MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Beneš

Max okruhy

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. et Mgr. Jan Žemlička, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval doc. Mgr. et Mgr. Janu Žemličkovi, Ph.D., především za jeho trpělivost a čas, který mi věnoval. Jen díky jeho odobornému vední mohla tato práce vůbec vzniknout.

Název práce: Max okruhy

Autor: Daniel Beneš

Katedra algebry: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. et Mgr. Jan Žemlička, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci se zabýváme max okruhy, což jsou okruhy, u kterých každý modul má maximální podmodul. Nejprve dokazujeme charakterizaci komutativních okruhů jako okruhů s T-nilpotentním Jacobsonovým radikálem a von Neumannovsky regulárním faktorem podle Jacobsonova radikálu. Dále se zaměřujeme na grupové okruhy, kde popíšeme všechny komutativní gruové max okruhy. To jsou právě ty grupové okruhy, které jsou složeny z komutativního max okruhu a torzní abelovské grupy obsahující jen konečně mnoho prvků řádu p^n takového, že p není invertibilní jako prvek okruhu. Nakonec využijeme této charakterizace ke konstrukci nekomutativních grupových okruhů, které jsou max, ale nejsou perfektní.

Klíčová slova: max okruh, perfektní okruh, grupový okruh

Title: Max rings

Author: Daniel Beneš

Department of Algebra: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. et Mgr. Jan Žemlička, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Topic of this thesis is max rings, which are the rings, whose nonzero modules have maximal submodules. At the begining we prove a characterization of commutative max rings as rings with T-nilpotent Jacobson radical and von Neumann regular factor ring of the Jacobson radical. Our next concern are group rings, where we describe all commutative group rings, that are max. These are the group rings, that are composed from a commutative max ring and an abelian torsion group, where is finitely many elements of order p^n for p not invertible in the ring. Finally we use this characterization to construct noncommutative group rings, which are max but not perfect.

Keywords: max ring, perfect ring, group ring

Obsah

Úvod

Pro modul nad tělesem, tedy pro vektorový prostor je snadné (za předpokladu axiomu výběru) si uvědomit, že má maximální podprostor. Okruhy, jejichž každý nenulový modul obsahuje maximální podmodul, nazýváme max okruhy. Například modul $\mathbb{Q}$ racionálních čísel nad okruhem celých čísel $\mathbb{Z}$ ovšem maximální podmodul neobsahuje.

V roce 1960 dokázal Hyman Bass charakterizaci perfektních okruhů, ze které plyne, že okruh je perfektní, pokud je max a faktor podle Jacobsonova ideálu je totálně rozložitelný (Bass, 1960).

Dále přišel ve stejné práci s hypotézou, že okruh je perfektní právě tehdy, když je max a nemá nekonečnou množinu ortogonálních idempotentů (tj. neexistuje nekonečná množina prvků, pro kterou by $x^2 = x$ a $xy = yx = 0$ pro $x \neq y$). V návaznosti na Bassovu charakterizaci vyšlo v druhé polovině 20. století několik článků zabývajících se max okruhy. Ty přinesly charakterizaci komutativních max okruhů a dokázaly Bassovu domněnku pro komutativní okruhy (Hamsher, 1967), (Koifman, 1970) a vyvrátily ji v obecném případě (Cammilo, 1975) a (Koifman, 1970).

Struktura práce

Cílem mé práce je použít některé z klasických výsledků o max okruzích z prací (Hamsher, 1967) a (Koifman, 1970) a následně je využít k zodpovězení otázky, které komutativní grupové okruhy jsou max.

V první kapitole ukážeme charakterizaci pro komutativní max okruhy. Ta nám říká, že se jedná právě o ty okruhy, které mají T-nilpotentní Jacobsonův radikál a faktor podle Jacobsonova radikálu je von Neumannovsky regulární. Připomeňme, že ideál J je T-nilpotentní, jestliže pro každou posloupnost prvků $(a_i)_{i=1}^{\infty}, a_i \in J$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že součin prvních n prvků posloupnosti je nula, tj. $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$. Von Neumannovsky regulární okruh je okruh, kde pro každý prvek r existuje prvek x, že $rxr = r$.

Tuto charakterizaci pak použijeme v druhé kapitole pro třídu grupových okruhů. Grupové okruhy přirozeně zobecňují polynomy nad okruhy, jen místo proměnných používáme prvky (multiplikativně psané) grupy a součiny definujeme pomocí operace na grupě. V třídě grupových okruhů dokážeme, že komutativní grupový okruh RG je max právě tehdy, když okruh R je max, G je torzní a pro každé prvočíslo p takové, že množina prvků G řádu p^n není konečná, je p invertibilní v R.

Značení

V celé práci budeme za okruh považovat okruh s jednotkou. Modulem myslíme pravý R-modul, jak je definován v učebnici od Andersona a Fullera (Anderson a Fuller, 1992, str. 26). Předpokládáme základní znalosti o grupách, okruzích a tělesech na úrovni základního kurzu algebry, tedy například skripta od docenta Stanovského (Stanovský, 2010). Od sekce 1.2 budeme až na vyznačené výjimky předpokládat, že okruh je komutativní. Symbolem $\coprod$ značíme direktní součin grup a R^* je grupa všech invertibilních prvků R.

1. Definice a charakterizace komutativních max okruhů

1.1 Definice

V této kapitole zavedeme používané pojmy a vyslovíme některá základní tvrzení, která využijeme v dalším textu.

Definice 1. *Řekneme, že okruh R je pravý max okruh, pokud každý jeho nenulový pravý R-modul má maximální podmodul.*

Poznámka. Nechť R je max a $I < R$ je ideál. Potom R/I je max, protože se na každý R/I-modul M můžeme dívat jako na R-modul.

Definice 2. *Nechť R je okruh, M je R-modul a $\mathcal{N}$ je množina všech maximálních podmodulů M. Potom*

$$\mathrm{rad}(R) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

nazveme (Jacobsonovým) radikálem modulu M. (Jacobsonův) radikál R_R značíme $\mathrm{J}(R)$*.*

Pro komutativní okruhy pravý/levý vynecháváme. Z věty 2 plyne, že levý a pravý Jacobsonův radikál splývají, proto mezi nimi nerozlišujeme.

