

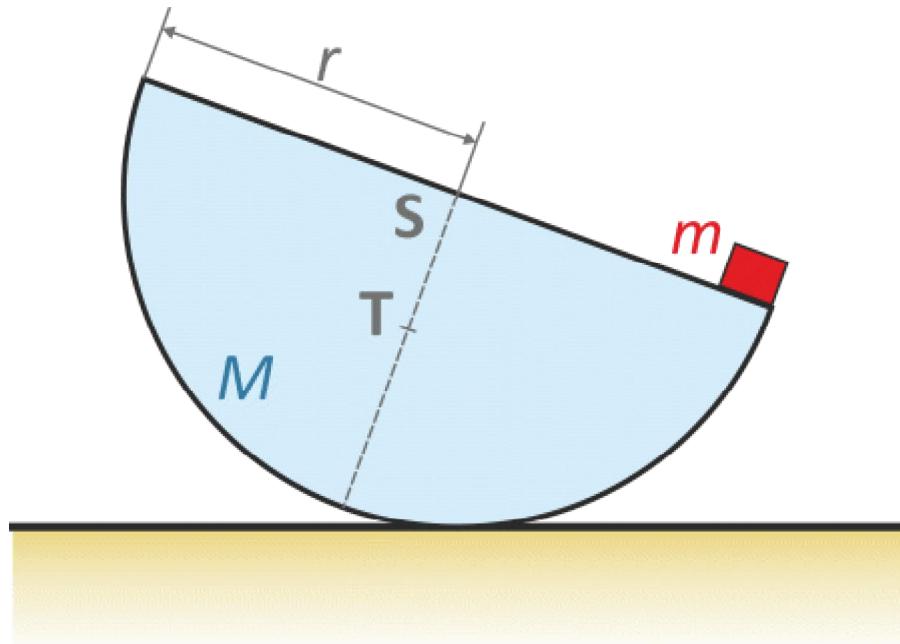
Sbírka řešených úloh

Těžiště půlválce se závažím

Úloha číslo: 2165

VŠ

Nalezněte rovnovážnou polohu homogenního půlválce o hmotnosti M a poloměru r , na jehož jednom konci je položeno závažíčko o hmotnosti m . (Těžiště půlválce se nachází ve vzdálenosti $\frac{4r}{3\pi}$ od bodu S .) Rozměry závažíčka považujte za zanedbatelné.



<http://reseneulohy.cz/>

Návod 1

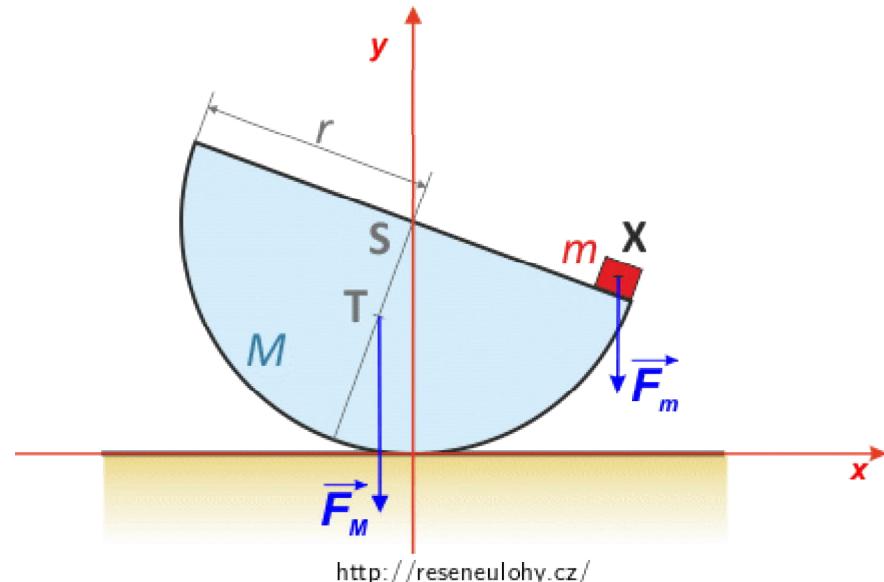
K řešení užijte zobecněný princip virtuální práce.

Návod 2

Nejprve si rozmyslíme, jaké aktivní síly na soustavu působí, zakreslíme je do obrázku a zvolíme si soustavu souřadnic.

Návod 2 – řešení

Na půlválec o hmotnosti M působí tíhová síla \vec{F}_M s působištěm v jeho těžišti \mathbf{T} a na malou kostičku o hmotnosti m působí tíhová síla \vec{F}_m v bodě \mathbf{X} . Soustavu souřadnic si můžeme zvolutit vcelku libovolně, ovšem pro jednoduchost ji zvolme tak jako na obrázku.



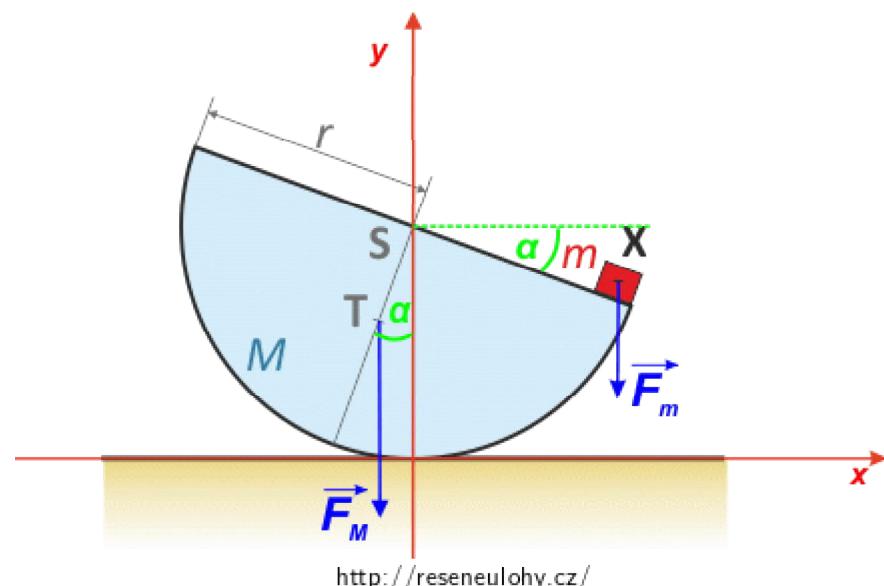
<http://reseneulohy.cz/>

Návod 3

Určeme souřadnice těžiště \mathbf{T} a závažíčka \mathbf{X} vzhledem k námi dané soustavě souřadnic v závislosti na úhlu odklonu α osy půlválce od osy y .

Návod 3 – řešení

Nejprve si do obrázku zakreslíme náš úhel α .



<http://reseneulohy.cz/>

Podívejme se na souřadnice bodů \mathbf{X} a \mathbf{T} v naší soustavě souřadnic.

