

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Symetrie a separace na příkladě Laplaceova operátoru v nízkých dimenzích
Autor: Štěpán Hudeček

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce pojednává o separaci proměnných pro Laplaceovu a Helmholtzovu rovnici. V práci je ukázáno, jak hledání souřadnic, ve kterých se tyto rovnice separují, souvisí se symetriemi prvního řádu. V práci je uvedeno několik základních příkladů takových souřadnic, jsou zde spočteny symetrie prvního řádu v dimenzi 2 a 3 a symetrie druhého řádu v dimenzi 2.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Téma je zajímavé. Látka je poměrně náročná, ale odpovídá obtížnosti bakalářské práce. Práce je spíše rozsáhlejší, vlastní text má i s úvodem celkem 36 stran. Některé kapitoly lze přitom vynechat, aniž by práce utrpěla na své obecnosti. Například v kapitole 1.2 se zavádí diferenciální operátor na obecné varietě, ačkoliv se zde uvažuje pouze Laplaceův operátor Δ_n na \mathbb{R}^n . Pro práci stačí uvažovat diferenciální operátory na otevřených podmnožinách \mathbb{R}^n zavedené v kapitole 1.1, transformace těchto operátorů v různých souřadnicích jsou jednoduchým důsledkem řetízkového pravidla a i Větu 3 stačí formulovat v tomto speciálním případě. Dále pak kapitola 3.2.4 není v kapitole 4 nikde zapotřebí. Zřejmě i kvůli tomu nejsou v práci uvedeny speciální funkce (až na Besselovy funkce na straně 35), které se pojí k souřadnicím, ve kterých se Δ_n separuje, nebo některé méně známé souřadnice, ve kterých se Δ_3 separuje, jak je naznačeno v zadání práce.

Vlastní příspěvek. Práce čerpá především z knihy *Symmetry and Separation of Variables* od W. Millera, jak je uvedeno v Úvodu. Hlavní vlastní příspěvek autora spatřuji v kapitole 4 a konkrétně ve Větě 15, kde autor dokazuje existenci nenulového separovaného řešení pro obecný diferenciální operátor ve dvou proměnných.

Matematická úroveň. Matematická úroveň je velmi dobrá. Hlavní výhrady jsou uvedeny dole v Připomínkách a otázkách.

Práce se zdroji. Uvítal bych, kdyby na začátku kapitol byla uvedena literatura, ze které bylo čerpáno a kde si případně čtenář může dohledat chybějící důkazy. Například definice v Kapitole 2 nejsou úplně standardní.

Formální úprava. Hodnocení formální úpravy práce.

Formální úprava je vyhovující, i když i ta se může vylepšit. Například bych doporučoval psát v posloupnosti rovností jen jednu rovnost na řádek. Práce obsahuje přiměřené množství překlepů.

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

1. Několik poznámek k Úvodu. V Úvodu bych uvítal několik obecných poznámek k metodě separace proměnných. Například má smysl hledat separované řešení pro obecnou parciální diferenciální rovnici nebo takové řešení obecně nemusí existovat?

V posledním odstavci píšete, že ve Větě 15 ukážete, že souřadné soustavy, ve kterých se Laplaceova a Helmholtzova rovnice separují, souvisí s tzv. operátory symetrií prvního a druhého řádu. Ve Větě 15 se ale objevuje jen operátor prvního řádu. V celé práci jsem nenašel, až na úplně poslední krátkou poznámku, jak problém separace souvisí s operátory druhého řádu.

Konečně věty typu: "Zjistíme, že hledání řešení některých parciálních rovnic je vlastně hledání jádra příslušného diferenciálního operátoru." nebo "Ukážeme, že můžeme na \mathbb{R}^2 nebo obecně na hladké varietě zavést jiné souřadnice." jsou spíše tautologie a možná by bylo lepší je úplně vynechat.

2. Nerozumím rovnostem v Definici 5. Nemělo by zde spíše být

$$[X \otimes z, Y \otimes w] = [X, Y] \otimes zw,$$

kde $X, Y \in \mathfrak{g}$, $z, w \in \mathbb{C}$? Zde komutátor na levé straně je v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, zatímco ten napravo v \mathfrak{g} .

3. Strana 8, řádek 5. Nemáte na mysli spíše *všude* nenulové vektorové pole?
4. Strana 8, řádek 21. Co znamená "kladná poloosa osy x "?
5. Proč zavádíte v Definici 7 diferenciální operátor na hladké varietě, když v práci uvažujete pouze Laplaceův operátor na \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$? Stačí vám k definici Laplaceova operátoru na obecné varietě diferenciální operátory z Definice 7 nebo potřebujete i nějakou další (geometrickou) strukturu?
6. Definice 7. Je pojem homogenního operátoru na obecné varietě dobře definovaný? Nezávisí ve skutečnosti na volbě souřadnic?
7. Strana 11, řádek 9. ... pokud je operátor homogenní *řádu jedna*, tak je homogenní
8. Strana 11, řádek 13. Následující věta ukazuje, že všechna *všude nenulová* hladká vektorová pole jsou *lokálně* souřadnicová.
9. Proč zavádíte v důkazu Věty 3 značení $H = \mathbb{R}^n$? Potom $V = \psi^{-1}(\rho(H)) \subset M$. Na další straně důkazu ale píšete $V \subset \mathbb{R}^n$. Která možnost je správně?
10. Co znamená $d\sigma$ v důkazu Věty 3? Jedná o tečné zobrazení určené σ ?
11. Tvrzení v poznámce na konci kapitoly 1.2 začínající "Přesněji, ..." není formulováno precizně. Dále množina vektorových polí na varietě tvoří přirozeným způsobem vektorový prostor. Je pojem lineární nezávislosti vektorových polí užit ve smyslu lineární nezávislosti vektorů tohoto vektorového prostoru nebo v nějakém jiném smyslu?
12. Je skutečně tak přímočaré ověřit, že Lieova algebra grupy G definovaná v Definici 10 tvoří vektorový prostor? Prosím o důkaz nebo alespoň o odkaz na důkaz.
13. Strana 16, předposlední řádek. Co rozumíte pod pojmem akce? Není zde na rozdíl od Definice 11 zapotřebí předpokládat něco o hladkosti zobrazení τ ?
14. Špatné uzávorkování ve formuli (2.3).
15. Proč v Lemmatech 7 a 8 nepředpokládáte, že všechny funkce jsou spojité? Pokud jsem něco nepřehlédl, tak vždy tato lemmata používáte pro spojité (dokonce hladké) funkce. Důkaz Lemma 7 pro spojité funkce je výrazně jednodušší.
16. Nemělo by se v Definici 18 požadovat, aby $h \neq 0$ na U ?

17. V Definici 19 pracujete se symetriemi diferenciálních operátorů na mapě v obecné varietě. Jak jsou tyto symetrie definovány? V Definici 14 totiž definujete pouze symetrie diferenciálních operátorů na \mathbb{R}^n .
18. Je-li L diferenciální operátor řádu alespoň jedna jako ve Větě 15, je rozumné očekávat, že existuje nenulový nevlastní jednoduchý operátor symetrie příslušný L ? Jak je obecně obtížné hledat tyto symetrie? Na jaký typ diferenciálních rovnic (tj. počet rovnic oproti počtu neznámých funkcí) tato úloha vede?
19. Nerozumím první větě v poznámce na straně 33.

Na obhajobě prosím o zodpovězení otázek 5, 6, 11, 15, 18.

ZÁVĚR

Práci považuji za velmi dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Návrh klasifikace oponent sdělí předsedovi zkušební komise.

Tomáš Salač
MÚ UK
13.6.2019