Definice 3. *Řekneme, že okruh je von Neumannovsky regulární, pokud*

$$\forall a \in R\ \exists x \in R:\ axa = a\,.$$

Definice 4. *Nechť M je pravý R-modul. Řekneme, že $N \leq M$ podmodul je zanedbatelný, pokud pro každý Q podmodul M platí $K + Q = R \Rightarrow Q = M$. Řekneme, že ideál I je zanedbatelný, pokud je zanedbatelný jako I_R podmodul R_R.*

Definice 5. *Řekneme, že $I < R$ je nilpotentní, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $I^n = 0$.*

Definice 6. *Řekneme, že ideál $I < R$ je T-nilpotentní (transfinitně nilpotentní), pokud pro každou posloupnost $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$, $j_i \in I$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $j_1 \cdot j_2 \cdots j_n = 0$.*

Pozorování 1. *Nechť R je okruh a I jeho ideál, potom platí:*

1. *Pokud je I T-nilpotentní, potom je každý prvek I nilpotentní;*

2. *Pokud je I nilpotentní, potom je zanedbatelný a T-nilpotentní.*

Důkaz.

1. Pro $x \in I$ musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že součin posloupnosti $(x)_{i=1}^{n}$ je nula, proto $x^n = 0$.

2. $I < R$ je nilpotentní takový, že $I^n = 0$, potom je zanedbatelný, protože pokud existuje $M \le R$ takové, že $M + I = R$, potom

$$R = (M + I)^n = M(M^{n-1} + \dots I^{n-1}) + I^n = M(\dots) \subset M\,.$$

Tím jsme dokázali, že $M = R$. □

Další důležitá tvrzení, která uvedeme bez důkazu v následující větě a jsou k dohledání například v učebnici (Anderson a Fuller, 1992, Věta 15.3 a 15.8).

Věta 2. *Nechť R je okruh, potom platí:*

1. $\mathrm{J}(R/\,\mathrm{J}(R)) = 0$;
2. $\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid 1 + RxR \subset R^*\}$
3. *Všechny zanedbatelné ideály jsou v Jacobsonově radikálu, dokonce*

$$\mathrm{J}(R) = \bigcup_{I \in \mathcal{Z}} I\,,$$

kde $\mathcal{Z}$ je množina všech zanedbatelných ideálů v R.

Definice 7. *Řekneme, že R-modul P je projektivní, pokud pro každé M, N pravé R-moduly a pro každý surjektivní R-homomorfismus $f : M \to N$ a každý R-homomorfismus $\varphi : P \to N$ existuje $\bar{\varphi} : P \to M$ takové, že $f \circ \bar{\varphi} = \varphi$.*

Duálně definujeme, že R-modul Q je injektivní, pokud pro každý M, K pravé R-moduly a pro každý prostý R-homomorfismus $g : K \to M$ a každý R-homomorfismus $\rho : K \to Q$ existuje $\bar{\rho} : M \to Q$ takové, že $\bar{\rho} \circ g = \rho$.

Definice 8. *Řekneme, že R je perfektní, pokud pro každý pravý R-modul M exisuje projektivní obal. Tj. existuje dvojice (P,p), kde P je projektivní pravý R-modul a $p : P \to M$ je epimorfismus se zanedbatelným jádrem $\mathrm{Ker}(p) \ll P$.*

Budeme také potřebovat následující větu o jednoduchých modulech z článku od Rosenberga a Zelinského (Rosenberg a Zelinsky, 1958, Věta 6).

Věta 3. *Komutativní okruh R je von Neumannovsky regulární právě tehdy, když každý jednoduchý R-modul je injektivní.*

Dále zde uvedeme Bassovu větu ve tvaru z učebnice od Andersona a Fullera (Anderson a Fuller, 1992, Věta 28.4). Z té nás bude zajímat převážně ekvivalence (a)⇔(c), proto se nebudeme zbytkem věty zabývat.

Věta 4 (Bassova)**.** *Nechť R je okruh a $J = \mathrm{J}(R)$ jeho Jacobsonův radikál. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(a) R je zprava perfektní;

(b) R/J je totálně rozložitelný a J je zprava T-nilpotentní;

(c) R/J je totálně rozložitelný a R je zprava max;

(d) Každý plochý pravý R-modul je projektivní;

(e) R splňuje minimální podmínku pro hlavní levé ideály;

(f) R neobsahuje nekonečnou ortogonální množinu idempotentních prvků a každý nenulový levý R-modul má minimální podmodul.

Následující lemma nám dává první náhled na vlastnosti max okruhů a je důležité k důkazu charakterizace. Postupuji podle důkazu z Tuganbaevova článku, který shrnuje znalosti o max okruzích (Tuganbaev, 2002).

Lemma 5. *Nechť R je komutativní max okruh a $S = \{x \in R;\ \forall r \in R\ xr \neq 0\}$ je množina všech regulárních prvků. Potom je každý prvek S invertibilní.*

Důkaz. Ať $Q = RS^{-1}$ je podílový okruh braný jako pravý R-modul. Předpokládejme, že $R \neq Q$. Potom je R-modul Q/R neprázdný, mohu tedy využít, že R je max.

Nechť M/R je maximální podmodul Q/R, kde M je maximální podmodul Q. Nechť $\phi : Q \to Q/M$ je přirozený epimorfismus R-modulů. Takže R-modul Q/M má nějaký generátor $\phi(rs^{-1})$, protože Q/M je jednoduchý. Existuje tedy $a \in R$ takové, že $\phi(rs^{-2}) = \phi(rs^{-1})a$. Dále

$$\phi(rs^{-1}) = \phi(rs^{-2})s = \phi(rs^{-1})as = \phi(r)a = \phi(ra) \in \phi(R) \subset \phi(M)\,,$$

ale $\mathrm{Ker}(\phi) = M$, takže $\phi(rs^{-1}) = 0$, a proto $Q/M = 0$, což je ve sporu s volbou M.

□

Nyní můžeme předvést první příklad, který nám ukazuje, že polynomiální okruhy nemohou být max.

Příklad. Nechť R je komutativní okruh, potom $R[x]$ není max.

Polynom x je regulární prvek, jinak by existovalo nenulové $a \in R$ takové, že $a \cdot 1 = 0$, což nelze. Naproti tomu x není invertibilní, což je ve sporu s lemmatem 5.