Pomocí goniometrických vztahů dostaneme pro bod \mathbf{T} :

$$x_T = -\frac{4r}{3\pi} \sin \alpha$$

$$y_T = r - \frac{4r}{3\pi} \cos \alpha$$

A velmi podobně pro bod \mathbf{X} dostaneme:

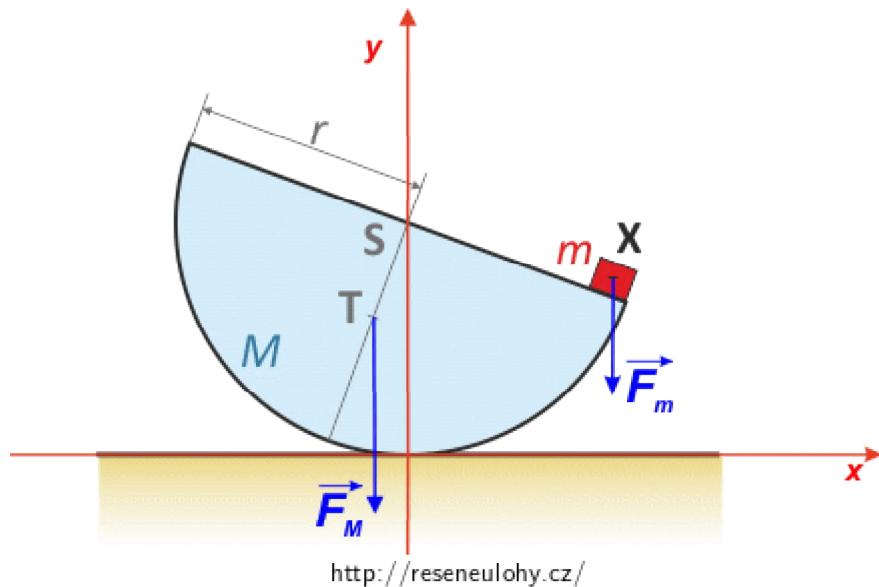
$$x_X = r \cos \alpha$$

$$y_X = r - r \sin \alpha$$

Kompletní řešení

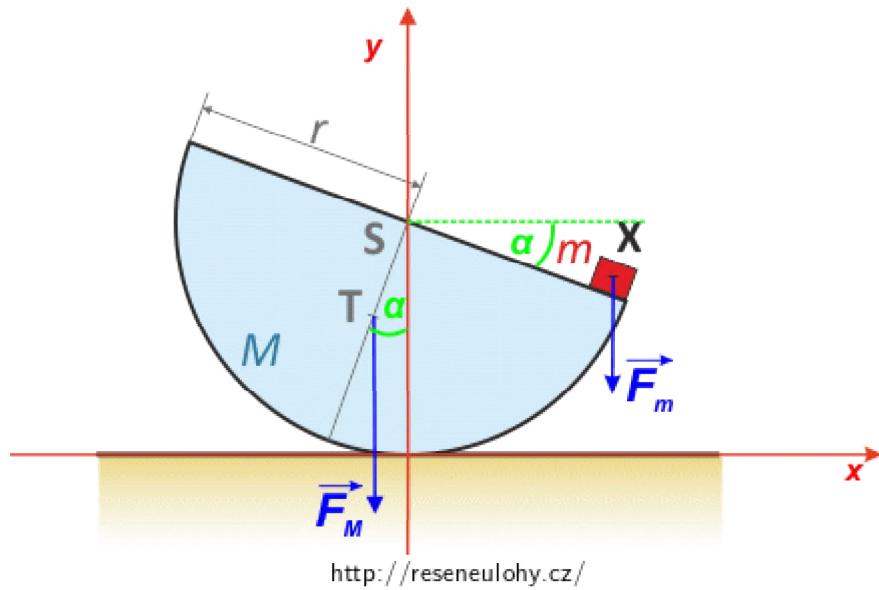
Nejprve si rozmyslíme, jaké aktivní síly působí, zakreslím je do obrázku a zvolíme si soustavu souřadnou.

Na půlválec o hmotnosti M působí tíhová síla \vec{F}_M s působištěm v jeho těžišti \mathbf{T} a na malou kostičku o hmotnosti m působí tíhová síla \vec{F}_m v bodě \mathbf{X} . Soustavu souřadnic si můžeme zvolit vcelku libovolně, ovšem pro jednoduchost zvolme soustavu souřadnic tak jako na obrázku.



Určeme souřadnice těžiště \mathbf{T} a závažíčka \mathbf{X} vzhledem k nám dané soustavě souřadnic v závislosti na úhlu odklonu α osy půlválce od osy y .

Nejprve si do obrázku zakreslíme náš úhel α .



Podívejme se na souřadnice bodů \mathbf{X} a \mathbf{T} v naší soustavě souřadnic.

Pomocí goniometrických vztahů dostaneme pro bod \mathbf{T} :

$$x_T = -\frac{4r}{3\pi} \sin \alpha$$

$$y_T = r - \frac{4r}{3\pi} \cos \alpha$$

A velmi podobně pro bod \mathbf{X} dostaneme:

$$x_X = r \cos \alpha$$

$$y_X = r - r \sin \alpha$$

Chceme určit polohu těžiště \mathbf{T} v rovnovážné poloze. Víme, že v rovnovážné poloze platí, že výslednice všech sil působících na těleso je nulová. Z této podmínky vychází princip virtuální práce, jež užijeme k řešení úlohy. Zobecněný princip virtuální práce (ZPVP) pro soustavu N hmotných bodů říká, že pro libovolná virtuální posunutí $\delta \vec{r}_i$ platí, že virtuální práce aktivních sil působících na soustavu pro tato virtuální posunutí je nulová, tedy:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Tedy budeme pro výpočet potřebovat vyjádřit naše virtuální posunutí i naše aktivní síly. Začneme tím jednodušším, tedy silami. V naší soustavě platí:

$$\vec{F}_M = (0; -Mg)$$

$$\vec{F}_m = (0; -mg)$$

Virtuální posunutí mohou být i nekonečně malá a chovají se jako diferenciály. Jelikož naše těžiště T je jednoznačně určeno úhlem α , považujme α za naši zobecněnou souřadnici a daná virtuální posunutí určeme jako:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{d \vec{r}_i}{d\alpha} \delta \alpha$$

Tedy bude platit:

$$\delta x_T = -\frac{4r}{3\pi} \cos \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_T = \frac{4r}{3\pi} \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta x_X = -r \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_X = -r \cos \alpha \delta \alpha$$

Určeme si tedy naši rovnici pro ZPVP:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \vec{F}_M \cdot \delta \vec{r}_T + \vec{F}_m \cdot \delta \vec{r}_X = \\ &= 0 \delta x_T - Mg \delta y_T + 0 \delta x_X - mg \delta y_X = 0 \end{aligned}$$

Tedy po dosazení virtuálních posunutí a vykrácení $-g$ dostaneme:

$$M \frac{4r}{3\pi} \sin \alpha \delta \alpha - mr \cos \alpha \delta \alpha = 0 \quad / \frac{1}{r}$$

$$M \frac{4}{3\pi} \sin \alpha \delta \alpha - m \cos \alpha \delta \alpha = 0$$

Jelikož princip virtuální práce musí platit pro libovolné virtuální posunutí, tedy obecně nenulové, můžeme zde „zkrátit“ i $\delta \alpha$:

$$M \frac{4}{3\pi} \sin \alpha - m \cos \alpha = 0$$

$$M \frac{4}{3\pi} \sin \alpha = m \cos \alpha$$

Dostáváme dvě možnosti, buď $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, což je případ, kdy pro naše závážíčko platí $m = 0$ a nebo $\sin \alpha \neq 0$, a tedy platí:

$$\frac{4M}{3\pi m} = \cot \alpha$$

$$\operatorname{arccot} \frac{4M}{3\pi m} = \alpha$$

Tím jsme se dobrali ke vztahu pro úhel α , který nám již stačí dosadit do rovnic pro x_T a y_T :

$$x_T = - \frac{4}{3\pi} \sin \left(\operatorname{arccot} \frac{4M}{3\pi m} \right)$$

$$y_T = r - \frac{4}{3\pi} \cos \left(\operatorname{arccot} \frac{4M}{3\pi m} \right)$$

Odpověď

V námi zvolené soustavě souřadnic (viz. Návod 1 – řešení) platí v rovnovážné poloze pro souřadnice x_T a y_T těžiště **T** vztahy:

$$x_T = - \frac{4}{3\pi} \sin \left(\operatorname{arccot} \frac{4M}{3\pi m} \right)$$

$$y_T = r - \frac{4}{3\pi} \cos \left(\operatorname{arccot} \frac{4M}{3\pi m} \right)$$

Sbírka řešených úloh

Tenzor setrvačnosti válce

Úloha číslo: 2251

Mějme homogenní válec výšky h a kruhové podstavy o poloměru R .

