

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Antonín Procházka

Napierovy logaritmy

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky – Učitelství informatiky

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 9. 5. 2019

Podpis autora

Poděkování. Rád bych poděkoval vedoucímu své práce, Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za vstřícný a ochotný přístup. Také děkuji své rodině za podporu během mých dlouhých studií. Dále bych chtěl poděkovat otci své partnerky, Ing. Janu Starému za cenné rady, věcné připomínky a jazykovou korekturu.

Název práce: Napierovy logaritmy

Autor: Antonín Procházka

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Text je věnován vzniku logaritmických tabulek na začátku 17. století. Klíčovou osobou je John Napier, na jehož dílo je práce zaměřena. Cílem je vysvětlit historické souvislosti a objasnit, jakým způsobem tehdejší matematici při vymýšlení logaritmů uvažovali.

Klíčová slova: J. Napier J. Bürgi logarithmus tabulky číselná soustava

Title: Napier's logarithms

Author: Antonín Procházka

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This text is devoted to the creation of logarithmic tables at the beginning of the 17th century. The key person is John Napier and the thesis focuses on his work. The goal is to explain the historical context and to show how mathematicians of that time were thinking when inventing logarithms.

Keywords: J. Napier J. Bürgi logarithm tables number system

Obsah

Úvod	3
1 Jak nám logaritmy pomáhají	4
1.1 Motivační příklad	5
1.2 Práce s tabulkami	6
1.3 Logaritmické pravítko	12
1.4 Výhody logaritmů	14
2 Proč zrovna deset	15
2.1 Lidé, Země a 10	17
2.1.1 Prsty	17
2.1.2 Myšlenkové schopnosti	17
2.1.3 Nejlepší základ pro konkrétní počet	19
2.2 Dvanáctková soustava	22
2.2.1 Vlastnosti dobré číselné soustavy	22
2.2.2 Výhody pro dělitelnost a násobilku	23
2.2.3 Výhody pro zápis čísel necelých	25
2.2.4 Další vlastnosti čísla 12	26
3 Vznik logaritmů	28
3.1 Zjednodušení násobení pomocí goniometrických funkcí	28
3.2 Metoda čtvrtin čtverců	29
3.3 Aritmetická a geometrická posloupnost	30
3.3.1 Neceločíselné exponenty	31
3.3.2 Kvocient blízký jedné – Bürgiho logaritmus	32
3.4 Jak uvažoval Napier	37
4 Definice a použití Napierova logaritmu	39
4.1 Zavedení logaritmu	40
4.1.1 Pohyb bodu B	40
4.1.2 Pohyb bodu G	41
4.1.3 Definice logaritmu	41
4.2 Vlastnosti logaritmů	43
4.3 Tabulky logaritmů	45
4.3.1 Jak se vyznat v tabulkách	45
4.3.2 Čísla mimo tabulky	49
4.4 Příklady použití	51
4.5 Napierův i Bürgiho logaritmus je přirozený	53

5 Výpočet Napierových tabulek	55
5.1 Posloupnosti čísel	56
5.1.1 První posloupnost	56
5.1.2 Druhá posloupnost	56
5.1.3 Třetí posloupnost	57
5.1.4 Tabulka radikálů	57
5.2 Doplnění logaritmů k posloupnostem	58
5.2.1 První posloupnost	59
5.2.2 Druhá posloupnost	61
5.2.3 Třetí posloupnost	63
5.2.4 Tabulka radikálů	65
5.3 Nalezení logaritmů k sinům úhlů	66
5.3.1 Čísla z rozsahu tabulky radikálů	67
5.3.2 Čísla mimo rozsah tabulky radikálů	68
5.4 Rozdíl mezi Bürgiho a Napierovým logaritmem	69
5.5 Chybná interpretace v některých publikacích	69
6 Odvození předpisu pro Napierův logaritmus	71
6.1 Pohybující se body	71
6.1.1 Použité geometrické útvary	71
6.1.2 Přesný popis pohybu bodu B	72
6.1.3 Přesný popis pohybu bodu G	73
6.1.4 Dodatečné požadavky	73
6.2 Definice logaritmu	76
6.2.1 Otázky vznikající ohledně Napierovy definice	76
6.3 Odvození prvním způsobem	79
6.4 Precizní odvození vzorce pro Napierův logaritmus	80
6.4.1 Pohyb bodu B na přímce	80
6.4.2 Pohyb bodu G na polopřímce	81
6.4.3 Použití podmínek o rychlostech a finální odvození	83
Závěr	85
Literatura	88
Seznam obrázků	90

Úvod

V oblasti zjednodušení náročných číselných operací (násobení, dělení, odmocňování a umocňování) dlouhých čísel s mnoha ciframi, například deseti, došlo v historii ke dvěma zásadním inovacím. Tou první byly dekadické logaritmy objevené v 17. století, druhou potom kapesní kalkulátory resp. počítače obecně ve století dvacátém. Tato práce se zabývá počátkem vzniku logaritmických tabulek a je zaměřena na dílo Johna Napiera, považovaného za vynálezce logaritmů. Hlavním literárním zdrojem jsou tak jeho dvě knihy [8] a [9] o používání a o způsobu vypočítání jeho logaritmických tabulek.

Cílem práce je podat přehled o představách Johna Napiera, vysvětlit definice a příklady v jeho dvou knihách, vyjádřit myšlenky z těchto knih v řeči moderní matematiky a ověřit, že jeho úvahy, které tehdy nemohl formálně dokázat, byly správné. Tímto způsobem nakonec odvodíme, že Napierův logaritmus byla ve skutečnosti drobná modifikace logaritmu přirozeného a je dán vzorečkem

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Práce je rozdělena do šesti na sebe navazujících kapitol.

Kapitola 1 vysvětuje, proč jsou logaritmické tabulky užitečné, jak se používají a jaká situace ve světě vedla v 17. století k jejich vynálezu.

Kapitola 2 je věnována převážně mým osobním úvahám, kde se zabývám důvody, proč používáme k vyjadřování čísel soustavu o základu právě deset. Nejedná se tak o klasickou rešerší. Beru na vědomí, že takový text nebývá typickou součástí závěrečné práce. Jsem však přesvědčen, že tato diskuse k tématu patří. Dekadický logaritmus má totiž mezi logaritmy o ostatních základech význačné vlastnosti, kvůli kterým jsou nejpraktičtější právě dekadické logaritmické tabulky. Tyto hezké vlastnosti jsou důsledkem toho, že čísla vyjadřujeme v dekadické soustavě.

Kapitola 3 se zabývá myšlenkami, které pravděpodobně přivedly Napiera k vynálezení logaritmů.

Kapitoly 4 a 5 jsou zaměřeny na Napierovo dílo – knihy [8] a [9], kde v první ukazuje, jak logaritmy používat a ve druhé vysvětuje, jak své tabulky vypočítal.

Kapitola 6 je potom uchopením Napierových definic pomocí prostředků soudobé matematiky a je v ní odvozen výše uvedený funkční předpis Napierova logaritmu.

Kapitola 1

Jak nám logaritmy pomáhají

V šestnáctém a začátkem sedmnáctého století probíhal významný rozmach všech vědních oborů. Změnilo se například vnímání vesmíru. Koperníkův heliocentrický pohled začíná být po sto letech zápasení s názory církve konečně přijímán. V Itálii Galileo Galilei pokládal základy mechaniky, v Německu Johannes Kepler formuloval své nebeské zákony o pohybu planet, osvobožující astronomii od geocentrismu jednou pro vždy. Fernão de Magalhãesovo obeplutí světa v roce 1521 rozpoutalo éru námořních výprav. V roce 1569 Gerhard Mercator zveřejnil mapu, ve které dokázal zobrazit celý svět na jediné rovinné ploše tak, jak ji známe z atlasů dnes a nebyl tedy potřeba globus (Maor, [7]).

Věda poznávala a popisovala svět a vesmír. S tím šlo ruku v ruce stále se zvětšující množství číselných dat, mezi nimiž figurovala mnohaciferná čísla, která do té doby potřeba nebyla. Vědci museli trávit mnoho svého času nad zdlouhavými numerickými výpočty – dělení, násobení, umocňování a odmocňování velkých čísel (například sedmiciferných). Výpočty byly slabým článkem tohoto rozmachu. Proto bylo velice žádoucí vyvinout mechanismus, který by výpočetní rutinu zjednodušil. Jedním z prvních, kteří se ujali tohoto úkolu, byl skotský matematik John Napier (1550–1617).

Pro autentické vystižení situace uvedu následující citát (Napier, [8], překlad Napier Mark, [10]). „*Seeing there is nothing, that is so troublesome to mathematical practise, nor that doth more molest and hinder calculations, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers, which besides the tedious expence of time, are for the most part subject to many slippery errors, I began, therefore, to consider in my mind, by what certain and ready art I might remove those hindrances.*“

1.1 Motivační příklad

Napier byl ten, kdo myšlenku logaritmů vynesl na světlo světa. Brzkým důsledkem byl vznik dekadických logaritmických tabulek, které umožňovaly pro každé kladné číslo x nalézt přibližnou hodnotu $\log_{10} x$ a naopak – pro dané reálné číslo y nalézt jeho antilogaritmus neboli hodnotu 10^y . Ukážeme si na příkladu, jak logaritmické tabulky usnadňují výpočty. S jejich použitím totiž dokážeme převádět náročné početní operace jako násobení, dělení, umocňování, odmocňování na jednodušší operace – sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Je důležité mít na paměti, že všechny hodnoty ve všech logaritmických tabulkách jsou zaokrouhlené, tedy s omezenou přesností, typicky 4–20 platných číslic. Abychom se vyhnuli opakovánemu používání slov „přibližně“, „po zaokrouhlení“ či „s přesností na 3 desetinná místa“, budeme v celé práci tato spojení rovnou vypouštět. Taktéž rovnosti ve výrazech budeme pokládat mezi čísla, která si mají odpovídат s určitou (pro praxi dostatečnou) přesností, většinou se však nebude jednat o rovnost v pravém matematickém smyslu.

Příklad 1.1.1 (Maor, [7]). Představme si, že jsme v roce 1940, nemáme tudíž k dispozici žádnou kalkulačku ani počítač a zajímá nás hodnota výrazu

$$x = \sqrt[3]{493,8 \cdot 23,67^2 / 5,104}.$$

Na první pohled se nejedná o jednoduše vyhodnotitelný výraz. Hlavně, málo kdo ví, jak efektivně vypočítat třetí odmocninu. Naštěstí máme logaritmické tabulky, které výpočet výrazně zjednoduší. Zlogaritmováním obou stran výrazu získáme rovnici

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 493,8 + 2 \log 23,67 - \log 5,104).$$

V tabulkách (obrázky 1.1 a 1.2) najdeme, že logaritmy čísel 493,8, 23,67 a 5,104 jsou po řadě 2,6935, 1,3742 a 0,7079. Způsob hledání v tabulkách popíšeme záhy, v následující sekci. Po provedení pár jednoduchých operací (dvou sčítání, jednoho odečítání a jednoho dělení třemi) získáme $\log x = 1,578$. V tabulce antilogaritmů (obrázek 1.4) dohledáme, že $10^{1,578}$ je 37,84. Výsledek jsme tak získali mnohem rychleji a pohodlněji než mechanickým výpočtem.

Určíme-li hodnotu zadaného výrazu pomocí kalkulačky, přečteme na displeji číslo 37,84533. Vidíme, že výsledek získaný použitím tabulky se od výsledku kalkulačky liší o 0,014 %. Tato chyba vznikla proto, že hodnoty v tabulkách byly zaokrouhlené. Proto chceme mít k dispozici co nejpřesnější tabulky. To jde samozřejmě ruku v ruce s jejich velikostí co do počtu stran. I tak ale výsledky nikdy nemohou být naprostě přesné. To každopádně není nevýhoda, která by stála za zavrhnutí této metody. V praxi hodnoty měříme přístroji, a ty samy mají omezenou přesnost. Pokud jsme schopni změřit vzdálenost například posuvným měřítkem nejpřesněji na desetiny milimetrů a použitím tabulek vznikne chyba v rádu setin milimetru, vůbec nás to nemusí trápit a tabulky jsou dostačující.

1.2 Práce s tabulkami

Logaritmická tabulka by v nejjednodušší podobě byla tvořena dvěma posloupnostmi – seznamem čísel a jim příslušných logaritmů. Posloupnost čísel by zahrnovala nejběžněji používané hodnoty, například 0, 01 až 999, 99, postupně po jedné setině. Pro úsporu papíru a rychlejší orientaci jsou ale tabulky organizovány jinak.

V první řadě obsahují namísto čísel jen posloupnosti takzvaných platných číslic. Těmi máme na mysli všechny číslice počínaje první nenulovou zleva a konče poslední nenulovou. Například číslo 120 má dvě platné číslice 1 a 2. Číslo 0, 005014 má čtyři platné číslice 5, 0, 1 a 4. Číslo 30, 080 má čtyři platné číslice 3, 0, 0 a 8. Číslo 0 má nula platných číslic. Pro určení přesné hodnoty logaritmu je důležitá právě posloupnost platných číslic a nikoli velikost (řád) čísla. To je dáno tím, že nuly na začátku či na konci jsou pouze důsledkem násobení celočíselnými mocninami deseti, čemuž odpovídá odčítání či přičítání celých čísel k logaritmu. Například logaritmy čísel 250, 2, 5 a 0, 25 jsou po řadě 2, 398, 0, 398 a $-0,602 = 0,398 - 1$. Bylo by proto zbytečné plýtvat v tabulkách místem pro všechna tato čísla, když jejich logaritmy lze charakterizovat jediným údajem 0, 398 a celou část logaritmu (řád daného čísla) snadno určit podle pozice desetinné (řádové) čárky.

Situaci tak lze vyřešit tím, že v tabulkách budou udány logaritmy jen pro čísla z řádově omezeného rozsahu ($10^n, 10^{n+1}$), $n \in \mathbb{Z}$ přičemž nejpřirozenější volba je $n = 0$. Tabulky zmíněné výše bychom proto pozměnili tak, aby obsahovaly logaritmy pro čísla 1, 0001 až 9, 9999. Nedojde ke ztrátě žádné informace, tabulky budou obsahovat 8999 údajů namísto původních 99999 a žádná informace v nich nebude obsažena zbytečně vícekrát. Právě takto tabulky ve výsledku vypadají. Tvoří je seznam čísel mezi 1 a 10, odstupňovaných po jedné setině nebo tisícině nebo desetitisícině atd., záleží na přesnosti tabulek, a odpovídající seznam hodnot logaritmů. Další odstranění redundance spočívá v tom, že v případě logaritmovaného čísla se vypustí desetinná čárka (tím vznikne posloupnost platných číslic) a v případě logaritmu se neuvádí jednička s čárkou na začátku (tím vznikne necelá část logaritmu).

V druhé řadě, blízká čísla jako 1, 2340 a 1, 2341 mají blízké logaritmy 0, 09132 a 0, 09135 lišící se až na posledních pozicích. Je tedy zbytečné tisknout v tabulkách společnou část 0913 vícekrát. Proto jsou logaritmy těchto čísel v tabulkách charakterizovány jedním údajem – logaritmem čísla 1, 2340 a logaritmy bezprostředně následujících čísel jsou rozlišeny pouze (krátkou) hodnotou posledních řádů, která se k logaritmu prvního čísla přičte. Proto v tabulce 1.1 můžeme vidět, že jeden řádek udává hodnoty logaritmů pro 100 různých čísel, ale přitom obsahuje pouze 19 údajů. To je další výrazná úspora místa.

Uživatel pomocí tabulek určí pouze desetinnou část logaritmu. Jeho celou část si snadno doplní sám podle velikosti (řádu) zadанého čísla. Musí mít na paměti, že číslo z intervalu $(10^n, 10^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$ má celou část logaritmu rovnu n . Ta je tedy o jedna nižší, než počet cifer před desetinnou čárkou. Logaritmy čísel z intervalu $(1, 10)$ tak leží v intervalu $(0, 1)$. Desetkrát menší čísla mají logaritmy o jedna

menší. Jsou jimi tedy záporné doplnky do jedné logaritmů odpovídajících čísel z intervalu $\langle 1, 10 \rangle$. Čísla z intervalu $(10^{-n-1}, 10^{-n})$, $n \in \mathbb{N}_0$ mají celou část rovnu $-n$, což odpovídá zápornému počtu nul za desetinnou čárkou daného čísla. Na hodnotu uvedenou v tabulce koukáme jako na desetinnou část logaritmu čísla mezi 1 a 10. První snížení rádu o 10 neboli odečtení jedničky vyrobí záporný doplněk do jedné. Další snížování rádu už nemění poslední cifry ale pouze tu první – celou část. Například pro posloupnost platných číslic 2, 5, 4, 3 nalezneme v tabulce 1.1 desetinnou část logaritmu 0,4053 a protože číslo 0,02543 je menší než 1, bude desetinná část jeho logaritmu $1 - 0,4053 = 0,5947$. Protože za desetinnou čárkou čísla 0,02543 je jedna nula, jeho logaritmus je $-1,5947$.

Najít logaritmus čísla většího než 1 je tedy snadnější – spočítáme cifry před desetinnou čárkou, snížíme tento počet o 1 a za desetinnou čárku zapíšeme posloupnost z tabulky. V případě logaritmování čísel menších než 1 je situace složitější. Spočítáme nuly za desetinnou čárkou, tím je určena celá část, poté nalezneme v tabulce příslušnou posloupnost platných číslic, přečteme jí odpovídající logaritmus, ten si vyložíme jako desetinné číslo, spočítáme jeho doplněk do jedné, a to je desetinná část výsledku.

