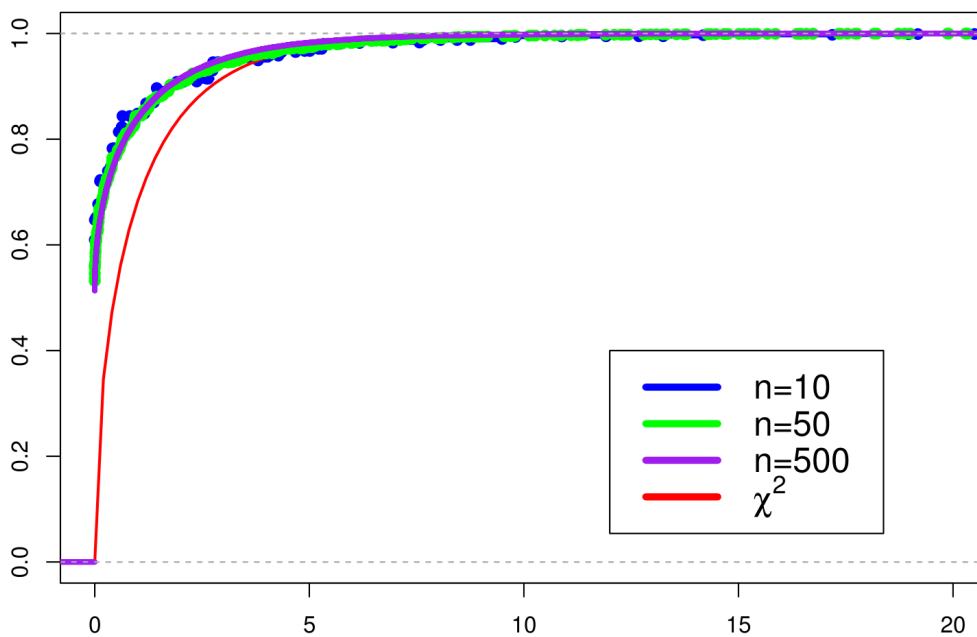
Na záver sa pozrieme na asymptotickú normalitu maximálne vierohodných odhadov. Špeciálnu pozornosť v tejto časti budeme venovať prípadu, kde  $\pi = 0$ , a teda v skutočnosti pracujeme s obyčajným Poissonovým rozdelením (no z nejakého dôvodu sa domnievame, že sa vo výbere môžu vyskytovať nuly, a teda pri analýze používame ZIP model). V tomto prípade nie sú splnené predpoklady Vety A.1, pretože skutočná hodnota parametra  $\pi$  nepatrí do otvoreného intervalu  $(0,1)$ , takže sa nemôžeme opierať o teoretický záver ktorý by nám garantoval asymptotickú normalitu.

Pri všetkých simuláciách budeme pracovať so štatistikou tvaru  $P = \frac{n(\hat{\pi}_{ML} - \pi)^2}{\text{var}_{\pi}}$ , alebo  $L = \frac{n(\hat{\lambda}_{ML} - \lambda)^2}{\text{var}_{\lambda}}$ . Za platnosti predpokladanej asymptotickej normality sa totiž jedná o druhú mocninu veličiny s rozdelením  $N(0,1)$ , ktorá má očividne rozdelenie  $\chi_1^2$ . Graficky znázorníme ich empirickú distribučnú funkciu pre rôzne hodnoty parametrov, a porovnáme ju so skutočnou distribučnou funkciou rozdelenia  $\chi_1^2$ .