- (A) Určete tensor setrvačnosti J tohoto válce vzhledem k jeho hmotnému středu.
- (B) Určete limity $\lim_{h \rightarrow 0} J$ a $\lim_{R \rightarrow 0} J$. Tenzory setrvačnosti jakých těles tímto získáme?

Návod (A)1

Rozvažte, jakých vztahů budete užívat a jaké všechny veličiny budete potřebovat při výpočtu tenzoru setrvačnosti.

Dále si rozmyslete, v jakých souřadnicích bude výhodné pracovat, jaké platí transformační vztahy a jaký je význam determinantu Jacobiho matice (jakobiánu). Určete jakobián.

Řešení - Návod (A)1

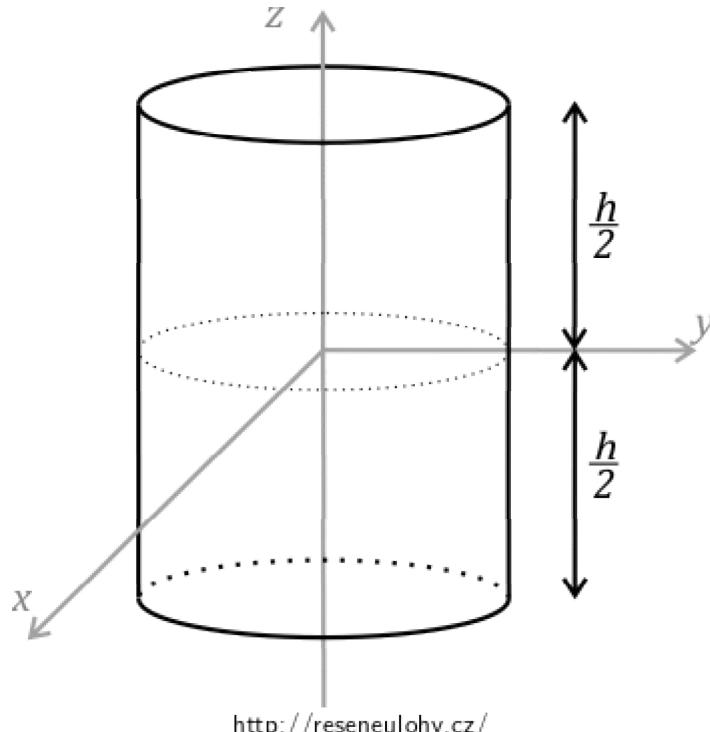
Jelikož se jedná o homogenní válec, bude pro určení jednotlivých složek tenzoru setrvačnosti J_{jk} platit vztah:

$$J_{jk} = \int_V (\delta_{jk} r^2 - x_j x_k) \rho dV,$$

kde r je vzdálenost jednotlivých „kousků“ válce od počátku soustavy, δ_{jk} je Kroneckerovo delta a souřadnice polohového vektoru x_i pro $i = 1$ až 3 jsou obecnějším zapsáním našich souřadnic x, y, z .

Poznámka: Odvození tohoto vztahu viz například: [Studijní text k teoretické mechanice tuhého tělesa](#).

Potřebujeme tedy znát hustotu válce ρ . Protože je náš válec homogenní, je hustota ρ konstantní.



Parametrisace našeho válce odpovídá cylindrickým souřadnicím a proto bude výhodnější pracovat s nimi.

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

r je vzdálenost „kousků“ válce od osy z , probíhající interval $(0, R)$. Úhel φ je měřený od osy x v rovině xy proti směru hodinových ručiček a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jelikož počátek naší soustavy souřadnic splývá s těžištěm válce, je $z \in \left(-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Je nutné si uvědomit, že pracujeme v cylindrických souřadnicích. K výpočtu trojnáho integrálu v cylindrických souřadnicích bude nutné spočítat jakobián.

Jakobián $|\mathbb{J}|$ (absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice \mathbb{J}) udává vztah, jakým se při transformaci souřadnic mění objem diferenciálního útvaru.

Poznámka: hezký materiál pojednávající o významu jakobiánu (anglicky): [Lecture 5: Jacobians](#).

Velký význam má jakobián při počítání vícerozměrných integrálů. Pro výpočet trojnáho integrálu v kartézských a cylindrických souřadnicích platí:

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(r, \varphi, z) |\mathbb{J}| dr d\varphi dz.$$

Nyní určíme Jakobián pro cylindrické souřadnice.

$$|\mathbb{J}| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Návod (A)2

Vypočítejte postupně jednotlivé složky tenzoru a zapište je do maticy.

Řešení - Návod (A)2

Určeme nejprve moment setrvačnosti rotace okolo osy x odpovídající složce J_{xx} :

$$J_{xx} = J_{11} = \int_V (\delta_{11} r^2 - x_1 x_1) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \rho dx dy dz = \int_V (y^2 + z^2) \rho dx dy dz.$$

Nyní přejdeme do cylindrických souřadnic a dosadíme za y a z z parametrických vztahů válce.

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r \rho dz dr d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[z r^2 \sin^2 \varphi + \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\varphi = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(h r^2 \sin^2 \varphi + \frac{h^3}{12} \right) r dr d\varphi = h \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^3 \sin^2 \varphi + r \frac{h^2}{12} \right) dr d\varphi = \\ &= h \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{2} \frac{h^2}{12} \right]_0^R d\varphi = h \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{R^2}{4} \frac{h^2}{6} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= h \rho \frac{R^2}{4} \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2 \varphi + \frac{h^2}{6} \right) d\varphi = \frac{h \rho R^2}{4} \left(\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{6} d\varphi \right)$$

Vyřešme stranou integrál $\sin^2 \varphi$.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

S touto znalostí bude snadné dopočítat J_{xx} .

$$J_{xx} = \frac{h \rho R^2}{4} \left(\pi R^2 + \pi \frac{h^2}{3} \right) = \frac{\rho h \pi R^2}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

Vztah $\rho h \pi R^2$ je hustota násobená objemem válce - to je přeci hmotnost válce M . Pak pro složku J_{xx} máme vztah:

$$J_{xx} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

Dále užijeme úvahu, že složky J_{xx} a J_{yy} musí být stejné, protože rozložení hmotnosti disku vzhledem k osám x a y je zcela totožné.

$$J_{yy} = J_{xx} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

Další na řadě je složka J_{zz} .

$$\begin{aligned} J_{zz} = J_{33} &= \int_V (\delta_{33} r^2 - x_3 x_3) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r \rho dz dr d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r^3 dz dr d\varphi = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 dz \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \rho \pi h R^4 = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

Tedy jsme pro složku tenzoru setrvačnosti J_{zz} odvodili vztah:

$$J_{zz} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Tedž se podívejme na deviační momenty.

$$\begin{aligned} J_{xy} = J_{12} &= \int_V (\delta_{12} r^2 - x_1 x_2) \rho dx dy dz = - \int_V x y \rho dx dy dz = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \rho dz dr d\varphi = \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 dz \int_0^R r^3 dr = -\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 dz \int_0^R r^3 dr = 0 \\ J_{xz} = J_{13} &= \int_V (\delta_{13} r^2 - x_1 x_3) \rho dx dy dz = - \int_V x z \rho dx dy dz = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z r^2 \cos \varphi \rho dz dr d\varphi = \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \int_0^R r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yz} = J_{23} &= \int_V (\delta_{23} r^2 - x_2 x_3) \rho dx dy dz = - \int_V yz \rho dx dy dz = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z r^2 \sin \varphi dz dr d\varphi = \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \int_0^R r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

U všech deviačních momentů jsme narazili na určitý integrál z harmonické funkce přes celočíselný násobek periody - tedy je integrál roven nule a proto také všechny deviační momenty jsou nulové.