Příklad 1.2.1. Na čísle 4,938 ukážeme, jak v tabulkách nalézt jeho logaritmus. Příslušná posloupnost platných číslic je 4, 9, 3, 8 a celá část jeho logaritmu je 0. První dvě platné číslice jsou 4 a 9, proto v tabulce hledíme na řádek $N = 49$. Třetí platná číslice je 3, podle sloupečku s tímto číslem najdeme v této řádku hodnotu 6928. Podle poslední číslice 8 zadaného čísla budeme hledat v 8. sloupečku *Proportional Parts*, stále na řádku 49. Tam je uvedeno číslo 7. To přečteme k 6928, čímž získáme desetinnou část logaritmu. Výsledný logaritmus daného čísla je tedy 0,6935.

Příklad 1.2.2. Na čísle 1,578 ukážeme, jak se pracuje s tabulkou antilogaritmů. Podobně jako u tabulky logaritmů, která hleděla jen na posloupnost platných číslic daného čísla, tato tabulka hledí pouze na desetinnou část daného logaritmu, neboť ta určuje posloupnost platných číslic výsledku, zatímco celá část určuje velikost (rád). To je naznačeno i v tabulce (obrázky 5.3 a ??) kde vidíme, že v prvním sloupci jsou dvě cifry za čárkou což vyjadřuje právě to, že antilogaritmus v tabulce ustanovený je společný pro kladná čísla s touto desetinnou částí. Desetinná část našeho čísla je 0,578, proto hledíme na řádek označený $p = .57$. Dle následující číslice 8 přečteme v 8. sloupci číslo 3784. Hodnoty *Proportional Parts* nás nezajímají, neboť čtvrtá pozice desetinné části našeho čísla je nulová. Kdyby nebyla, hodnotu z tabulky bychom k číslu 3784 přičetli, jako jsme to udělali u tabulky logaritmů. Číslo 3784 určuje posloupnost platných číslic antilogaritmu všech kladných čísel s desetinnou částí 0,578. Protože naše číslo má celou část $0 \leq n = 1$, musí být výsledek v intervalu $\langle 10^n, 10^{n+1} \rangle$. Tyto dvě podmínky splňuje právě číslo 37,84.

Příklad 1.2.3. Ještě zbývá objasnit případ, kdy hledáme antilogaritmus čísla záporného. Vezměme například $-3,22$. Hledáme tedy hodnotu výrazu $10^{-3,22}$. Využijeme toho, že $10^{-3,22} = 10^{-4} \cdot 10^{0,78}$. Pak stačí znát hodnotu výrazu $10^{0,78}$, který určuje posloupnost platných číslic výsledku. V tabulce nalezneme, že antilogaritmus kladných čísel s desetinnou částí 0,78 má posloupnost platných číslic 6, 0, 2, 6 přičemž podle velikosti zadaného čísla $-3,22$ vidíme, že výsledek leží v intervalu $(10^{-4}, 10^{-3})$ takže jím musí být číslo 0,0006026.

TABLE 1		FOUR PLACE COMMON LOGARITHMS $\log_{10} N$ or $\log N$												
------------	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N	0 1 2 3 4					5 6 7 8 9					Proportional Parts								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Obrázek 1.1: Tabulka dekadických logaritmů (Spiegel, [14])

Table 1
(continued)

FOUR PLACE COMMON LOGARITHMS

$\log_{10} N$ or $\log N$

N	0 1 2 3 4					5 6 7 8 9					Proportional Parts									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7	
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7	
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7	
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7	
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7	
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6	
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6	
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6	
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6	
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6	
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6	
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6	
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6	
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6	
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6	
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6	
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5	
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5	
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5	
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5	
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5	
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5	
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4	
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4	

Obrázek 1.2: Tabulka dekadických logaritmů (Spiegel, [14])

TABLE
2

FOUR PLACE COMMON ANTILOGARITHMS
 10^p or antilog p

p	0 1 2 3 4					5 6 7 8 9					Proportional Parts								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	1	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	1	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	1	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	1	2	2	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	1	2	2	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	1	2	2	2	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	1	2	2	2	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	1	2	2	2	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	1	2	2	2	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	1	2	2	3	3	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	3	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	3	4	4	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	4	5	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	4	5	6
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Obrázek 1.3: Tabulka dekadických antilogaritmů (Spiegel, [14])

Table 2
(continued)

FOUR PLACE COMMON ANTILOGARITHMS

10^p or antilog p

p	0 1 2 3 4					5 6 7 8 9					Proportional Parts								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

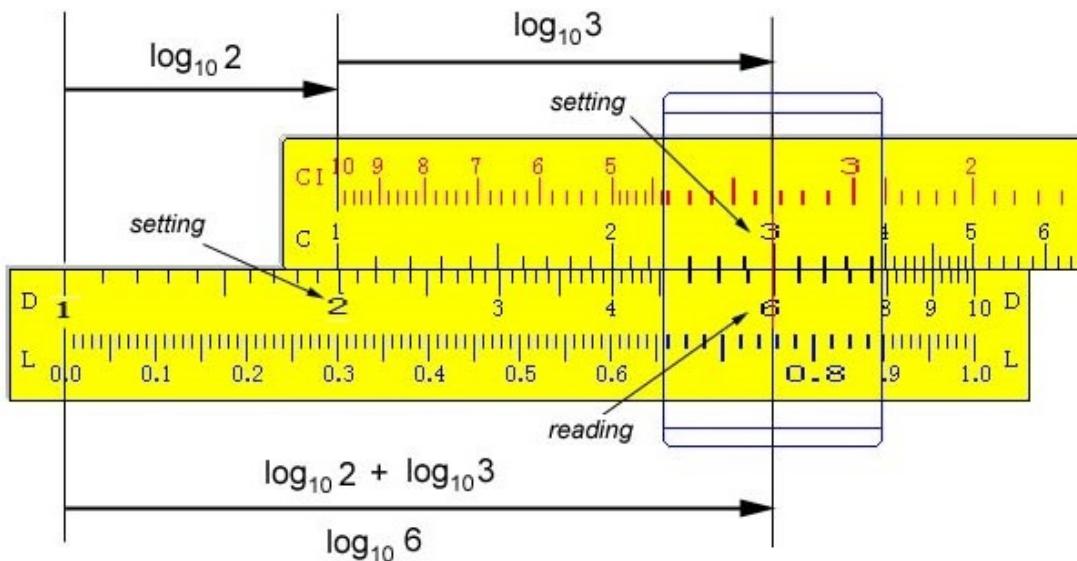
Obrázek 1.4: Tabulka dekadických antilogaritmů (Spiegel, [14])
205

1.3 Logaritmické pravítko

Praktickou implementací logaritmických tabulek potom bylo logaritmické (posuvné) pravítko. To sestává ze tří částí, viz obrázek 1.5. Spodní část (na obrázku se stupnicemi D a L) nazýváme *pevnou*, horní část (zde se stupnicemi C a CI) nazýváme *šoupátkem* a posuvné okénko nazýváme *běhoum s ryskou*. Běhoum může u lepších pravítka mít vlastnost lupy, stejně jako je to na obrázku, kde vidíme konfiguraci pravítka při výpočtu $2 \cdot 3$.

Šoupátko nastavíme jedničkou na stupnici C nad dvojkou na stupnici D a rysku běhounu nad trojku na stupnici C. Na stupnici D potom přečteme pod ryskou běhounu výsledek o hodnotě 6. Samozřejmě, že výpočty lze provádět pouze na číslech z rozmezí 1 až 10 a proto si musí počtař sám spočítat velikost (řád) výsledku, pravítko mu řekne pouze cifry výsledku.

Ex.1 $2 \times 3 = 6$



Obrázek 1.5: Logaritmické pravítko při výpočtu $2 \cdot 3$, zdroj: http://www.ies-math.com/math/java/misc/slide_rule/slide_rule.html, staženo dne 4. 3. 2109

Nyní popíšeme princip funkčnosti. Začneme spodní stupnicí L, která je jediná lineární. K našemu výpočtu ji sice vůbec nepotřebujeme, hodí se ale k pochopení. Udává totiž hodnoty logaritmů čísel ze stupnice D. Proto je pod číslem 1 na stupnici D nula na stupnici L a pod číslem 10 je číslo 1 atd. Stupnice C a D jsou logaritmické. To znamená, že body na nich jsou od počátku vzdáleny logaritmus své hodnoty. Například číslo 6 na stupnici D má od počátku vzdálenost $0,78 = \log 6$, což vidíme na stupnici L. Proto je mezi čísly 1 a 2 velká mezera (jejich logaritmy se hodně liší) a mezi 9 a 10 malá mezera. Když posuneme šoupátko tak, aby stupnice C začínala ve dvojce, vzdálenosti (logaritmy) se sečtou a výsledná vzdálenost čísla 3 na stupnici C od počátku stupnice D (která je k přečtení na stupnici L o hodnotě 0,78) je součtem logaritmů čísel 2 a 3. Víme, že čísla na

stupnici D jsou od počátku vzdáleny o logaritmus své hodnoty. Ve vzdálenosti 0,78 je číslo 6, které je výsledkem. Pravítko tedy aplikuje vzorec $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ neboli vzdálenost (logaritmus) součinu je rovna součtu vzdáleností násobených čísel.

Pro úplnost, stupnice CI (od slova *inverted*) je pouze obrácená stupnice C, tj. začíná od pravého konce. Slouží k hledání převrácených hodnot čísel ze stupnice C. Na stupnici C vidíme číslo 5 a k němu opačné číslo 0,2 vidíme nad ním na stupnici CI. Stejně tak, číslo opačné k číslu 3 na stupnici CI je 0,333, jak můžeme přečíst na stupnici C. Když si totiž vybereme hodnotu na stupnici C, například 3, je ve vzdálenosti logaritmus tří od počátku stupnice C (zleva). To znamená ve vzdálenosti $1 - \log 3$ zprava. Protože je stupnice logaritmická, hodnoty na udávají mocninu deseti, kde exponentem je vzdálenost od počátku. Ve vzdálenosti $1 - \log 3$ od svého počátku na stupnici CI (tentokrát zprava) proto přečteme číslo

$$10^{1-\log 3} = 10^{\log 10 - \log 3} = \frac{10}{3}.$$

Základní části logaritmického pravítka tak jsou pevná část s logaritmickou stupnicí D a šoupátko s druhou logaritmickou stupnicí C. Ryska běhounu potom slouží pro přesnější čtení výsledku, zejména pokud plní funkci lupy.

Velká nevýhoda posuvného pravítka je pouze nízká přesnost, která při běžném používání dosahuje 3 až 4 platné číslice. Pro vyšší přesnost je potom třeba zalistovat v logaritmických tabulkách, které mají přesnost například 14 platných číslic. Práce s nimi je však mnohem zdlouhavější.

Krátce po Napierově objevu logaritmů napadlo angličana Williama Oughtreda sestrojit posuvné pravítko pro zjednodušení výpočtů bez listování v tabulkách. Představil jak lineární, tak kruhovou variantu. Pravítko s běhouinem v podobě jako na obrázku vzniklo v roce 1850. Pravítko bylo běžnou výbavou vědců, inženýrů, fyziků i školáků ještě ve 20. století. Po nástupu kapesních kalkulátorů se pravítka prakticky vytratila.

1.4 Výhody logaritmů

Na příkladu 1.1.1 jsme viděli, že umí-li počtař pracovat s tabulkami, je někdy mnohem lepší použít logaritmy oproti klasickým početním algoritmům. Na výhody postupu s využitím logaritmů se lze dívat z několika úhlů. Zaprvé, u spousty příkladů je tento postup rychlejší. A to zejména tam, kde čísla „nejsou hezká“. Při hledání geometrického průměru čísel 2000 a 800000 je určitě lepší logaritmy nepoužívat. Stačí však ubrat jednu nulu, a výsledek už lze vypočítat jen obtížně. Navíc jím je iracionální číslo, které stejně nemůžeme vyčíslit přesně. V takovém případě je lepší sáhnout po logaritmech. Za druhý typ výhody považujeme to, že je postup jednoduchý. Pro například třetí odmocniny tak není potřeba pamatovat si rekurentní předpisy, kde v několika iteracích umocňujeme a dělíme mnohaciferná čísla. S použitím logaritmů výpočet přeměníme na jednoduché dělení třemi. Řešit příklady pomocí logaritmů je tak jednodušší a rychle se to naučí téměř každý. Zatřetí, výpočty s logaritmy jsou myšlenkově pohodlnější a vyžadují méně zápisů na papír, což vede na menší počet chyb vlivem špatného soustředění.

Představme si, že chceme vynásobit dvě deseticiferná čísla. I dnes bychom museli sáhnout po tužce a papíru (anebo počítači), neboť běžné kalkulačky na tolik cifer nestačí. Standardní algoritmus pro násobení dvou čísel by vyžadoval minimálně 200 operací, kde operací máme na mysli sečtení či násobení dvou jednociferných čísel. Začali bychom zapsáním čísel pod sebe a následně každou cifrou spodního čísla vynásobili všechny cifry horního čísla, což znamená 100 operací. Vzniklo by 10 řádků, každý s deseti či jedenácti číslicemi. Pro sečtení těchto řádků bychom museli provést alespoň $1 + 2 + \dots + 9 + 10 + 9 + \dots + 2 + 1 = 100$ operací. Oproti tomu, s tabulkami by se tento úkon redukoval na 10 operací (sečtení dvou logaritmů) plus hledání v tabulkách, což je rychlejší a příjemnější postup.

Není proto divu, že vědecká komunita přijala logaritmy s obrovským nadšením. Z logaritmů profitoval například Johannes Kepler (1571–1630), který bez nich počítal orbitu Marsu čtyři roky. Vypočítat trajektorie zbylých planet by do konce života ani nestihl. S logaritmy to však zvládl za mnohem kratší dobu. Napsal dokonce Napierovi dopis, aby mu vyjádřil své díky. Kepler byl zároveň významným propagátorem logaritmů v Evropě (Shepory, [13]).

Francouzský matematik P. S. Laplace (1749 – 1827) prohlásil (Maor, [7]): „Tím, že se zkrátila práce, vynalezení logaritmů zdvojnásobilo životy astronomů.“

To nejdůležitější, co z tématu logaritmů plyne, jsou tabulky dekadických logaritmů a související tabulky antilogaritmů. K tomu celá teorie směruje, dekadické tabulky jsou jejím vrcholným produktem. Tato diplomová práce by klidně mohla končit větou typu: „A toto byl příběh, který vedl ke vzniku tabulek dekadických logaritmů, jež přinesly naprostou revoluci ve výpočtech.“ Podobně podstatná změna nastala až po 350 letech vynálezem kapesního kalkulačtoru. Někomu by ale mohlo vrtat hlavou, proč vlastně logaritmus **dekadický**. Copak je číslo 10 nějak výjimečné?

Kapitola 2

Proč zrovna deset

Když se laicky zamyslíme, v čem je logaritmus o základu 10 význačný mezi logaritmami o ostatních základech, dojdeme k tomu, že jedině dekadický má tu vlastnost, že rozdíl logaritmů čísel lišících se mocninou deseti, např. 0,00353 a 3530, je celočíselný. Jinými slovy, desetinné části logaritmů jsou stejné pro čísla se stejnou posloupností platných číslic. Dodejme, že to platí jen pokud jsou obě čísla menší, anebo větší než 1. Svým způsobem to není nic výjimečného, neboť logaritmy o základu 7 čísel lišících se násobkem sedmi se také liší celočíselně. Obecně, tuto vlastnost má každý logaritmus. Jedině u dekadického ji však vnímáme výrazně proto, že čísla lišící se násobkem deseti velice snadno rozeznáme. Nalézt k danému číslu jeho stonásobek či tisícinu je jednoduché – upravíme počet nul či pozici desetinné čárky. Oproti tomu nalézt 49násobek nějakého čísla či jeho sedminu, je mnohem náročnější. Jak jsme ukázali, právě na tomto principu je založena úspornost logaritmických tabulek. Nyní se podrobně podíváme, proč je jediná rozumná volba mít tabulky dekadické.

Kdybychom byli čerstvě seznámeni s vlastnostmi logaritmických funkcí a naším úkolem bylo sestrojit tabulky pro usnadnění výpočtů, jak by tabulky měly vypadat? Jaký základ logaritmu bychom si vybrali?

První nápad by mohl být zamyslet se nad rozsahem nejběžněji používaných čísel, který je řekněme 0,00 až 999,99 a vytvořit tabulky, které pro každé z těchto čísel udávají jeho logaritmus. Obsahovaly by tedy 10^5 údajů a mohly by být klidně o základu $a = 10$, základu 7, základu e či základu 2. Dokud se naše výpočty budou držet v rozmezí 0 až 999,99, na volbě základu vůbec nezáleží. Při potřebě znát logaritmus čísla se prostě jen podíváme do tabulky. V minulé kapitole jsme ukázali, že takové tabulky jsou zbytečně obsáhlé a lze je o 10% údajů zmenšit tím, že budou udávat logaritmy jen pro čísla z rozmezí např. 1,0001 až 9,9999. V tu chvíli se začne ukazovat, že volit některé základy je nevhodné.

