

## POSUDEK VEDOUCÍHO BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Love-Young Inequality and Its Consequences

**Autor:** Adam Sýkora

V klasické Carathéodoryovské teorii obyčejných diferenciálních rovnic je pojem řešení úzce spjat s existencí Stieltjesova integrálu. Tento integrál lze definovat tehdy, má-li integrátor (který v rovnicích odpovídá řídicímu signálu) omezenou variaci.

Ukazuje se však, že mnohdy je potřeba zahrnout do uvažovaného modelu neregulární signál. Typickými modely pro takovýto signál jsou náhodné procesy, jejichž trajektorie mají skoro jistě neomezenou variaci a tedy nelze použít klasickou stieltjesovskou teorii integrace.

V roce 1936 L.C. Young objevil (viz článek [14] v referencích předložené práce), že v jistých případech integrál Riemannova-Stieltjesova typu (tedy jako limita riemannovských-stieltjesovských součtů) existuje, i když má integrátor neomezenou variaci. Tento integrál, dnes zvaný Youngův integrál, poskytuje nástroj, pomocí něhož lze dát smysl diferenciálním rovnicím řízeným rozumně neregulárním signálem. Je-li například uvažovaný signál frakcionální Brownův pohyb s  $H > 1/2$ , pak (za dodatečných předpokladů na koeficienty), lze použít toto rozšíření teorie obyčejných diferenciálních rovnic a danou stochastickou diferenciální rovnici řešit po trajektoriích.

Základními nástroji pro Youngův výsledek je koncept  $p$ -variace funkce a jistá maximální nerovnost, dnes známá jako Loveho-Youngova nerovnost. Omezení, které tato nerovnost dává, je v jistém smyslu velmi ostré - Young sám poskytl příklad, kdy toto omezení splněno není a integrál nelze definovat. Pro aplikace v teorii pravděpodobnosti toto omezení například říká, že signál nemůže být trajektorie Brownova pohybu. Ukazuje se dokonce, že neexistuje žádné spojitě rozšíření Stieltjesova integrálu, které by se dalo použít pro řešení stochastických rovnic s Brownovým pohybem po trajektoriích. Tento nedostatek Youngovy teorie integrace vedl k rozvoji zcela nové „rough paths“ teorie, která je v současné době v popředí vědeckého zájmu.

V literatuře jsou k dispozici dva důkazy Loveho-Youngovy nerovnosti, mezi nimiž dostal student na výběr. Adam Sýkora pečlivě zpracoval původní Youngův důkaz, který je velmi technický a u kterého bylo třeba detailně rozpracovat mnohá podpůrná tvrzení, jež v původním článku byla pouze zmíněná. Dále přehledně shrnul její aplikaci v teorii (Youngovy) integrace a (Youngově) teorii diferenciálních rovnic. Speciální pozornost byla věnována případu, kdy řídicí signál je frakcionální Brownův pohyb.

Ačkoliv se téma práce řadí spíše k obtížnějším, Adam Sýkora přistoupil k práci velmi aktivně a pracoval dosti samostatně. Vzhledem ke zdařilému doplnění chybějících částí v důkazu Youngovy nerovnosti se dá říct, že práce mírně převyšuje úroveň prosté kompilace a jistě tedy splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

V Praze dne 7. června 2019

Petr Čoupek  
KPMS MFF UK  
*coupek@karlin.mff.cuni.cz*