Vypočítali jsme všechny složky hledaného tensoru J , už jen zbývá zapsat je do matice.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2} R^2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

Řešení - (A)

Pro určení složek tensoru setrvačnosti J_{jk} spojitého tělesa bude platit vztah:

$$J_{jk} = \int_V (\delta_{jk} r^2 - x_j x_k) \rho dV, \quad (1)$$

kde r je vzdálenost od počátku soustavy, δ_{jk} je Kroneckerovo delta, ρ je hustota tělesa a souřadnice polohového vektoru x_i pro $i = 1$ až 3 jsou obecnějším zapsáním našich souřadnic x, y, z .

Tensor setrvačnosti válce bude lepší počítat v cylindrických souřadnicích.

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

r je vzdálenost od osy z , probíhající interval $(0, R)$. Úhel φ je měřený od osy x v rovině xy proti směru hodinových ručiček a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jelikož počátek naší soustavy souřadnic splývá s těžištěm válce, je $z \in \left(-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Při počítání objemových integrálů v cylindrických souřadnicích je třeba uvažovat jakobián $|\mathbb{J}|$.

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(r, \varphi, z) |\mathbb{J}| dr d\varphi dz$$

Nyní určíme jakobián pro cylindrické souřadnice.

$$|\mathbb{J}| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Složky J_{xx} a J_{yy} musí být stejné, protože rozložení „hmoty“ disku vzhledem k osám x a y je zcela totožné.

Určeme složku J_{xx} :

$$J_{xx} = J_{11} = \int_V (\delta_{11} r^2 - x_1 x_1) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \rho dx dy dz = \int_V (y^2 + z^2) \rho dx dy dz.$$

Nyní přejdeme do cylindrických souřadnic a dosadíme za y a z .

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r \rho dz dr d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[z r^2 \sin^2 \varphi + \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\varphi = \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(h r^2 \sin^2 \varphi + \frac{h^3}{12} \right) r dr d\varphi = h \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^3 \sin^2 \varphi + r \frac{h^2}{12} \right) dr d\varphi = \\
 &= h \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{2} \frac{h^2}{12} \right]_0^R d\varphi = h \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{R^2}{4} \frac{h^2}{6} \right) d\varphi = \\
 &= h \rho \frac{R^2}{4} \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2 \varphi + \frac{h^2}{6} \right) d\varphi = \frac{h \rho R^2}{4} \left(\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{6} d\varphi \right) \\
 &\quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \\
 J_{xx} &= \frac{h \rho R^2}{4} \left(\pi R^2 + \pi \frac{h^2}{3} \right) = \frac{\rho h \pi R^2}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Vztah $\rho h \pi R^2$ odpovídá hmotnosti válce M . Pak pro složku J_{xx} máme vztah:

$$J_{yy} = J_{xx} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

Další na řadě je složka J_{zz} .

$$\begin{aligned}
 J_{zz} = J_{33} &= \int_V (\delta_{33} r^2 - x_3 x_3) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) \rho dx dy dz = \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r \rho dz dr d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r^3 dz dr d\varphi = \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 dz \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \rho \pi h R^4 = \frac{1}{2} M R^2
 \end{aligned}$$

Tedy jsme pro složku tenzoru setrvačnosti J_{zz} odvodili vztah:

$$J_{zz} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Ted' se podívejme na deviační momenty.

Rozložení „hmoty“ okolo os soustavy je velmi symetrické a proto budou deviační momenty nulové.

(Ověření viz Řešení - Nápoveda (A)2)

Nakonec zapíšeme všechny složky do maticy.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2} R^2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

Řešení - (B)

Po určení tenzoru J už je úloha (B) dosti snadná.

Přímo spočítáme zadané limity a začněme $\lim_{h \rightarrow 0} J$. Válec s infinitezimální výškou je rovinný disk. Označme proto $J_{disk} = \lim_{h \rightarrow 0} J$, potom by pro tensor setrvačnosti disku mělo platit následující.

$$J_{disk} = \lim_{h \rightarrow 0} J = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{disk} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tento výsledek opravdu odpovídá výsledku úlohy [Tensor setrvačnosti tenkého disku](#).

Nyní se podívejme na $\lim_{R \rightarrow 0} J$. Válec s infinitezimálním poloměrem podstavy odpovídá velmi tenké tyči. Označme proto $J_{tyč} = \lim_{R \rightarrow 0} J$, potom tensor setrvačnosti tenké tyče můžeme odvodit podobným postupem.

$$J_{tyč} = \lim_{R \rightarrow 0} J = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{tyč} = \frac{Mh^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tento výsledek odpovídá tensoru setrvačnosti velmi tenké tyče délky h , viz úloha [Tensor setrvačnosti tyče](#).

Odpověď

Tensor setrvačnosti homogenního válce výšky h a kruhové podstavy o poloměru R vzhledem k jeho těžišti má tvar:

$$J_{válec} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} J_{válec}$ má význam tensoru setrvačnosti J_{disk} tenkého disku vzhledem k jeho středu.

$$J_{disk} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lim_{R \rightarrow 0} J_{válec}$ má význam tensoru setrvačnosti $J_{tyč}$ tenké tyče délky h vzhledem k jejímu středu.

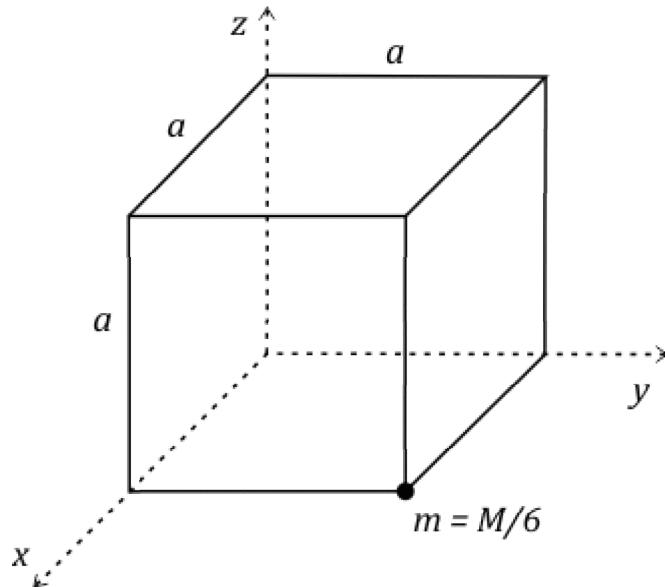
$$J_{tyč} = \frac{Mh^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sbírka řešených úloh

Krychle s hmotným bodem - hledání hlavních os setrvačnosti

Úloha číslo: 2250

Určete tenzor setrvačnosti homogenní krychle o délce hrany a a hmotnosti M vzhledem k jednomu z jejích vrcholů, jestliže je k vrcholu naproti přes stěnovou úhlopříčku připevněna kulička o hmotnosti $m = \frac{M}{6}$ zanedbatelných rozměrů.



<http://reseneulohy.cz/>

Najděte hlavní osy rotace a hlavní momenty setrvačnosti.

Rozbor řešení úlohy

Stručně si řekněme, jak budeme při řešení úlohy postupovat.