Následující důsledek se nám bude hodit v grupových okruzích. V nekomutativním případě jej zformuloval Camillo ve svém článku (Cammilo, 1975).

Důsledek 6. *Nechť R je obor integrity, potom R je max, právě když je těleso.*

Důkaz. Pokud R je těleso, pak je max, protože každý neprázdný R-modul M je vektorový prostor nad tělesem R, takže má bázi V. Nechť $v \in V$ Potom je vektorový podprostor generovaný $V \setminus \{v\}$ maximálním podmodulem M.

Pokud R je obor integrity a max, tak z lemmatu 5 plyne, že má každý prvek inverz. Tedy R je těleso.

□

1.2 Charakterizace

V této části přepisuji důležitý výsledek o komutativních okruzích. Důkaz postupuje podle podle (Hamsher, 1967) a (Koifman, 1970). Od tohoto místa předpokládáme, že okruh je komutativní.

Věta 7. *Nechť R je okruh. Potom R je max právě tehdy, když $S = R/\operatorname{J}(R)$ je von Neumannovsky regulární a $\operatorname{J}(R)$ je T-nilpotentní.*

Důkaz. ($\Leftarrow$) Nejdříve ukážeme, že každý S-modul má maximální podmodul. Nechť $M \neq \emptyset$ je pravý S-modul a $m \in M$. Protože mS je cyklický, existuje nějaký jednoduchý R-modul A a R-homomorfismus $\varphi : mS \to A$, který je na. Víme, že S je komutativní von Neumannovsky regulární okruh, tedy z věty 3 víme, že každý jednoduchý S-modul je injektivní. Uvažujme inkluzi: $\mathrm{id} : mS \to M$. Podle definice injektivních modulů existuje $\varrho : M \to S$ takový, že $\varphi = \mathrm{id} \circ \varrho$. To musí být na. $\operatorname{Ker}(\varrho)$ je maximální podmodul, protože podle věty o homomorfismu je $M/\operatorname{Ker}(\varrho) \simeq A$, který je jednoduchý.

Nyní nechť M je nenulový R-modul. Dokážeme, že $\operatorname{J}(R)M \neq M$. Pro spor nechť $\operatorname{J}(R)M = M$, potom existuje $j \in \operatorname{J}(R)$ a $m \in M$ takové, že $j_0 m_0 \neq 0$. Protože $m_0 = \sum j'_k m'_k$, musí existovat alespoň jedno k takové, že $j_0 j'_k m'_k \neq 0$. Označíme $j_1 := j'_k$ a $m_1 := m'_k$. Jelikož máme $j_0 j_1 \in \operatorname{J}(R)$ a $m_1 \in M$, můžeme postup zopakovat a indukcí dostaneme posloupnosti $\{j_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $j_0 j_1 \cdots j_n m_n \neq 0$, což je ve sporu s T-nilpotencí $\operatorname{J}(R)$, tedy $\operatorname{J}(R)M \neq M$. $M/\operatorname{J}(R)M$ je tedy nenulový S-modul, který má dle dokázaného maximální podmodul. Z toho plyne, že i M má maximální podmodul.

($\Rightarrow$) Nechť R je max okruh. Nejprve dokážeme, že S je regulární. Nechť $0 \neq a \in s$. Označme $A = \{s \in S;\ as = 0\}$. $I = aS \cap A$ je ideál, pro který platí $I^2 = 0$, ale v S nemohou být žádné nenulové nilpotentní ideály, protože ty jsou podle pozorování 1 zanedbatelné a všechny zanedbatelné ideály leží v $\operatorname{J}(S)$, který je ale nulový podle věty 2. Z toho vyplývá, že $I = 0$. Podíváme se na $\bar{S} = S/A \neq 0$. Pokud $[s][a] = [0]$, pak musí nutně $sa \in A$, protože $asa = 0$. Dále musí platit, že $(as)^2 = 0$, ale podle tvrzení 1 a 2 je v S nilpotentní pouze 0, takže $as = 0$, a proto platí, že $[s] = [0]$. Proto $[a]$ není dělitel nuly. Z Lemmatu 5 víme, že $[a]$ je invertibilní. Tedy $[a]\bar{S} = \bar{S}$. Existuje $s \in S$ a $a_1,\ a_2 \in A$, pro které platí $(a + a_1)(s + a_2) = 1$. Po vynásobení rovnice a máme $a^2 s = a$. Tedy S je Von Neumannovsky regulární.

Pro spor předpokládejme, že existuje $\{j_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \operatorname{J}(R)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n \neq 0$. Nechť X je volný R-modul se spočetnou bází $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, dále nechť P je podmodul X generovaný prvky $\{x_i - x_{i+1} j_i\}_{i=1}^{\infty}$. Víme, že $P + \operatorname{rad}(X) = X$, protože $\operatorname{rad}(X) = X \operatorname{J}(R)$. Ukážeme, že $P = X$.

Předpokládejme, že $P \neq X$. Podle předpokladů v modulu X/P existuje maximální podmodul $\overline{P}$. Z toho plyne $\operatorname{rad}(X) \subset \overline{P}$ a $P \subset \overline{P}$, z čehož dostáváme $P + \operatorname{rad}(X) = X \subset \overline{P}$, což je spor.

Díky rovnosti X a P víme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ existují $r_1 \ldots r_n \in R$ takové, že $x_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1} j_i)\, r_i$. Když přeskládáme závorky, dostaneme

$$x_1 = r_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \left(r_{i-1} - j_i r_i\right) - x_{n+1} r_n j_n \,.$$

Protože $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tvoří bázi, musí $r_1 = 1$. Dále $r_2 = r_1 j_1 = j_1$, $r_3 = r_2 j_2 = j_1 j_2$, takto postupně dostaneme $r_n = j_1 \cdots j_{n-1}$ a z členu $x_{n+1} r_n j_n$ dostaneme $0 = r_n j_n = j_1 \cdots j_n$, což je ve sporu s tím, že posloupnost není T-nilpotentní.

□

Následující dva příklady ukazují, že obě podmínky v charakterizaci, tedy T-nilpotence i regularita, jsou potřeba. První má T-nilpotentní radikál, ale nemá von Neumannovsky regulární faktor podle radikálu. Druhý naopak má von Neumannovsky regulární faktor, ale nemá T-nilpotentní radikál.

