MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁRSKA PRÁCA

Daniel Onduš

Latinské obdĺžniky s troma riadkami a asociativita

Katedra algebry

Vedúci bakalárskej práce:	prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc.
Študijný program:	Matematika (B1101)
Študijný odbor:	Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

V prvom rade by som chcel poďakovať svojmu vedúcemu prof. RNDr. Alešovi Drápalovi, CSc., DSc. za jeho čas a podporu pri písaní tejto práce, keďže najmä jeho zásluhou sa mi podarilo plne porozumieť postupu použitom v literatúre. Okrem matematických schopností oceňujem aj jeho štylistické zručnosti a znalosti slovenskej gramatiky, ktoré často predčili aj moje vlastné.

Ďalej som vďačný aj RNDr. Andrewovi Kozlíkovi, Ph.D. za to, že ochotne zastúpil prof. Drápala počas jeho neprítomnosti v zimnom semestri a venoval mi nemálo času pri výbere článku vhodného ako základ pre túto prácu.

Názov práce: Latinské obdĺžniky s troma riadkami a asociativita

Autor: Daniel Onduš

Katedra: Katedra algebry

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc., Katedra algebry

Abstrakt: Táto práca sa venuje vlastnostiam permutácií a latinským obdĺžnikom s troma riadkami. V prvej časti ponúka riešenie niekoľkých kombinatorických problémov a postup na odvodenie vzorca na zistenie počtu latinských obdĺžnikov a jeho zjednodušenie na základe dostupných článkov, obzvlášť J. Riordana (Riordan, 1944) a (Riordan, 1946), avšak bez použitia generujúcich funkcií. V druhej časti ukazuje algebraické vlastnosti permutácií pri konjugovaní. Následne popisuje algoritmus na konštrukciu permutácií komutujúcich s danou permutáciou a na zistenie počtu orbít množiny latinských obdĺžnikov $3 \times n$ pri konjugovaní permutáciami pre malé n.

Kľúčové slova: Latinský obdĺžnik, asociatívny zákon, kvázigrupa

Title: Three-Line Latin Rectangles and Associativity

Author: Daniel Onduš

Department: Department of Algebra

Supervisor: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc., Department of Algebra

Abstract: This thesis deals with properties of permutations and three-line latin rectangles. In the first part it offers solutions to several combinatorial problems and derrives formula for enumeration of three-line latin rectangles and its simplification based on articles by J. Riordan (Riordan, 1944) and (Riordan, 1946), but unlike Riordan's articles, without use of generating functions. In the second part it shows algebraic properties of permutation conjugation. Furthermore it provides an algorithm that constructs set of permutations commuting with a given permutation and enumerates orbits of the set of three-line latin rectangles when conjugating by the group of permutations S_n for small n.

Keywords: Latin rectangle, associative law, quasigroup

Obsah

Úvod

Latinské štvorce a obdĺžniky boli matematikmi študované stovky rokov. Ich štruktúra totiž zodpovedá mnohým kombinatorickým problémom. Ich históriu a využitie prehľadne popisuje v svojej knihe J. Bosák (Bosák, 1976). Rozmeru $3\times n$ bolo venované pravdepodobne najviac článkov, keďže narozdiel od $2 \times n$ sa ich počet už nedá spočítať triviálnou úvahou. Články tejto tematike venovali najmä S. M. Jacob, S. M. Kerewala, a J. Riordan, ktorý ako prvý prišiel so vzorcom na ich výpočet. V roku 1946 však I. Kaplansky a P. Erdős publikovali vzorec pre asymptotické chovanie počtu latinských obdĺžnikov $m \times n$, čím záujem o presný počet pre malé m upadol.

Latinský štvorec môžeme chápať aj ako multiplikatívnu tabuľku kvázigrupy. Preto niektoré algebraické problémy teórie kvázigrúp vedú ku kombinatorickým úvahám. Jedným z týchto problémov je hľadanie kvázigrúp s malým počtom asociatívnych trojíc, ktoré sa dajú využiť v kryptografii pri konštrukcii hashovacích funkcií. V. Valent vo svojej diplomovej práci (Valent, 2018) popisuje algoritmus na hľadanie takýchto kvázigrúp. V rámci snahy o zefektívnenie tohoto algoritmu sa obnovil záujem o latinské obdĺžniky $3 \times n$ a možnú interpretáciu vzorca na ich počet pri popise ich štruktúry.

Táto práca popisuje najprv kombinatorické vlastnosti permutácií a následne ich využíva na získanie prvého vzorca na počet latinských obdĺžnikov $3 \times n$ v sekcii 2.2. Podstatné je najmä odvodenie vzorca pre počet permutácií disjunktných s identitou a permutáciou daného cyklického typu bez použitia generujúcich funkcií, ktorý je zobecnením kombinatorickej úvahy v článku Bogarta a Doyla (Bogart a Doyle, 1986). V sekcii 2.3 je popísaná užitočná technika pri práci s faktoriálmi, ktorej výsledky aplikujeme v sekcii 2.4. Hlavným výsledkom tejto práce je Veta 10, ktorá formuluje zjednodušený vzorec na výpočet počtu latinských obdĺžnikov (2.16).

Kapitola 3 sa venuje algebraickým vlastnostiam grupy permutácií a ich použitiu pri zisťovaní počtu orbít množiny latinských obdĺžnikov $3 \times n$ pri konjugovaní permutáciami, t. j. za ekvivalentné považujeme latinské obdĺžniky s rovnakou cyklickou štruktúrou permutácií v riadkoch. V jej závere (3.3) je popísaný algoritmus na zistenie tohoto počtu pre malé n a jeho výsledky, ktoré naznačujú, že tento počet by sa asymptoticky mal správať ako počet redukovaných latinských obdĺžnikov $3 \times n$.

1. Zopár užitočných kombinatorických problémov

V tejto časti ukážeme riešenie niekoľkých kombinatorických problémov, ktoré je možné vyriešiť jednoduchým náhľadom. Tieto riešenia sa však ukazujú byť veľmi užitočnými pre zistenie počtu latinských obdĺžnikov $3 \times n$. Prvé tri problémy patria medzi bežné kombinatorické problémy, riešenie podobných problémov sa nachádza napríklad v knihe Kapitoly z diskrétní matematiky (Matoušek a Nešetřil, 2007).

1.1 Princíp inklúzie a exklúzie

V tejto kapitole budeme pomerne často využívať princíp inklúzie a exklúzie, ktorý vraví, že pre súbor konečných množín A_1, A_2, …, A_n platí

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|. \tag{1.1}$$

Keďže do hodnoty na ľavej strane prispieva každý prvok patriaci do zjednotenia týchto množín práve raz, pre dôkaz stačí ukázať, že aj do hodnoty na pravej strane prispieva práve raz. Zoberme si nejaký prvok tohoto zjednotenia a. Nech patrí práve do j množín z A_1, A_2, …, A_n. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že patrí do množín A_1, A_2, …, A_j. Následne vidíme, že na pravej strane ho zarátame iba v prienikoch k-tic z množín A_1, A_2, …, A_j pre k od 1 po j. Počet týchto prienikov je pre každé k rovný $\binom{j}{k}$. Podľa 1.1 a binomickej vety na pravej strane dostávame

$$\sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} = -((1-1)^j - 1) = 1.$$

1.2 Problém šatniarky

Podľa známeho príbehu príde do podniku niekoľko pánov v klobúkoch a odovzdajú ich šatniarke, ktorá však zabudne, ktorý patrí komu. Nás zaujíma, v koľkých prípadoch nedostane nikto naspäť ten svoj.

Čiže budeme zisťovať počet permutácií množiny 1 až n bez pevného bodu. Budeme postupovať jednoducho, pre $i = 1$ až n označíme A_i množinu všetkých permutácií π takých, že $\pi(i) = i$. Následne potrebujeme zistiť veľkosť zjednotenia týchto množín a odčítať ju od počtu všetkých permutácii.

Na to, aby sme zistili veľkosť zjednotia týchto množín, môžeme použiť princíp inklúzie a exklúzie. Je zjavné, že veľkosť prieniku k týchto množín je zo symetrie pre každú k-ticu rovnaká a môžeme ju vyjadriť ako

$$|\bigcap_{i=1}^{k} A_i| = (n-k)!,$$

pretože najprv zafixujeme k-klobúkov a následne ostatné môžeme rozdeliť $(n-k)!$ spôsobmi. Počet takýchto k-tic je samozrejme $\binom{n}{k}$. Všimnime si, že pre $k = 0$ dostávame člen $n!$, takže dosadením do princípu inklúzie a exklúzie 1.1 môžeme vyjadriť počet permutácii bez pevného bodu ako

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot (n-k)!. \tag{1.2}$$

Značenie. *Označenie D_n vychádza z anglického názvu, kde sa permutácie bez pevného bodu nazývajú derangements. Táto hodnota zvykne byť v literatúre nazývaná aj subfaktoriál čísla n.*

1.3 Dominové číslo

Pri nasledujúcom výpočte budeme potrebovať d_k, tzv. dominové číslo, ktoré nám hovorí, koľkými spôsobmi vieme na $2n$ vrcholov usporiadaných do kruhu položiť k dominových kociek tak, aby sa neprekrývali. Inak povedané, budeme vyberať k disjunktných dvojíc vrcholov, ktoré sú pri sebe. Je dôležité, že nás zaujíma aj ktoré vrcholy sú spolu v dvojici, nielen to, ktoré sú použité, preto napríklad na výber n dvojíc máme 2 možnosti.