Dejme tomu, že potřebujeme zlogaritmovat například číslo $x = 12345$. Můžeme postupovat tak, že číslo dělíme nějakým jiným číslem, například sedmi, tak dlouho, dokud se nedostaneme do rozsahu tabulky (1,0001 až 9,9999). Čtyřikrát vydelením čísla x sedmi získáme číslo 5,1416. V tabulce přečteme příslušný logaritmus a

přičteme k němu čtyřikrát $\log_a 7$, čímž získáme logaritmus čísla x . Stačí znát hodnotu $\log_a 7$, kterou si můžeme dopředu předpočítat, a její hodnota bude součástí tabulek. Metoda je jistě funkční, nicméně velmi nepraktická, neboť dělit číslem sedm je velice náročné. To platí pro dělení všemi čísly, až na jednu výjimku – číslo 10. Pro číslo mimo rozsah tabulky proto postupujeme tak, že jej dělíme či násobíme deseti dokud se nedostaneme do rozsahu tabulky a k přečtenému logaritmu přičteme či odečteme $\log_a 10$ kolikrát, kolikrát jsme dělili či násobili. Aby toto přičítání bylo co nejsnazší, je nevhodnější vybrat $a = 10$ neboť potom má výraz $\log_a 10$ hodnotu 1.

To, že násobení a dělení deseti je triviální oproti násobení a dělení jinými čísly je důsledkem toho, že jsme si zvykli na používání desítkové soustavy. Stejné vlastnosti by mělo počítání s číslem 7 v soustavě sedmičkové. Vynásobení či vydělení daného čísla sedmi by odpovídalo připsání či odebrání nuly na konci anebo posunutí desetinné čárky. Logaritmické tabulky by pak v takovém světě byly logicky pro základ sedm. Soustava univerzálně používaná napříč celým světem klidně mohla být sedmičková namísto desítkové, byť by to bylo velice nepraktické. Důvody této nepraktičnosti ukážeme později.

Z těchto pohledů jsou každopádně všechny soustavy o základu větším než 1 rovnocenné. Všechny mají tu vlastnost, že násobení a dělení takovým číslem, kolik je základ soustavy neboli kolik má soustava číslic, je triviální. Plyně to ze způsobu, jakým v pozičních číselných soustavách čísla vyjadřujeme. Dále budu dolním indexem z u posloupnosti číslic x vyjadřovat to, že posloupnost x reprezentuje číslo v soustavě o základu z . Dolní index z tak říká, jak máme číslice(symboly) posloupnosti x interpretovat. Neuvedení dolního indexu vždy znamená, že daná posloupnost vyjadřuje číslo v soustavě desítkové. To se týká i samotného základu z , který sám o sobě už dolní index nemá – a tudíž vyjadřuje číslo v desítkové soustavě. Používám pojem *posloupnost* proto, že se ve zbytku kapitoly budu vyjadřovat jen o celých číslech, u kterých je velikost (řád) dána délkou posloupnosti číslic a není třeba udávat ještě pozici desetinné čárky. Například vyjádření dekadicky zapsaného čísla 12345 v soustavě o základu 7 vypadá $50664_7 = 5 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0$. Vidíme, že když dané číslo přenásobíme sedmi, zvednou se všechny exponenty o jedna a u koeficientu 7^0 bude 0. Výsledkem tedy bude sedmičkový zápis 506640_7 s připsanou nulou na konci. To, že desítková soustava nám připadá nejpřirozenější, je tedy pouze důsledkem toho, že ji nejvíce (prakticky výhradně) používáme. Výjimečnou ji v našem světě dělá jen to, že jsme si na ni zvykli v globálním měřítku.

2.1 Lidé, Země a 10

Pokud jsou ale všechny číselné soustavy rovnocenné, proč jsme se rozhodli zrovna pro základ 10, tj. vyjadřovat čísla pomocí právě deseti symbolů?

2.1.1 Prsty

První důvod je jednoduchý a nejspíše sehrál majoritní roli. Je jím prostý fakt, že na rukou máme dohromady deset prstů. Dnes se to může zdát zvláštní, neboť člověk běžně prsty k počítání nepoužívá. Evropská společnost je vzdělaná, umí dobře počítat z hlavy a navíc máme k dispozici kalkulačky. Kdo by používal prsty? Ty jsou však základní pomůckou při počátcích výuky počtů u dětí. K vyjádření každé číslice si postačíme s prsty – nemusíme mít nic u sebe, žádné učební pomůcky, není třeba nic psát. Paní učitelka řekne „pět“ a roztáhne prsty na jedné ruce. Každému je jasné, že tento počet se nazývá pět a může si to sám vyzkoušet.

Počítání pomocí prstů pak na příkladu $4 + 3$ může vypadat následovně. Dítě na levé ruce natáhne naráz všechny prsty kromě palce dlani směrem k sobě, neboť už má zažito, že tyto vztyčené prsty symbolizují čtyřku. Následně zároveň s počítáním (jedna, dva, tři) zvedne palec na levé ruce, palec na pravé ruce a ukazovák na pravé ruce. Vidí všechny natažené prsty levé ruky a k tomu palec s ukazováčkem na pravé ruce. Pamatuje si, že toto uspořádání prstů na rukou symbolizuje sedmičku. Kdyby si to nepamatovalo, může prsty spočítat postupným sklápěním, neboť pořadí, v jakém jdou číslice za sebou, si pamatuje bezpečně. O konkrétním uspořádání vztyčených prstů potom rozhoduje i anatomie daného jedince. Pro někoho je pohodlnější symbolizovat čtyřku nikoli vztyčenými prsty kromě palce dlani směrem k sobě, ale například vztyčením prstů jedné ruky kromě malíčku, přičemž dlaň přitlačí na desku stolu, címž si malíček přidrží. (Sedláčková, [12])

2.1.2 Myšlenkové schopnosti

Druhý důvod volby soustavy o základu přibližně deset plyne z toho, jak funguje naše myšlení. Uvažme dva extrémy. Zaprvé, vyjadřovat čísla jednotkovou soustavou pomocí čárek. To je pracné a na naši úroveň zbytečně jednoduché. Sice se nejedná o poziční číselnou soustavu, dobré ale demonstriuje, že příliš triviální způsob zápisu je nevýhodný. My, lidé, jsme chytřejší, dokážeme používat efektivnější systém. Opačný extrém velmi vysoké číslo – například soustava o základu $7! = 5040$. Kolik lidí na světě má takovou myšlenkovou kapacitu, trpělivost a motivaci naučit se pět tisíc symbolů, jejich význam a efektivně s nimi pracovat? Nemluvě o tom, že v takovémto množství už by mohl vzniknout problém i s optickým rozeznáváním jednotlivých symbolů od sebe a symboly by kvůli rozlišení musely být velice složité.

Uvědomme si, že každý početní úkon – například odečtení jednoho čísla od druhého, spočívá na elementární úrovni v tom, že porovnáváme jednotlivé číslice mezi sebou a tyto výsledky známe z paměti. To, že 9 bez 5 jsou 4, že 7 bez 2 je 5, že 8 bez 4 jsou 4 si pamatuji z hlavy. Někdo si takto pamatuje například i že dvě umocněno na desátou je 1024. Standardní postup u výpočtu rozdílu dvou čísel, například 196 bez 54 je, že si z hlavy pamatuji 6 bez 4 jsou dva, 9 bez 5 jsou čtyři a proto je výsledek 142. Podobně pro násobení. Čísla si zapíšeme pod sebe a využíváme znalosti malé násobilky kdy součiny hodnot jednotlivých číslic známe okamžitě z paměti.

Zapamatovat si všechny součty, rozdíly a součiny pro deset číslic zvládneme v dětském věku. Malá násobilka v desítkové soustavě obnáší naučit se z paměti 36 součinů (dvakrát dva, dvakrát tři,... až devět krát devět). Pro dvanáctkovou soustavu to je 55 netriviálních součinů, jak můžeme napočítat na obrázku 2.3. Naučit se malou násobilku v soustavě o vysokém základu, například 60, to obnáší znát z paměti 1711 součinů. Zapamatovat si tedy všechny součty, rozdíly a součiny pro šedesát různých číslic, na to by spousta lidí brzy rezignovala – to raději počítat nebudou, anebo si sami vymyslí jednodušší, byť pomalejší systém.

Deset číslic si zvládne zapamatovat i malé dítě, podobně jako 26 symbolů v případě abecedy. Kdyby jich ale bylo více, spousta lidí by mohla mít problém naučit se počítat už jen proto, že by se nenaučili všechny číslice. Příkladem problémovosti vysokého počtu symbolů může být například to, že zatímco každý snadno rozhodne, zda má vyšší pozici symbol '5' či '9', ne tak jednoduché je rychle odpovědět, zda má vyšší pozici symbol 'T' či 'O'. Snadnejí se totiž zorientujeme mezi deseti symboly než mezi dvacetí šesti. Přitom každý ví, jak jdou písmena abecedy po řadě. Spousta lidí by si musela abecedu nejprve přeříkat (nebo alespoň její část) a pak teprve rozhodnout o správném pořadí daných dvou písmen. V případě vysokého počtu číslic by tak mohla být situace podobná, byť je pravda, že písmena na rozdíl od číslic tak často neporovnáváme.

Je jasné, že příliš málo nebo naopak příliš mnoho symbolů je špatně. Proto musí existovat nějaký rozumný kompromis mezi tím, vhodný pro lidstvo. Způsob vyjadřování a počítání s čísly musí být zároveň dostatečně jednoduchý, aby se jej naučilo co nejvíce lidí (tomu odpovídá nízký základ), zároveň dostatečně efektivní, aby nám na sečtení položek nákupu stačil kousek papíru (vysoký základ). Počet symbolů přibližně 10 tak může být určité optimum mezi celkovým počtem používaných číslic a délhou zápisu čísel s ohledem na to, jaká čísla potřebujeme v životě používat.

2.1.3 Nejlepší základ pro konkrétní počet

Představme si, že máme nějaké množství předmětů a chceme někomu napsat, kolik jich je. Dnes k tomuto účelu používáme výhradně desítkovou číselnou soustavu. Pro tuto situaci se vyhnu použití kterékoliv soustavy a vyjádřím toto číslo jinak: „Vezměme tolik zdravých lidí, kolik mám prstů na rukou i nohou dohromady, a k tomu navíc tolik lidí, kolik mám uší. Všichni tito lidé nechť si sednou za stůl a vyloží na něj všechny ruce, přičemž ten nejstarší z nich ať na stůl položí ruku pouze levou. Pak máme na mysli takový počet, kolik je prstů na stole.“ Pro následné odstavce budeme tento počet označovat písmenem Č. Abych zdůraznil, že mám na mysli určité množství, které je nezávislé na jakékoliv soustavě, budu se o takovém množství vyjadřovat slovem *počet*, nikoliv slovem *číslo*.

Žít v pravěku, k zapsání počtu Č na stěnu jeskyně bychom použili nepoziční soustavu unární a udělali Č čárek. Ve dvojkové soustavě má Č podobu 11010111_2 , což je výrazně kompaktnější tvar. V soustavě desítkové je tvar ještě kratší – 215. V šestnáctkové dostaneme zápis 73_{16} . Vybrat si soustavu o základu 500, pro zápis Č by pak stačil jediný symbol. Jakou soustavu je ale nejlepší si vybrat?

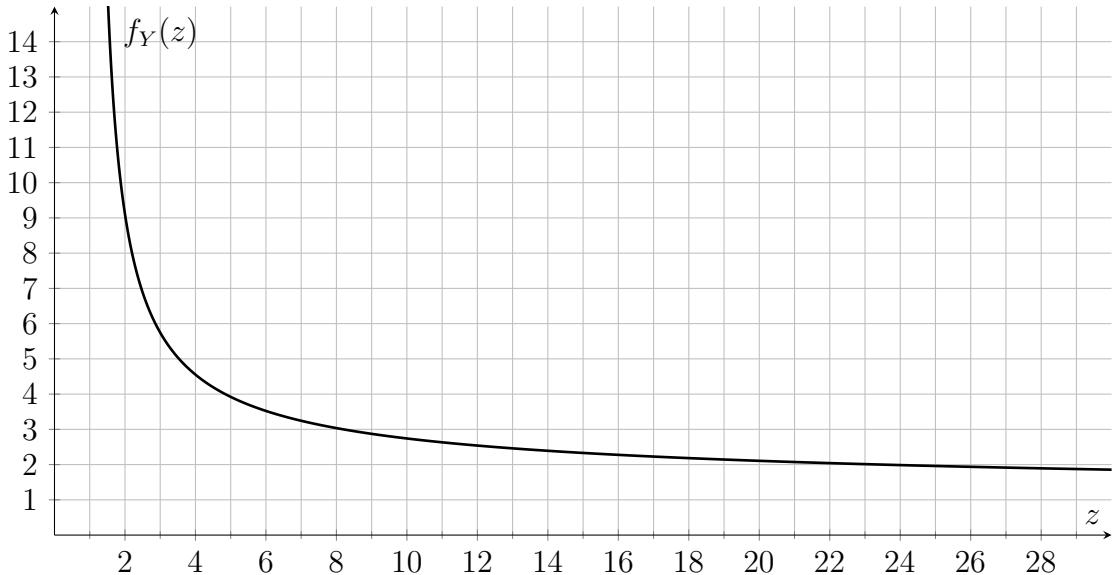
Tvrzení 2.1.1. Na zápis celého kladného čísla Y potřebujeme v soustavě o základu $z \geq 2$ přesně $\lfloor \log_z Y \rfloor + 1$ symbolů. Mějme totiž nějaký počet Y (například počet obyvatel Prahy v 0:00 dnešního rána) a číselnou soustavu o základu $z \geq 2$, kde z je například aktuální počet koček v nejbližší vesnici. Vyjádřením čísla Y v soustavě o základu z je řada symbolů tvaru $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, která je zkratkou za součet $Y = a_n z^n + \cdots + a_0 z^0$, kde $a_0, \dots, a_n < z$, $a_i \in \mathbb{N}_0$. Protože

$$Y \leq (z-1)z^n + \cdots + (z-1)z^0 = (z-1) \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = z^{n+1} - 1,$$

tak $z^n \leq Y < z^{n+1}$. Zlogaritmováním tohoto výrazu při základu z získáme $n \leq \log_z Y < n+1$, z čehož vidíme, že $n = \lfloor \log_z Y \rfloor$. A protože zápis čísla je dlouhý $n+1$, je tvrzení zdůvodněno.

Pro pevné $Y \in \mathbb{N}$ značme $f_Y(z) = \log_z Y$, $z > 1$ funkci přibližně udávající počet symbolů potřebný k vyjádření daného Y v soustavě se základem z . Například pro $Y = 551$ vypadá funkce $f_{551}(z)$ následovně:

Pro jiné hodnoty $Y > 1$ by byl tvar křivky velmi podobný. Podstatné je, že pro všechna tato Y funkce f_Y klesá zpočátku velmi prudce a potom velmi pozvolna. To znamená, že pokud máme dané Y a hledáme takové z , že je soustava o základu z vhodná pro vyjádření čísla Y , má smysl vybírat ideálně v okolí tohoto přechodu míry klesání. Pokud totiž vybereme z příliš malé, budeme mít sice málo symbolů na zapamatování (z), zápis čísla Y však bude velmi dlouhý ($f_Y(z)$). Drobné zvýšení z – přidání pár symbolů do soustavy navíc potom přinese výraznou úsporu v délce zápisu čísla Y . Naopak, pokud vybereme základ z příliš velký, tj. z oblasti, kde funkce f_Y klesá už jen pozvolna, budeme mít soustavu o spoustě symbolů, přičemž snížením počtu těchto symbolů nezvýšíme výrazně délku zápisu čísla Y a tudíž se vyplatí vybrat menší z .



Obrázek 2.1: Graf funkce $f_{551}(z)$

Výpočtem dle tvrzení 2.1.1 či pohledem na graf 2.1 zjistíme, že na zápis čísla $Y = 551$ v soustavě o základu 23 potřebujeme $\lfloor \log_{23} 551 \rfloor + 1 = 3$ symboly. Zápis by měl podobu $10M_{23}$, kde písmeno „M“ reprezentuje hodnotu 22 – jako bychom přirozeně rozšířili symboly známé šestnáctkové soustavy o další písmena abecedy. Základ 23 je z oblasti, kde funkce f_{551} klesá už jen pozvolna. Výběrem menšího základu, například $z = 10$, ušetříme počet symbolů o více než polovinu a zároveň se nezvýší počet symbolů potřebný k zápisu čísla Y . Ještě při volbě $z = 9$ bychom si stále vystačili se zápisem délky 3, přičemž ten by měl podobu 671_9 .

Abychom pojmy uchopili exaktně, prudkým poklesem funkce $f_Y(z)$ na nějakém intervalu máme na mysli to, že její derivace je menší než -1 . Pro větší hodnoty derivace než -1 potom hovoříme o poklesu pozvolném. Jest

$$f_Y'(z) = (\ln Y)' = \left(\frac{\ln Y}{\ln z} \right)' = -\frac{\ln Y}{z \ln^2 z}.$$

Naším cílem je vybrat soustavu vhodnou pro lidstvo, která nemá příliš velký počet symbolů a zároveň dokáže běžně potřebná čísla vyjádřit dostatečně kompaktně. Pro vyjádření konkrétního čísla Y nás tedy zajímá, kde nastává přechod mezi prudkým a pozvolným poklesem, neboť dle argumentů v odstavci výše je takový výběr výhodný. Hledáme tedy základ z , pro který platí $f_Y'(z) = -1$ neboli

$$\ln Y = z \ln^2 z.$$

Pro malé $Y = 2$ má tato rovnice řešení přibližně $z = 2$. Pro velké $Y = 10^{13}$ má řešení přibližně $z = 7$. Pro obrovské $Y = 10^{99}$ má řešení přibližně $z = 23$. V případě $Y = 551$ má uvedená rovnice řešení přibližně v bodě $z = 4$. Kořen v bodě přibližně $z = 10$ má tato rovnice pro čísla 10^{21} až 10^{25} .

Není možné vybrat základ soustavy optimální pro všechna čísla. Můžeme se ale zamyslet nad tím, jaká čísla používáme v běžném životě a z toho odvodit, jaká soustava by byla vhodná pro vyjadřování této do jisté míry omezené skupiny čísel.