Příklad. $R = \mathbb{Z}$: $\mathrm{J}(\mathbb{Z}) = 0$, tedy je T-nilpotentní, ale $\mathbb{Z}$ nejsou von Neumannovsky regulární.

Například $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ nemá žádný maximální podmodul.

Příklad. Nechť p prvočíslo a

$$R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Nechť I_1 je ideál generovaný $(0,1,1,\dots)$ a I_2 generovaný $(1,p,1,1,\dots)$. Snadno nahlédneme, že se jedná o maximální ideály, takže

$$\mathrm{J}(R) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} I_i = \Big\{(0,a_1p,a_2p\dots),\, a_i \in \{0,1,\dots,p^i-1\}\Big\} =: L.$$

Nyní si všimneme, že pro každé $e \in L$ a pro každé $r = (r_1,r_2,\dots) \in R$ je $1 - er$ invertibilní, protože pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $a_ipr_i \in p\mathbb{Z}_{p^{n-1}} = \mathrm{J}(\mathbb{Z}_{p^n})$ a tedy je $1 - e_ipr_i$ invertibilní podle věty 2. Podle stejného tvrzení je $e \in \mathrm{J}(R)$. Právě jsme ukázali, že $L = \mathrm{J}(R)$ Dále pro každé $a = (a_1,a_2...) \in R/\mathrm{J}(R)$ můžeme zvolit $x = (x_1,x_2...)$ tak, že

$$x_i = \begin{cases} a_i^{-1}, & a_i \neq 0\,; \\ 0, & a_i = 0\,. \end{cases}$$

Když se podíváme na axa po složkách, vidíme, že pokud $a_i = 0$, tak $(axa)_i$ se rovná 0, jinak $(axa)_i = a_ix_ia_i = a_ia_i^{-1}a_i = a_i$. Tedy $R/\mathrm{J}(R)$ je von Neumannovsky regulární. $(0,p,p,p...) \in \mathrm{J}(R)$, ale $\forall n \in \mathbb{N}$ $(0,p,p,p...)^n \neq 0$, protože na $n+1$ souřadnici bude $p^n \neq 0$ v $Z_{p^{n+1}}$. A proto $\mathrm{J}(R)$ není T-nilpotentní, tudíž R není max.

Následujícím příkladem je okruh, který je max, ale není ani artinovský, ani noetherovský. Přestože artinovské okruhy jsou vždycky max, obráceně to neplatí. Noetherovskost takto svázána není, protože nyní máme polynomy nad tělesy, které jsou noetherovské, ale nejsou max, tělesa, která jsou max i noetheroská a následující příklad, který je max, ale není noetherovský.

Příklad. Jako okruh si vezmeme horní trojúhelníkové matice typu 2×2 tvaru

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\, a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{R}\right\} \subset M_2(\mathbb{R})\,.$$

Ty jsou komutativní okruh, neboť

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\,.$$

Snadno nahlédneme, že všechny netriviální ideály musí mít $a = 0$. Dále tedy pro každý netriviální ideál I platí

$$I \subset \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M,$$

což je jediný maximální ideál, a proto $\mathrm{J}(R) = M$. Díky vlastnostem násobení matic je M nilpotentní, protože $M^2 = 0$, takže je i T-nilpotentní. Navíc $R/\mathrm{J}(R) \simeq$

$\mathbb{Q}$. Proto je R max okruh. Ještě ukážeme, že R není artinovský, ani noetherovský. Nechť $\{a_1, a_2, \dots\}$ je podmnožina nějaké báze $\mathbb{R}$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$. Potom ideály

$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}$$

tvoří nekonečnou ostře rostoucí posloupnost ideálů v R, tedy R není noetherovský a z Hopkins-Levitzkiho věty dostáváme, že není ani artinovský (Anderson a Fuller, 1992, Věta 15.20).

Poslední příklad v této kapitole ukazuje na skutečnost, že nám nestačí, nilpotence všech prvků Jacobsonova radikálu, aby byl okruh max.

Příklad. Nechť T je těleso a $R = T[x_1,x_2,\dots]$ je noetherovský obor. Podíváme se na okruh $S = R/(x_1^2,x_2^2\dots)$. Všimneme si, že každý polynom s nulovým absolutním členem je nilpotentní, protože pokud jej umocníme na počet monočlenů $+1$, tak podle Dirichletova principu bude v každém monočlenu součinu figurovat alespoň jeden původní monočlen dvakrát. Z toho vyplývá, že

$$\mathrm{J}(S) \supset \{f \in S;\ f\,\textit{má nulový absolutní člen}\}\,.$$

Pokud by v $\mathrm{J}(S)$ byl nějaký polynom s nenulovým absolutním členem a_0, tak z uzavřenosti ideálu na sčítání musí $a_0 \in \mathrm{J}(R)$, a tedy i $a_0a_0^{-1} = 1 \in \mathrm{J}(S)$, což nelze. Takže máme $\mathrm{J}(S) = \{f \in S;\ f\,\textit{má nulový absolutní člen}\}$. $S/\,\mathrm{J}(S) \simeq T$ což je von Neumannovsky regulární okruh, protože je to těleso. V radikálu máme posloupnost $(x_i)_{i=1}^{n}$, která nám v součinu nikdy nedá nulový polynom. Takže R není max.

2. Grupové okruhy

2.1 Definice

Nejprve zavedeme pojem grupového okruhu. V definici by měli být rozlišeny symboly pro násobení v grupě, okruhu a grupovém okruhu a symboly pro sčítání v grupovém okruhu a okruhu. Podle konvencí, například v učebnici od Césara Miliese a Sudarshana Seghgala (Milies a Sehgal, 2002, str. 199), je ale zapisujeme stejným symbolem a $\cdot$ vynecháváme.