Pre zjednodušenie môžeme uvažovať, že vrcholy ležia na úsečke. Potom splníme podmienku, ak budeme vyberať disjunktné dvojice vrcholov, pričom navyše musíme myslieť na to, že konce úsečky v skutočnosti ležia pri sebe.

Ukážeme, že počet možností, ako vybrať k dvojíc vrcholov pri sebe z $2n$ vrcholov je rovnaký, ako počet možností ako vybrať k vrcholov z $2n-k$ vrcholov. Zostrojíme zobrazenie, ktoré každému výberu k vrcholov z $2n-k$ priradí k dvojíc z $2n$ a ukážeme, že je to bijekcia. Majme vybratých k vrcholov z $2n-k$. Ofarbme tieto vrcholy namodro. Následne ku každému modrému vrcholu vytvorme červený vrchol napravo od neho. Zjavne sme týmto spôsobom dostali k disjunktných dvojíc z $2n$ vrcholov. To, že zobrazenie je na, vyplýva zo zobrazenia opačným smerom. Ak máme vybratých k dvojíc, môžeme vybraté vrcholy začínajúc vľavo striedavo farbiť namodro a načerveno. Následne odstránením červených vrcholov dostaneme k modrých vrcholov z $2n-k$ vrcholov. Z tohoto postupu je zároveň zrejmé, že pôvodné zobrazenie bolo prosté, keďže odstránením červených vrcholov dostaneme práve jedno umiestnenie modrých.

Ostali nám možností, kde by dvojicu tvorili prvý a posledný vrchol z úsečky. Je zjavné, že žiadna z týchto možností nemohla byť zahrnutá v predchádzajúcich možnostiach, keďže ak sme niekedy vo výbere zahrnuli posledný vrchol, tak musel byť nutne nafarbený načerveno, t.j. v dvojici s predposledným. Pri zafixovaní prvého a posledného vrcholu nám ostane $2n-2$ vrcholov na úsečke, z ktorých potrebujeme vybrať $k-1$ dvojíc, na čo je možností

$$\binom{2n-2-k+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1}$$

Preto platí

$$d_k = \binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1} = \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \tag{1.3}$$

1.4 Problém stolovania

Tento problém spočíva v usadení n párov okolo okrúhleho stola tak, aby sa v usadení striedali muži a ženy, a zároveň aby nikto nesedel pri svojom partnerovi.

Tradične sa toto zadanie do matematickej reči preformulovalo tak, že najprv usadíme ženy okolo stola, a následne hľadáme počet usadení mužov na n miest, ktoré ostali medzi nimi, čo je v skutočnosti počet permutácii disjunktných s identitou, a zároveň aj cyklom dĺžky n (t.j. aby muž nemohol sedieť napravo ani naľavo od svojej ženy). To sa však ukázalo zložitejšie ako riešiť pôvodný problém, kde ženy ešte nie sú usadené. Ako prvý odvodil vzorec J. Touchard vo svojom článku (Touchard, 1934) a následne ho pomocou princípu inklúzie a exklúzie dokázal I. Kaplansky (Kaplansky, 1943).

Úloha sa však dá riešiť podobne ako problém šatniarky tak, že budeme postupne usádzať ľudí a následne pomocou princípu inklúzie a exklúzie odpočítame možnosti, ktoré zahŕňajú páry sediace pri sebe. Tento postup použili na nájdenie prehľadného riešenia Bogart a Doyle (Bogart a Doyle, 1986), z ktorých článku vychádza aj nasledujúci dôkaz.

Celkovo máme $2(n!)^2$ možností na usadenie ľudí. Máme 2 možnosti na určenie mužských a ženských miest a následne $n!$ možností usadenia pre každú z týchto skupín. Ak označíme A_i množinu možností, kde po usadení všetkých párov sedí pár i pri sebe, môžeme použiť princíp inklúzie a exklúzie rovnako ako v probléme šatniarky. Je očividné, že ak rátame veľkosť prieniku k z týchto množín, ani tu nezáleží na tom, ktorých k párov vyberieme. Dosadením do princípu inklúzie a exklúzie 1.1 dostávame

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot w_k, \tag{1.4}$$

kde w_k je počet usadení, v ktorých pri sebe sedí vybratých k párov, a možno aj nejaké ďalšie. Poďme určiť hodnotu w_k. Na začiatku potrebujeme vybrať miesta, kde týchto k párov sedí. Tomuto zodpovedá hodnota d_k, ktorú sme už spočítali vyššie (1.3), a následne máme $k!$ možností na poradie, v ktorom tieto páry budú sedieť. Potom nám ostalo $n-k$ mužov a rovnako veľa žien, pričom obidve tieto skupiny majú $(n-k)!$ možností usadenia. Nakoniec ešte musíme počet možností vynásobiť dvoma, keďže vyberáme mužské a ženské miesta. Preto

$$w_k = 2 \cdot d_k \cdot k! \cdot (n-k)!^2.$$

Dosadením d_k do w_k a w_k do vzorca 1.4 pre M_n dostávame

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 4n \cdot (2n-k-1)! \cdot \frac{(n-k)!^2}{(2n-2k)!}.$$

Následne môžeme tento tvar ešte upraviť, keďže $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ a vybrať $2 \cdot n!$ pred sumu, čím dostávame

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!. \tag{1.5}$$

Člen $2 \cdot n!$ v skutočnosti predstavuje výber ženských a mužských miest a spôsoby usadenia žien, takže suma v 1.5 predstavuje počet možností, ako usadiť mužov, ak sme najprv usadili všetky ženy. Ako sme naznačili vyššie, počet možností na usadenie mužov po usadení žien predstavuje počet permutácií disjunktných s indentitou a permutáciou s dĺžkou cyklu n. Usaďme najprv ženy na fixné pozície. Následne definujeme permutáciu mužských miest tak, že muža sediaceho naľavo od danej ženy zobrazíme na miesto, kde sedí jej manžel. Pri tejto definícii usadenie každého muža naľavo od svojej ženy predstavuje identitu a usadenie každého muža napravo od svojej ženy predstavuje permutáciu, kde každého muža posunieme o jedno miesto tým istým smerom, čiže permutáciu s dĺžkou cyklu n. Ale každé usadenie vyhovujúce problému stolovania musí byť disjunktné s oboma týmito usadeniami. Počet usadení mužov nazveme stolovacie číslo a budeme ho značiť ako u_n, kde

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!. \tag{1.6}$$

V nasledujúcej tabuľke môžeme vidieť prvých pár hodnôt D_n a u_n.

n	D_n	u_n
2	1	0
3	2	1
4	9	2
5	44	13
6	265	80
7	1854	579
8	14833	4738
9	133496	43387
10	1334961	439792
11	14684570	4890741
12	176214841	59216642
13	2290792932	775596313
14	32071101049	10927434464
15	481066515734	164806435783
16	7697064251745	2649391469058
17	130850092279664	45226435601207
18	2355301661033953	817056406224416
19	44750731559645106	15574618910994665
20	895014631192902121	312400218671253762

Tabuľka 1.1: Počty permutácií bez pevného bodu D_n a hodnoty stolovacieho čísla u_n pre malé n

2. Počet latinských obdĺžnikov $3 \times n$

2.1 Základné pojmy a štruktúra permutácií

Definícia 1. *Nech $m, n \in \mathbb{N}; m \leq n$. Latinským obdĺžnikom $m \times n$ rozumieme tabuľku s m riadkami a n stĺpcami, kde sa v každom riadku nachádza každé z čísel 1 až n práve raz a zároveň v každom stĺpci sa každé z čísel 1 až n nachádza najviac raz.*

V tejto kapitole sa budeme zaoberať počtom latinských obdĺžnikov $3 \times n$. Tento počet označme L_n. Podľa definície platí, že každý riadok latinského obdĺžnika zodpovedá nejakej permutácii čísel 1 až n. Najprv si môžeme uvedomiť, že stačí uvažovať také latinské obdĺžniky, ktorých prvý riadok zodpovedá identite. Takéto latinské obdĺžniky nazveme redukované. Ich počet označme K_n. Zjavne platí, že každou permutáciou stĺpcov redukovaného latinského obdĺžnika dostaneme znova latinský obdĺžnik, a zároveň takto dostaneme každý latinský obdĺžnik. Preto platí

$$L_n = n! \cdot K_n. \tag{2.1}$$

Ak by sme chceli spočítať počet redukovaných latinských obdĺžnikov s dvoma riadkami, ich počet vieme jednoducho vyjadriť ako D_n (1.2). Permutácie bez pevného bodu nám pomôžu aj pre výpočet latinských obdĺžnikov s troma riadkami. Druhý riadok totiž zodpovedá nejakej permutácii bez pevného bodu. Teraz využijeme to, že si permutácie bez pevného bodu rozdelíme na niekoľko typov podľa štruktúry cyklov a následne zistíme počet latinských obdĺžnikov, kde druhý riadok zodpovedá permutácii daného typu.