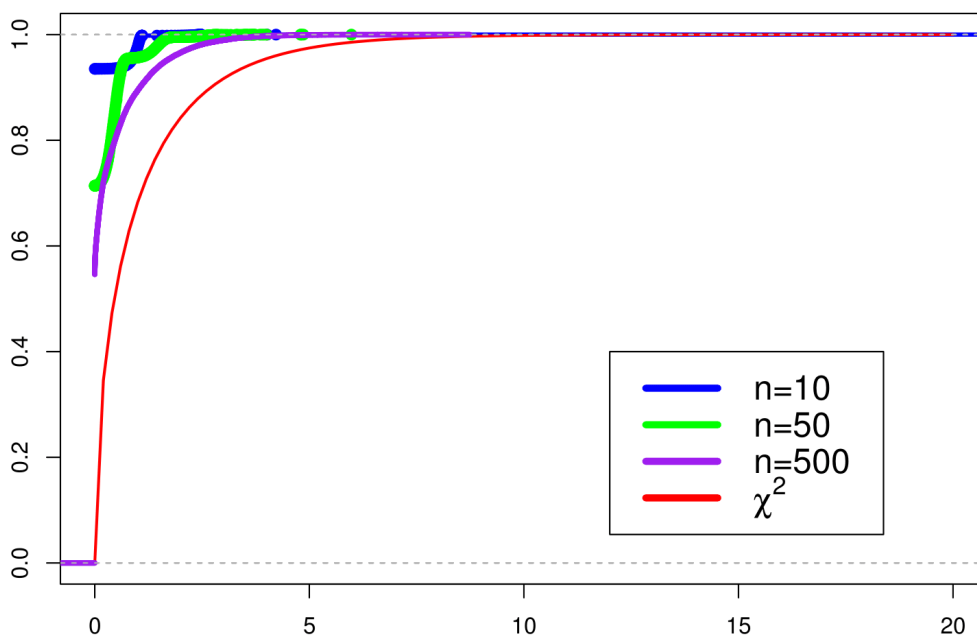
Z prvých dvoch grafov vidíme, že empirická distribučná funkcia štatistiky  $P$

sa pre  $\pi = 0$  výrazne líši od teoretickej aj pre pomerne veľký rozsah výberu, čo znamená že odhad  $\hat{\pi}_{ML}$  nemá normálne rozdelenie odvodené v predchádzajúcej kapitole. To môže spôsobovať komplikácie práve pri testoch správnosti modelu, keďže sa nemôžeme spoľahnúť na hladinu testov odvodených z asymptotickej normality parametra  $\hat{\pi}_{ML}$ . Naopak čo sa týka normality odhadu  $\hat{\lambda}_{ML}$ , pri nízkych hodnotách  $\lambda$  sa ešte distribučné funkcie trochu líšia, no pre  $\lambda = 5$  už má testová štatistika  $L$  prakticky dokonalé  $\chi_1^2$  rozdelenie aj pre nízke  $n$ , čo znamená že odhad  $\hat{\lambda}_{ML}$  veľmi rýchlo dosahuje normalitu aj napriek nesplneniu podmienok regularity.

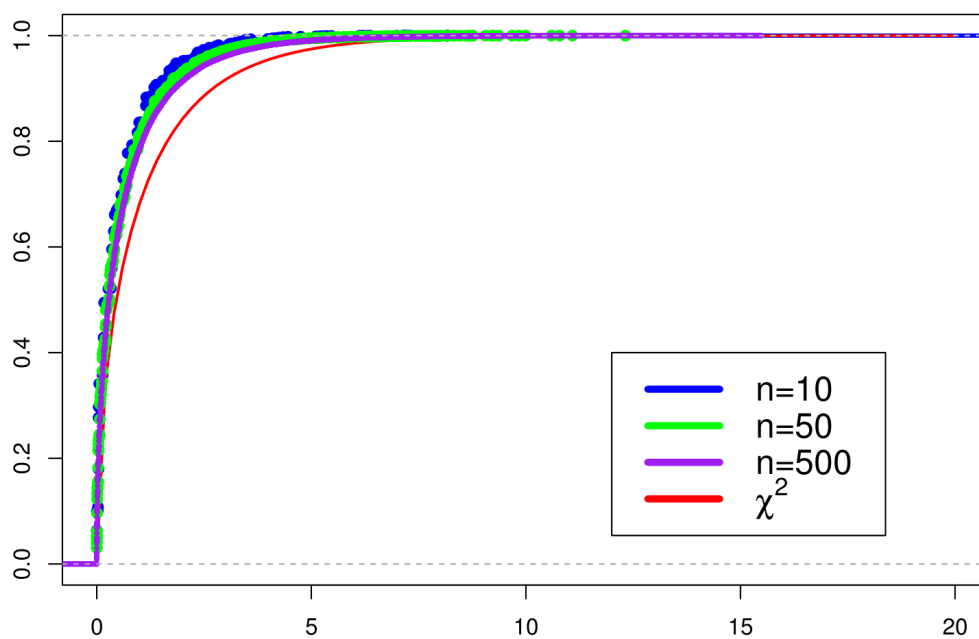
Na posledných dvoch obrázkoch sme zafixovali veľkosť výberu  $n = 100$  a parameter  $\lambda = 1$  aby sme mohli sledovať ako vplýva pomer nadbytočných núl na konvergenciu k teoretickému rozdeleniu. Môžeme vidieť, že odhad parametra  $\pi$  sa najviac približuje k normálnemu rozdeleniu okolo  $\pi = 0,5$  a naopak je najproblematickejší pre nízke hodnoty  $\pi$ . Naopak rozdelenie odhadu parametra  $\lambda$  je pomerne presné pre nízke a stredné hodnoty  $\pi$ , no je absolútne nevyhovujúce pre  $\pi = 0,9$ . Vysvetlenie je rovnaké ako pri nesprávnom pokrytí intervalových odhadov: pokiaľ pracujeme s pomerne nízkou strednou hodnotou, nie veľmi vysokým rozsahom náhodného výberu, a vysokým množstvom nadbytočných núl, je veľmi zložité vyhodnotiť, čo presne spôsobilo veľký pomer núl - extrémne nízka stredná hodnota Poissonovho rozdelenia, alebo extrémne vysoká pravdepodobnosť pridaných núl.