Čísla z běžného života, a to zejména z doby, kdy vznikaly systémy zápisu, rozhodně nejsou astronomická. Většina údajů, se kterými se setkáváme – počty lidí ve městě, slepic v kurníku, pytlů pšenice na fűre, ovcí ve stádě, mincí v pokladně či občanů království, jsou v řádech desítek, stovek až desetitisíců. Soustava s deseti symboly je pro nás tedy více než dostatečná a zvyšování počtu symbolů nepřinese na námi používaných číslech prakticky žádnou úsporu. Pět symbolů by bylo příliš málo a když máme na rukou 10 prstů, můžeme vymyslet počítání pomocí deseti symbolů.

Když se zamyslíme, s jakými číslami nejběžněji pracujeme dnes, bude to nejspíše sčítání výdajů za nákupy, přerozdělení výplaty, výše výnosu z investice či souhrnné příjmy za dané období. To jsou čísla řádově tisíců, desetitisíců. Vědci a prvňáčci, pracující s číslami delšími či naopak kratšími, tvoří jen minoritní část populace.

To, že běžně pracujeme pouze s počty v řádu nejvýše tisíců zřejmě souvisí s tím, jaké počty jsme schopni vnímat, představit si a efektivně používat. To se odvíjí od možností našeho mozku a zároveň od způsobu, kterým žijeme. Většinou, pokud je něčeho tisíc či tisíc jedna, tak tento rozdíl nehraje roli. Měření teploty vzduchu, hmotnosti nakupovaného masa, rozměr pozemku, u těchto veličin z běžného života nezkoumáme detailnější rozdíl, než který je postihnut řádově v tisících. Tomu odpovídá i typické členění jednotek po tisíci – gram – kilogram, metr – kilometr atd. Když chceme mluvit o vzdálenosti mezi dvěma městy v rámci státu, nevyjadřujeme se v přesnosti na metry. Střední vzdálenost Země a Měsíce udáváme hodnotou do tisíce (384 tis. km), stejně tak vzdálenost Země od Slunce (150 mil. km). Ve většině životních situací si vystačíme s číslami do tisíce a nemá v nich smysl zkoumat detaily zachycené v číslech vícečiferných.

Náš druh má tu vlastnost, že pokud máme na stole čtyři a méně předměty, dokážeme na první pohled říci, kolik jich je. Je-li jich více, musíme je myšlenkově rozdělit na menší skupiny, případně spočítat. A to ještě často s použitím uka-zováčku. Teoreticky by náš mozek mohl fungovat jako u některých osob s autismem a na první pohled vidět přesné počty i v řádu stovek.

V životě máme čas spočítat děti ve skupině či balíky slámy ve stodole, už ale nepočítáme stromy v lese, diváky na koncertě či zrna na fűre. Vzhledem k našim myšlenkovým a fyzickým schopnostem by to zabralo příliš mnoho času a vzhledem k našemu způsobu života by to bylo nepotřebné a zbytečné. Proto dané množství vyjadřujeme jinou jednotkou – objemem či hmotností s hodnotou opět z běžně používaného rozsahu (cca tisíce). Mít naše smysly měly takový výkon, že spočítáme hvězdy na obloze či ptáky v hejně tak rychle jako počet osob u stolu a přirozeně bychom tak pracovali s mnohem většími číslami, nejspíše bychom si vybrali vyšší základ soustavy. Naopak, nacházet se vývojově v době, kdy jsme rozlišovali pouze několik málo množství – žádný, jeden, pár a mnoho, vystačila by nám bohatě se soustavou o základu 4 bez nekombinování číslic. Že jsme si jako lidstvo vybrali základ přibližně 10 tak je v zásadě důsledkem evoluce a prostředí, v němž žijeme.

2.2 Dvanáctková soustava

Uvažme jednoduše představitelnou situaci, kdy se v průběhu evoluce přihodilo pář náhodných mutací jinak a příroda nás obdařila šesti prsty po jedné ruce namísto pěti. Svět by klidně mohl fungovat tak, jak jej známe dnes. Jedna věc by však byla jistě jinak – univerzálně používaná soustava napříč kontinenty by měla namísto deseti základ $z = 12$.

2.2.1 Vlastnosti dobré číselné soustavy

S poznatky, které máme o číslech dnes, se můžeme zamyslet nad tím, jaká soustava by byla pro počítání nejvhodnější.

Dobrá číselná soustava nemá příliš mnoho symbolů (číslic). Z některých důvodů uvedených níže by se jako vhodná soustava mohla jevit hexadecimální (o základu $z = 60$). Ta má ale symbolů příliš mnoho a spousta lidí by se kvůli tomu ani nenaučila počítat. Nejvhodnější z hlediska počtu symbolů je soustava unární, případně binární. Ty však už další přínosné výhody nemají. Řekněme, že vhodný počet symbolů je přibližně do dvacetí.

Dobrá číselná soustava vyjadřuje běžné počty krátce. Zde prohrává soustava dvojková, neboť už počet tisíc v ní má nepříjemně dlouhý tvar 1111101000. Řekněme, že z tohoto důvodu je vhodný počet symbolů soustavy alespoň pět. Například hexadecimální soustava by čísla zapisovala velice úsporně, je ale vyloučena dle prvního požadavku.

Dobrý základ soustavy má spoustu užitečných dělitelů. Z předchozích podmínek máme rozsah základů pět až dvacet, ze kterého bychom si rádi vybrali ten nejlepší. Většina čísel z tohoto rozsahu ale nemá mnoho dělitelů. Vysoký počet dělitelů základu soustavy je vhodný pro jednoduché naučení násobilky, snadné určování dělitelnosti a pro krátké vyjadřování čísel necelých. Rovnou vyřadíme lichá čísla, neboť při použití soustavy o lichém základu bychom ani nebyli schopni triviálně určit, zda je číslo sudé (museli bychom přečíst celý zápis čísla a spočítat, zda počet lichých cifer je lichý anebo sudý). Jak souvisí pohodlné dělení s prvočíselným rozkladem základu z můžeme vidět v desítkové soustavě – dělením celého čísla dvěma, pěti či jejich násobky vždy získáme číslo s ukončeným zápisem. Při dělení čísla, které ve svém rozkladu obsahují i jiná prvočísla, už ale dostaneme výsledky s periodou. Proto je žádoucí vysoký počet prvočíselných dělitelů. Navíc, pokud dělíme celé číslo dělitelem základu z , bude mít výsledek nejvýše jedno desetinné místo. Hodilo by se tedy, aby byl základ soustavy dělitelný třemi, neboť na tři části rozdělujeme velice často. Tím nám zůstávají čísla 6, 12 a 18. V případě, že chceme pohodlně dělit ještě čtyřmi, jediná volba je základ 12. Navíc, dvanáctka má ještě k tomu dělitele 6, čímž získává nejvíce dělitelů z těchto tří čísel.

Obecně, pokud vezmeme čísla od 5 do 20 a spočítáme poměr počtu vlastních dělitelů ku velikosti čísla, nejlepší hodnotu $\frac{1}{3}$ mají čísla 6 a 12. Podstatné je, z kolika a jakých prvočísel je základ složen. Pokud požadujeme prvočísla alespoň tří, můžeme v rozmezí 5 až 20 získat čísla $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Protože chceme těžit z výhod dělením i jinými prvočísly než 2, zůstávají základy 12, 18, 20. Ten poslední vyřadíme, neboť raději chceme pohodlně dělit třemi, než pěti. Ideální by bylo mít základ soustavy s děliteli 2, 3 i 5 ale nejmenší takové číslo je 30, které nevyhovuje dle prvního požadavku a navíc tento základ není ani dělitelný čtyřmi. Jediný protikandidát dvanáctky je tak základ osmnáct. Dvanáctková soustava má však podstatně méně symbolů. Navíc, násobíme a dělíme čtyřmi mnohem častěji, než devíti. Tyto dva argumenty tak jasně hovoří pro dvanáctku.

Dobrá číselná soustava je lidská. Z tohoto pohledu nejlépe prochází soustava pětková, eventuálně desítková díky počtu prstů. A i když se tento argument může zdát z předešlých nejméně podstatný, zřejmě byl v minulosti rozhodující. Nicméně, dvanáctková soustava je na tom také dobře – stačí namísto deseti prstů obou rukou použít dvanáct článků prstů ruky jedné a k počítání nepoužívat vztyčení prstu ze sevřené dlaně jako u desítkové soustavy, ale tukání na jednotlivé články pomocí palce. Možná je to ještě praktičtější, neboť napočítáme do celku pouze pomocí jediné ruky. Tímto způsobem nejspíš v minulosti obchodníci počítali kopy (60 ks neboli pět tuctů). Stačilo za každý předmět po řadě tuknout palcem na další článek prstu jedné ruky a za každých dvanáct článků (tucet) zdvihnout prst na druhé ruce. Ve chvíli, kdy je zvednuto všech pět prstů, napočítali jsme kopu a vůbec k tomu nepotřebujeme znát nějaké číslice.

2.2.2 Výhody pro dělitelnost a násobilku

Nyní se podrobněji podíváme na výhody dvanáctkové soustavy neboli výhody toho, že základ soustavy má vysoký počet dělitelů. Číslice (symboly) této soustavy označme například

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.$$

Všechny hezké vlastnosti, které v desítkové soustavě platí pro desítku vyjádřenou v desítkové soustavě 10, by ve dvanáctkové soustavě platily pro číslo dvanáct, které je ve dvanáctkové soustavě vyjádřeno také 10_{12} , neboť $10_{12} = 1 \cdot 12^1 + 0 \cdot 12^0 = 12$ (viz tvrzení 2.1.1). Číslo zapsané ve dvanáctkové soustavě tvaru $a_n \cdots a_0$ vyjadřuje součet $a_n 12^n + \cdots + a_0 12^0$. Pro určení dělitelnosti čísla 2, 3, 4, 6 a 12 proto stačí podívat se **pouze na poslední číslici a_0** , což je velká výhoda.

Porovnáním tabulek 2.2 a 2.3 vidíme výhody soustavy dvanáctkové, které jsou důsledkem vysokého počtu dělitelů. Malá násobilka je ve dvanáctkové soustavě těžší pouze pro násobky pěti. Pro násobky sedmi a jedenácti stejně náročná, přičemž pro násobky ostatních čísel je jednodušší. Násobilka je šikovná nejen pro rychlé počítání (po dvou, po třech) ale i pro určování dělitelnosti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Obrázek 2.2: Malá násobilka v desítkové soustavě

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92	A0
B	1A	29	38	47	56	65	74	83	92	A1	B0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	100

Obrázek 2.3: Malá násobilka ve dvanáctkové soustavě

Pro násobky dvou, je situace u obou soustav stejná. V případě násobků tří u desítkové soustavy je každý prvek posloupnosti unikátní a proto se ji bud'to musíme naučit nazepaměť, anebo vždy číslo tři přičíst. První násobky v případě soustavy dvanáctkové jsou 3, 6, 9, 10 a tak dále. Násobilka tří je tak v této soustavě o poznání jednodušší. Pro určení dělitelnosti pak nemusíme sčítat číslice, stačí se jen podívat na číslici poslední. Podobná situace je u násobilky čtyř. U desítkové soustavy se opakuje vzor 4, 8, 12, 16, 20, u dvanáctkové soustavy máme 4, 8, 10, což je mnohem jednodušší. Výrazně hůře vychází z hlediska násobilky soustava dvanáctková u pětky, neboť ta není dělitelem dvanáctky, neopakuje se žádný vzor. V násobcích šesti pak vyhrává soustava dvanáctková, kde se opakuje vzor 6, 10 podobně jako násobky pěti v soustavě desítkové. Kvůli trojce, která není dělitelem desítky, je násobilka šesti v soustavě desítkové složitější a opakující se vzor je 6, 12, 18, 24, 30. V případě prvočísla 7 jsou soustavy rovnocenné. Co se týče osmičky, opět vítězí dvanáctková, kde se opakuje vzor 8, 14, 20. V desítkové soustavě je to 8, 16, 24, 32, 40. Dělitelnost osmi tak ve dvanáctkové soustavě snadno určíme podle toho, zda poslední dvojcíslí je dělitelné osmi. U devítky opět vítězí soustava dvanáctková, kde se opakuje 9, 16, 23, 30 a k určení dělitelnosti devíti stačí, aby poslední dvojcíslí bylo dělitelné devíti.

2.2.3 Výhody pro zápis čísel necelých

Další významná výhoda je v zápisu neceločíselných hodnot. V desítkové soustavě k tomu používáme bud'to zlomky – například $\pi \approx 3\frac{7}{50}$, anebo desetinnou čárku (případně tečku, záleží na konkrétní zemi) k oddělení celé a necelé části čísla tj. $\pi \approx 3,14$. Zobecněním desetinné čárky na všechny číselné soustavy je řádová čárka, pro kterou se někdy používají speciální názvy jako desetinná čárka v případě desítkové soustavy či binární čárka v případě soustavy dvojkové. U dvanáctkové soustavy speciální název (kterým by dle analogie mohl být dvanáctková čárka či dvanáctinná čárka) používat nebudeme.

Zápis s řádovou čárkou typu 0, 123 chápaný jako číslo desítkové soustavy vyjadřuje součet $\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3}$. Stejný zápis chápaný jako číslo v dvanáctkové soustavě vyjadřuje také součet $0,123_{12} = \frac{1_{12}}{10_{12}} + \frac{2_{12}}{10_{12}^2} + \frac{3_{12}}{10_{12}^3}$, který v desítkové soustavě vypadá $\frac{1}{12} + \frac{2}{12^2} + \frac{3}{12^3}$.

Pokud tedy chceme ve dvanáctkové soustavě vyjádřit například podíl celku, který mají dostat dvě osoby ze tří, napíšeme $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{8_{12}}{10_{12}} = 0,8_{12}$. Ve dvanáctkové soustavě tak dokážeme všech pět nejběžnějších a nejjednodušších zlomků $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ vyjádřit konečnými zápisy s řádovou čárkou $0,6_{12}, 0,4_{12}, 0,8_{12}, 0,3_{12}, 0,9_{12}$.

Na obrázku 2.4 běžných zlomků můžeme vidět, že u dvanáctkové soustavy máme celkem 24 periodických vyjádření, u desítkové soustavy to je 30. Ve čtrnácti případech je zápis periodický v desítkové i dvanáctkové soustavě zároveň, přičemž v deseti z těchto případů je dvanáctkový zápis kratší, v těch zbylých jsou zápisy dlouhé stejně. Pětiny, sedminy, desetiny a jedenáctiny mají periodický zápis v soustavě dvanáctkové. Třetiny, šestiny, sedminy, devítiny, jedenáctiny a dvanáctiny v soustavě desítkové. V šesti (1 a 0 nepočítáme) případech (osminy, čtvrtiny a polovina) je zápis ukončený v obou soustavách, přičemž ve všech až na $\frac{1}{2}$ je dvanáctkový zápis kratší, což je důsledkem toho, že čtyřka je dělitelem dvanáctky. Zapisování nejběžnějších zlomků pomocí řádové čárky je tedy ve dvanáctkové soustavě jednodušší.

	10	12		10	12		10	12
$0/_1$	0	0		$^4/_11$	$0.\overline{36}$	$0.\overline{4}$	$^7/_10$	$0.\overline{7}$
$^1/_12$	$0,8\overline{3}$	$0,1$		$^3/_8$	$0,375$	$0,46$	$^5/_7$	$0.\overline{714285} \quad 0.\overline{86A351}$
$^1/_11$	$0.\overline{09}$	$0.\overline{1}$		$^2/_5$	$0,4$	$0.\overline{4972}$	$^3/_11$	$0.\overline{72} \quad 0.\overline{8}$
$^1/_10$	$0,1$	$0,1\overline{2497}$		$^5/_12$	$0,41\overline{6}$	$0,5$	$^3/_4$	$0,75 \quad 0,9$
$^1/_9$	$0.\overline{1}$	$0,14$		$^3/_7$	$0.\overline{428571} \quad 0.\overline{518A3}$		$^7/_9$	$0.\overline{7} \quad 0,94$
$^1/_8$	$0,125$	$0,16$		$^4/_9$	$0.\overline{4}$	$0,54$	$^4/_5$	$0,8 \quad 0.\overline{9724}$
$^1/_7$	$0.\overline{142857} \quad 0.\overline{18A35}$			$^5/_11$	$0.\overline{45}$	$0.\overline{5}$	$^9/_11$	$0.\overline{81} \quad 0.\overline{9}$
$^1/_6$	$0,1\overline{6}$	$0,2$		$^1/_2$	$0,5$	$0,6$	$^5/_6$	$0.\overline{83} \quad 0.A$
$^2/_11$	$0.\overline{18}$	$0.\overline{2}$		$^6/_11$	$0.\overline{54}$	$0.\overline{6}$	$^6/_7$	$0.\overline{857142} \quad 0.\overline{A35186}$
$^1/_5$	$0,2$	$0.\overline{2497}$		$^5/_9$	$0.\overline{5}$	$0,68$	$^7/_8$	$0,875 \quad 0.A6$
$^2/_9$	$0.\overline{2}$	$0,28$		$^4/_7$	$0.\overline{571428} \quad 0.\overline{6A3518}$		$^8/_9$	$0.\overline{8} \quad 0.A8$
$^1/_4$	$0,25$	$0,3$		$^7/_12$	$0,58\overline{3}$	$0,7$	$^9/_10$	$0,9 \quad 0.A\overline{9724}$
$^3/_11$	$0.\overline{27}$	$0.\overline{3}$		$^3/_5$	$0,6$	$0.\overline{7249}$	$^{10}/_11$	$0.\overline{90} \quad 0.\overline{A}$
$^2/_7$	$0.\overline{285714} \quad 0.\overline{35186A}$			$^5/_8$	$0,625$	$0,76$	$^{11}/_12$	$0,91\overline{6} \quad 0.B$
$^3/_10$	$0,3$	$0,3\overline{7249}$		$^7/_11$	$0.\overline{63}$	$0.\overline{7}$	$^1/_1$	1
$^1/_3$	$0.\overline{3}$	$0,4$		$^2/_3$	$0.\overline{6}$	$0,8$		

Obrázek 2.4: Vyjádření běžných zlomků v desítkové a dvanáctkové soustavě

2.2.4 Další vlastnosti čísla 12

Dvanáct je nejmenší číslo se čtyřmi vlastními děliteli. Více vlastních dělitelů má až 24. Dvanáct je nejmenší číslo, které má za dělitele všechna čísla od 1 do 4. Dvanáct je nejmenší abundantní číslo, což znamená, že součet všech jeho dělitelů je větší, než jeho dvojnásobek. Pro dvanáctku tak máme $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 26 > 24$. Další abundantní číslo je 18. Dvanáct je vysoce kompozitní číslo, neboť má více dělitelů, než jakékoli menší číslo. Další vysoce kompozitní číslo je až 60. Dalo by se říci, že tyto vlastnosti zjednodušeně říkají, že na to, jak je číslo 12 malé, má hodně dobré vlastnosti co se týče dělitelnosti a proto se hodí jako základ číselné soustavy. Základy s lepšími vlastnostmi, například třemi různými prvočíselnými děliteli, jsou potom pro lidskou matematiku moc velké.