Značenie. *Množinu všetkých permutácii prvkov 1 až n značíme S_n. V ďalšom texte budeme uvažovať permutácie prvkov 1 až n, ak to nešpecifikujeme inak.*

Značenie. *Nech $\pi \in S_n$ je permutácia zložená z a_1 cyklov dĺžky 1, a_2 cyklov dĺžky 2, $\ldots$, a_n cyklov dĺžky n, kde $a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n = n$. Hovoríme, že π je permutácia typu $1^{a_1}2^{a_2} \ldots n^{a_n}$.*

Teraz môžeme spraviť jednoduché pozorovanie, ktoré vyplýva z toho, že v permutácii bez pevného bodu sa každý prvok musí zobraziť na iný prvok.

Pozorovanie. Nech $\pi \in S_n$ je permutácia bez pevného bodu. Potom π neobsahuje cykly dĺžky 1, t.j. je typu $2^{a_2}3^{a_3} \ldots n^{a_n}$.

Najprv pre každý typ permutácie zistíme ich počet a následne vypočítame počet permutácií disjunktných s identitou a s permutáciami daného typu. Tým dostaneme počet možností pre druhý riadok latinského obdĺžnika podľa typu permutácie a k nemu zodpovedajúci počet možností pre tretí riadok.

Lema 1. *Počet permutácií prvkov 1 až n typu $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ je*

$$C_a = \frac{n!}{2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot n^{a_n} \cdot a_2! \cdot a_3! \cdot \dots \cdot a_n!} \tag{2.2}$$

.

Dôkaz. Zoberme nejaké usporiadanie čísel 1 až n. Medzi tieto čísla pridáme oddeľovače tak, aby prvým aj posledným znakom bol oddeľovač, a zároveň aby medzi susednými oddeľovačmi bolo a_2 dvojíc čísel, a_3 trojíc, ..., a_n n-tíc čísel. Keďže si berieme usporiadanie čísel ľubovoľne, môžeme predpokladať, že oddeľovače zľava najprv oddeľujú dvojice čísel, následne trojice, atď. Zoberme zobrazenie, ktoré priradí takémuto usporiadaniu a rozdeleniu čísel permutáciu tak, že každej skupine čísel medzi dvoma susednými oddeľovačmi zodpovedá cyklus tejto permutácie. Týmto postupom získame každú permutáciu daného typu. Teraz už iba stačí zistiť koľkokrát.

Všetkých usporiadaní čísel 1 až n je $n!$ a typ permutácie nám určuje polohu oddeľovačov jednoznačne. Pre daný cyklus dĺžky k existuje k možností ako ho zapísať ako usporiadanú k-ticu, keďže číslo na prvom mieste v cykle už jednoznačne určuje tento zápis. Následne pre každé k dostávame rovnakú permutáciu bez ohľadu na to, v akom poradí sme zapísali a_k cyklov s dĺžkou k. Tieto usporiadania môžeme meniť pre každú dĺžku cyklov nezávisle, čiže celkový počet usporiadaní čísel 1 až n musíme pre daný typ permutácie vydeliť číslom $k^{a_k} \cdot a_k!$ pre každé k od 1 po n, z čoho už plynie tvrdenie.

□

Poznámka. Táto lema platí s menšou úpravou aj pre permutácie s pevným bodom, t. j. ak $a_1 \neq 0$, kde menovateľ musíme vynásobiť členom $a_1!$.

Príklad. Pre lepšiu ilustráciu dôkazu uvedieme jednoduchý príklad. Položme $n = 7$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$. Podľa 2.2 má platiť, že počet permutácii typu $a = 2^2 3$ je

$$C_a = \frac{7!}{2^2 \cdot 3 \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{7!}{4!} = 210.$$

Zároveň z dôkazu vyplýva, že každá permutácia daného typu zodpovedá $4! = 24$ usporiadaniam čísel 1 až 7. Napr. pre permutáciu (1 3)(2 4)(5 6 7) máme tieto usporiadania, ktoré určujú tú istú permutáciu:

(1 3)(2 4)(5 6 7)	(1 3)(2 4)(6 7 5)	(1 3)(2 4)(7 5 6)
(3 1)(2 4)(5 6 7)	(3 1)(2 4)(6 7 5)	(3 1)(2 4)(7 5 6)
(1 3)(4 2)(5 6 7)	(1 3)(4 2)(6 7 5)	(1 3)(4 2)(7 5 6)
(3 1)(4 2)(5 6 7)	(3 1)(4 2)(6 7 5)	(3 1)(4 2)(7 5 6)
(2 4)(1 3)(5 6 7)	(2 4)(1 3)(6 7 5)	(2 4)(1 3)(7 5 6)
(2 4)(3 1)(5 6 7)	(2 4)(3 1)(6 7 5)	(2 4)(3 1)(7 5 6)
(4 2)(1 3)(5 6 7)	(4 2)(1 3)(6 7 5)	(4 2)(1 3)(7 5 6)
(4 2)(3 1)(5 6 7)	(4 2)(3 1)(6 7 5)	(4 2)(3 1)(7 5 6)

Tabuľka 2.1: Spôsoby zápisu danej permutácie v cyklickom tvare

Poznámka. Značenie S_n sa obvykle používa pre označenie grupy permutácií prvkov 1 až n s operáciou skladania. Platí, že dve permutácie majú rovnaký typ práve vtedy, ak sú v tejto grupe konjugované. Preto je možné počet permutácií daného typu spočítať aj týmto spôsobom.

2.2 Počet permutácií disjunktných s identitou a permutáciami daného typu

Keďže poznáme počet permutácii bez pevného bodu typu $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$, tak určením počtu permutácii disjunktných s identitou a zároveň s permutáciou tohoto typu vieme spočítať počet latinských obdĺžnikov s troma riadkami, ktoré majú permutáciu daného typu v druhom riadku. Tento postup využil aj J. Riordan vo svojom článku (Riordan, 1944). Jeho článok je ale veľmi stručný a porozumieť mu vyžadovalo nemalé úsilie. V tejto práci je jeho postup popísaný prehľadnejšie a navyše dokážeme v upravenej podobe aj platnosť všetkých tvrdení, na ktoré sa Riordan odvoláva, prípadne ich považuje za zrejmé.

Pri riešení budeme využívať postup podobný ako v sekcii 1.4, kde sme vypočítali počet permutácii disjunktných s identitou a s permutáciou dĺžky cyklu n (1.6). V tomto prípade však budeme uvažovať pre každý cyklus danej permutácie iný stôl.

Definícia 2. *Nech π je permutácia typu $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ a nech γ je počet cyklov tejto permutácie. Definujeme $l(a) = (l_1,\dots,l_\gamma)$, kde pre $i = 1$ až γ označíme l_i dĺžku i-tého cyklu permutácie, kde tieto cykly sú zoradené podľa dĺžky od najkratších. T. j. pre $i = 1$ až a_2 máme $l_i = 2$, pre $i = a_2 + 1$ až $a_2 + a_3$ máme $l_i = 3$ atď.*

Definícia 3. *Nech $l(a) = (l_1,\dots,l_\gamma)$, kde a je typ permutácie bez pevného bodu. Zobecneným dominovým číslom $e_{a,k}$ (1.3) nazveme počet spôsobov ako z γ kruhov zložených z $2 \cdot l_i$ vrcholov pre všetky $i = 1$ až γ vybrať k disjunktných dvojíc susedných vrcholov.*

Pozorovanie.

$$e_{a,k} = \sum \prod_{i=1}^{\gamma} d_{k_i}, \tag{2.3}$$

kde suma prebieha cez všetky rozdelenia $k = k_1 + k_2 + \dots + k_\gamma$ také, že $k_i \in \mathbb{N}$ a platí $k_i \le l_i$ pre všetky $i \in \{1,2,\dots,\gamma\}$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z toho, že najprv rozdelíme, koľko dvojíc vyberieme z ktorého kruhu, a následne pre každý kruh spočítame počet dvojíc a tieto počty vynásobíme.