Bude přehledné si nejdříve zvlášť spočítat tenzor setrvačnosti krychle vzhledem k jejímu vrcholu a tenzor setrvačnosti samotného hmotného bodu (kuličky) vzhledem k danému vrcholu.

Následně určíme tenzor setrvačnosti celé soustavy vzhledem k danému vrcholu.

Poté užijeme znalosti linérní algebry k určení vlastních vektorů a čísel matice tenzoru setrvačnosti a přiřadíme jim fyzikální význam.

Tenzor setrvačnosti krychle – Nápověda 1

Rozmyslete si, s jakými vztahy budete pracovat a které všechny veličiny potřebujete znát pro určení tenzoru setrvačnosti.

Řešení - Nápověda 1

Jelikož se jedná o homogenní krychli, bude vhodné uvažovat vztahy platné pro spojité prostředí. Tedy pro určení jednotlivých složek tenzoru setrvačnosti J_{jk} bude platit vztah:

$$J_{jk} = \int_V (\delta_{jk} r^2 - x_j x_k) \rho dV,$$



kde r je vzdálenost od počátku soustavy, δ_{jk} je Kroneckerovo delta a souřadnice polohového vektoru x_i pro $i = 1$ až 3 jsou obecnějším zapsáním našich souřadnic x, y, z .

Poznámka: odvození tohoto vztahu viz například: [Studijní text k teoretické mechanice tuhého tělesa](#).

Potřebujeme znát i hustotu krychle ρ . Protože je naše krychle homogenní, je tato hustota konstantní.

Tenzor setrvačnosti krychle – Návod 2

Vypočítejte postupně jednotlivé složky tenzoru a zapište je do maticy.

Rozmyslete si jednotlivé integrační meze a celkovou podobu našeho objemového integrálu.

Řešení - Návod 2

Z obrázku vidíme, že situace je velmi symetrická a rozložení vzhledem ke všem třem osám je stejné, z čehož plyne, že:

- (A) $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz}$;
- (B) $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz}$.

Určeme nejprve moment setrvačnosti rotace okolo osy x odpovídající složce J_{xx} :

$$J_{xx} = J_{11} = \int_V (\delta_{11} r^2 - x_1 x_1) \rho dV = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \rho dV = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV.$$

Tento objemový integrál je třeba spočítat jako trojný integrál přes proměnné x, y a z . Jelikož je střed naší soustavy ve vrcholu krychle, budeme integrovat od 0 po a . Také využijeme toho, že hustota ρ je konstantní a je tudíž možné ji vyniknout před integrálem.

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_0^a \int_0^a (y^2 + z^2) [x]_0^a dy dz = \\ &= a\rho \int_0^a \int_0^a (y^2 + z^2) dy dz = a\rho \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} + yz^2 \right]_0^a dz = a\rho \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + az^2 \right) dz = \\ &= a^2 \rho \int_0^a \left(\frac{a^2}{3} + z^2 \right) dz = a^2 \rho \left[\frac{za^2}{3} + \frac{z^3}{3} \right]_0^a = a^2 \rho \frac{1}{3} [2a^3] = \frac{2}{3} a^5 \rho = \\ &= \frac{2}{3} a^2 \rho a^3 \end{aligned}$$

Výraz ρa^3 má význam celkové hmotnosti M naší krychle. Potom můžeme první složku tenzoru setrvačnosti zapsat jako:

$$J_{xx} = \frac{2}{3} Ma^2.$$

Tím jsme vyřešili složky tenzoru, které představují momenty setrvačnosti krychle vůči osám soustavy. Nyní se podíváme na deviační momenty a začneme členem J_{xy} .

$$\begin{aligned} J_{xy} = J_{12} &= \int_V (\delta_{12} r^2 - x_1 x_2) \rho dV = \int_V (-xy) \rho dV = \\ &= -\rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy dx dy dz = -\rho \int_0^a 1 dz \int_0^a x dx \int_0^a y dy = -a\rho \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^a = \\ &= -\frac{1}{4} \rho a^5 = -\frac{1}{4} Ma^2 \end{aligned}$$

Jelikož máme vypočítány všechny potřebné části tenzoru setrvačnosti homogenní krychle, již nám jen zbývá zapsat je do matice:

$$J_{krychle} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} Ma^2 & -\frac{1}{4} Ma^2 & -\frac{1}{4} Ma^2 \\ -\frac{1}{4} Ma^2 & \frac{2}{3} Ma^2 & -\frac{1}{4} Ma^2 \\ -\frac{1}{4} Ma^2 & -\frac{1}{4} Ma^2 & \frac{2}{3} Ma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} Ma^2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tenzor setrvačnosti krychle - Odpověď'

Tenzor setrvačnosti homogenní krychle vzhledem k jednomu jejímu vrcholu má tvar:

$$J_{krychle} = \frac{1}{12} Ma^2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tenzor setrvačnosti hmotného bodu – Návod 1

Nyní si spočítáme tenzor setrvačnosti samotného bodu o hmotnosti $\frac{M}{6}$.

Podívejte se na obrázek a určete souřadnice hmotného bodu.

Rozvažte, jakých vztahů budete užívat a jaké všechny veličiny k tomu budete potřebovat.

Řešení - Návod 1

Souřadnice hmotného bodu snadno určíme jako $[a, a, 0]$.

Pro určení jednotlivých složek tenzoru setrvačnosti J_{jk} soustavy N hmotných bodů platí vztah:

$$J_{jk} = \sum_{i=1}^N m_{(i)} (\delta_{jk} r_{(i)}^2 - x_{(i)j} x_{(i)k})$$

kde i indexuje hmotné body o hmotnosti m_i , r_i je vzdálenost i -tého bodu od počátku soustavy, δ_{jk} je Kroneckerovo delta a souřadnice polohového vektoru $x_{(i)l}$ pro $l = 1$ až 3 jsou obecnějším zapsáním našich souřadnic x, y, z i -tého bodu.

Poznámka: Odvození tohoto vztahu viz například: [Studijní text k teoretické mechanice tuhého tělesa](#).

V našem případě se vztah ještě zjednoduší, protože máme pouze 1 hmotný bod.

$$J_{jk} = m(\delta_{jk} r^2 - x_j x_k)$$

Tenzor setrvačnosti hmotného bodu – Návod 2

Vypočítejte postupně jednotlivé složky tenzoru a zapište je do matice.

Řešení - Návod 2

Nejprve spočítejme složku J_{xx} .

$$J_{xx} = J_{11} = m(\delta_{11} r^2 - x_1 x_1) = m(x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = m(y^2 + z^2) = ma^2$$

Dále určíme složky J_{yy} a J_{zz} .

$$J_{yy} = m(x^2 + z^2) = ma^2$$

$$J_{zz} = m(x^2 + y^2) = m(a^2 + a^2) = 2ma^2$$

Poznámka: To je v souladu s klasickou mechanikou. Vzdálenost hmotného bodu od os x i y je a , a tedy je moment setrvačnosti při rotaci okolo těchto os roven ma^2 . Vzdálenost hmotného bodu od osy z je $a\sqrt{2}$, a proto moment setrvačnosti při rotaci okolo osy z je $2ma^2$.

Pokračujme vypočítáním deviačních momentů.

$$J_{xy} = J_{12} = m(\delta_{12} r^2 - x_1 x_2) = -mxy = -ma^2$$

$$J_{xz} = -mxz = 0$$

$$J_{yz} = -myz = 0$$

Známe všechny potřebné složky a víme, že matice tenzoru setrvačnosti je symetrická, tak již zbývá ji jen zapsat.

$$J_m = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenzor setrvačnosti hmotného bodu - Odpověď'

Tenzor setrvačnosti bodu o hmotnosti $\frac{M}{6}$ vzhledem k počátku soustavy souřadnic je:

$$J_{bod} = \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenzor setrvačnosti celého systém - Návod

Určeme tenzor setrvačnosti celého systému dohromady.