Definice 9. *Nechť $R = (R, \cdot\,, +\,, -\,, 0, 1)$ je okruh a $G = (G, e_G, \cdot\,, ^{-1})$ je grupa, potom definujeme grupový okruh*

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, r_g \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } r_g \right\}$$

s nulovým a jednotkovým prvkem definovaným

$$0 = \sum_{g \in G} 0g$$

$$1 = \sum_{g \in G} r_g g, \; kde\, r_{e_G} = 1 \,\&\, r_g = 0 \text{ pro } g \neq e_G$$

Nechť $\sum_{g \in G} r_g g, \sum_{g \in G} s_g g \in RG$, pak definujeme sčítání:

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g\,;$$

a násobení:

$$\sum_{g \in G} r_g g \cdot \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} \sum_{kl = g} (r_k s_l) g\,.$$

V následujícím textu budeme používat $\sum$ i pro součet v okruhu, protože nemůže dojít ke zmatení. Stejně budeme používat i notaci bez $\sum$ v grupovém okruhu například $g + 1 \in RG$. Občas se pro větší přehlednost používá značení $R[G]$ místo RG.

V následujících poznámkách shrneme potřebná základní tvrzení o grupách a grupových okruzích.

Nechť R je okruh a G je grupa, potom víme z (Milies a Sehgal, 2002, str. 199):

- Pro RG grupový okruh definujeme $\epsilon : RG \to R$ předpisem

  $$\epsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g$$

  jako augumentační homomorfismus (augmentation mapping) a jeho jádro označujeme Δ a nazýváme jej augumentační ideál. Potom ϵ je surjektivní homomorfismus okruhů. Definice ϵ je korektní, protože r_g je nenulové jen pro konečně mnoho $g \in G$.

- Nechť H je normální podgrupa G a I je ideál RG generovaný množinou $\{h - e_G; h \in H\}$. Potom $R(G/H) \simeq (RG)/I$. Speciálně, pokud $G = H \times H'$, tak $RH' \simeq (RG)/I$.
- Pokud $G = H_1 \times H_2$, tak $RG \simeq (RH_1)H_2$. Toto pozorování plyne z toho, že $\varphi : RG \to (RH_1)H_2$ definované předpisem

$$\varphi\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{h_2\in H_2}\left(\sum_{h_1\in H_1} r_{(h_1,h_2)}h_1\right)h_2$$

  je izomorfismuz okruhů.

Definice 10. *Supportem prvku $x = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ rozumíme*

$$supp(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\} \ .$$

Definice 11. *Řekneme, že grupa G je lokálně konečná, pokud každá její konečně generovaná podgrupa je konečná.*

V abelovských grupách je lokální konečnost ekvivalentní pojmu torzní grupa, protože v podgrupě generované prvky $g_1, g_2 \dots g_n$ konečných řádů $l_1, l_2 \dots l_n$ máme pouze konečně mnoho prvků, všechny jsou tvaru $g_1^{k_2} g_1^{k_2} \dots g_n^{k_n}$, kde $0 \leq k_i < l_i$ pro každé $0 < i \leq n$. Obráceně, pokud $g \in G$ generuje konečnou množinu, musí mít konečný řád.

Poznámka. R je komutativní okruh a G je abelovská grupa právě tehdy, když je RG komutativní grupový okruh.

Následující tvrzení jsou k nalezení například ve skriptech profesora Drápala (Drápal, 2009, Tvrzení 5.15, Tvrzení 5.10).

- Každá konečně generovaná abelovská grupa $(G,+)$ se dá zapsat jako direktní součet beztorzní a torzní části; torzní část obsahuje všechny prvky konečného řádu. Dokonce platí:

$$G \simeq \mathbb{Z}^n \bigoplus \oplus \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{p_i^{m_i}} \ ,$$

  kde p_i jsou prvočísla a $n,l,m_i \in \mathbb{N}$.
- Nechť G je torzní abelovská grupa, potom p-primární komponenta je množina, která obsahuje všechny prvky řádu p^k; $k \in \mathbb{N}$. Je to podgrupa G a každá G se dá rozložit na direktní součet p-primárních komponent, tj. $G = \oplus_p G_p$, kde p prochází všechna prvočísla.

2.2 Konečné grupy

V cestě za charakterizací grupových okruhů, které jsou max, nám pomůže následující lemma. To nám omezí výběr okruhů jen na max okruhy.

Lemma 8. *Nechť RG je max, potom R je max.*

Důkaz. $R \simeq RG/\Delta$ a vlastnost být max se zachovává faktorizací.

$\square$

Protože struktura grupových okruhů je poměrně nepřehledná, vytvoříme si následující větou nástroj, díky kterému se můžeme omezit jen na tělesa a grupové okruhy nad nimi. Potom už budeme umět výsledky pro grupové okruhy nad tělesy aplikovat na grupové okruhy nad libovolnými max okruhy. Důležitý pro nás je i fakt, že následující věta platí pro libovolné grupy, takže ne jenom komutativní. Samozřejmě potom RG a TG nejsou komutativní okruhy.

Věta 9. *Nechť R je komutativní max okruh a G grupa. Nechť RG není max, potom existuje maximální ideál I a těleso $T \simeq R/I$ takové, že TG není max.*

Důkaz. Nechť $M \neq 0$ je RG-modul, který nemá maximální RG-podmodul. Protože R lze chápat jako podokruh RG (je izomorfní podokruhu Re_G), je M také R-modul. R je max, a tak existuje N maximální R-podmodul M. Takže

$$I := Ann_R(M/N) = \{r \in R \mid \forall m \in M : mr \in N\}$$

je maximální ideál R, protože M/N je jednoduchý R-modul, navíc $MI \neq M$ (protože $MI \subset N$). Chceme ukázat, že MI je RG-podmodul M. K tomu musíme ověřit jen uzavřenost na násobení prvky RG. Protože každé $g \in G$ je invertibilní prvek RG, můžeme se na násobení g zprava dívat jako na automorfismus M, tedy $Mg = M$. Dále spolu prvky okruhu a grupy komutují ($g \cdot r = 1g \cdot re_G = rg = r \cdot g$), takže $MIg = MgI = (Mg)I = MI$, pro každé $g \in G$. Takže pro každé $\sum_{g \in G} r_g g \in RG$ je

$$MI \sum_{g \in G} r_g g \subseteq \sum_{g \in G} MIr_g g = \sum_{g \in G} (Mg)Ir_g = \sum_{g \in G} MI \subseteq MI,$$

tedy MI je RG-modul a $M/MI \neq 0$. $\mathrm{J}_{RG}(M) = M$, protože M jako RG-modul nemá maximální podmodul. Z toho plyne, že pro M/MI jako $(R/I)G$-modul platí $\mathrm{J}_{(R/I)G}(M/MI) = M/MI$, takže $(R/I)G$ není max. R je komutativní, proto je R/I těleso.