□

Lema 2. *Nech $l(a) = (l_1,\dots,l_\gamma)$, kde a je typ permutácie bez pevného bodu. Počet spôsobov ako ku γ kruhovým stolom s $2 \cdot l_i$ miestami pre $i = 1$ až γ usadiť n párov mužov a žien tak, aby sa muži a ženy pri každom stole striedali, a aby žiaden pár nesedel priamo vedľa seba, je*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^\gamma \cdot \binom{n}{k} \cdot e_{a,k} \cdot k! \cdot (n-k)!^2 \tag{2.4}$$

Dôkaz. Princíp inklúzie a exklúzie použijeme rovnako ako na odvodenie vzorca pre M_n (1.4). Následne máme 2 možnosti na výber mužských a ženských miest pri každom z γ stolov, $\binom{n}{k}$ možností na výber k párov, ktoré určite sedia pri sebe, $e_{a,k}$ možností na výber miest pri stoloch, kde budú tieto páry sedieť, $k!$ možností na usporiadanie párov na tieto miesta a $(n-k)!^2$ možností na usadenie zvyšných mužov a žien.

□

Túto sumu môžeme upraviť podobne ako vzorec 1.5 tak, že vyberieme pred sumu 2^γ, čo predstavuje počet možností výberov mužských a ženských miest pri každom stole, a $n!$ čo je počet možností na usadenie žien. Keď sa vrátime naspäť k matematickému významu problému stolovania, môžeme spraviť veľmi dôležité pozorovanie.

Pozorovanie. Počet permutácií disjunktných s identitou a s permutáciou typu $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ je

$$u_{(a)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot e_{a,k} \cdot (n-k)! \tag{2.5}$$

Priamym dôsledkom tohoto pozorovania a úvah v tejto sekcii je prvý vzorec, ktorý nám dáva počet latinských obdĺžnikov $3 \times n$.

Veta 3. *Počet redukovaných latinských obdĺžnikov* $3 \times n$ *je*

$$K_n = \sum_{a} C_a \cdot u_{(a)}, \tag{2.6}$$

kde suma prechádza cez všetky typy $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ *permutácii bez pevného bodu.*

Toto je explicitný vzorec na zistenie počtu latinských obdĺžnikov, ktorý dáva zmysel aj intuitívne. Má však dva zásadné problémy. Prvým je sumácia cez typy permutácii a druhým je vzorec 2.5 na výpočet počtu permutácií, ktorý obsahuje sumu cez delenia čísla k na prirodzené čísla podľa ďalších kritérií. V ďalšej sekcii ukážeme nový spôsob reprezentácie týchto vzorcov, pomocou ktorého zjednodušíme najprv vzorec na výpočet $u_{(a)}$ a následne zjednodušíme aj sumu cez typy permutácií.

2.3 Reprezentácia pomocou polynómov

Definícia 4. *Nech* $U \in \mathbb{Z}[x]$ *je polynóm. Jeho faktoriálnu hodnotu, ktorú budeme značiť* $u = U \cdot 0!$*, definujeme ako číslo, ktoré dostaneme, keď do polynómu dosadíme za* x^i *hodnotu* $i!$ *pre každé* $i \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka. Táto reprezentácia nám umožňuje efektívnejšie pracovať s faktoriálmi použitím bežných operácií polynómov, keďže ak máme $k!$ a $l!$, tak ich vynásobením získame len $k! \cdot l!$, ale $x^k \cdot x^l \cdot 0! = (k+l)!$

Teraz môžeme vzorec 1.6 reprezentovať polynómom.

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot x^{n-k} \tag{2.7}$$

Hodnotu u_n následne získame ako $u_n = U_n \cdot 0!$

Lema 4. *Nech π je permutácia typu $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ potom platí*

$$u_{(a)} = U_2^{a_2} \cdot U_3^{a_3} \cdot \dots \cdot U_n^{a_n} \cdot 0! \tag{2.8}$$

Dôkaz. Ukážeme, že platí

$$U_{(a)} = U_{l_1} \cdot U_{l_2} \cdot \dots \cdot U_{l_\gamma},$$

z čoho už triviálne platí tvrdenie. Po dosadení $e_{a,k}$ a d_k dostávame na ľavej strane

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \sum \prod_{i=1}^{\gamma} \frac{2l_i}{2l_i - k_i} \cdot \binom{2l_i - k_i}{k_i} \cdot x^{n-k},$$

kde druhá suma prechádza delenia čísla k rovnako ako vo vzorci 2.3. Následne môžeme preusporiadať vonkajšiu sumu tak, že najprv pre každé l_i vyberieme hodnoty $k_i \leq l_i$, a na mieste, kde sme doteraz mali k, budeme mať súčet čísel k_i, ktorý označíme s. Táto operácia nám zjavne nezmení koeficienty nášho polynómu, ktorý po preusporiadaní vyzerá takto:

$$\sum_{k_i \leq l_i} (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^{\gamma} \frac{2l_i}{2l_i - k_i} \cdot \binom{2l_i - k_i}{k_i} \cdot x^{n-s}.$$

Na pravej strane máme

$$\prod_{i=1}^{\gamma} \sum_{k_i=0}^{l_i} (-1)^{k_i} \cdot \frac{2l_i}{2l_i - k_i} \cdot \binom{2l_i - k_i}{k_i} \cdot x^{l_i - k_i}.$$

Aj tento vzorec môžeme preusporiadať tak, že najprv vyberieme pre každé l_i hodnoty $k_i \leq l_i$ a prehodíme sumu so súčinom, čím dostaneme polynóm v tomto tvare:

$$\sum_{k_i \leq l_i} \prod_{i=1}^{\gamma} (-1)^{k_i} \cdot \frac{2l_i}{2l_i - k_i} \cdot \binom{2l_i - k_i}{k_i} \cdot x^{l_i - k_i}$$

Následne súčinom cez všetky i dostaneme koeficient pri člene $x^{l_1 - k_1 + l_2 - k_2 + \dots + l_\gamma - k_\gamma}$. Keďže súčet čísel l_i je z definície rovný n a súčet čísel k_i máme označený s, tak $(l_1 - k_1) + (l_2 - k_2) + \dots + (l_\gamma - k_\gamma) = n - s$. Navyše zjavne $\prod(-1)^{k_i} = (-1)^s$. Teraz už dostávame pravú stranu v tvare, ktorý je zjavne rovný ľavej strane:

$$\sum_{k_i \leq l_i} (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^{\gamma} \frac{2l_i}{2l_i - k_i} \cdot \binom{2l_i - k_i}{k_i} \cdot x^{n-s}.$$

□

Teraz dokážeme dve tvrdenia, pomocou ktorých budeme schopní zapísať faktoriálnu hodnotu súčinu polynómov ako sumu nejakých stolovacích čísel. Využijeme pri tom rekurenciu, ktorá sa objavuje pri týchto polynómoch.

Lema 5. *Pre postupnosť polynómov $\{U_n\}$ definovanú vyššie (2.7) platí*

$$U_{n+1} = U_n \cdot (x-2) - U_{n-1}, \tag{2.9}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a pre $n = 0$ definujeme $U_0 = 2$.

Dôkaz. Toto tvrdenie môžeme dokázať priamo z definície (1.6) tak, že ukážeme rovnosť koeficientov pri x^{n+1-k}. Na ľavej strane je tento koeficient rovný

$$(-1)^k \cdot \frac{2n+2}{2n+2-k} \cdot \binom{2n+2-k}{k}.$$

Na pravej strane máme

$$(-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} - 2 \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{2n}{2n-(k-1)} \cdot \binom{2n-(k-1)}{(k-1)}$$

z členov z U_n a

$$-1 \cdot (-1)^{k-2} \cdot \frac{2n-2}{2n-2-(k-2)} \cdot \binom{2n-2-(k-2)}{(k-2)}$$

z U_{n-1}. Označme $A = (2n-1-k)!$, $B = (2n-2k)!$ a $C = (k-2)!$. Následne môžeme všetky členy vydeliť výrazom $(-1)^k$ a prenásobiť vhodne zvolenou jednotkou tak, aby boli pre nejaký prirodzený koeficient m v tvare

$$m \cdot \frac{A}{(2n+2-2k) \cdot (2n+1-2k) \cdot B \cdot k \cdot (k-1) \cdot C}.$$

Na ľavej strane je $m_0 = (2n+2) \cdot (2n+1-k) \cdot (2n-k)$. Na pravej strane máme postupne $m_1 = 2n \cdot (2n+2-2k) \cdot (2n+1-2k)$, $m_2 = 2 \cdot 2n \cdot (2n-k) \cdot k$ a nakoniec $m_3 = -(2n-2) \cdot k \cdot (k-1)$. Rovnosť nastane práve vtedy, ak $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$, ale po úprave dostávame na obidvoch stranách výraz

$$(2n+2)(k^2 - k \cdot (4n+1) + 2n \cdot (2n+1)).$$

Nakoniec musíme zvlášť ošetriť koeficienty pri x^{n+1} a x^n, kde sa nám nezarátajú koeficienty zo všetkých polynómov, keďže U_n má stupeň n a U_{n-1} má stupeň $n-1$. Po dosadení hodnôt vidíme, že koeficient pri x^{n+1} je na oboch stranách rovný 1 a pri x^n je koeficient rovný $(-1) \cdot (2n+2)$.