Řešení návodu

Tenzor setrvačnosti J celého systému, když známe tenzory setrvačnosti J_i jednotlivých částí systému, je jejich součtem.

$$J = \sum_i J_i$$

V našem případě bude pro celkový moment setrvačnosti J platit:

$$J = J_{krych} + J_{bod}.$$

Po dosazení dostaneme následující vztah.

$$\begin{aligned} J &= \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} + \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ J &= \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenzor setrvačnosti celého systému - Odpověď'

Tenzor setrvačnosti J celého systému jsme určili jako:

$$J = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Hlavní momenty setrvačnosti a hlavní osy rotace – Návod 1

Nyní budeme hledat vlastní vektory a vlastní čísla tenzoru setrvačnosti.

Zavzpomínejte, jak se hledají vlastní vektory matice. Osvěžte si pojmy: vlastní čísla, vlastní vektor a charakteristický polynom.

Řešení - Návod 1

Mějme čtvercovou matici A nad \mathbb{R} . Pak vlastním vektorem \vec{v} matice A rozumíme nenulový vektor, pro nějž platí, že

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. λ je vlastní číslo matice A příslušné vlastnímu vektoru \vec{v} .

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{o}$$

$$(A - \lambda\mathbb{E})\vec{v} = \vec{o}$$

Vidíme, že matice $(A - \lambda\mathbb{E})$ je singulární, tedy musí platit:

$$\det |A - \lambda\mathbb{E}| = 0.$$

Tuto rovnici nazýváme charakteristickým polynomem a užíváme ji pro hledání vlastních čísel.

Jakmile nalezneme vlastní čísla, užijeme rovnice $(A - \lambda\mathbb{E})\vec{v} = \vec{o}$ k nalezení vlastních vektorů matice A .

Hlavní momenty setrvačnosti a hlavní osy rotace – Návod 2

Najděte vlastní čísla a vektory matice

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Řešení - Návod 2

Najděme kořeny charakteristického polynomu této matice.

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda\mathbb{E}| &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -5 & -3 \\ -5 & 10 - \lambda & -3 \\ -3 & -3 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (12 - \lambda)(10 - \lambda)^2 - 3 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3(10 - \lambda) - 3 \cdot 3(10 - \lambda) - 5 \cdot 5(12 - \lambda) = \\ &= (12 - \lambda)(100 - 20\lambda + \lambda^2) - 45 - 45 - 90 + 9\lambda - 90 + 9\lambda - 300 + 25\lambda = \\ &= 1200 - 240\lambda + 12\lambda^2 - 100\lambda + 20\lambda^2 - \lambda^3 + 43\lambda - 570 = \\ &= -\lambda^3 + 32\lambda^2 - 297\lambda + 630 = 0 \\ \lambda^3 - 32\lambda^2 + 297\lambda - 630 &= 0 \end{aligned}$$

Charakteristický polynom naší matice je kubická rovnice s nepříliš hezkými koeficienty. Takovouto rovnici lze řešit několika způsoby. Můžeme užít například Cardanovy vzorce nebo Hornerovo schéma. Jelikož se jedná o fyzikálně vcelku hezkou situaci, dá se předpokládat, že polynom bude mít nějaké celočíselné kořeny a proto užijeme Hornerovo schéma.

Hornerovo schéma				
	1	-32	297	-630
1	1	-31	266	-364
-1	1	-33	330	-960
2	1	-30	237	-156
-2	1	-34	365	-1360
3	1	-29	210	0

<http://reseneulohy.cz/>

Zjistili jsme, že $\lambda_1 = 3$ a dále proto stačí vyřešit kvadratickou rovnici ve tvaru:

$$\lambda^2 - 29\lambda + 210 = 0.$$

Opět se nejedná o kořeny, které by se daly snadno uhádnout, a proto použijeme univerzální metody řešení - diskriminantu.

$$\lambda_{2,3} = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 210}}{2} = \frac{29 \pm 1}{2}$$

Tedy už známe všechna vlastní čísla.

$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 15; \lambda_3 = 14$$

Najděme vlastní vektor $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ příslušný vlastnímu číslu λ_1 . Hledáme tedy nutriviální řešení homogenní soustavy.

$$(A - \lambda_1 \mathbb{E}) \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 - \lambda_1 & -5 & -3 \\ -5 & 10 - \lambda_1 & -3 \\ -3 & -3 & 12 - \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ -5 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad (1)$$

Nyní si trochu upravme naši matici.

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ -5 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ -5 & 7 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & 18 \\ 0 & 12 & -18 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vraťme se zpět k naší rovnici (1).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2y_1 - 3z_1 &= 0; \\ x_1 + y_1 - 3z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit $2y_1 = 3z_1$ a dosadit do rovnice druhé.

$$x_1 + y_1 - 2y_1 = x_1 - y_1 = 0$$

$$x_1 = y_1 = \frac{3}{2}z_1$$

Tedy jsme dostali řešení soustavy, které je závislé na volbě jednoho parametru. Zvolme $z_1 = 2$.

Potom pro vektor \vec{v}_1 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ platí:

$$\vec{v}_1 = (3, 3, 2).$$

Dále hledejme obdobným způsobem vlastní vektor $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ příslušný vlastnímu číslu λ_2 .

$$(A - \lambda_2 \mathbb{E}) \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 - \lambda_2 & -5 & -3 \\ -5 & 10 - \lambda_2 & -3 \\ -3 & -3 & 12 - \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 \\ -5 & -5 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad (2)$$

Opět si trochu poupravujme naši matici.

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 \\ -5 & -5 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici dosadíme do rovnice (2).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Tím jsme dostali soustavu rovnic pro vektor \vec{v}_2 .

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 &= 0; \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 0, \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne $x_2 = -y_2$. Když toto dosadíme do druhé, zjistíme, že $z_2 = 0$.

Opět vidíme, že máme volnost ve volbě parametru, pro jednoduchost vezměme $x_2 = 1$. Pak tedy platí pro vektor \vec{v}_2 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 15$:

$$\vec{v}_2 = (1, -1, 0).$$

Dále hledejme vlastní vektor $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ příslušný vlastnímu číslu λ_3 .

$$(A - \lambda_3 \mathbb{E}) \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 - \lambda_3 & -5 & -3 \\ -5 & 10 - \lambda_3 & -3 \\ -3 & -3 & 12 - \lambda_3 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -5 & -4 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad (3)$$

Matici si otesáme do hezčí podoby.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tuto matici dosadíme do rovnice (3).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Opět máme soustavu rovnic, tentokrát pro vektor \vec{v}_3 .

$$\begin{array}{lcl} -x_3 + y_3 & = 0; \\ 2x_3 + y_3 + z_3 & = 0, & \sim \end{array} \quad \begin{array}{lcl} x_3 & = y_3; \\ 2x_3 + y_3 & = -z_3. \end{array}$$

Dosazením první rovnice do druhé zjistíme vztah mezi x_3 a z_3 .

$$2x_3 + y_3 = 3x_3 = -z_3$$

$$x_3 = y_3 = \frac{-1}{3}z_3$$

Volbou $z_3 = -3$ určíme podobu vlastního vektoru \vec{v}_3 příslušného vlastnímu číslu $\lambda_3 = 14$.

$$\vec{v}_3 = (1, 1, -3).$$

Hlavní momenty setrvačnosti a hlavní osy rotace – Návod 3

Přiřaďte výsledkům Návodu 2 fyzikální význam.