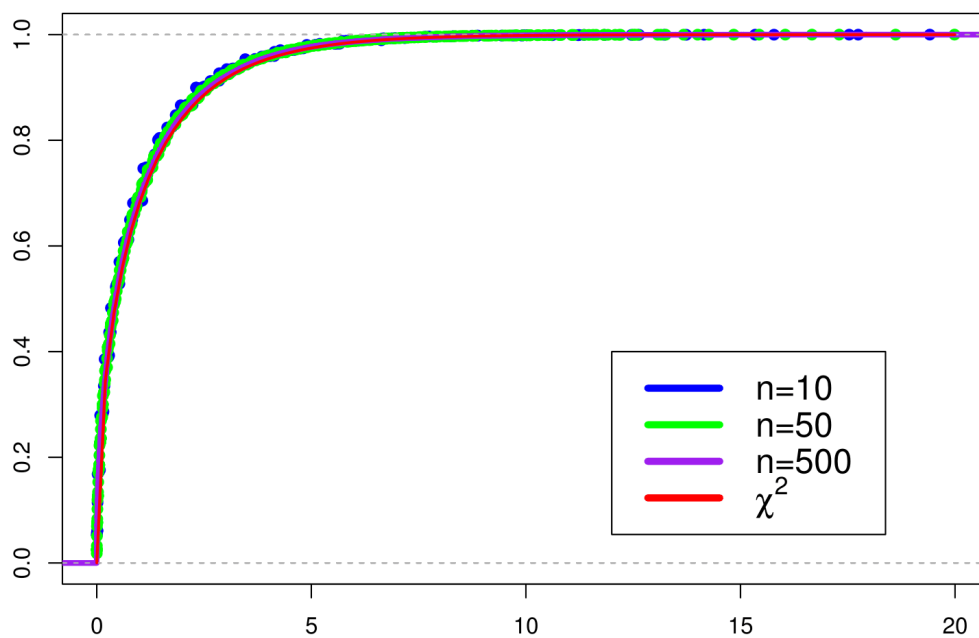
Obrázek 3.1: Rozdelenie štatistiky  $P$  pre  $\lambda = 1; \pi = 0$