□

Poznámka. Dosadením do definície stolovacieho čísla (1.6) sme schopní vypočítať polynóm $U_1 = x-2$. Dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia je, že našu postupnosť jednoznačne definujú polynómy U_0, U_1 a rekurentný vzorec. Následne ukážeme vlastnosť, ktorá platí pre takto definovanú postupnosť.

Lema 6. *Nech $\{U_n\}$ je postupnosť polynómov spĺňajúca $U_{n+1} = U_n \cdot (x-2) - U_{n-1}$, kde $U_0 = 2$ a $U_1 = x - 2$. Potom platí*

$$U_i \cdot U_j \cdot 0! = u_{i+j} + u_{i-j}, \tag{2.10}$$

kde pre záporné čísla definujeme $u_{-n} = u_n$.

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou a dokážeme $U_i \cdot U_j = U_{i+j} + U_{|i-j|}$, z čoho už plynie tvrdenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i \geq j$ a indukciu prevedieme podľa súčtu $m = i + j$.

Pre m rovné 0 a 1 je tvrdenie triviálne. Pre $m = 2$ je jediný netriviálny prípad $i = j = 1$, kde máme na ľavej strane U_1^2 a na pravej $U_2 + U_0$. Podľa rekurencie je $U_2 = U_1 \cdot (x-2) - U_0$, čiže $U_2 + U_0 = U_1 \cdot (x-2)$, ale $U_1 = x - 2$.

Nech tvrdenie platí pre $m \geq 2$. Ukážeme, že platí aj pre $m+1$. Na pravej strane máme $U_i \cdot U_j$. Vieme, že tvrdenie platí pre $U_{i-1} \cdot U_j$ aj pre $U_{i-2} \cdot U_j$. Podľa rekurencie vyjadríme $U_i = U_{i-1} \cdot (x-2) - U_{i-2}$. Následne podľa indukčného predpokladu vieme, že $(U_{i-1} \cdot (x-2) - U_{i-2}) \cdot U_j = (x-2) \cdot (U_{i-1+j} + U_{|i-1-j|}) - (U_{i-2+j} + U_{|i-2-j|})$. Podľa rekurencie platí $(x-2) \cdot U_{i-1+j} - U_{i-2+j} = U_{i+j}$ a zároveň, ako ukážeme nižšie, platí aj, že $(x-2) \cdot U_{|i-1-j|} - U_{|i-2-j|} = U_{|i-j|}$ ($\spadesuit$). Preto už stačí iba spojiť tieto dva vzorce:

$$U_i \cdot U_j = (U_{i-1} \cdot (x-2) - U_{i-2}) \cdot U_j = (x-2) \cdot (U_{i-1+j} + U_{|i-1-j|}) - (U_{i-2+j} + U_{|i-2-j|})$$

a preusporiadaním výrazu vpravo máme

$$(x-2) \cdot U_{i-1+j} - U_{i-2+j} + (x-2) \cdot U_{|i-1-j|} - U_{|i-2-j|} = U_{i+j} + U_{|i-j|},$$

čiže naozaj platí $U_i \cdot U_j = U_{i+j} + U_{|i-j|}$.

Výraz ($\spadesuit$) platí z rekurencie za predpokladu, že $|i-j| > |i-j-1| > |i-j-2|$. Keďže $i \geq j$ tak všetky výrazy v absolútnych hodnotách sú kladné, až na prípady, kde $i = j$, alebo $i = j + 1$. Ukážeme indukčný krok pre prvý prípad, v druhom prípade sa dokáže obdobne.

Chceme dokázať, že $U_i^2 = U_{2i} + U_0$. Na ľavej strane máme z rekurencie $U_i^2 = (U_{i-1} \cdot (x-2) - U_{i-2}) \cdot U_i$. To podľa predpokladu môžeme upraviť na $(x-2) \cdot (U_{2i-1} + U_1) - (U_{2i-2} + U_2)$. Opäť z rekurencie $U_{2i} = U_{2i-1} \cdot (x-2) - U_{2i-2}$ a $U_0 = (x-2) \cdot U_1 - U_2$. Preto preusporiadaním výrazu na ľavej strane dostaneme $(x-2) \cdot U_{2i-1} - U_{2i-2} + (x-2) \cdot U_1 - U_2 = U_{2i} + U_0$. Tým je dôkaz indukčného kroku hotový.

$\square$

Poznámka. Vzťahy popísané v lemách 5 a 6 platia v podobnom tvare aj pre postupnosť Čebyševových polynómov. Túto analógiu využíva v svojom článku J. Riordan. Ďalšie vlastnosti týchto polynómov je možné nájsť napríklad v knihe J. C. Masona a D. C. Handscomba (Mason a Handscomb, 2002).

Týmto končíme prácu s reprezentáciou pomocou polynómov, keďže viacnásobnou aplikáciou vzorca 2.10 na vzorec 2.8 dostávame hlavnú vetu tejto sekcie, ktorá nám dáva nový spôsob výpočtu čísla $u_{(a)}$ pre daný typ permutácie.

Veta 7. *Nech $l(a) = (l_1, \dots, l_\gamma)$, kde $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ je typ permutácie bez pevného bodu. Potom platí*

$$u_{(a)} = U_2^{a_2} \cdot U_3^{a_3} \cdot \dots \cdot U_n^{a_n} \cdot 0! = \sum u_{l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_\gamma}, \tag{2.11}$$

kde suma prebieha cez všetky možnosti umiestnenia znakov plus a mínus medzi dĺžky cyklov.

Pozorovanie. Číslo $u_{(a)}$ nezávisí na očíslovaní jednotlivých cyklov.

Dôkaz. Vyplýva zo vzorca 2.10 a z toho, že pri jeho viacnásobnom použití môžeme najprv vybrať poradie cyklov z komutativity polynómov. Následne pri každej jeho aplikácií nezáleží na tomto poradí, keďže $u_{|i-j|} = u_{|j-i|}$

□

Vďaka tejto vete vieme prvýkrát vypočítať počet permutácií disjunktných s identitou a permutáciou daného typu ako súčet stolovacích čísel. Toto využijeme v nasledujúcej sekcii na finálne zjednodušenie vzorca 2.6.

2.4 Zjednodušenie vzorca na výpočet K_n

V tejto sekcii ukážeme ako odstrániť zo vzorca sumu cez typy permutácií a nahradiť ju inou sumou, čím dostaneme vzorec, ktorým budeme schopní priamo vyčísliť počet latinských obdĺžnikov. Toto zjednodušenie je v podobnej forme popísané v druhom článku J. Riordana o latinských obdĺžnikoch (Riordan, 1946).

Lema 8. *Nech a je typ permutácie bez pevného bodu. Potom platí*

$$u_{(a)} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,i}^{(a)} \cdot u_{n-2i} \tag{2.12}$$

pre nejaké nezáporné celé čísla $b_{n,i}^{(a)}$. Navyše nech $l(a) = (l_1, \dots, l_\gamma)$. Potom $b_{n,i}^{(a)}$ je počet podpostupností $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \gamma$ takých, že $\sum_r l_{i_r} = i$.

Dôkaz. Prvé pozorovanie plynie priamo zo vzorca 2.11. V prípade, že sú všetky znamienka plus, dostávame hodnotu u_n. Zmenením znamienka pred l_j na mínus dostávame u_{n-2l_j}. Keďže každý člen v sume môžeme dostať len viacnásobnou zmenou znamienka a platí $u_{-n} = u_n$, tak zjavne existujú koeficienty spĺňajúce prvú rovnosť.

V dôkaze druhej časti nájdeme pre každé umiestnenie znamienok, ktoré nám v indexe dá súčet v absolútnej hodnote $n-2i$, jednoznačný výber $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ taký, že ich súčet je i. Dôkaz rozdelíme na prípady, podľa toho, či je súčet v indexe kladný, alebo záporný.

Ak je tento súčet kladný, tak vyberieme práve tie z čísel $l_1, \dots, l_\gamma$, ktoré pred sebou majú znamienko mínus. To očividne môžeme spraviť.

Ak je tento súčet záporný, t. j. $2i - n$, tak máme nejaké $l_{j_1}, \dots l_{j_{k'}}$ spĺňajúce $l_{j_1} + \dots + l_{j_{k'}} = n - i$. To vyplýva z toho, že súčet všetkých čísel, ak by mali znamienko plus, je n, čiže aby sme dostali hodnotu $2i-n$, tak sme museli umiestniť mínus pred čísla so súčtom $n - i$. To ale zodpovedá výberu zvyšných čísel z $l_1, \ldots, l_\gamma$, ktorých súčet musí byť i.

Na záver ešte musíme ukázať, že každému umiestneniu znamienok zodpovedá iný výber $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$. V rámci kladných ani v rámci záporných súčtov v indexe zjavne nemôžeme dostať ten istý výber, takže stačí ukázať, že neexistuje taká dvojica umiestnenia znamienok, že jedno umiestnenie má v indexe kladný súčet, druhé záporný, a zároveň zodpovedajú rovnakému výberu $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$. To ale nemôže nikdy nastať, pretože číslo l_1 má pred sebou vždy znamienko plus a v prvej možnosti vyberáme tie čísla, ktoré pred sebou majú znamienko mínus a v druhej tie, ktoré pred sebou majú plus.