$\square$

Nyní již máme vše potřebné, abychom se postupně podívali na všechny komutativní grupové okruhy. Začneme s konečnýma grupama, kde nám stačí předpokládat komutativní jen okruh. Předpokládejme tedy, že R je komutativní max okruh a G konečná ne nutně abelovská grupa. Pokud by RG nebylo max, tak podle věty 9 existuje těleso T takové, že TG není max. Můžeme zde použít větu, kterou ve svém článku dokázal S. M. Woods (Woods, 1971):

Věta 10. *Nechť R je perfektní okruh, potom RG je perfektní právě tehdy, když G je konečná.*

Protože T je těleso, je také perfektní. Podle uvedené věty je TG perfektní a Bassova věta (věta 4) říká, že je max. Tedy RG je max okruh. Dokázali jsme tedy následující větu.

Věta 11. *Nechť R je komutativní max okruh a G je konečná grupa. Potom RG je max.*

2.3 Konečně generované abelovské grupy

V této sekci se nejprve podíváme na případ, kdy abelovská grupa obsahuje nějaký prvek nekonečného řádu.

Lemma 12. *Nechť T je těleso a G je netriviální abelovská grupa, která není torzní. Potom TG není max.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti nechť G je beztorzní, jinak se podívám na okruh $T(G/\mathcal{T}(G))$, kde $\mathcal{T}(G)$ je torzní část G, ten je podle výše uvedeného textu izomorfní nějakému faktorokruhu TG a pokud dokážeme, že ten není max, tak nemohl být max ani TG. Ukážeme, že TG je obor integrity, ale ne těleso.

- TG je obor integrity. (podle (Milies a Sehgal, 2002, Lemma 6.5.1)) Nechť $a,b \in TG$ jsou takové, že $ab = 0$. Označme grupu H jako grupu generovanou prvky $supp(a) \cup supp(b)$. Protože je to konečně generovaná beztorzní grupa, dá se rozložit na součin $\langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$. TH se tedy dá vnořit do tělesa racionálních funkcí $T(X_1, \ldots, X_n)$, což je ve sporu s tím, že podokruh oboru je obor.

- TG není těleso. Nechť $g \in G$, $g \neq 1$, tedy nemá konečný řád. Ukážeme, že $g + e_G$ nemá inverzní prvek. Pro spor předpokládejme, že $(g + e_G)x = e_G$ pro nějaké $x \in TG$. Potom x obsahuje $a + bg^{-1}$, kde $a,b \in T$ a $a + b = 1$, tedy aspoň jedno z nich je nenulové. Protože

  $$(g + e_G)(a + bg^{-1}) - e_G = ag + bg^{-1}\,,$$

  musí x obsahovat i $-ag$ a $-bg^{-2}$, potom

  $$(g + e_G)(-ag + a + bg^{-1} - bg^{-2}) - e_G = -ag^2 - bg^{-2}\,.$$

  Dále postupujeme induktivně. Nechť pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n > 1$ je $\pm ag^n \neq$ v x. Potom musí být $\mp ag^{n+1}$ v x, protože $(g + e_G)(\pm ag^n) = \pm ag^n \pm ag^{n+1}$. Obdobně $\pm bg^{-n}$ je v x pro každé $n \in \mathbb{N}$. Takže x obsahuje nekonečně mnoho nenulových sčítanců, což je spor, tedy $g + e_G$ nemá inverzní prvek v TG a TG není těleso.

Nyní můžeme použít lemma 6, ze kterého plyne, že TG není max.

□

Z tohoto lemmatu a věty 11 už můžeme dokázat charakterizaci pro konečně generované abelovské grupy.

Důsledek 13. *Nechť G je konečně generovaná abelovská grupa a R je komutativní okruh. Pak RG je max právě tehdy, když R je max a G je torzní.*

Důkaz. Nechť G je torzní a R je max. Potom G je konečná, a tedy i RG je max. Nechť RG je max. Potom $RG/\Delta \simeq R$ je max a G je torzní podle lemmatu 12.

□

2.4 Obecné abelovské grupy

Nyní nám zbývají jen torzní abelovské grupy, které nejsou konečně generované. Následující příklady ukazují, že dokonce pro různá konečná tělesa se stejnou grupou vycházejí různé výsledky.

Příklad. Nechť $T = \mathbb{Z}_2$ a $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_3^*$, tím myslíme nekonečné posloupnosti prvků $\{1,2\}$ s násobením po složkách.

Označme e neutrální prvek G. Potom TG má dva druhy prvků:

1. $x \in TG$ má sudou velikost supportu, pak $x^2 = \left(\sum_{t_g \neq 0} t_g g\right)^2 = \sum t_g^2 g^2 + \sum_{g \neq h} t_g t_h gh$, ale protože $g^2 = e$ a $t_g t_h + t_h t_g = 0$, tak $x^2 = \sum_{t_g \neq 0} t_g g^2 = (\sum_{t_g \neq 0} t_g)e = 0$;

2. $x \in TG$ má lichou velikost supportu, dostaneme se stejnou úvahou k tomu, že $x^2 = (\sum_{t_g \neq 0} t_g)e = 1$.

Z toho vyplývá, že všechny prvky se sudou velikostí supportu jsou v $\mathrm{J}(TG) = \Delta$ a všechny prvky s lichou velikostí supportu jsou invertibilní, takže nejsou v $\mathrm{J}(TG)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označíme $a_n \in G$ prvek, který má pouze na n-té pozici 2. Definujeme prvky $x_i = a_i + a_{i+1}$. Zřejmě $x_i \in \mathrm{J}(TG)$ a zároveň posloupnost (x_i) nemá žádný součin roven nule, protože pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $x_1 \cdots x_i = (a_1 + a_2) \cdots (a_i + a_{i+1}) \neq 0$, protože obsahuje člen $(\underbrace{2,\dots 2}_{n\times},1\dots)$ s koeficientem 1. Tím jsme dokázali, že TG není max.

Příklad. Nechť $T = \mathbb{Z}_3$ a grupa je stejná jako v minulém příkladě. Potom ale pro každý prvek

$$x = \sum_{g \in G} t_g g \in TG$$

platí:

$$x^3 = \sum_{g \in G} r_g^3 g + 3x' = \sum_{g \in G} r_g^3 g = x\,,$$

kde x' je nějaký prvek TG. Tedy TG je von Neumannovsky regulární, takže speciálně je max.