To, že dvanáctková soustava zapisuje velká čísla nepatrně úsporněji, například $1584 = B00_{12}$ nepovažujeme za příliš velkou výhodu, neboť velká čísla stejně moc nepoužíváme a případů, kdy je dvanáctkový zápis kratší není totik, rozhodně to ale je další argument pro soustavu dvanáctkovou.

I když se přes své zjevné výhody dvanáctková soustava neujala, z historie civilizací některé náznaky dvanáctkové soustavy zůstaly dodnes. Podobně jako máme v desítkové soustavě názvy násobků *deset* pro 10^1 , *sto* pro 10^2 či *tisíc* pro 10^3 , v případě dvanáctkové soustavy máme tucet (dozen) pro 12^1 , veletucet neboli groš (gross) pro 12^2 a velký groš (great gross) pro 12^3 . Pro vyjádření délek používaná stopa (foot) má dvanáct palců (inches). Germánské jazyky mají speciální názvy nejen pro čísla 0 až 10, ale i pro 11 a 12 – například v angličtině to je *eleven* a *twelve*. Plný úhel 360° je snadno dělitelný na 12 stejných dílů. Ráno i odpoledne dělíme na dvanáct hodin. Roli v používání dvanáctkové soustavy mohlo sehrát i to, že během doby, kdy Země obletí kolem Slunce se vystřídá 12 cyklů Měsíce a zvěrokruh (myšlený pás $\pm 8^\circ$ na nebeské sféře symetricky podél ekliptiky), v němž se ze zemského pohledu pohybují všechny planety Sluneční soustavy, je rozdělen na 12 stejných obdélníkových dílů, takzvaných zvířetníkových znamení.

Pravdou je, že i když nám dnes dvanáctková soustava připadá na první pohled složitá a nepraktická, počítat v ní odmala jako v desítkové, ovládali bychom ji stejně obratně. K tomu bychom navíc měli jednodušší počítání. Pro matematiku jako takovou – například platnosti tvrzení o prvočíslech by změna soustavy nehrála žádnou roli. Rozdíl by byl primárně v každodenní matematici běžného občana. Například tím, že „dvanáctitíkunu“, lépe řečeno „desetíkunu ve dvanáctkovém světě“ – groš, který by na sobě nesl symbol 10 by si mohli pomocí mincí menší hodnoty přesně rozdělit nejen dva, ale i tři nebo čtyři kamarádi. To u žádné mince ze světa desítkových platiel nepřipadá v úvahu.

Kdybychom žili ve světě s dvanácti prsty na rukou, používali dvanáctkovou soustavu a někdo přišel s nápadem přejít na desítkovou, nikdo by ho neposlouchal a sklidil by posměch či nepochopení. Neměl by v ruce žádný argument, proč je desítková soustava lepší. Kdyby se lidské civilizace vyvýjely odděleně na několika místech a neovlivňovaly se, možná by některé z nich používaly soustavu dvanáctkovou. Lingvista Glendon Lean strávil 20 let cestováním v oblasti Papui Nové Guinei. Na různých ostrovech se setkal s kmeny používajícími základ 6 či základ 15 (Haran, [6]). V Americe je dokonce aktivní uskupení matematiků *Dozenal Society of America* (DSA) sdružující ty, kteří prakticky používají dvanáctkovou soustavu a jsou přesvědčeni, že by ji mělo lidstvo používat namísto desítkové. Navrhují symboliku (číslice) pro počty 10 a 11 (\beth a \aleph) s výslovností „dek“ a „el“ a návrhy jak přechod zajistit (například začít u platiel).

Kapitola 3

Vznik logaritmů

Nemáme informace o tom, jak Napier prvně narazil na myšlenku vedoucí k logaritmům. Něco jako Newtonovo jablko či Archimedes ve vaně v tomto případě chybí. Uvedu však dva tehdy obecně známé principy, které nejspíš Napiera navedly na myšlenku logaritmů. Prvním z nich je zjednodušení násobení pomocí goniometrických vzorců a druhým je souvislost aritmetické a geometrické posloupnosti.

3.1 Zjednodušení násobení pomocí goniometrických funkcí

Víme, že Napier ovládal trigonometrii a znal vzoreček

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

a jemu podobné, které se v anglicky psané literatuře souhrnně označují pojmem *prostaphaeretic rules* od spojení řeckých slov *prosthesis* (součet) a *aphaeresis* (rozdíl) (Clark a Montelle, [3]). Vzoreček můžeme použít pro zjednodušení násobení tím, že jej převedeme na sčítání a hledání v tabulce.

Příklad 3.1.1. Uvažme čísla 105 a 720, která chceme vynásobit. Obě čísla dělíme deseti, dokud nejsou funkční hodnotou kosinu, tzn. z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V tabulce hodnot trigonometrických funkcí nalezneme úhly $A = 84^\circ$ a $B = 44^\circ$, pro které $\cos A = 0,105$ a $\cos B = 0,72$. V tabulkách dále najdeme, že $\cos(A - B) = \cos 40 = 0,766$ a $\cos(A + B) = \cos 128 = -0,616$. Sečtením těchto čísel a vydělením dvěma získáme 0,075. Protože na začátku jsme dělili deseti dohromady celkem šestkrát, musíme desetinnou čárku posunout o šest míst doprava. Výsledek je tedy 75000 a od přesné hodnoty součinu 75600 se liší o necelé procento.

3.2 Metoda čtvrtin čtverců

Pro kompletnost uvedu i tento postup zjednodušující násobení, který však v literatuře se vznikem logaritmů spojován není. Nazveme jej metoda čtvrtin čtverců (viz Wikipedia, heslo *Quarter square multiplication*). Jedná se o velice starou metodu, známou už babylonským matematikům 2000 let před Kristem. Jde o vzoreček

$$\left\lfloor \frac{(x+y)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(x-y)^2}{4} \right\rfloor = \frac{1}{4}((x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)) = xy.$$

Čtvrtiny druhých mocnin čísel si můžeme předpočítat do tabulky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lfloor n^2/4 \rfloor$	0	0	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81

Obrázek 3.1: Tabulka pro metodu čtvrtin čtverců

Příklad 3.2.1. Například součin $7 \cdot 9$ pak určíme následovně. Součet a rozdíl těchto čísel jsou 16 a 2. Jim dle tabulky přísluší čísla 64 a 1. Od prvního odečteme druhé a získáme správný výsledek 63.

Matematici včetně Napiera tedy věděli, že existují způsoby, kterými lze některé složitější výpočty (násobení) převádět na výpočty jednodušší (sčítání) a hledání v tabulkách. Dříve se k tomu používaly vzorečky (identity) trigonometrické, případně tabulky mocnin čtverců, od Napierových objevů potom tabulky logaritmické. Svým způsobem se tak situace příliš neliší. V případě trigonometrických vzorečků, čtvrtin čtverců i logaritmů se jedná o stejně schéma – se zadánymi čísly provést jednoduchou operaci (sečist, vydělit deseti), výsledek nalézt v tabulce, provést jednoduchou operaci (sčítání, dělení malým číslem), opět hledat v tabulce a posunout desetinnou čárku. Zmíněnými dvěma metodami si pomůžeme při násobení dlouhých čísel. Co ale dělení, odmocňování či umocňování? S takovými operacemi si na rozdíl od zmíněných dvou metod poradí už jen logaritmy. Rozdíl je tedy v tom, že logaritmy přináší spoustu dalších výhod, méně práce a ještě vyšší jednoduchost.

3.3 Aritmetická a geometrická posloupnost

Tehdejším matematikům byla dobře známa souvislost geometrické posloupnosti např. $2, 4, 8, 16, \dots$ a aritmetické posloupnosti $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Věděli, že pokud vynásobí libovolné dva členy posloupnosti $1, q, q^2, \dots$, například šestý a devátý, výsledek bude stejný, jako kdyby sečetli odpovídající členy posloupnosti $1, 2, 3, \dots$ tj. šest a devět a nahlédli na patnáctou pozici v posloupnosti geometrické. Pokud si napíšeme tyto posloupnosti pod sebe, získáme jednoduchou logaritmickou tabulkou, která ovšem funguje pouze pro prvky geometrické posloupnosti (mocniny q).

Analogicky to funguje i pro dělení, kde se indexy(exponenty) odečítají. Tam však narazíme na problém v případě, že čitatel je menší než jmenovatel. Tedy pokud se snažíme například dělit číslo páté číslem osmým. Po odečtení indexů získáme záporné číslo. Nabízí se snadné řešení rozšířit uvedené posloupností na opačnou stranu. Obecně, pro dané q máme geometrickou posloupnost

$$\dots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q^1, q^2, q^3, \dots,$$

jíž odpovídá aritmetická posloupnost

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Podstatná negativní vlastnost této posloupnosti je, že postupem řídne, tj. prvky jsou více vzdálené.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Obrázek 3.2: Aritmetická a geometrická posloupnost pro $q = 2$

Pro výpočet například $256/2048$ stačí nahlédnout do takového tabulky, zjistit že členu 256 geometrické posloupnosti odpovídá člen aritmetické posloupnosti 8 a číslu 2048 odpovídá 11. Odečtením exponentů získáme -3 a z tabulky zjistíme, že této hodnotě odpovídá číslo $1/8 = 0,125$, což je výsledek získaný mnohem rychleji než mechanickým výpočtem. Na vztahy těchto posloupností poprvé literárně poukázal v roce 1544 německý matematik Michael Stifel (1487–1567) v díle *Arithmetica integra* (Maor, [7]) a lze jej tak považovat za tvůrce první logaritmické tabulky.

Rádi bychom vlastnosti, které platí pro prvky těchto posloupností, aplikovali i na ostatní čísla (nejen mocniny q). Problém je právě v tom, že tabulka 3.2 nám je k ničemu když chceme vypočítat podíl $333/2664$. Nedalo by se tedy toto schéma, tato myšlenka nějak rozšířit? Tj. zahustit tabulku, aby vztahy fungující pro obě posloupnosti bylo možné aplikovat na libovolná čísla? Nabízejí se dva způsoby, kterými toho docílit.

3.3.1 Neceločíselné exponenty

Tím prvním je použití obecných exponentů. Seznam logaritmovaných čísel (původně geometrická posloupnost) bychom tak mohli mít odstupňovaný například po jedné či po 0,1 apod, příslušný seznam logaritmů (původně aritmetická posloupnost) by pak tvořila necelá čísla. Samozřejmě by se tím rozbila geometričnost a aritmetičnost, princip používání by však zůstal stejný a bylo by možné logaritmovat mnohem více čísel. Tato varianta nepřipadala v úvahu zejména proto, že neexistovala exponenciální notace typu a^n a matematici ani o exponentech neuvažovali, nepočítali s nimi. Mocniny nízkých řádů byly běžné, neboť se objevovaly v geometrii, například vztah úhlopříčky a hrany krychle. S obecnými neceločíselnými, či mocninami ale tehdejší matematika nepočítala.

Z dnešního pohledu je věc jednoduchá. 2^3 je osm. 2^4 je šestnáct. Intuitivně, $2^{3,5}$ by tedy mohlo být něco mezi. A to navíc blíže k osmi. Co by takový výraz znamenal? Pokud dvě na třetí chápeme jako $2 \cdot 2 \cdot 2$ a dvě na čtvrtou jako $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, je výraz typu $2^{3,585}$ na první pohled nesmyslný. Dnešní středoškolák by si s jeho vyhodnocením mohl poradit přepsáním

$$2^{3,585} = 2^{3+0,5+0,08+0,005} = 2^3 \cdot 2^{0,5} \cdot 2^{0,08} \cdot 2^{0,005} = 2^3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[200]{2},$$

odkud už je zřejmé, co tento výraz znamená. Obecně, každý racionální exponent můžeme zapsat zlomkem a výraz pak vyjádřit pomocí odmocniny:

$$2^{3,585} = 2^{\frac{3585}{1000}} = \sqrt[1000]{2^{3585}},$$

což je vyjádření pomocí jednodušších struktur (celočíselné mocniny a odmocniny), kterému by rozuměli i matematici ze 17. století. Nevíme sice stále, co znamená 2^π , se zlomky si však pro praktickou matematiku vystačíme. Nicméně přepis mocnin tvaru zlomku na celočíselné mocniny a odmocniny si můžeme dovolit až potom, co nás někdo naučí, že $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ a $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ pro všechna reálná kladná a a přirozená m, n .

Bylo tedy potřeba, aby někdo dostal spásný nápad z nebe seslaný označovat a^n to, že chceme n -krát vynásobit číslo a , a namísto čísla n psát i zlomky (čísla necelá), přičemž výrazu $q^{\frac{m}{n}}$ přiřadit význam $\sqrt[n]{q^m}$. Situace je podobná jako s hledáním kořenů kvadratické rovnice. Žáci středních škol vědí, že pokud vyjde záporný diskriminant, nemá rovnice řešení, neboť záporná čísla nelze odmocňovat. Nikoho nenapadne označovat odmocninu z -1 symbolem i a příklad dopočítat. Je to nová matematická oblast, pro ně naprostě neznámá dokud jim někdo zkušenější neukáže, jak pracovat s komplexními čísly. Podobná situace byla dříve i se zápornými čísly. Ještě Napier k jejich vyjádření používá výraz *deficient* a zmiňuje, že je bude ve své práci označovat symbolem „-“ před daným číslem, zatímco čísla kladná nebude označovat symbolem žádným. Někteří autoři zápornost čísel neoznačovali znaménkem „-“ ale odlišnou barvou - například červenou. Dlouhou dobu nikdo nepočítal se zápornými čísly. Výraz $3 - 5$ tak do jisté doby neměl žádný smysl.

Neceločíselné umocňování na začátku 17. století tedy nepřipadalo v úvahu. Kdyby se běžně používalo vyjadřování typu $8 = 2^3$ a $16 = 2^4$, nejspíše by někoho napadlo zkoušit přiřadit číslu $2^{3,585}$ význam, vypočítat jeho hodnotu 12 a číslo 3,585 nazvat logaritmem čísla 12. Použití neceločíselných exponentů by vedlo právě na ten logaritmus, který používáme v moderní matematice. Neceločíselné a záporné mocniny byly některými matematiky navrhovány už od 14. století, výrazně se však rozšířily až za Newtona(1643–1727), který navrhl zápis a^{-n} a $a^{\frac{m}{n}}$ roku 1676 (Maor, [7]).

3.3.2 Kvocient blízký jedné – Bürgiho logaritmus

Druhá možnost jak zajistit, že budeme umět logaritmovat co největší množství čísel při zavedení logaritmu pomocí aritmetické a geometrické posloupnosti, je zvolit (neceločíselný) kvocient blízký jedné. V tom případě by se geometrická posloupnost (alespoň ze začátku) měnila pomalu, mezi prvky by nebyly takové mezery, přičemž hodnoty logaritmů, tj. prvky aritmetické posloupnosti by byla vždy celá čísla. Sice by to stále znamenalo, že umíme logaritmovat pouze určitá čísla, kdyby se však první prvek posloupnosti zvolil vhodně, byla by pokryta velká část běžně používaných čísel a metoda by tak mohla určité usnadnění práce přinést.

Tuto variantu realizoval švýcarský hodinář Joost Bürgi (1552–1632) v téže době, kdy na svém logaritmu pracoval Napier. Bürgiho záměrem bylo nahradit tabulky pro násobení, dělení, druhé a třetí odmocniny tabulkou jedinou, neboť mu to připadal lepší, jednodušší a efektivnější. Sám zdůrazňoval, že jeho tabulky mohou být použity pro všechny typy výpočtů, včetně násobení, dělení, odmocňování a hledání geometrických průměrů (Clark a Montelle, [3]). Zvolil geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1,0001 = 1 + \frac{1}{10^4}$ a počátečním prvkem 10^8 . Příslušná aritmetická posloupnost byla $0, 10, 20, \dots$. Tabulky tedy měly v zásadě tutéž podobu jako jednoduchá Stifelova tabulka 3.2 ve verzi pro kladná čísla. Aby Bürgi zvýraznil vztah geometrické a aritmetické posloupnosti, logaritmovaná čísla ve své práci vytiskl černě a nazývá je černá, jejich logaritmy nechal vytisknout červenou barvou a nazývá je červená.