Z konštrukcie plynie aj to, že každému výberu čísel jednoznačne vieme priradiť umiestnenie znamienok. Ak sme vybrali číslo l_1 tak znamienka mínus umiestnime práve pred tie čísla, ktoré sme nevybrali. Ak sme nevybrali l_1, tak znamienka mínus umiestnime práve pred vybrané čísla. Tento postup ilustrujeme na príklade.

□

Príklad. Nech $a = 2^1 3^2 5^1$ je typ permutácie bez pevného bodu. Potom $b^{(a)}_{13,5}$ vypočítame ako počet možností na výber čísel z množiny $\{2, 3_1, 3_2, 5\}$ tak, aby ich súčet bol 5. Následne ku každému výberu jednoznačne priradíme aj umiestnenie znamienok, toto priradenie označíme symbolom $\to$.

$$2 + 3_1 = 5 \to u_{2+3_1-3_2-5} = u_{-3} = u_3$$

$$2 + 3_2 = 5 \to u_{2-3_1+3_2-5} = u_{-3} = u_3$$

$$5 = 5 \to u_{2+3_1+3_2-5} = u_3$$

Značenie. *Čísla $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ také, že $c_1 + 2\cdot c_2 + \cdots + n \cdot c_n = i$. nazveme typom c delenia čísla i a značíme $c = 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$. Toto značenie zodpovedá značeniu typu permutácii podľa dĺžok cyklov. Pre typ c delenia čísla i a typ a permutácie hovoríme, že $c \leq a$, ak $c_j \leq a_j$ pre všetky j od 1 po n. Zároveň ak $c \leq a$, tak vieme vybrať c_j z a_j čísel j pre každé j od 1 po n. Tento výber budeme nazývať výberom delení typu c z typu permutácie a.*

Pozorovanie. Nech $a = 2^{a_2} 3^{a_3} \ldots n^{a_n}$ je typ permutácie bez pevného bodu a nech $c = 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$ je typ delenia čísla i. Potom je práve

$$c^{(a)} \equiv \binom{a_2}{c_2} \cdot \binom{a_3}{c_3} \cdot \cdots \cdot \binom{a_n}{c_n} \tag{2.13}$$

spôsobov na výber delení typu c z typu permutácie a. Ak neplatí $c \leq a$, tak $c^{(a)} = 0$. Zároveň platí, že $\sum c^{(a)} = b^{(a)}_{n,i}$, kde suma prebieha cez všetky typy delenia c čísla i.

Dôkaz. Pre každé j od 1 po n potrebujeme vybrať c_j čísel z a_j a môžeme ich vyberať nezávisle na sebe. Druhá rovnosť platí z definície čísla $b^{(a)}_{n,i}$ a predchádzajúcej lemy.

□

Pozorovanie. Ak c je typ delenia čísla i taký, že $c_1 \neq 0$, tak zjavne $c^{(a)} = 0$ pre všetky typy permutácií bez pevného bodu a.

Lema 9. *Nech $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ je typ permutácie bez pevného bodu. Potom $C_a \cdot b_{n,i}^{(a)} = \sum \beta_{n,i}^{(a),(c)}$, kde pre typ delenia $c = 2^{c_2}\dots n^{c_n}$ spĺňajúci $c \leq a$ definujeme*

$$\beta_{n,i}^{(a),(c)} = \binom{n}{i} \cdot \frac{i!}{2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!} \cdot \frac{(n-i)!}{2^{a_2-c_2} \cdot (a_2-c_2)! \cdot \dots \cdot n^{a_n-c_n} \cdot (a_n-c_n)!}, \tag{2.14}$$

a suma prechádza všetky typy $c \leq a$ delenia čísla i.

Dôkaz. Podľa pozorovania vyššie je $C_a \cdot b_{n,i}^{(a)} = \sum C_a \cdot c^{(a)}$. Následne môžeme vynechať typy c, ktoré nespĺňajú $c \leq a$, keďže v takom prípade je $c^{(a)} = 0$. Tvrdenie platí priamo zo vzorcov na výpočet $c^{(a)}$ (2.13) a C_a (2.2) a definície kombinačného čísla.

□

Pozorovanie. Z definície permutácie bez pevného bodu platí

$$\sum_a C_a = D_n, \tag{2.15}$$

kde D_n zodpovedá počtu permutácií bez pevného bodu (1.2) a suma prechádza cez všetky typy $a = 2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ permutácií bez pevného bodu.

Záverečná veta tejto sekcie zhŕňa výsledky predchádzajúcich tvrdení a pozorovaní a zároveň konečne dáva vzorec na výpočet počtu latinských obdĺžnikov $3 \times n$ pomocou obyčajnej sumy cez prirodzené čísla využívajúci len hodnoty D_n (1.2) a u_n (1.6), ktoré vieme bez problémov vyčísliť. Narozdiel od predchádzajúcich sekcií pozmeníme definíciu tak, že $u_0 = 1$, čo využijeme len v špeciálnych prípadoch nasledujúceho vzorca.

Veta 10. *Počet latinských obdĺžnikov $3 \times n$ je $L_n = n! \cdot K_n$, kde*

$$K_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} D_i \cdot D_{n-i} \cdot u_{n-2i}. \tag{2.16}$$

Dôkaz. Dosadením u_a z 2.12 do 2.6 máme

$$K_n = \sum_a C_a \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,i}^{(a)} \cdot u_{n-2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_a C_a \cdot b_{n,i}^{(a)} \cdot u_{n-2i},$$

kde $\sum C_a \cdot b_{n,i}^{(a)}$ podľa 2.14 vieme prepísať na sumu cez typy c delenia čísla i. Číslo i bude v nasledujúcom postupe pevne zvolené.

$$\sum_a C_a \cdot b_{n,i}^{(a)} = \sum_a \sum_{c \leq a} \beta_{n,i}^{(a),(c)}$$

Teraz môžeme zameniť sumy a rozpísať číslo $\beta_{n,i}^{(a),(c)}$ pre typy permutácií a, kde $c \leq a$, čím dostaneme

$$\sum_c \sum_{a \geq c} \binom{n}{i} \cdot \frac{i!}{2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!} \cdot \frac{(n-i)!}{2^{a_2-c_2} \cdot (a_2-c_2)! \cdot \dots \cdot n^{a_n-c_n} \cdot (a_n-c_n)!}.$$

Vidíme, že hodnota $\binom{n}{i}$ nezávisí ani na type permutácie a, ani na type delenia čísla i. Zároveň ani prvý zlomok nezávisí na type permutácie. Preto môžeme vybrať členy pred sumu a máme

$$\binom{n}{i} \cdot \sum_{c} \frac{i!}{2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!} \cdot \sum_{a \geq c} \frac{(n-i)!}{2^{a_2-c_2} \cdot (a_2-c_2)! \cdot \dots \cdot n^{a_n-c_n} \cdot (a_n-c_n)!}.$$

Postupne najprv sumou cez typy permutácii a, kde $c \leq a$, dostávame sumu cez hodnoty C_d (2.2) pre všetky typy d permutácií čísel 1 až $n-i$ bez pevného bodu a podľa 2.15 môžeme upraviť vzorec do tvaru

$$\binom{n}{i} \cdot \sum_{c} \frac{i!}{2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!} \cdot D_{n-i}$$

a následne aplikáciou 2.2 a 2.15 na sumu cez typy delenia čísla i, čo zodpovedá typom permutácií čísel 1 až i, dostaneme

$$\binom{n}{i} \cdot D_i \cdot D_{n-i},$$

čo je tvar, z ktorého už priamo plynie vzorec 2.16.

$\square$

V nasledujúcej tabuľke môžeme vidieť hodnoty K_n pre malé n.

n	K_n
2	0
3	2
4	24
5	552
6	21280
7	1073760
8	70299264
9	5792853248
10	587159944704
11	71822743499520
12	10435273503677440
13	1776780700509416448
14	350461958856515690496
15	79284041282622163140608
16	20392765404792755583221760
17	5917934230798104348783083520
18	1924427226324694427836833857536
19	696979289286274520909680184328192
20	279603955400790511301713870268399616

Tabuľka 2.2: Počet redukovaných latinských obdĺžnikov K_n pre malé n

3. Počet orbít množiny latinských obdĺžnikov pri konjugovaní permutáciami

3.1 Základné pojmy a značenie

V predchádzajúcej kapitole sme vypočítali najprv počet redukovaných latinských obdĺžnikov, keďže preusporiadaním stĺpcov sme dostali všetky latinské obdĺžniky. V tejto kapitole budeme počítať latinské obdĺžniky až na konjugovanie, čiže obdĺžniky s rovnakou cyklickou štruktúrou permutácií v riadkoch budeme považovať za rovnaké. Tento popis latinských obdĺžnikov môže neskôr pomôcť pri hľadaní obdĺžnikov s malým počtom asociatívnych trojíc, keďže konjugované obdĺžniky majú tento počet zhodný.