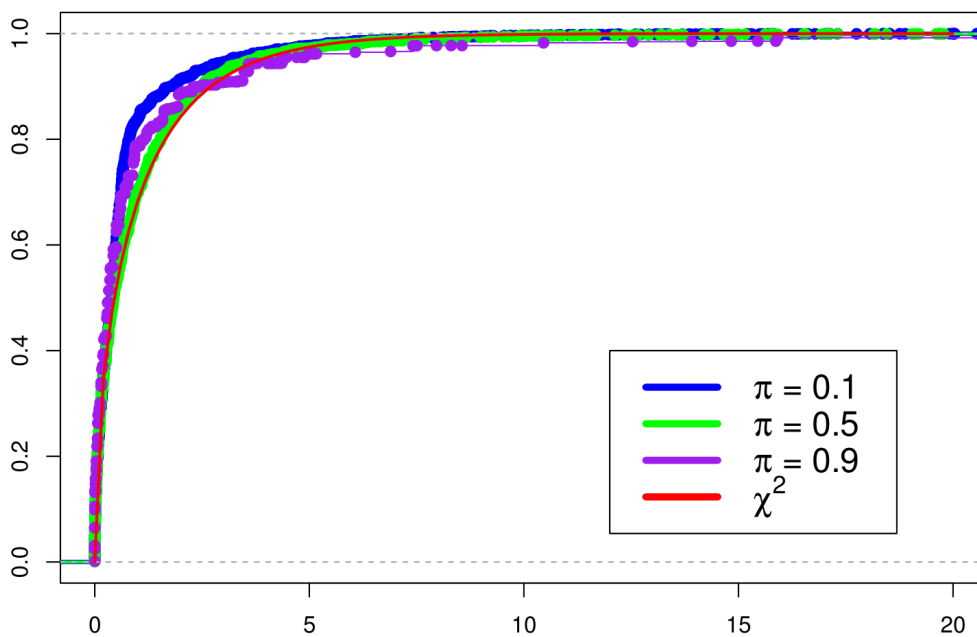
Obrázek 3.2: Rozdelenie štatistiky  $P$  pre  $\lambda = 5; \pi = 0$



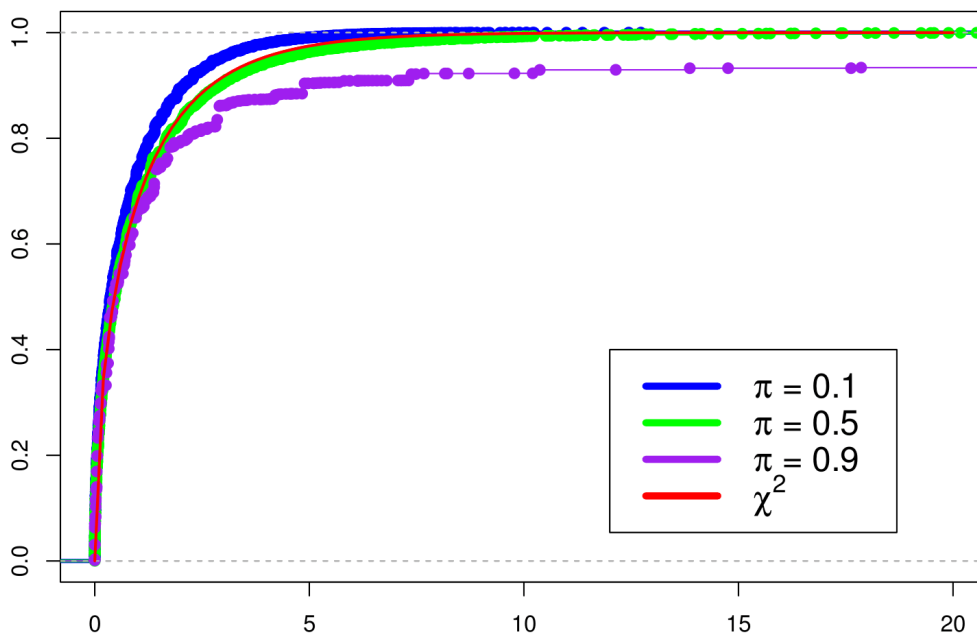
Obrázek 3.3: Rozdelenie štatistiky  $L$  pre  $\lambda = 1; \pi = 0$



Obrázek 3.4: Rozdelenie štatistiky  $L$  pre  $\lambda = 5; \pi = 0$



Obrázek 3.5: Rozdelenie štatistiky  $P$  pre  $\lambda = 1; n = 100$



Obrázek 3.6: Rozdelenie štatistiky  $L$  pre  $\lambda = 1; n = 100$



# Záver

V práci sme sa zaoberali Poissonovým rozdelením s nadbytočnými nulami. Ako prvé sme si zaviedli značenie a definície, ktoré sme potom používali pri ďalšej práci s týmto rozdelením.