Pro černé číslo B a jemu příslušné červené číslo r tedy platí vztah

$$B = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{r/10}.$$

Jemu ekvivalentní zápis je

$$r = 10 \log_{1+\frac{1}{10^4}} \frac{B}{10^8}.$$

Bürgi předpočítal logaritmy čísel od 10^8 do 10^9 . Jeho tabulky měly 58 stran a obsahovaly 23030 záznamů. Ačkoli interně Bürgi nejspíše pracoval s desetinnými čísly, rozhraní pro koncového uživatele muselo být celočíselné. To je hlavní důvod, proč zvolil první prvek geometrické posloupnosti tak velký. Chtěl zachovat vysokou přesnost (tomu odpovídá vysoký počet cifer) a zároveň se vyhnout řádové čárce, jediná možnost je tak používat dlouhá celá čísla. K tomu Bürgi přidal velký počet

příkladů, z nichž některé uvedeme, návodný text k používání tabulek a popis metody interpolace hodnot pro případ, že dané černé číslo není v tabulkách k nalezení. Aritmetická posloupnost má proto diferenci 10 – aby byl prostor pro zpřesnění. Bürgiho tabulky tedy sice obsahují pouze hodnoty geometrické a aritmetické posloupnosti, jeho metoda ale počítá s možností logaritmovat všechna přirozená čísla – i ta mezi hodnotami v tabulce, která prvkem geometrické posloupnosti nejsou.

Ačkoli lze doložit, že Bürgi vynalezl své logaritmy už v roce 1588, šest let před tím, než Napier začal pracovat na svých tabulkách, jeho dílo, *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* bylo vydáno až 6 let po Napierovi, roku 1620 v Praze a proto není považován za vynálezce logaritmů (Maor, [7]).

Následující příklady (kromě prvního) jsou převzaty z knihy (Clark [2]), která se podrobně věnuje Bürgiho životu, jeho dílu a mělo by se tak jednat o příklady, které uváděl sám Bürgi. My si pro snadnější pochopení budeme pomáhat prostředky moderní matematiky. Ve zde přiložených tabulkách 3.3 a 3.4 lze nalézt logaritmy pouze pro číslo z příkladu 3.3.1. Kompletní tabulky jsou k prohlédnutí na webu, viz (Bürgi, [1]). Pro převody mezi červenými a černými čísly může čtenář také použít výše uvedené rovnice. Bürgiho logaritmům obecně se podrobně věnuje článek (Waldvogel, [15]).

Příklad 3.3.1. Červeným číslem (logaritmem) černého čísla 101907877 je 1890, neboť $101907877 = 10^8 \cdot (1 + \frac{1}{10^4})^{189}$, jak můžeme vidět v tabulkách 3.3.

Příklad 3.3.2. Chceme-li vynásobit černá čísla $x = 154030185$ a $y = 205518112$, najdeme v tabulce jejich červená čísla $r_1 = 43200$ a $r_2 = 72040$. Když tyto hodnoty sečteme (jako bychom to udělali u moderního logaritmu), získáme červené číslo, jemuž přísluší černé číslo 316559928, které je 10^8 krát menší, než hledaný výsledek. Připíšeme za něj tedy 8 nul. Správnost postupu je evidentní z následujícího zápisu.

$$x \cdot y = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r_1}{10}} \cdot 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r_2}{10}} = 10^8 \left(10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r_1+r_2}{10}}\right) = 10^8 \cdot 316559928.$$

Příklad 3.3.3. Hledáme třetí odmocninu z sedmiciferného čísla $B = 5612037$. V Bürgiho tabulkách obsahujících hodnoty logaritmů devítimístných čísel najdeme, že černému číslu $100B$ náleží červené číslo $r = 172500$. Když toto číslo vydělíme třemi (jako bychom to udělali u moderního logaritmu), získáme 57500, které je červeným číslem pro 177707944. Toto číslo je 10^6 násobek hledaného čísla, jak ukazuje výpočet

$$\begin{aligned} 177707944 &= 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r/3}{10}} = 10^8 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \cdot 10^{\frac{8}{3}} \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r/3}{10}} \\ &= 10^8 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r}{10}}} = 10^8 \cdot 10^{-\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{100B} = 10^6 \cdot \sqrt[3]{B}. \end{aligned}$$

Posuneme proto desetinnou čárku o šest pozic doleva a výsledek je 177,707944.

Příklad 3.3.4. Hledáme třetí odmocninu z osmiciferného čísla $C = 56120370$. Z příkladu 3.3.3 víme, že devítimístnému černému číslu $10C$ náleží červené číslo $r = 172500$ a dále, že po vydělení tohoto červeného čísla třemi nalezneme v tabulkách odpovídající černé číslo 177707944, které je 10^6 násobkem $\sqrt[3]{C/10}$ neboli $10^{\frac{17}{3}}$ násobkem $\sqrt[3]{C}$. Nestačí proto upravit pouze řád, jako v předchozím příkladu.

Označme R červené číslo pro černé číslo 10^9 , které je posledním záznamem Bürgiho tabulek. Na 58. stránce tabulek 3.4 vidíme, že Bürgi odhaduje tuto hodnotu mezi 230270,022 a 230270,023. Z příkladu 3.3.2 víme, že po sečtení dvou červených čísel a dohledáním příslušného černého čísla získáme 10^{-8} násobek součinu odpovídajících černých čísel. Sečtením červených čísel $R + r = 402770,022$ tedy dostaneme červené číslo pro $10^{-8} \cdot 10^9 \cdot 10C = 100C$. Vydělením čísla $R + r$ třemi získáme 134256,674, které je analogicky k příkladu 3.3.3 červeným číslem pro $10^6 \cdot \sqrt[3]{C}$. Odpovídající černé číslo k červenému číslu $(R + r)/3$ je 382860159 a výsledek tedy 382,860159.

Protože Bürgiho logaritmus je rostoucí, tabulky obsahují logaritmy pro osmiciferná čísla a to největší má hodnotu logaritmu 230270,023, jistě nedohledáme v tabulkách logaritmus čísla 402770,022. Proto byly v originálním výpočtu použity metody odhadů a interpolací, které v tomto příkladu neřešíme. Navíc zde pro snazší pochopení používáme desetinnou čárku, přičemž ta by v dobovém výpočtu také chyběla. Tato práce nicméně nemá za cíl věnovat se detailně Bürgiho logaritmům.

0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	103561791
105000051277550675138150234516375560352141
2020001213285605159447437519915190952101
303000331380352714168750641621467621692861
4040006414334537451841608467240286523	103603223
505001051497554746159671052826679683213581
60600156154365584721598125992918	10310714223942
707002171599756918230991467	1026031711745234301
808002881656857999146710167613438277644466
90900369171495907	10160262711887236993807751033
100	1000100045	100601773	1011060171278722098339614839165391
1101001511834161373794032810447255870575761
1201000611895261393311142523544396902180137
1303007831957363514317452738647557933896101
14040091410764646552190619537502189616	103706871
15050105520845659C63604731698528Y9997517241
1606012062150666967377C8338695557	10321029527613
1707013672216768128993893676	1027758271061657986
18080153822838693C94106	102203274160973093748366
190901719235197043	10170427514045263694126158734
200	100200190	100771417	10177180144462626636641511856911
210102101249117289246173649846915619107347
2202023122562274113479044712571007223783551
23030213326343712244962549766746682564	103801244
2404027642707476575513665162777429289716624
250503005278257732653837538788020	10330322121101
2606032562857679717549085616987091355731387
2707035172933780958566195845	1028085792368348770
28080372830118816295846	1023506274188663421652151
290904019118998291	101506725163969147485446144
300	1003CC435	100803168	1013084211620626536394155488372921
3101046113249185522638736765497016521983316
3202049523770286343657047009599937558493782
33030328334123681746754572377027985293	103904091
3404056243496489505693967473805669623214481
350505955358059785671747771090886	10247657124873
3606063163064692217731187947	1029011441691735265
3707066773757793588749998186114342725445659
38080704831798949697687	102408426217253750646557
390907429392799635	10190787718667320174794566440
400	100400781	100904017	1014097751806128905423105828576846
41010821141071991628267391515046463197243
42020867241993005838455493966290173971964
43030104342914020145646596417319689126	10400804
440409484438450345588416958783493996741244
45050991544796045969037821339379	10351002428841
4606103764574706367923290381	103004091203713924
4707091746718078389432	10250063014971204461061
4808113684765909319963110880246941036001
4909087894867	101502080	1020098312113734991514357046
50090501227	101004966812302003231394412096179080916

Obrázek 3.3: První strana Bürgiho tabulek (Waldvogel, [15])

	228000	228500	229000	229500	230000	230500
0	977556601	982456378	987380714	992329732	...	997303557
20	...654356	...554623	...475452	...425965	...10000	...403287
30	...752122	...652879	...578200	...525208	...20000	...503027
40	...849397	...751144	...676958	...627461	...30000	...602778
50	...947621	...849419	...775726	...726724	...40000	...702538
60	978045477	...547704	...874503	...825996	...50000	...802308
70	...143281	933045999	...973291	...925279	...40000	...902088
80	...241096	...144304	988072088	993024572	...70000	998001879
90	...333920	...242618	...170895	...123874	...30000	...101679
100	...436754	...340942	...269712	...223187	...10000	...201489
110	...534597	...439276	...368539	...322509	...50000	...301309
120	...632451	...537620	...467376	...421841	...10000	...401139
130	...730314	...635974	...566223	...521183	...10000	...500979
140	...828187	...734338	...665080	...620535	...30000	...600829
150	...926070	...832711	...763946	...719898	...40000	...700690
160	979023962	...931094	...862822	...819269	...50000	...800560
170	...121865	984019488	...961709	...918651	...60000	...900440
180	...219777	...117408	980060605	994018043	...70000	999000330
190	...317699	...226303	...159511	...117445	...50000	...100230
200	...415631	...324726	...258427	...216857	...100000	...200140
210	...513572	...423158	...357353	...316278	...300000	...300060
220	...611524	...521601	...456298	...415710	...10000	...399990
230	...709495	...620053	...555234	...515152	...20000	...499930
240	...807456	...718515	...654190	...614603	...30000	...599880
250	...905437	...816967	...753155	...714065	...40000	...699840
260	980003427	...915468	...852130	...813536	...50000	...799810
270	...101427	985013960	...951115	...913017	...50000	...899790
280	...99438	...112461	990050111	995012509	...70000	999999779
290	...297457	...210973	...149116	...112010	...10000	...879
300	...395497	...309494	...248130	...211521	...20000	...979
310	...493527	...408025	...347155	...311042	...10000	...89
320	...591576	...506565	...446190	...410573	230270C2B	999999999
330	...689635	...605116	...545235	...510115		
340	...787704	...703677	...64428y	...609666		
350	...885783	...802247	...743353	...709227		
360	...923872	...900827	...842423	...808797		
370	981081970	...99417	...941512	...908378		
380	...180078	986099017	991040606	996007969		
390	...278156	...196527	...139711	...107570		
400	...376324	...295247	...238825	...207181		
410	...474462	...393876	...337948	...306801		
420	...572609	...492516	...437092	...406432		
430	...670766	...591165	...536226	...506073		
440	...768934	...689824	...635580	...605723		
450	...867110	...788493	...734543	...705384		
460	...965297	...867172	...833717	...805054		
470	982063494	...985861	...932900	...904735		
480	...161700	98708459	992032093	997004425		
490	...259916	...183268	...131296	...104126		
500	...358142	...281986	...230510	...203836		
	...456375	...980714	...329732	...303557		

Also enden sich die
zwo SummenZa-
len in 9. Zypfern / vñ
ist die Rose

230270C22 -

230270C23 +

Die Schwarze
aber ist ganz mit 9.
nollen als 1000000000
vnd so die selben ganz
Zalen/nicht gnug
geben moegen / so mag
man dieselben 2.3.4.

5.6.7.8.9. zusammen
addieren.

Obrázek 3.4: Poslední, 58. strana Bürgiho tabulek (Waldvogel, [15])

3.4 Jak uvažoval Napier

Svůj logaritmus Napier definoval pro všechna kladná čísla (nejen pro ta, která jsou prvky nějaké dané geometrické posloupnosti), a hodnoty jejich logaritmů jsou obecně neceločíselné tj. neodpovídají žádné pevné aritmetické posloupnosti. Jak si tedy poradil, aby dokázal převádět složitější operace na jednodušší a přitom přímo nepoužil ani jednu z výše uvedených variant? Uvidíme, že na to šel odjinud – přes geometrii a ve skutečnosti vyvinul koncept obecného (neceločíselného i záporného) exponentu.

V řeči moderní matematiky lze Napierův logaritmus kladného čísla x vyjádřit jako číslo L splňující $x = 10^7 e^{\frac{L}{10^7}}$, značíme jej $\text{NapLog } x$. Po vyjádření čísla L z uvedeného výrazu dojdeme k rovnici

$$\text{NapLog } x = L = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Pomocí tohoto vztahu tak můžeme vypočítat hodnotu Napierova logaritmu libovolného kladného čísla. K tomu je vzhledem k nízké přesnosti kapesních kalkulátorů vhodné použít silnější výpočetní nástroj, například volně přístupnou webovou aplikaci wolframalpha.com. Chceme-li například vypočítat hodnotu $\text{NapLog } 10000$, výsledek 69077552,8 získáme na uvedené stránce po zadání výrazu $10^7 \ln (10^7/10000)$.

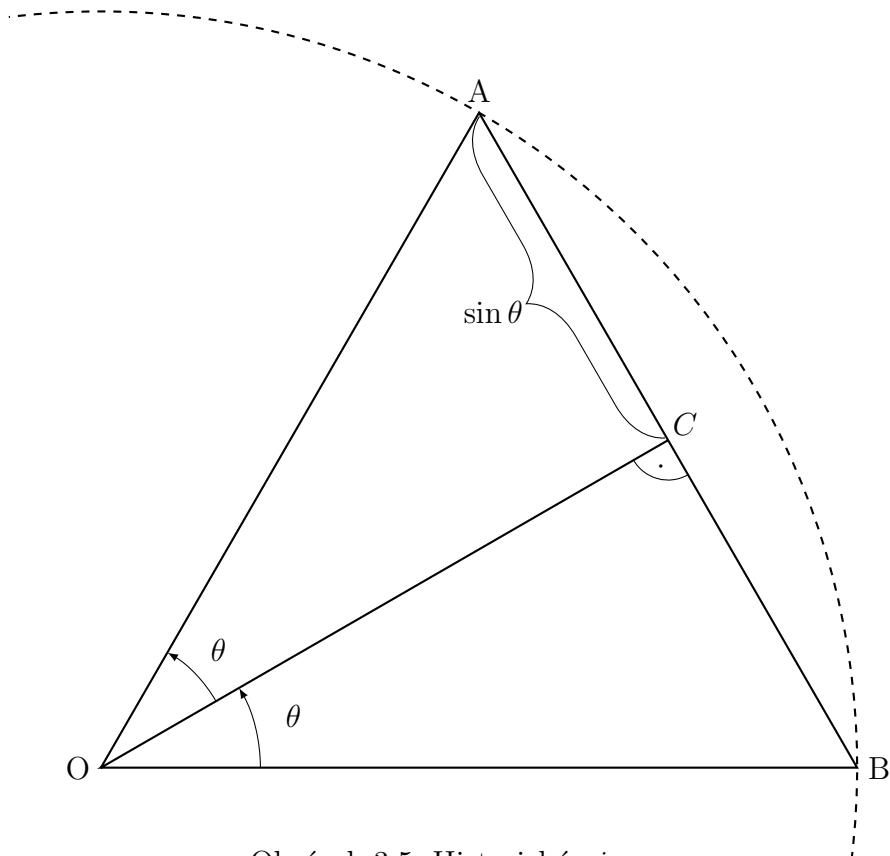
Ze zmíněného předpisu je vidět, v čem se Napierův logaritmus lišil od dnešních logaritmů (dekadický, přirozený, dvojkový). Zaprvé, Napierův logaritmus je funkce klesající. Zadruhé, platí $\text{NapLog } 10^7 = 0$ a $\text{NapLog } 1 \neq 0$. Zatřetí, platí pro něj $\text{NapLog } xy = \text{NapLog } x + \text{NapLog } y - \text{NapLog } 1$ a není tedy pravda, že logaritmus součinu je součet logaritmů.

Je důležité mít na paměti, že tehdejší matematika se od té dnešní podstatně lišila. Jsme v době, kdy neexistuje obecný exponenciální zápis tvaru a^b . Lidé nejsou zvyklí počítat, běžný občan by nejspíše nespočítal ani $5 \cdot 5$ (Hansen, [5]). Nevíme, co znamená neceločíselné umocňování. To celočíselné chápeme jako opakování součin. Zápis desetinných čísel typu 15,328 je sice mezi matematiky znám už staletí, rozhodně však není používán širokou veřejností. Necelá čísla jsou univerzálně vyjadřována zlomky, veškerá matematika stojí na poměrech celých čísel. Neexistují základy matematické analýzy (koncept funkcí) – Leibnitz či Newton se ještě ani nenařobili. Nemáme kalkulačky ani počítače řádově urychlující práci. Dnes zavádíme logaritmickou funkci až po seznámení se s funkcí exponenciální, neboť její vlastnosti jsou přirozenější a snadněji se chápou. Podobně jako se učíme derivovat funkce před tím, než je integrujeme. Ne vždy je však pořadí, ve kterém se matematické poznatky učíme ve škole, totožné s historickým pořadím, ve kterém byly objeveny. Dekadické logaritmy, které vyšly na světlo světa brzy po těch Napierových a rychle je nahradily, jsou toho příkladem.