Pripomeňme, že každý riadok latinského obdĺžnika je nejaká permutácia $p \in S_n$ zapísaná v riadkovom tvare, t. j. na k-tom mieste v danom riadku je hodnota $p(k)$. V nasledujúcom texte budeme hovoriť, že dané permutácie sú riadkami latinského obdĺžnika. Zároveň v tejto kapitole budeme využívať známe tvrdenia z teórie grúp, ktoré je možné nájsť napríklad v knihe A. Drápala (Drápal, 2000).

Definícia 5. *Nech A je latinský obdĺžnik $3 \times n$ s riadkami p, q a r. Potom konjugovaním latinského obdĺžnika permutáciou $\pi \in S_n$ rozumieme obdĺžnik s riadkami $\pi p \pi^{-1}$, $\pi q \pi^{-1}$ a $\pi r \pi^{-1}$.*

Konjugovanie je zjavne ekvivalencia, a preto môžeme uvažovať bloky tejto ekvivalencie, orbity, pričom v každej orbite sa budú nachádzať práve všetky navzájom konjugované obdĺžniky. Počet orbít pri grupovom pôsobení ale vieme zistiť pomocou Burnsidovej lemy, nám stačí konečná verzia, kde grupa G predstavuje grupu permutácií S_n a množina X množinu latinských obdĺžnikov.

Veta 11. *Nech konečná grupa G pôsobí na konečnej množine X. Potom platí,*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g|, \tag{3.1}$$

kde $|X/G|$ je počet orbít a $|X^g|$ je počet prvkov $x \in X$ fixovaných prvkom g.

Vidíme, že permutácia π fixuje obdĺžnik s riadkami p, q, r práve vtedy, ak $p = \pi p \pi^{-1}$, $q = \pi q \pi^{-1}$ a $r = \pi r \pi^{-1}$. To znamená, že táto permutácia musí komutovať s každým riadkom latinského obdĺžnika. V takom prípade hovoríme, že permutácia π komutuje s latinským obdĺžnikom. V nasledujúcej sekcii ukážeme, ako takéto permutácie hľadať.

3.2 Komutujúce permutácie

Nech $\pi \in S_n$ je daná permutácia. Potom vieme, že pre každú permutáciu $\sigma \in S_n$, ktorá s ňou komutuje, platí $\pi\sigma = \sigma\pi$, t. j. $\pi = \sigma\pi\sigma^{-1}$. Množina všetkých prvkov spĺňajúca druhú rovnosť sa nazýva centralizátor prvku π a budeme ju značiť $C_{S_n}(\pi)$.

Teraz ukážeme, ako vieme vypočítať veľkosť centralizátora pre daný typ permutácie a. Vzorec 2.2 udáva počet permutácií typu a. Podľa poznámky za tvrdením je toto počet všetkých permutácií konjugovaných v S_n s ľubovľne zvolenou permutáciou π typu a. Keďže všetky permutácie konjugované s π získame tak, že postupne vyberáme permutácie $\sigma \in S_n$ a následne nimi konjugujeme π, tak okamžite dostávame nasledujúce pozorovanie z teórie grúp.

Pozorovanie. Nech π je permutácia typu a. Potom pre počet permutácií daného typu platí

$$C_a = \frac{|S_n|}{|C_{S_n}(\pi)|}.$$

Dôkaz. Každá permutácia typu a komutuje práve s $|C_{S_n}(\pi)|$ permutáciami, a ak konjugujeme π permutáciou $\sigma \in C_{S_n}(\pi)$, tak opäť dostávame len permutáciu π. Konjugovaním všetkými permutáciami $\sigma \in S_n$ máme $|S_n| = C_a \cdot |C_{S_n}(\pi)|$, z čoho už plynie tvrdenie.

□

Keď poznáme veľkosť centralizátora, môžeme popísať permutácie, ktoré sa v ňom nachádzajú. Najprv ukážeme, ako vyzerá permutácia $\sigma\pi\sigma^{-1}$. Toto popisuje známe tvrdenie.

Tvrdenie 12. *Nech $\pi = (\pi_{1,1} \dots \pi_{1,l_1}) \dots (\pi_{\gamma,1} \dots \pi_{\gamma,l_\gamma})$, kde l_1 až l_γ sú dĺžky cyklov tejto permutácie. Potom platí*

$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(\pi_{1,1}) \dots \sigma(\pi_{1,l_1})) \dots (\sigma(\pi_{\gamma,1}) \dots \sigma(\pi_{\gamma,l_\gamma})). \tag{3.2}$$

Z toho ale vidíme, že ak $\sigma \in C_{S_n}(\pi)$, tak musí zachovať každý cyklus. Nemusí ale zachovať poradie cyklov danej dĺžky ani ich rotáciu, ako je možné vidieť v tabuľke 2.1. Zároveň zjavne platí, že počet rôznych zápisov tej istej permutácie daného typu zodpovedá menovateľu vo vzorci 2.2.

To už nám stačí na to, aby sme vedeli vyjadriť všetky permutácie v centralizátore. Pre danú permutáciu π stačí skonštruovať všetky možné zápisy tejto permutácie v cyklickom tvare. Následne z každého zápisu vieme získať podľa predchádzajúceho tvrdenia permutáciu σ, ktorou sme konjugovali.

Náš algoritmus bude prechádzať všetky typy permutácii $a = 1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}$. Pre každý typ nám však stačí zobrať permutáciu, kde napíšeme čísla 1 až n za sebou a následne prvých a_1 čísel sú pevné body, ďalších $2{\cdot}a_2$ čísel uzátvorkujeme do cyklov dĺžky 2, atď. Následne vygenerujeme všetky cyklické zápisy tejto permutácie. Aplikáciou vzorca 3.2 priamo dostávame permutáciu σ v riadkovom tvare, keďže čísla sme mali v poradí 1 až n, takže za sebou budeme mať zaradom napísané hodnoty $\sigma(1)$ až $\sigma(n)$.

3.3 Algoritmus výpočtu

Teraz stačí iba zhrnúť poznatky z tejto kapitoly na to, aby sme získali počet latinských obdĺžnikov až na konjugovanie. Vieme, že hľadáme počet orbít pri konjugovaní, čo vieme spočítať z Burnsidovej lemy (3.1). Na to ale potrebujeme pre každú permutáciu $\pi \in S_n$ spočítať počet latinských obdĺžnikov, ktoré táto permutácia fixuje. Permutácia fixuje latinský obdĺžnik práve vtedy, ak s ním komutuje. Keďže nie je známy žiaden postup, pomocou ktorého by bolo možné získať všeobecný vzorec na počet latinských obdĺžnikov komutujúcich s danou permutáciou, pokúsime sa túto hodnotu vypočítať pomocou programu. Na to využijeme algoritmus popísaný nižšie.

Budeme prechádzať všetky permutácie $\pi \in S_n$. Na to stačí vždy vybrať jednu permutáciu pre každý typ $a = 1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}$ v tvare, ako sme popísali vyššie, a počet obdĺžnikov fixovaných touto permutáciou vynásobiť počtom permutácií typu a. Počet typov permutácií prvkov 1 až n zodpovedá počtu spôsobov ako napísať číslo n ako súčet niekoľkých prirodzených čísel bez ohľadu na poradie. Keďže ale neexistuje uzavretý vzorec, ktorý by riešil tento problém, budeme musieť pre všetky hodnoty n tieto spôsoby vygenerovať.

Pre daný typ permutácie a a vybranú permutáciu π tohoto typu potrebujeme vygenerovať latinské obdĺžniky s riadkami p, q, r také, že každý riadok s touto permutáciou komutuje. Preto nám stačí najprv vygenerovať množinu všetkých permutácií komutujúcich s permutáciou π, čo predstavuje algoritmicky najnáročnejšiu časť programu, a následne pre každú trojicu permutácií z tejto množiny zistiť, či ide o latinský obdĺžnik. To sa dá spraviť jednoducho pomocou kontroly, či sa v každom stĺpci nachádzajú tri rôzne čísla. Časová náročnosť tejto kontroly je však kubická vzhľadom k počtu komutujúcich permutácií, ktorých môže byť až $n!$.

Pre urýchlenie výpočtu preto nemusíme uvažovať permutácie komutujúce s typom $a = 1^n$, keďže tento typ obsahuje len identitu, s ktorou komutujú všetky latinské obdĺžniky, ktorých je $n! \cdot K_n$. Následným vybratím tohoto člena pred sumu v Burnsidovej leme a vydelením hodnotou $n!$ dostávame vzorec

$$|X/S_n| = K_n + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\pi \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} |X^\pi|, \tag{3.3}$$

kde $|X/S_n|$ predstavuje hľadaný počet orbít a X^π je množina latinských obdĺžnikov komutujúcich s permutáciou π.