Všimneme si, že v prvním příkladu byla charakteristika tělesa stejná jako řád všech prvků a grupový okruh nebyl max. V druhém příkladu tomu bylo obráceně. V následujícím textu toto pozorování zobecníme.

Nechť G je torzní abelovská grupa, potom ji můžeme napsat jako $G = \coprod_{p \in \mathbb{P}} G_p$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel a G_p je podgrupa prvků G řádu mocniny p. Nechť R je libovolný max okruh a p je prvočíslo. Podíváme se v jakých případech je RG_p max. Definujme $\hat{p} = \underbrace{1 + 1 \cdots + 1}_{p\times} \in R$.

1. $\hat{p}$ není invertibilní, tedy existuje maximální ideál I obsahující $\hat{p}$. Pak je R/I těleso charakteristiky p, protože $\hat{p} \in I$, takže charakteristika $T = R/I$ dělí p, což je prvočíslo. Jak jsme již ukázali, $RG_p/IG_p \simeq TG_p$. Pokud je G_p konečná, tak TG_p je max podle věty 13. Dále pro každé $g \in G_p$ je $g - e_G$ nilpotentní prvek v TG_p, protože $g^{p^n} = e_G$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a

$$(g - e_G)^{p^n} = g^{p^n} - e_G + p(\dots) = g^{p^n} - e_G = e_G - e_G = 0\,.$$

Z toho, že G_p je nekonečná dokážeme v následujícím lemmatu, že buď obsahuje Prüferovu grupu

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ exp\left(\frac{2\pi i m}{p^n}\right) \mid m \in \{0,1,\ldots,p^n-1\}, n \in \mathbb{N}_0 \right\} ,$$

nebo je direktním součinem nekonečně mnoha konečných p-grup, to jsou grupy, jejichž všechny prvky mají řád mocniny p.

Lemma 14. *Nechť G je nekonečná p-grupa. Potom G_p obsahuje Prüferovu grupu, nebo direktní součin konečných p-grup.*

Důkaz. Nechť $S(G) = \{g \in G \mid g^p = 0\}$ je dolní vrstva G, na ní se podíváme jako na vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_p$ (Drápal, 2009, str. 35). Pokud je $S(G)$ nekonečné dimenze, pak grupa obsahuje direktní součin nekonečně mnoha konečných p-grup. Dokážeme, že pokud je $\dim(S(G))$ konečná, tak obsahuje Prüferovu grupu. Budeme postupovat indukcí podle dimenze S jako vektorového prostoru.

Nechť $\dim(S) = 1$, pak je G izomorfní Prüferově grupě, protože pro každou G platí $\dim(S(G/S(G))) \leq \dim(S(G))$, což plyne z (Anderson a Fuller, 1992, Věta 9.8), protože G je nekonečná, musí být dimenze dolních vrstev grup $G_i = G_{i-1}/S(G_{i-1})$, $G_0 = G$ rovna 1. Z toho už plyne, že G je izomorfní Prüferově grupě.

Nyní nechť $\dim(S(G)) = n+1$. Označme $\varphi : G \to C_{(\infty)}^{n+1}$ vnoření, to můžeme, protože Prüferova grupa je injektivní obal $\mathbb{Z}_{p^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (je injektivní (Drápal, 2009, kapitola 6) a nejmenší injektivní, do které se $\mathbb{Z}_{p^n}$ vnořuje). Podíváme se na $\varphi(G)_1 = \varphi(G) \cap (C_{(\infty)} \times 1 \times \cdots \times 1)$ průnik s první složkou. Ta je buď nekonečná, tedy $\varphi(G)_1 \simeq C_{(\infty)}$, protože $C_{(\infty)}$ neobsahuje nekonečné vlastní podgrupy, nebo je $\varphi(G)/\varphi(G)_1$ nekonečná abelovská p-grupa s dimenzí dolní vrstvy rovné n a obsahuje Prüferovu grupu podle indukčního předpokladu, takže i G obsahuje Prüferovu grupu.

□

Nyní si oba případy rozebereme.

(a) Nechť G obsahuje Prüferovu grupu. Potom pro každé $i \in \mathbb{N}$ zvolím $g_j = exp\left(\frac{2\pi i}{p^j}\right)$. Z toho plyne, že posloupnost $(g_j - e_G)_{j=1}^n$ je posloupnost prvků $\mathrm{J}(TG_p)$, ale

$$\prod_{j=1}^{n} (g_j - e_G) = 1 + \sum_{j \in J} (-1)^{c(j)} exp\left(2\pi i j\right) ,$$

$$\text{kde } J = \left\{ \sum_{k \in K} \frac{1}{p^k}; K \subset \mathcal{P}\left(\{1,2,\ldots,n\}\right), K \neq \emptyset \right\} \text{ a } \forall j \in J : c(j) \in \mathbb{N} ,$$

což nikdy není 1, protože koeficient u e_g je jedna. To platí, protože $0 < \sum_{k \in K} \frac{1}{p^k} < 1$, a tedy $exp\left(2\pi i j\right) \neq 1$. Tím jsme dokázali, že $\mathrm{J}(TG_p)$ není T-nilpotentní.

(b) Nechť G obsahuje direktní součin nekonečně mnoha konečných podgrup. Máme $G_p \geq \coprod_{i=1}^{\infty} C_i$, pro každé $i \in \mathbb{N}$ zvolím g_i nenulový prvek i-té podgrupy C_i. Protože se jedná o direktní součin, musí pro každé $n \in \mathbb{N}$ $g_1 g_2 \cdots g_n \neq e_G$ a pro žádné $n \in \mathbb{N}$ neexistuje $1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_l < n$, $l < n$, že

$$g_1 g_2 \cdots g_n = g_{p_1} g_{p_2} \cdots g_{p_l}$$

Posloupnost $(g_i - e_G)_{i=1}^{n}$ tedy nemůže mít nulový součin pro žádné $n \in \mathbb{N}$, takže $\mathrm{J}(TG_p)$ není T-nilpotentní.

Takže TG_p je max právě tehdy, když je G_p konečná.