Z praktického hlediska podstatnou, z hlediska matematického nedůležitou roli hraje v Napierových logaritmech pojem *sinus*. Tedy nemáme na mysli funkci $\sin(x)$, neboť na počátku 17. století funkce ještě neexistují. Tehdejší *sinus* byl definován jinak než ten dnešní a parametry funkce by ani nesplňoval. Byl totiž závislý na velikosti konkrétního trojúhelníku. *Sinus* úhlu nebyl definován pomocí pravoúhlého trojúhelníku jako poměr protilehlé odvěsny ku přeponě, ale pomocí kružnice daného poloměru se středem ve vrcholu úhlu jako polovina délky tětivy, vymezené průnikem ramen úhlu a kružnice.

Definici *sinu* graficky vidíme na obrázku 3.5. Je dán úhel θ a poloměr r . Uvažujeme úhel 2θ s vrcholem O a kružnicí s poloměrem r a středem O . Průniky ramen úhlu 2θ s kružnicí označíme A , B . Polovina délky úsečky AB je potom *sinus* úhlu θ při poloměru r . Uvedená konstrukce má samozřejmě smysl pouze pokud $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Z obrázku je patrné, že takto definovaný historický sinus je roven modernímu sinu vynásobenému poloměrem r . Kdybychom zvolili $r = 1$, definice by splnuly.

Napier jako poloměr r zvolil 10^7 . Platilo tedy $\sin 0^\circ = 0$ a $\sin 90^\circ = 10^7$. O veškerých logaritmovaných číslech z tohoto rozmezí se Napier vyjadřuje jako o sinech. Namísto věty „Logaritmus kladného čísla menšího než 10^7 je kladný,“ by Napier použil větu „Logaritmus každého sinu je kladný.“ Čísla větší než 10^7 , které nejsou siny žádného úhlu (při tomto poloměru), proto Napier nazývá nikoliv pojmy sinus, ale tangens či sekans, které jsou definovány pomocí obrázků 4.3 a 4.4. Jejich hodnota může být libovolné kladné číslo a na rozdíl od *sinu* tedy není shora omezená.



Obrázek 3.5: Historický *sinus*

Kapitola 4

Definice a použití Napierova logaritmu

Své myšlenky Napier publikoval ve dvou knihách. První, vydaná roku 1614 s názvem *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, anglicky *Description of the wonderful canon of logarithms*, pro nás v celé práci zkráceně jen *Descriptio* (Napier, [8]) uváděla, co logaritmy jsou a jak se používají. Budeme se jí věnovat právě v této kapitole, knize druhé v kapitole následující. *Descriptio* má celkem 147 stran, z čehož 90 zabírá její nejpodstatnější část – tabulky hodnot logaritmů pro siny úhlů mezi 0 a 90 stupni. Ostatní stránky jsou naplněny tvrzeními o vlastnostech logaritmů a příklady na jejich používání. První překlad do angličtiny pochází z roku 1616, nese název *A description of the admirable table of logarithmes* a autorem je Edward Wright.

Napierovy knihy v této práci nepřekládáme, ani nezmiňujeme všechny body v nich obsažené. Soustředíme se pouze na hlavní myšlenky, příklady a tvrzení. Nesnažíme se ani striktně držet Napierových formulací. Jeho myšlení i vyjadřování se totiž velice liší od zvyklostí v dnešní matematice, která klade důraz na precizní definování pojmu a práci s nimi. Napierovy texty mají spíše charakter intuitivní, kdy se hledí na praktičnost, a ne na detaily. Nezdržuje se matematicky čistým vyjadřováním. V 17. století nemají matematici k dispozici axiomaticky založené teorie ani důkazové systémy. Spoustu vztahů nejspíše tušili – například neřešitelnost antických konstrukčních úloh, neměli však k dispozici aparát, kterým by problémy přesně popsali a dokázali jejich neřešitelnost. V této práci se snažíme nalézt kompromis v tom, aby přepis Napierových úvah byl pro novodobého čtenáře srozumitelný a zároveň reflektoval původní způsob uvažování.

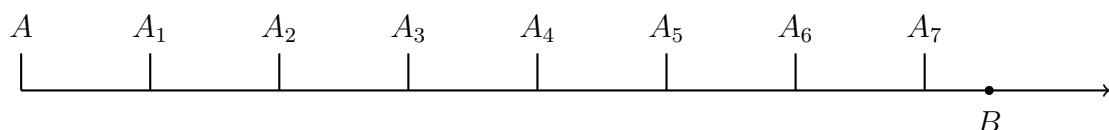
4.1 Zavedení logaritmu

Napier definoval svůj logaritmus přes kinematicky – pomocí dvou pohybujících se bodů. První, bod B , se pohybuje rovnoměrně přímočaře a vzdálenost jím uražená určuje hodnotu logaritmu. Pohyb druhého bodu G je složitější. Můžeme si jej představit tak, že se zpomaleně pohybuje po úsečce, přičemž jeho rychlosť je přímo úměrná zbývající vzdálenosti ke konci úsečky. Také si jej lze představit tak, že pokud každou sekundu zaznamenáme vzdálenost, která zbývá G ke konci úsečky, utvoří tyto vzdálenosti geometrickou posloupnost. Vzdálenost bodu G od konce úsečky udává hodnotu logaritmovaného čísla. V kapitole 6 lze nalézt přesný popis pohybů a odvození vlastností z nich plynoucích. Tam může čtenář také nalézt odpovědi na otázky, které by mu mohly ohledně pohybu bodů vznikat.

Je na místě upozornit na to, že ve zbytku práce není pro vzdálenost dvou bodů X a Y neboli pro délku úsečky XY v rovině používán obvyklý zápis $|XY|$, nýbrž pouze XY . To hlavně proto, že Napier ve svých textech také používá značení bez svislice. Zároveň v některých tvrzeních jsou body označovány malými písmeny. To je opět v souladu s původním Napierovým značením takže je pro čtenáře snazší případné porovnání odpovídajících příkladů a tvrzení z této práce a z Napierových knih.

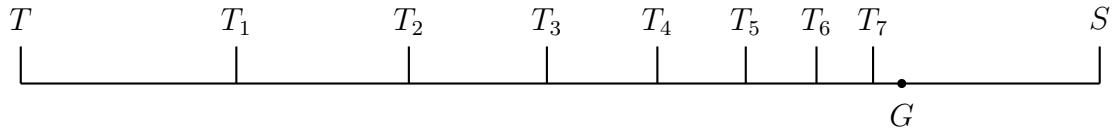
4.1.1 Pohyb bodu B

Descriptio, definice 1. Mějme polopřímku s počátečním bodem A , po níž se z A pohybuje bod B tím způsobem, že za stejně časové úseky urazí stejně vzdálenosti. Pokud tedy vybereme nějaký časový interval a po každém jeho uplynutí vyznačíme polohu bodu B , získáme stejně vzdálené body $A = A_0$ a A_1 , A_1 a A_2 , A_2 a A_3 , ... O délkách AA_1 , AA_2 , AA_3 , ... říkáme, že se prodlužují aritmeticky a že B se pohybuje aritmeticky.



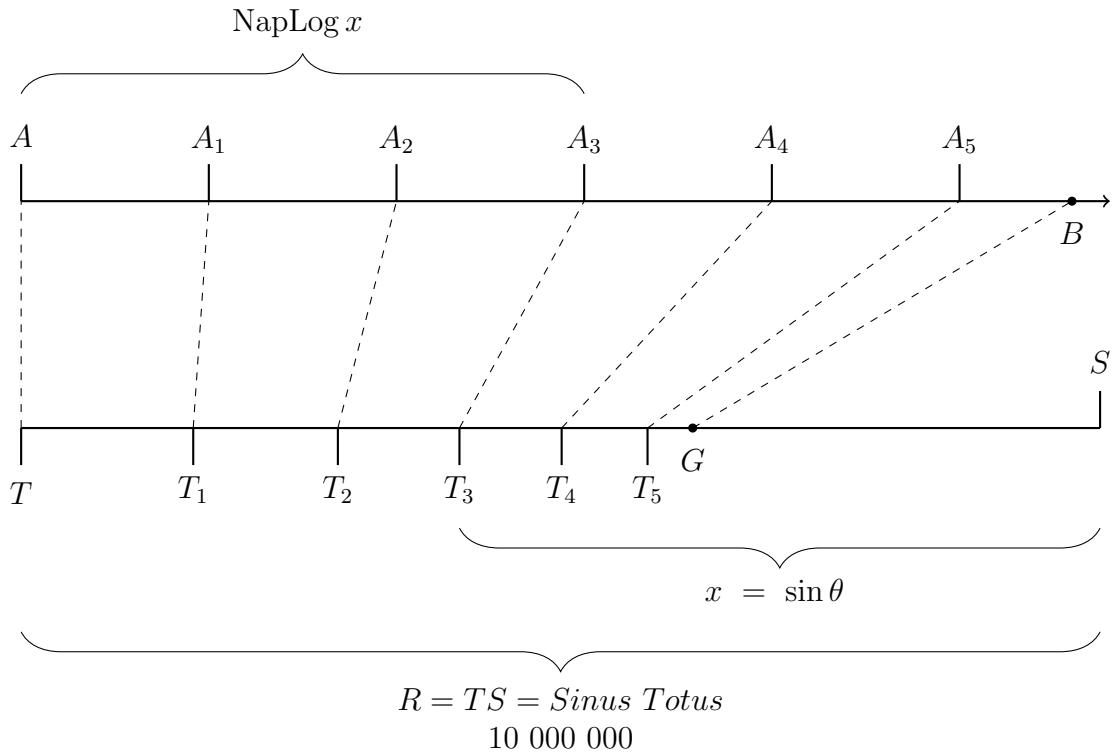
4.1.2 Pohyb bodu G

Descriptio, definice 2. Mějme úsečku TS , na níž se pohybuje bod G směrem z T do S tím způsobem, že pro pevně zvolený časový interval platí, že je zachován poměr vzdáleností G od S před a po uplynutí tohoto času. Pokud tedy vybereme nějaký časový interval a po každém jeho uplynutí vyznačíme polohu bodu G , získáme body $T = T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$ splňující $\frac{T_i S}{T_{i-1} S} = \frac{T_{i+1} S}{T_i S}$. O délkách $T_i S$ říkáme, že se zkracují geometricky a že G se pohybuje geometricky.



4.1.3 Definice logaritmu

Descriptio, definice 6. Ať body B a G vystartují ve stejný okamžik a stejnou rychlosťí. Logaritmem vzdálenosti GS potom rozumíme vzdálenost AB .



Podstatný důvod, proč byl logaritmus definován právě takto, je, že zápis čísel necelých, tedy například 13,536, byl sice mezi matematiky znám, širokou veřejností nicméně až do 18. století nebyl přijímán, a to v žádném způsobu zápisu, kterými mohly být například 13536, 13 $\frac{536}{1000}$ či 13°50'30". V této době se užíval zápis pomocí zlomků, tj. $\frac{1692}{125}$. Aby Napierovy tabulky došly co největšího rozšíření, rozhodl se používat v nich výhradně celá čísla.

Vzhledem k tomu, že tehdejší tabulky goniometrických funkcí měly přesnost 7 cifer, zvolil si poloměr kružnice, vzhledem ke které počítá hodnoty sinů (viz definice sinu obrázek 3.5) jako 10^7 . Délku úsečky TS také položil rovnou 10^7 . Ve svých pracích se Napier o vzdálenosti TS vyjadřuje výhradně pojmem „total sine“, latinsky „sinus totus“, která znamená maximální hodnotu sinu. Podle tohoto pojmu nejspíše dal Napier bodům T a S své názvy. Ve své druhé knize popisující výpočet tabulek Napier hojně používá desetinnou čárku, na rozdíl od knihy *Descriptio*. Proto lze za další Napierův přínos považovat rozšíření zápisu pomocí desetinné čárky.

U definice logaritmu Napier vyloženě napsal, že logaritmum daného sinu je (celé) číslo, které nejbližše odpovídá vzdálenosti uražené bodem B za týž čas, za který bod G dorazil do blízkosti bodu S rovné danému sinu. Je zde tedy vidět důraz na celočíselnost. Logaritmy hledáme pouze k celým číslům. Když bod G odměří danou celočíselnou vzdálenost, bod B se nemusí (a krom počátku pohybu ani nikdy nebude) nacházet v celočíselné vzdálenosti od A . Proto jeho vzdálenost zaokrouhlíme na nejbližší celé číslo. Pro uživatele je tak záležitost logaritmování omezena pouze na celá čísla. Zároveň v definici 3 Napier vysvětuje, že iracionální čísla vyjadřujeme pomocí nejbližších celých čísel. Například sinus 45° , který je roven odmocnině z $5 \cdot 10^{13}$, je iracionální číslo mezi 7071067 a 7071068, proto jej nahradíme libovolnou z těchto hodnot, čímž se nedopustíme výraznější chyby. Uvědomme si znovu ten důvod, proč se vše točí kolem vysokých čísel. Jak Bürgiho, tak goniometrické, tak Napierovy tabulky obsahují velká celá čísla. Všichni se snažili vyhnout používání řádové čárky. A jediný důvod, jak toho docílit a přitom zachovat vysokou přesnost (počet cifer) je používat velká přirozená čísla.

Napier dále vysvětuje, jak logaritmovat čísla větší než TS . Myšlenkově přirozeně odvodíme, jak by to mělo vypadat v případě, že se body budou pohybovat zprava doleva až za body A a T . Pro vzdálenosti menší než TS rostoucí k TS (G se vzdaluje od S a přibližuje k T) platí, že jejich logaritmy klesají k nule (B se přibližuje k A). Po překročení bodů T a A tak budou logaritmy příslušných vzdáleností větších než TS záporné. Zde tedy rozšiřujeme výše uvedenou definici 6. Pokud se G nachází nalevo od T , není logaritmum vzdálenosti GS vzdálenost AB nýbrž hodnota vzdálenosti BA , opatřená záporným znaménkem. Po překročení bodů T a A se bod B jednoduše pohybuje svou konstantní rychlostí doleva a bod G se nadále vzdaluje od S , a to se zrychlující tendencí.

Namísto úsečky TS s bodem G bychom si tedy měli představovat polopřímku s bodem T a počátkem S . Namísto polopřímky s počátkem A bychom si měli představovat přímku s bodem A , ideálně reálnou osu, kde bod A ztotožníme s bodem 0 aby bylo dobré vidět, které logaritmy jsou kladné a které záporné. Napier popsal, jakým způsobem jsou body B a G svázány na polopřímce a úsečce při pohybu zleva doprava a potom krátce zmínil, že tuto vazbu bodů přirozeně rozšíříme i na opačné strany, což nám umožní logaritmovat velká čísla a jejich logaritmus je záporný.

4.2 Vlastnosti logaritmů

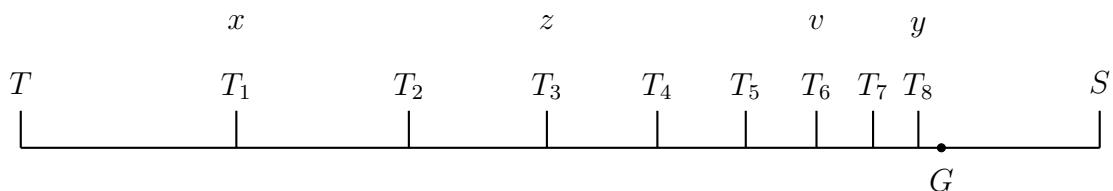
Vidíme, že logaritmus délky celé úsečky TS je nulový. Vzdálenost bodu B , která určuje logaritmus, by se ale nemusela měřit vůči počátku jeho pohybu, nýbrž vůči libovolnému bodu na přímce. Hodnota logaritmu by tak byla posunutá. Napier si tak mohl zvolit například $\text{NapLog } TS = TS$. Ve spoustě výpočtů se však objevuje hodnota $\text{NapLog } TS$, a proto je vhodné, aby byla nulová. Stejně tak si byl Napier vědom toho, že mohl klidně logaritmy sinů menších než TS považovat za záporné a logaritmy větších délek za kladné. Logaritmus by pak byl rostoucí. Napier argumentuje tím, že hodnoty do 10^7 jsou častěji používané, proto je vhodnější, aby byly kladné.

Tvrzení 4.2.1 (*Descriptio*, tvrzení 1). *Tvrzení o logaritmech dvojic se stejným poměrem*

Logaritmy dvojic čísel, která jsou ve stejném poměru, jsou stejně vzdáleny. Jinými slovy, jestliže $\frac{x}{v} = \frac{z}{y}$, potom $\text{NapLog } x - \text{NapLog } v = \text{NapLog } z - \text{NapLog } y$.

Stejně jako Napier, budeme se zabývat pouze případem kdy $x > v$ a $z > y$. Jednoduše by šlo říci, že protože G urazí vzdálenosti $x - v$ a $z - y$ za stejný čas, tak B pohybující se konstantní rychlostí se za tento čas přesune ze vzdálenosti $\text{NapLog } x$ do $\text{NapLog } v$ stejně jako z $\text{NapLog } y$ do $\text{NapLog } z$.

Odkud ale víme, že G urazí $x - v$ a $z - y$ za stejný čas? Jestliže existuje časový úsek Δt a m, n, o, p splňující $x = T_m S$, $v = T_n S$, $y = T_o S$ a $z = T_p S$, je situace jednoduchá.