Ďalej môžeme vynechať aj také permutácie π, pre ktoré vieme povedať, že z množiny s nimi komutujúcich permutácií nie je možné zostrojiť latinský obdĺžnik. To sú permutácie, ktoré majú jeden alebo dva pevné body, prípadne obsahujú práve jeden cyklus dĺžky dva. Prvky zahrnuté v týchto cykloch majú podľa vzorca 3.2 najviac 2 možnosti kam ich zobrazí komutujúca permutácia σ, čo je spor s tým, že v jednom stĺpci nemôžu byť 2 rovnaké prvky.

Zároveň platí, že pre všetky ostatné permutácie π latinský obdĺžnik zostrojiť vieme. Cykly dĺžky 3 a viac majú aspoň 3 rotácie a každé dve rotácie sú disjunktné. Ak máme aspoň 2 cykly dĺžky 2, tak máme aspoň 4 možnosti ich zápisu, ktoré sú po dvoch disjunktné. Ak máme 3 a viac pevných bodov, tak na ich zápis je viac možností, ako keby tvorili jeden cyklus, čo je už dostatočný počet.

Príklad. Ukážeme, ako vieme vytvoriť latinský obdĺžnik z rôznych zápisov permutácie (1)(2)(3)(4 5)(6 7)(8 9 10). Jedným z vyhovujúcich obdĺžnikov je napríklad tento:

(1)(2)(3)(4 5)(6 7)(8 9 10)
(2)(3)(1)(5 4)(7 6)(9 10 8)
(3)(1)(2)(6 7)(4 5)(10 8 9)

Nakoniec, ak π obsahuje iba jeden cyklus dĺžky n, tak z 3.2 vidíme, že každá komutujúca permutácia σ je len rotáciou tohoto cyklu, a preto sa nám podarí zostrojiť latinský obdĺžnik z ľubovoľných troch takýchto permutácií, čiže pre každú permutáciu π je to $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ vyhovujúcich obdĺžnikov.

Napriek urýchleniam sa podarilo zistiť počet orbít len pre $n = 9$, kde program bežal vyše 10 minút, a menšie. Dá sa odhadnúť, že pre $n = 10$, by program mal bežať približne $7^3 = 343$-krát dlhšie, čo je na úrovni troch dní. Počet orbít pre $n = 10$ sa však podarilo zistiť spôsobom popísaným nižšie (3.5).

Z Burnsidovej lemy okamžite plynie, že K_n je dolným ohraničením počtu orbít. Z vypočítaných hodnôt, ktoré môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke, však vyplýva, že hodnota

$$J_n = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\pi \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} |X^\pi|$$

je o niekoľko rádov menšia ako K_n a navyše aj rastie pomalšie. Z toho môžeme usúdiť, že počet orbít množiny latinských obdĺžnikov pri konjugovaní permutáciami, ktorý je rovný $K_n + J_n$, sa správa približne ako K_n.

n	K_n	J_n
3	2	2
4	24	18
5	552	12
6	21280	600
7	1073760	150
8	70299264	32838
9	5792853248	64458
10	587159944704	5669528

Tabuľka 3.1: Počet orbít množiny latinských obdĺžnikov pri konjugovaní permutáciami pre malé n

Z medzivýsledkov programu vieme spraviť ešte dôležité pozorovanie, ktoré môže výrazne urýchliť beh algoritmu.

Značenie. *Nech $a = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$ je typ permutácie n prvkov. Počet všetkých latinských obdĺžnikov $3 \times n$ komutujúcich s týmto typom budeme značiť $\mathrm{cl}\,(a)$.*

Pozorovanie. Nech $a = k^{a_k}$, $b = l^{a_l}$, kde $k < l$, a $c = k^{a_k} l^{a_l}$ sú typy permutácií $m = k \cdot a_k$, $n = l \cdot a_l$ a $n + m$ prvkov. Potom platí

$$\binom{n+m}{n} \cdot \mathrm{cl}\,(a) \cdot \mathrm{cl}\,(b) = \mathrm{cl}\,(c). \tag{3.4}$$

Dôkaz. Pozorovanie vyplýva z toho, že tieto typy majú rôzne dĺžky cyklov. Najprv vyberieme n prvkov z $n + m$, ktoré rozdelíme do cyklov dĺžky k. Následne pre každý zostrojený latinský obdĺžnik pre typ a môžeme zo zvyšných prvkov zostrojiť ľubovoľný latinský obdĺžnik pre typ b a týmto dostaneme každý latinský obdĺžnik pre typ c práve raz.

□

Viacnásobnou aplikáciou tohoto pozorovania na všetky rôzne dĺžky cyklov v danom type dostávame vetu, ktorá výrazne urýchľuje výpočet hodnoty J_n.

Veta 13. *Nech $a = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$ je typ permutácie n prvkov. Potom platí*

$$\frac{\mathrm{cl}\,(a)}{n!} = \frac{\mathrm{cl}\,(1^{a_1})}{a_1!} \cdot \frac{\mathrm{cl}\,(2^{a_2})}{(2 \cdot a_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{\mathrm{cl}\,(n^{a_n})}{(n \cdot a_n)!}. \tag{3.5}$$

Príklad. Vypočítame hodnotu $\frac{\mathrm{cl}\,(a)}{n!}$ pre $a = 1^3 2^2 3^1$. Podľa vzorca je táto hodnota rovná

$$\frac{\mathrm{cl}\,(1^3)}{3!} \cdot \frac{\mathrm{cl}\,(2^2)}{(2 \cdot 2)!} \cdot \frac{\mathrm{cl}\,(3^1)}{3!} = 2 \cdot 12 \cdot 2 = 48,$$

čo zodpovedá hodnote, ktorú pre tento typ spočítal program prechádzaním množiny permutácií komutujúcich s týmto typom.

Použitím tejto vety sa podarilo spočítať aj presný počet orbít pre $n = 10$, ktorý vidíme v tabuľke 3.1. Ďalšie urýchlenie by vyžadovalo efektívnejší výpočet hodnoty $\mathrm{cl}\,(k^{a_k})$ pre $k \geq 2$ a $a_k \geq 2$, keďže napríklad výpočet hodnoty $\mathrm{cl}\,(2^5)$ trval programu vyše hodiny. Otázkou zostáva, či je možné túto hodnotu určiť priamo pomocou vzorca.

Záver

Cieľom tejto práce bolo najprv na základe dostupnej literatúry popísať štruktúru latinských obdĺžnikov $3 \times n$. Ako sa ukázalo, pomerne stará literatúra venujúca sa tejto téme bola písaná veľmi stručne a vyžadovala nemalé úsilie čitateľa. Výsledkom tejto práce je prehľadný postup odvodenia vzorca na počet latinských obdĺžnikov $3 \times n$, ktorý by mal byť zrozumiteľný aj pre čitateľa s minimálnymi znalosťami v tejto oblasti. Špeciálne sa podarilo nájsť vzorec pre počet permutácií disjunktných s identitou a permutáciou daného cyklického typu bez použitia generujúcich funkcií založený na kombinatorickej úvahe v článku Bogarta a Doyla (Bogart a Doyle, 1986).

Pôvodným zámerom druhej časti práce malo byť hľadanie latinských obdĺžnikov s malým počtom asociatívnych trojíc, avšak kvôli neočakávane náročnej prvej časti práce, sa z časových dôvodov toto nepodarilo uskutočniť. Napriek tomu kapitola 3 obsahuje užitočné poznatky, ktoré môžu pomôcť pri riešení tohoto problému. Ide najmä o algoritmus na výpočet počtu orbít množiny latinských obdĺžnikov pri konjugovaní. Súčasťou tohoto algoritmu je aj algoritmus na generovanie všetkých permutácií komutujúcich s danou permutáciou, ktorý sa dá využiť pri riešení ďalších problémov spojených s permutáciami. Záverom tejto časti je, že počet orbít množiny latinských obdĺžnikov pri konjugovaní sa správa približne ako počet redukovaných latinských obdĺžnikov a tiež presné počty týchto orbít pre malé n.

Zoznam použitej literatúry

Bogart, K. P. a Doyle, P. G. (1986). Non-sexist solution of the menage problem. *The American Mathematical Monthly*, **93**(7), 514–518.

Bosák, J. (1976). *Latinské štvorce.* Mladá fronta.

Drápal, A. (2000). *Teorie grup - základní aspekty.* Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0162-1.

Kaplansky, I. (1943). Solution of the “problème des ménages". *Bull. Amer. Math. Soc*, **49**(10), 784–785.

Mason, J. a Handscomb, D. (2002). *Chebyshev Polynomials.* CRC Press. ISBN 9781420036114.

Matoušek, J. a Nešetřil, J. (2007). *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 3., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha. ISBN 9788024614113.

Riordan, J. (1944). Three-line latin rectangles. *The American Mathematical Monthly*, **51**(8), 450–452.

Riordan, J. (1946). Three-line latin rectangles-II. *The American Mathematical Monthly*, **53**(1), 18–20.

Touchard, J. (1934). Sur un problème de permutations. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, **198**, 631–633.

Valent, V. (2018). Small order quasigroups with minimum number of associative triples.

Zoznam tabuliek