Oboznámili sme sa s dvomi spôsobmi hľadania odhadov a aplikovali sme ich na naše konkrétne rozdelenie. Prvou bola momentová metóda, ktorá nebola veľmi praktická pre naše potreby, keďže sme nedokázali analyticky odvodiť rozdelenie takýchto odhadov. Hlbšie sme sa potom venovali odhadom získaným metódou maximálnej vierohodnosti, ku ktorým sme pomocou teórie z knihy Anděl (2011) odvodili asymptotické rozdelenie a intervalové odhady.

V poslednej časti sme aplikovali odvodené teoretické poznatky a overovali sme, či platia v praktických situáciách. Zistili sme, že pokrytie intervalových odhadov aj normalita maximálne vierohodných odhadov sú pre väčšinu hodnôt parametrov spoľahlivé. Ukázali sme, že pokiaľ aplikujeme ZIP model na obyčajné Poissonovo rozdelenie, distribučná funkcia odhadu parametra  $\pi$  sa bude výrazne líšiť od normálnej, no odhad parametra  $\lambda$  bude normálny aj keď nám to negarantovali teoretické výsledky.

# Základy teórie maximálnej vierohodnosti

V tejto kapitole uvádzame základné pojmy a vety z teórie maximálnej vierohodnosti. Definície uvádzame v takom znení ako ich definuje Anděl (2011).

**Definícia A.1.** *Majme náhodný výber  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  s hustotou  $\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ . Pojmom vierohodnostná funkcia rozumieme funkciu  $f(\mathbf{x}, \theta)$  ako funkciu  $\theta$  pre pevné  $\mathbf{x}$ . Funkcia  $\ell(\mathbf{x}, \theta) = \log f(\mathbf{x}, \theta)$  sa nazýva logaritmická vierohodnostná funkcia. Logaritmickú vierohodnostnú funkciu budeme pre dané  $\mathbf{x}$  často značiť iba  $\ell(\theta)$ .*

**Definícia A.2.** *Maximálne vierohodný odhad parametra  $\theta$  je taká hodnota  $\hat{\theta}$ , ktorá maximalizuje vierohodnostnú funkciu  $f(\mathbf{x}, \theta)$  pre dané  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ .*

Pretože logaritmus je rýdzo monotónna funkcia, môžeme namiesto vierohodnostnej funkcie maximalizovať logaritmickú vierohodnostnú funkciu. Vo väčšine prípadov tento postup značne uľahčuje výpočet.

**Definícia A.3.** *Systém rovníc*

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

*nazývame systém vierohodnostných rovníc.*

**Definícia A.4.** *Povieme, že systém hustôt  $\{f(x, \theta), \theta \in \Omega\}$  je regulárny, pokiaľ sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Množina  $\Omega$  je neprázdna a otvorená množina v  $\mathbb{R}^m$ .*
2. *Množina  $M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$  nezávisí na  $\theta$ .*
3. *Pre skoro všetky  $x \in M$  (vzhľadom k nejakej  $\sigma$ -konečnej miere  $\mu$ ) a pre všetky  $j = 1, 2, \dots, m$  existuje parciálna derivácia  $f'_j(x, \theta) = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j}$ .*
4. *Pre všetky  $\theta \in \Omega$  a pre každé  $j$  platí  $\int_M f'_j(\mathbf{x}, \theta) d\mu(\mathbf{x}) = 0$ .*
5. *Pre každú dvojicu  $(i, j)$  existuje konečný integrál*

$$J_{ij}(\theta) = \int_M \frac{f'_i(x, \theta) f'_j(x, \theta)}{f^2(x, \theta)} f(x, \theta) d\mu(x).$$

6. *Matica  $\mathbf{J}(\theta) = \|J_{ij}(\theta)\|_{i,j=1}^m$  je pozitívne definitná pre každé  $\theta \in \Omega$ .*

Matica  $\mathbf{J}(\theta)$  sa nazýva *Fisherova informačná matica*. Fisherova matica vypočítaná z celého náhodného výberu s hustotou  $f_n(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$  sa značí  $\mathbf{J}_n(\theta)$  a medzi týmito dvomi maticami platí vzťah  $\mathbf{J}_n(\theta) = n\mathbf{J}(\theta)$ . Medzi Fisherovou informáciou a maximálne vierohodným odhadom existuje vzťah, ktorý popisuje Veta A.1.