Řešení - Návod 3

Náš tenzor setrvačnosti celého systému měl tvar:

$$J = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{12} A.$$

Určená vlastní čísla λ_i jsou vlastní čísla matice A . Proto získáme hlavní momenty setrvačnosti J_i prostým přepočtem $J_i = \lambda_i \frac{Ma^2}{12}$. Nalezené vlastní vektory \vec{v}_i odpovídají směrům hlavních os rotace s příslušnými hlavními momenty setrvačnosti J_i .

$$\begin{array}{ll} J_1 = \frac{1}{4} Ma^2 & \vec{v}_1 = (3, 3, 2) \\ J_2 = \frac{5}{4} Ma^2 & \vec{v}_2 = (1, -1, 0) \\ J_3 = \frac{7}{6} Ma^2 & \vec{v}_3 = (1, 1, -3) \end{array}$$

Lze ověřit, že \vec{v}_1 je kolmý na \vec{v}_2 i \vec{v}_3 . Stejně tak \vec{v}_2 je kolmý na \vec{v}_3 .

Poznámka k lineární algebře

Opět trochu zavzpomínejme na lineární algebru.

Máme-li matici A , její vlastní čísla λ_i a vlastní vektory \vec{v}_i , a když označíme P matici vytvořenou z vlastních vektorů \vec{v}_i zapsaných do sloupců, potom platí:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Rozmysleme si, že P je matice přechodu od kanonické báze k bázi tvořené vlastními vektory.

Tedy bychom měli dostat diagonalizovanou matici. Ověřme to tedy pro náš případ tenzoru setrvačnosti.

Matice A je pro nás tenzorem setrvačnosti J_c celé soustavy.

$$J_c = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla jsou pro nás hlavní momenty setrvačnosti J_i a k nim přísluší vlastní vektory \vec{v}_i

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{4} Ma^2 & \vec{v}_1 &= (3, 3, 2) \\ J_2 &= \frac{5}{4} Ma^2 & \vec{v}_2 &= (1, -1, 0) \\ J_3 &= \frac{7}{6} Ma^2 & \vec{v}_3 &= (1, 1, -3) \end{aligned}$$

V našem případě tedy matice P je ortogonální matice báze a má tvar:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Najděme teď matici inverzního přechodu P^{-1} .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{9}{22} & \frac{9}{22} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vypočítejme tedy součin $P^{-1} \cdot J_c \cdot P$.

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot J_c \cdot P &= \begin{pmatrix} \frac{3}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} \frac{3}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 15 & 14 \\ 9 & -15 & 14 \\ 6 & 0 & -42 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \\ P^{-1} \cdot J_c \cdot P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} Ma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že vzhledem k naší ortogonální bázi \vec{v}_1 , \vec{v}_2 a \vec{v}_3 má matice tenzoru setrvačnosti opravdu diagonální tvar, kde na hlavní diagonále jsou hlavní momenty setrvačnosti.

Hlavní momenty setrvačnosti a hlavní osy rotace - Odpověď

Vektory \vec{v}_i určují hlavní osy rotace s příslušnými hlavními momenty setrvačnosti J_i .

$$J_1 = \frac{1}{4} Ma^2 \quad \vec{v}_1 = (3, 3, 2)$$

$$J_2 = \frac{5}{4} Ma^2 \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 0)$$

$$J_3 = \frac{7}{6} Ma^2 \quad \vec{v}_3 = (1, 1, -3)$$

Aktualizováno: 22. 3. 2019

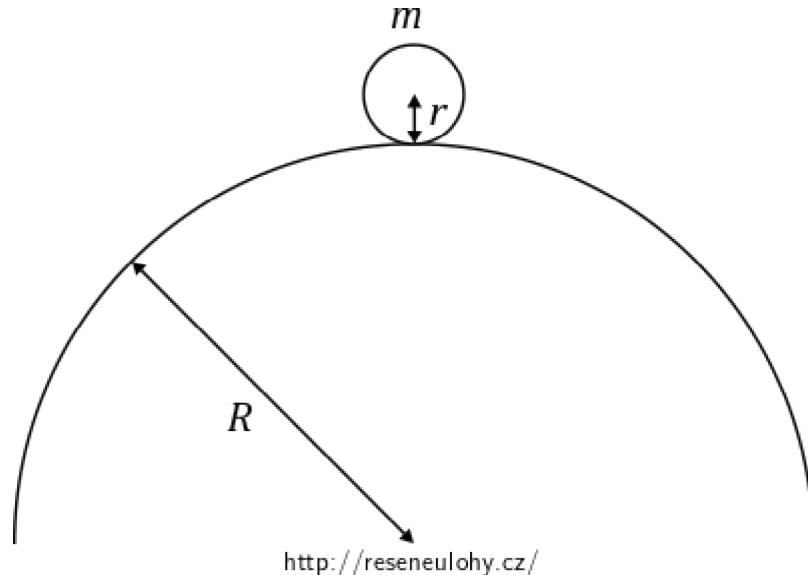
Sbírka řešených úloh

Pohyb okolo labilní rovnovážné polohy na kouli

Úloha číslo: 2263



Mějme kuličku o hmotnosti m a poloměru r , která se bez prokluzu pohybuje v blízkosti labilní rovnovážné polohy na kouli o poloměru R .



Pomocí approximací pro malé kmity najděte pohybovou rovnici pro tuto kuličku.

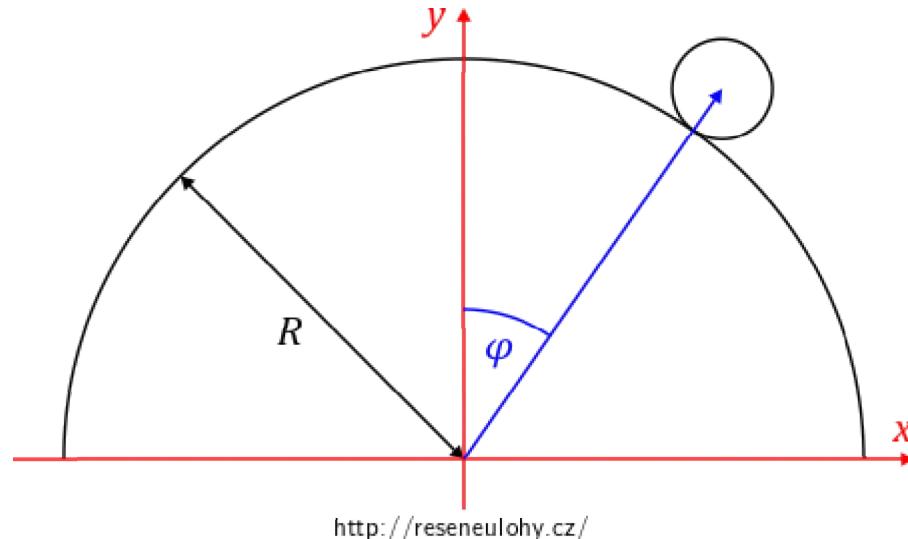
Nápověda

Zvolte si soustavu souřadnic. Rozhodněte, kolik a jakých zobecněných souřadnic budete používat.

Pro řešení pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu nebo pomocí Hamiltonových rovnic budete potřebovat znalost vztahu pro kinetickou a potenciální energii.

Řešení – Nápověda

Jedná se o problém s jedním stupněm volnosti, vystačíme si tedy s jednou zobecněnou souřadnicí. Za zobecněnou souřadnicí zvolme odchylku φ od svíslého směru.