2. $\hat{p}$ je invertibilní. Předpokládejme pro spor, že RG není max. Potom existuje těleso $R/I \neq 0$ takové, že $(R/I)G_p$ není max. Ale R/I je určitě regulární a $p \notin I$, takže $\hat{p}$ je invertibilní v R/I. Potom můžeme použít následující větu z Connelova článku (Connell, 1963, Věta 3).

   Věta 15. *SG je regulární právě tehdy, když S je regulární, G je lokálně konečná a $\hat{p}$ je invertibilní pro každé p prvočíslo, které dělí řád nějakého prvku grupy G.*

   Takže TG_p je regulární, speciálně $\mathrm{J}(TG_p) = 0$, takže je max podle věty 7, což je spor s tím, že RG_p není max.

Věta 15 se v Connelově článku (Connell, 1963, Věta 3) dokazuje pomocí o něco slabších tvrzení uvedených v textu od McLaughlina (McLaughlin, 1958). Obě verze ale vycházejí pro abelovské grupy stejně. Kvůli rozsahu důkazu jej zde neuvádím.

Věta 16. *Nechť G je abelovská grupa a R je komutativní okruh. Potom RG je max právě tehdy, když G je torzní a pro každé p prvočíslo je $\hat{p}$ invertibilní, nebo G_p je konečná. Kde $G = \coprod_{p \in \mathsf{P}} G_p$ a G_p jsou p-primární komponenty.*

Důkaz. Nechť RG je max, potom je R max, G je torzní podle lemmatu 12. Nechť p je libovolné prvočíslo. Předpokládejme, že $\hat{p}$ není invertibilní v R. Víme, že RG_p je max. Dle předchozího textu tedy musí být G_p konečná.

Na druhou stranu pro spor předpokládejme, že RG není max, i když předpoklady na pravé straně platí. Potom podle věty 9 existuje nějaké těleso $T \simeq R/I$ takové, že TG není max. Protože G je lokálně konečná, musí být těleso kladné charakteristiky p, jinak by TG bylo von Neumannovsky regulární, tedy max. $\hat{p}$ nemůže být invertibilní v R, protože $\hat{p} \in I \neq R$. Dále musí být $G_p \neq 0$ a platí, že $G = G_p \times H$, takže $TG \simeq (TH)G_p$. TH určitě splňuje všechny předpoklady věty 15, takže je regulární a speciálně max. Navíc G_p je konečná, a tedy podle věty 13 je $(TH)G_p$ max, což je spor.

□

2.5 Konstrukce

Pokud dáme oba výsledky dohromady, můžeme konstruovat nekomutativní grupové okruhy, které nejsou perfektní. Vybereme libovolnou nekonečnou abelovskou grupu G_1 a perfektní okruh R tak, aby splňovaly podmínky věty 16, abychom získali okruh RG_1, který je max. Ten ale podle věty 10 není perfektní. Následně zvolíme libovolnou konečnou nekomutativní grupu G_2 a podle věty 11 získáváme nekomutativní okruh $(RG_1)G_2$, který je max, ale není perfektní.

Příklad. Například dříve zmíněný grupový okruh $\mathbb{Z}_3\left[\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_3^*\right]$ s dihedrální grupou $\mathbf{D_6}$ tvoří nekomutativní grupový okruh $\left(\mathbb{Z}_3\left[\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_3^*\right]\right)\mathbf{D_6}$, který je max, ale není perfektní.

Závěr

V prvni kapitole jsme z článků (Tuganbaev, 2002), (Koifman, 1970), (Hamsher, 1967) přejali důkaz charakterizace max okruhů, který jsme doplnili příklady a přidali jsme si užitečné pozorování o oborech. V druhé kapitole jsme zadefinovali třídu grupových okruhů, na kterých jsme díky poznatkům z (Woods, 1971), který dokazuje větu 10, dokázali, že pro konečné grupy je grupový okrh max, právě když je okruh max. Následně jsme tohoto využili a s použitím charakterizace von Neumannovsky regulárních grupových okruhů z (Connell, 1963), jsme dokázali, že komutativní grupové okruhy jsou max právě tehdy, když je okruh max, grupa je torzní a pro p prvočíslo je součet p jedniček invertibilní, nebo je jen konečně mnoho prvků řádu mocniny p.

V práci jsme problém vyřešili pro třídu komutativních okruhů, protože struktura nekomutativních max okruhů je složitá a nedostatečně popsaná. I přes to jsme nakonec ukázali konstrukci nekomutativních grupových max okruhů, které nejsou perfektní.

Seznam použité literatury

ANDERSON, F. W. a FULLER, K. R. (1992). *Rings and categories of modules.* Graduate texts in mathematics: 13. Springer. ISBN 0-387-97845-3.

BASS, H. (1960). Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **95**(3), 466–488. ISSN 00029947.

CAMMILO, V. P. (1975). On some rings whose modules have maximal submodules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **50**(1), 97–100. ISSN 00029939.

CONNELL, I. G. (1963). On the Group Ring. *Canadian Journal of Mathematics*, **15**, 650–685. doi: 10.4153/CJM-1963-067-0.

DRÁPAL, A. (2009). *Teorie grup – základní aspekty.* Karolinum. ISBN 80-246-0162-1.

HAMSHER, R. M. (1967). Commutative rings over which every module has a maximal submodule. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **18** (6), 1133–1137. ISSN 00029939.

KOIFMAN, L. (1970). Rings over which every module has a maximal submodule. *Mathematical Notes*, **7**(3), 215–219. ISSN 00014346.

MCLAUGHLIN, J. E. (1958). A note on regular rings. *Michigan Math. J*, **5**, 127–128.

MILIES, C. P. a SEHGAL, S. K. (2002). *An Introduction to Group Rings.* Kluwer Academic Publisher. ISBN 1-40200239-4.

ROSENBERG, A. a ZELINSKY, D. (1958). Finiteness of the injective hull. *Mathematische Zeitschrift*, **70**.

STANOVSKÝ, D. (2010). *Základy algebry.* Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-105-7.

TUGANBAEV, A. A. (2002). Rings whose nonzero modules have maximal submodules. *Journal of Mathematical Sciences*, **109**(3), 1589–1640. ISSN 1072-3374.

WOODS, S. M. (1971). On perfect group rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **27**(1), 49–51.