**Veta A.1.** *Majme regulárny systém hustôt  $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$  s Fisherovou maticou  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ . Potom za určitých predpokladov o parametri  $\boldsymbol{\theta}$  (viz. Anděl (2011)) platí nasledujúce tvrdenie:*

1. *Ak  $n \rightarrow \infty$ , tak pre každé  $\epsilon > 0$  existuje s pravdepodobnosťou blížiacou sa k jednej také riešenie  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  systému vierohodnostných rovníc, že  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\| < \epsilon$ , kde  $\boldsymbol{\theta}_0$  je skutočná hodnota parametra  $\boldsymbol{\theta}$ .*
2. *Položme*

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m} \end{pmatrix}.$$

*Potom pre  $n \rightarrow \infty$  platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N[\mathbf{0}, \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_0)].$$

3. *Ak existuje pre každé dostatočne veľké  $n$  a pre každú hodnotu  $\mathbf{X}$  taký koreň  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  systému vierohodnostných rovníc, že  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  je konzistentný odhad parametra  $\boldsymbol{\theta}_0$ , tak*

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}).$$

*Dôkaz.* Vid' napríklad Anděl (2011). □

**Veta A.2.** *Nech systém hustôt  $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$  je regulárny. Predpokladajme, že pre skoro všetky  $\mathbf{x} \in M$  (vzhľadom k  $\mu$ ) existujú derivácie*

$$f''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

*a že pre všetky  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$  platí*

$$\int_M f''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

*Potom platí, že*

$$J_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = - \int_M \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

*Dôkaz.* Vid' napríklad Anděl (2011). □

# Zoznam ďalších použitých viet

**Veta B.1.** (Choleského rozklad). *Nech  $A$  je Hermitovská pozitívne definitná matica. Potom existuje práve jeden rozklad tvaru*

$$A = LL^*,$$

*kde  $L$  je dolná trojuholníková matica s reálnymi kladnými prvkami na diagonále a  $L^*$  je konjugovaná matica k matici  $L$ . Ak je  $A$  navyše reálna, matica  $L$  je tiež reálna a teda sa tento rozklad dá zapísať ako*

$$A = LL^T$$

*Dôkaz.* Vid' napríklad Horn (1990), strana 407. □

**Veta B.2.** (Cramer-Slutsky). *Nech  $X_n$  je postupnosť náhodných veličín s distribučnými funkciami konvergujúcimi  $F_n$  k  $F$ . Nech  $Y_n$  je postupnosť náhodných veličín taká, že  $Y_n \xrightarrow{p} c$ , kde  $c$  je konštanta. Potom distribučná funkcia náhodnej veličiny  $X_n Y_n$ ,  $F_n^s(x)$  slabo konverguje k  $F(x/c)$ .*

*Dôkaz.* Vid' napríklad Anděl (2011), strana 333. □

**Veta B.3.** (Delta-metóda). *Nech postupnosť náhodných vektorov  $\mathbf{T}_n$  splňa*

$$\sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

*pre nejaký vektor konštánt  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$  a maticu  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Nech  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$  je spojite diferencovateľná v nejakom okolí bodu  $\boldsymbol{\mu}$ . Označme  $D(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ . Potom platí*

$$\sqrt{n}(g(\mathbf{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, D(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}D(\boldsymbol{\mu})^T).$$

*Dôkaz.* Vid' napríklad Agresti (2002), 14.1.5. □

# Zoznam použitej literatúry

- AGRESTI, A. (2002). *Categorical data analysis*. Wiley-Interscience, New York. ISBN 0-471-36093-7.
- ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky*. Třetí vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.
- HORN, R. A. (1990). *Matrix Analysis*. First paperback edition. Cambridge University Press, New York. ISBN 0-521-38632-2.
- R CORE TEAM (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- WELSH, A. H. (1996). *Aspects of statistical inference*. Wiley, New York. ISBN 0-471-11591-6.