Kinetická energie T kuličky bude dána pohybem translačním a rotačním. K určení energie translačního pohybu potřebujeme znát rychlosť kuličky v závislosti na φ . Jedná se o pohyb po kružnici o poloměru $R + r$, tedy rychlosť kuličky určíme ze známých vztahů pro pohyb po kružnici.

$$v = \omega(R + r) = \dot{\varphi}(R + r)$$

$$T_{translační} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}(R + r)^2\dot{\varphi}^2$$

K určení kinetické energie rotačního pohybu potřebujeme znát úhlovou rychlosť ω_k rotace kuličky. Tu určíme díky předpokladu, že se kulička pohybuje bez prokluzu, tedy v čase t musí být délky uraženého oblouku na obou kružnicích stejné.

$$R\dot{\varphi}t = r\omega_k t$$

$$\frac{R}{r}\dot{\varphi} = \omega_k$$

S touto znalostí už snadno určíme kinetickou energii rotačního pohybu jako:

$$T_{rotační} = \frac{1}{2}J\omega_k^2 = \frac{JR^2}{2r^2}\dot{\varphi}^2.$$

Celková kinetická energie je prostým součtem energií rotačního a translačního pohybu.

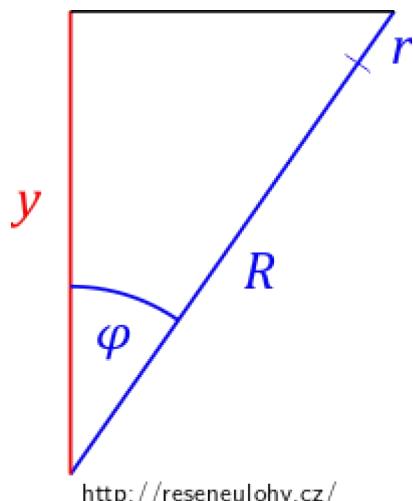
$$\begin{aligned} T &= \frac{JR^2}{2r^2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(R + r)^2\dot{\varphi}^2 \\ T &= \left(\frac{JR^2}{2r^2} + \frac{m(R + r)^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 \\ T &= \frac{JR^2 + mr^2(R + r)^2}{2r^2}\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Kinetickou energii T jsme určili, je na čase zaobírat se potenciální energií V .

Potenciální energie V homogenního gravitačního pole je:

$$V = mgy,$$

kde g je gravitační zrychlení. My ovšem potřebujeme mít potenciální energii V kuličky závislou na úhlu φ . Potřebujeme tedy najít vztah mezi y a φ . K tomu nám poslouží obrázek.



Z obrázku vidíme, že:

$$\cos \varphi = \frac{y}{R+r} .$$

$$y = (R+r) \cos \varphi$$

Potom lze potenciál V popsat následujícím vztahem.

$$V = mgy = mg(R+r) \cos \varphi$$

Přestože se nejedná o kmitání, jedná se o pohyb v okolí rovnovážné polohy a budeme chtít potenciál approximovat kvadratickou funkcí φ .

Poznámka: Odůvodnění této approximace viz např.: [Studijní text k teoretické mechanice malých kmitání](#).

Pro určení approximace potenciální energie V použijeme Maclaurinovu formuli pro rozvoj funkce $\cos x$.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Jelikož uvažujeme malé výchylky, můžeme člen s x^4 zanedbat a potenciál potom bude:

$$V \approx mg(R+r) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)$$

Po této approximaci budeme znát přibližný vztah pro náš potenciál V .

$$V = -\frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 + mg(R+r) = -\frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 + konst$$

Známe tedy vztah pro kinetickou energii T i vztah pro potenciální energii V a umíme tak určit i lagrangián $L = T - V$.

$$L = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{2r^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 + konst$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

K nalezení pohybové rovnice užijeme Lagrangeových rovnic druhého druhu. Jelikož má náš problém pouze jeden stupeň volnosti, bude tato rovnice pouze jedna.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Spočítejme postupně všechny nutné derivace pro naše L .

$$L = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{2r^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 + konst$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mg(R+r) \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \ddot{\varphi}$$

Potom tedy pro naši kuličku platí:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \ddot{\varphi} - mg(R+r)\varphi = 0.$$

Hledaná pohybová rovnice pro malé kmity má tvar:

$$\ddot{\varphi} - \frac{mgr^2(R+r)}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} \varphi = 0.$$

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Označíme-li $\frac{mgr^2(R+r)}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} = \omega^2$, pak lze řešení zapsat ve tvaru:

$$\varphi = A e^{\omega t}.$$

K určení konstanty A bychom potřebovali znát nějakou počáteční podmínu. Bude-li například na začátku pohybu kulička na vrcholku větší koule, tedy $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$, potom snadno určíme konstantu A .

$$\varphi(0) = A e^{\omega \cdot 0} = A = 0$$

$$\varphi(t) = 0$$

Tato počáteční podmínka by odpovídala tomu, že je kulička v labilní rovnovážné poloze a tedy se opravdu nikam nepohybuje.

Hamiltonovy rovnice

Hamiltonovy kanonické rovnice připadají dvě na každý stupeň volnosti - rovnice pro změnu hybnosti \dot{p}_i a pro změnu zobecněné souřadnice \dot{q}_i , v našem případě tedy budou pouze dvě:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}};$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

kde p je zobecněná hybnost a $H(p, \varphi)$ je Hamiltonova funkce.

Abychom pohybovou rovnici našli pomocí Hamiltonových rovnic, budeme potřebovat znát vztah pro zobecněnou hybnost kuličky.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{2r^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 + konst \right) = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi}$$

Nyní potřebujeme určit Hamiltonovu funkci H . Pro H obecně platí vztah:

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L.$$

V našem případě se suma redukuje na jediný člen a výpočet nebude náročný.

$$H = p \dot{\varphi} - L = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{2r^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 - konst$$

$$H = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{2r^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 - konst = T + V$$

$$H = \frac{r^2}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} \frac{p^2}{2} - \frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 - konst$$

Známe hamiltonián H , tedy je načase dosadit do Hamiltonových kanonických rovnic.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mg(R+r)\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{r^2}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} p$$

Z druhé rovnice vyjádříme p a zderivujeme podle času, abychom získali \dot{p} .

$$p = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi} / \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\dot{p} = \frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \ddot{\varphi}$$

Z druhé rovnice dosadíme do první za \dot{p} .

$$\frac{JR^2 + mr^2(R+r)^2}{r^2} \ddot{\varphi} = \dot{p} = mg(R+r)\varphi$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{mgr^2(R+r)}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} \varphi = 0$$

Toto je námi hledaná pohybová rovnice pro naši kuličku.

Komentář – malinkatá kulička

Pro kuličku normálních rozměrů jsme pohybovou rovnici určili jako:

$$\ddot{\varphi} - \frac{mgr^2(R+r)}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} \varphi = 0.$$

Co kdyby byla kulička malinkatá a měla zanedbatelné rozměry? Potom její moment setrvačnosti J je prakticky nulový a jelikož je $R \gg r$, bude pohybová rovnice o kus jednodušší.

$$\ddot{\varphi} - \frac{mgr^2R}{mr^2R^2} \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{R} \varphi = 0$$

Takto by vypadala pohybová rovnice pro malé výchylky hmotného bodu padajícího z labilní rovnovážné polohy na vrcholku koule.

Odpověď

Při užití následující approximace pro potenciální energii V :

$$V = -\frac{mg(R+r)}{2} \varphi^2 - konst,$$

má kulička pohybující se dle zadání pohybovou rovnici:

$$\ddot{\varphi} - \frac{mgr^2(R+r)}{JR^2 + mr^2(R+r)^2} \varphi = 0.$$

Aktualizováno: 13. 3. 2019