Dle definice 2 (bod G zachovává poměry) platí $\frac{T_1 S}{T S} = \frac{T_2 S}{T_1 S} = \frac{T_3 S}{T_2 S} \dots$. Posloupnost $T_i S$ je tedy geometrická, s kvocientem $\frac{T_1 S}{T S}$ a počátečním (nultým) prvkem $T S$, obecný člen můžeme tedy vyjádřit $T_i S = \left(\frac{T_1 S}{T S}\right)^i T S$. Odtud máme

$$\left(\frac{T_1 S}{T S}\right)^{n-m} = \frac{\left(\frac{T_1 S}{T S}\right)^n T S}{\left(\frac{T_1 S}{T S}\right)^m T S} = \frac{T_n S}{T_m S} = \frac{v}{x} = \frac{y}{z} = \frac{T_o S}{T_p S} = \left(\frac{T_1 S}{T S}\right)^{p-o},$$

tedy $n - m = p - o$ a počet časových úseků, za které dorazí bod G z x do v je stejný, jako ze z do y .

Taková situace nicméně pro zvolená čísla nemusí nastat. Nevíme, zda je zaručeno, že pro každou volbu čísel splňujících $\frac{x}{v} = \frac{z}{y}$ existuje časový úsek Δt , kterým získáme body T_i splňující podmínky výše. Napier nijak nekomentuje tento případ, jeho

důkaz je v podstatě shodný s předchozími odstavci. Celé tvrzení tak Napier dokazuje na příkladu, a k tomu navíc zcela konkrétním! Nejspíše vychází z toho, že zvolíme-li dostatečně krátký časový úsek, budou body T_i velice husté, takže se budou nacházet dostatečně blízko zadaným bodům, a tudíž tvrzení platí i pro ně. V zásadě má pravdu – dostatečně jemnou volbou časového úseku bychom pro libovolně zadané hodnoty a přípustnou chybu opravdu dokázali, že tvrzení platí.

4.3 Tabulky logaritmů

Nyní už se konečně dostaneme k tomu, jak Napierovy logaritmy urychlily matematické výpočty. Efekt (moderních) logaritmických tabulek jsme si vysvětlili v první kapitole. Takové tabulky jsou univerzální pro počítání s libovolnými čísly. To ty Napierovy sice také, ale co se týče přesnosti, tak silně zvýhodňují čísla, která jsou sinem nějakého úhlu určeného stupni a minutami. Z toho pro obecná čísla plyne, že ačkoliv velikosti úhlů mezi 0° a 45° vyjádřené pomocí minut jsou rozprostřeny rovnoměrně, pro jejich siny už neplatí, že se jedná o čísla rovnoměrně rozprostřená mezi 0 a 10^7 . Napierovy tabulky jsou tak nejhustší pro čísla blízká 10^7 , která jsou siny úhlů kolem 90° , neboť tam je funkce sinus téměř konstantní, zatímco pro čísla, která jsou siny úhlů blízkých nule jsou tabulky podstatně řidší, neboť u nuly má funkce sinus velkou derivaci. Z toho plyne, že pro náhodně zvolené celé číslo z intervalu $(0, TS)$ najdeme v Napierových tabulkách přímo naše číslo s vyšší pravděpodobností, pokud je blízké TS , než když je blízké 0. Tato nerovnoměrnost je důsledkem toho, že Napierovy tabulky jsou konstruovány primárně pro trigonometrické výpočty. Proto v nich nalezneme logaritmy sinů, kosinů a tangent úhlů.

4.3.1 Jak se vyznat v tabulkách

V prvním sloupci (viz obrázek 4.1) tabulky postupně s krokem jedné minuty udávají úhel velikosti od 0 do 45° stupňů. Poslední, sedmý sloupec uvádí velikosti úhlů sestupně od 90° do 45° stupňů. Úhly na stejném rádku jsou tedy navzájem doplňkové do devadesáti. Ve druhém sloupci jsou siny velikostí úhlů z prvního sloupce. V šestém sloupci jsou siny úhlů ze sedmého sloupce. Třetí sloupec obsahuje logaritmy sinů ve druhém sloupci. Podobně, pátý sloupec obsahuje logaritmy sinů v šestém sloupci. V prostředním tj. čtvrtém sloupci jsou rozdíly logaritmů z pátého sloupce a třetího. Vzhledem k tomu, že pro týž rádek je číslo v pátém sloupci vždy menší než číslo ve třetím (logaritmus je klesající a sinus rostoucí), jsou ve skutečnosti hodnoty ze čtvrtého sloupce záporné (i když u nich není znaménko *mínus* přímo vyznačeno). V podobě obrázků 4.1 a 4.2 je přiložen první a poslední list Napierových tabulek. Těchto listů je celkem 90, neboť tabulky obsahují po minutě úhly od 0° do 45° , na každou minutu připadá jeden rádek a na jeden list je vytiskněno 30 rádek. Napier sám se o svých tabulkách vyjádřil jako o „velmi malých“, neboť neobsahují ani o rádek navíc oproti klasickým tabulkám hodnot sinů.

Na tabulky se můžeme dívat ještě jinak. Od úhlu v prvním sloupci odhlédněme a jako směrodatný berme úhel v sedmém sloupci, který je z rozmezí 90° až 45° . V šestém sloupci najdeme sinus a ve druhém kosinus tohoto úhlu. Ve třetím a pátém sloupci jsou logaritmy těchto kosinů a sinů. Čtvrtý sloupec potom vyjadřuje logaritmus tangens tohoto úhlu ze sedmého sloupce, což plyne z podobnosti, jak hned vysvětlíme. Hodnota kosinu a tangens úhlu θ je geometricky vyjádřena na obrázku 4.3.

Gr.	O		+	-			
min	Sinus.	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	sinus		
0	0	infinitum	infinitum	0	100000000	60	
1	2909	81425681	81425680	1	100000000	59	
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58	
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57	
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56	
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55	
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54	
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53	
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52	
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51	
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50	
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49	
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48	
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47	
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46	
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45	
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44	
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43	
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42	
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41	
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40	
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39	
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38	
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37	
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36	
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35	
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34	
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33	
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32	
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31	
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30	

Obrázek 4.1: První strana Napierových tabulek (Napier, [8])

|00155||

Gr. 44

44

<i>min</i>	<i>Sinus</i>	<i>Logarithm</i>	<i>Differentia logarithm</i>	<i>i</i>	<i>Sinus</i>	
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	168723	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	162905	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	157087	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	151269	3390572	7124344	26
35	7019459	3538989	145451	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	139632	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	133814	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	127906	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	122178	3405019	7114131	21
40	7029810	3524253	116359	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	110541	3410770	7110041	19
42	7033947	3518371	104723	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	98904	3416528	7105949	17
44	7038081	3512495	93086	3419409	7103902	16
45	7040147	3509560	87268	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	81450	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	75632	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	69824	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	64006	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	58178	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	52360	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	46543	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	40726	3445413	7085452	7
54	7058716	3483219	34908	3448311	7083399	6
55	7060776	3480301	29090	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	23273	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0

min

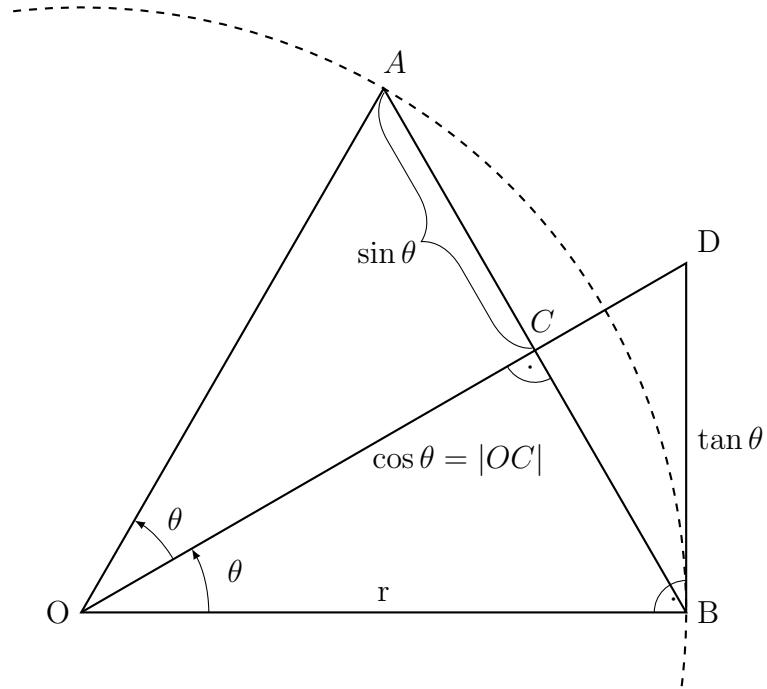
Gr.

45

m

Obrázek 4.2: Poslední, 90. strana Napierových tabulek (Napier, [8])

Trojúhelníky OCB a OBD jsou podobné, tudíž $\tan \theta : r = \sin \theta : \cos \theta$. Dle tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem platí $\text{NapLog} \tan \theta - \text{NapLog} r = \text{NapLog} \sin \theta - \text{NapLog} \cos \theta$. Protože $r = 10^7 = TS$, tak $\text{NapLog} r = 0$ a tedy $\text{NapLog} \tan \theta = \text{NapLog} \sin \theta - \text{NapLog} \cos \theta$. Takže hodnota v prostředním sloupci opravdu udává $\text{NapLog} \tan \theta$. Tady je například vidět, proč bylo vhodné zvolit logaritmus celé úsečky TS roven nule. Výraz $\text{NapLog} r$ by totiž mělo nějakou nenulovou hodnotu, kterou bychom museli ve výpočtech zbytečně přičítat.



Obrázek 4.3: Historický *sinus*, *kosinus* a *tangens*

Hodnoty čísel (sinů), ke kterým můžeme nalézt logaritmus v Napierových tabulkách, jsou uvedeny v sestupném pořadí v 6. sloupci od 10^7 na první straně vpravo nahoře, klesají v tomto sloupci k hodnotě 7071068 na poslední, devadesáté straně, což je sinus 45° . Hodnoty sinů pokračují sestupným způsobem od levého dolního rohu (druhý sloupec) poslední stránky nahoru až k první stránce, číslu 2909. Toto usporádání je určeno tím, jak jsou v tabulkách seřazeny hodnoty úhlů. Historický sinus, stejně jako ten náš, je funkce rostoucí pro úhly od 0 do 90 stupňů.

Příklad 4.3.1. Logaritmus konkrétního sinu

Je dán úhel 45 stupňů 29 minut. Kalkulačkou můžeme spočítat, že jeho sinus je $0,7130465$. Příslušná hodnota uvedená v Napierových tabulkách na 90. stránce v šestém sloupci je 10^7 násobek našeho sinu, tj. 7130465 . V pátém sloupci je Napierův logaritmus tohoto čísla s hodnotou 3382085 . Dosazením do vztahu $\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$ bychom získali hodnotu logaritmu 3382086 . Výsledek v tabulkách se tedy trochu liší, což je důsledkem zaokrouhlovacích chyb při Napierových výpočtech. Tangens daného úhlu je $1,0170155$, což odpovídá historickému tangens 10170155 . Odpovídající hodnota v Napierových tabulkách ve čtvrtém sloupci je -168723 . Vzorečkem vypočítaný logaritmus tohoto tangens je -168724 .

Příklad 4.3.2 (*Descriptio*, Tvrzení 2). *Logaritmus prostředního čísla*

Mějme tři čísla a, b, c v pevném poměru (tři po sobě jdoucí prvky nějaké geometrické posloupnosti). Tvrdíme, že logaritmus třetího z nich je roven dvojnásobku logaritmu druhého, od kterého odečteme logaritmus čísla prvního. Z tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem totiž víme, že $\text{NapLog } b - \text{NapLog } a = \text{NapLog } c - \text{NapLog } b$. Nyní už stačí k oběma stranám rovnice přičíst logaritmus druhého čísla. Z toho plyne ještě další vlastnost: pokud sečteme logaritmy prvního a třetího čísla, dostaneme dvojnásobek logaritmu čísla druhého.

4.3.2 Čísla mimo tabulky

Přímo v Napierových tabulkách můžeme hledat jen mezi čísla, která jsou siny úhlů od 0° do 90° s krokem po jedné minutě. Co když ale potřebujeme znát logaritmus čísla, které v tabulce není?

Využití tangens

Prostřední sloupec udává logaritmy hodnot tangens úhlů v sedmém sloupci. Když tedy naše číslo nalezneme v tabulce hodnot tangens pro úhly mezi 45 a 90 stupni, stačí vyhledat příslušný úhel v Napierových tabulkách, přečíst hodnotu ve čtvrtém sloupci a máme logaritmus.

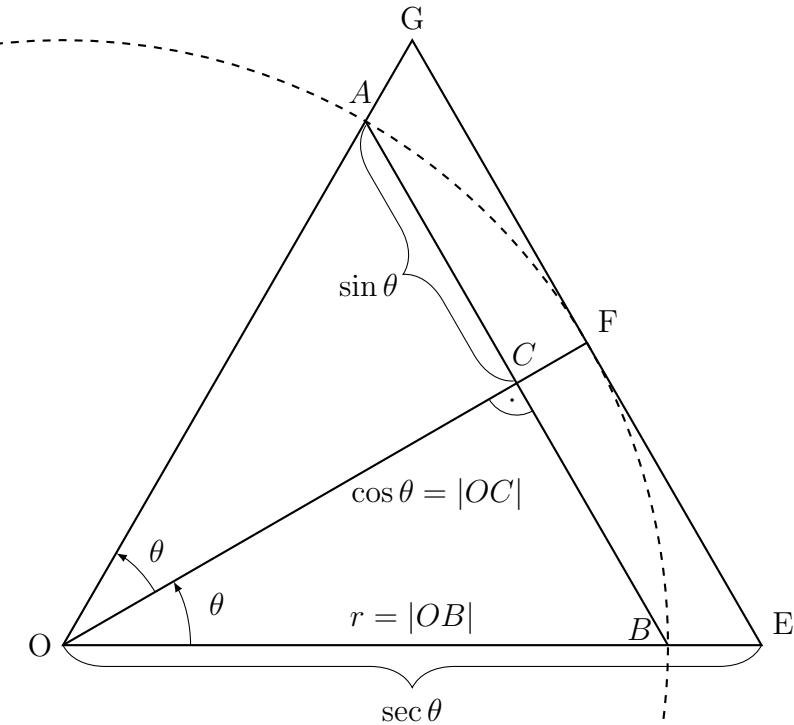
Příklad 4.3.3. Nalezení logaritmu pomocí tabulky hodnot tangens

Zajímá nás logaritmus čísla $25670733 > 10^7$. V tabulce hodnot goniometrických funkcí nalezneme, že toto číslo je tangens úhlu $68^\circ 43'$. Tento úhel vyhledáme v sedmém sloupci Napierových tabulek na 43. stránce a v prostředním sloupci přečteme jemu odpovídající logaritmus -9427664 .

Využití sekans

Další místo, kde můžeme hledat úhel pro logaritmované číslo, jsou tabulky hodnot sekans. Ten je pro úhel θ určen jako délka úsečky OE na následujícím obrázku.

Využijeme tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem. Při pohledu na obrázek vidíme, že z podobnosti trojúhelníků OCB a OFE plyne $\frac{\sec \theta}{10^7} = \frac{10^7}{\cos \theta}$. Proto $\text{NapLog sec } \theta - \text{NapLog } 10^7 = \text{NapLog } 10^7 - \text{NapLog cos } \theta$. Protože $\text{NapLog } 10^7 = 0$, máme $\text{NapLog sec } \theta = -\text{NapLog cos } \theta$. Druhý sloupec tabulek udává hodnoty kosinů úhlů ze sedmého sloupce, stejně tak šestý sloupec udává kosinus úhlu ze sloupce prvního. Pokud tedy číslo, jež chceme logaritmovat, nalezneme v tabulce hodnot sekans úhlů, stačí nalézt příslušný úhel v tabulkách Napierových, přečíst hodnotu logaritmu kosinu tohoto úhlu a obrátit znaménko. Tím získáme logaritmus zadaného čísla.



Obrázek 4.4: Historický *sinus*, *kosinus* a *sekans*

Logaritmus násobku deseti

Pokud logaritmované číslo x nenalezneme ani v Napierových tabulkách ani v tabulkách hodnot tangens či sekans – například číslo 7074153, nezbude nám než sáhnout po čísle jemu nejbližším, případně „ciferně nejpodobnějším“. Napier totiž podává návod, jak hledat logaritmy pro malá čísla, kterých je v tabulce velice málo takže šance, že tato čísla nalezneme rovnou v tabulce, je malá. Namísto toho zkusíme najít 10, 100, 1000, ... násobky daného čísla.

Příklad 4.3.4 (*Descriptio*, kapitola 4, sekce 2). *Nalezení logaritmu pomocí desetinásobku*

Hledáme logaritmus čísla 137. To nenalezneme v Napierových tabulkách přímo jako sinus nějakého úhlu. Nalezneme v nich však čísla, která jsou blízká hodnotami prvních cifer. Ta jsou 14544 sinus úhlu $5'$, dále 136714 sinus úhlu $47'$ a nakonec číslo 1371564, což je sinus úhlu $7^{\circ}53'$. Při pohledu do tabulek hodnot tangens nalezneme 13705046, která náleží úhlu $53^{\circ}53'$. Nakonec, v tabulkách hodnot sekans najdeme číslo 13703048, které přísluší úhlu $43^{\circ}8'$. Tento úhel nalezneme na 87. straně Napierových tabulek v 1. sloupci, neboť je z rozmezí 0 až 45 stupňů. V šestém sloupci příslušného řádku nalezneme kosinus tohoto úhlu. Ukázali jsme, že hodnota logaritmu kosinu je opačná k hodnotě logaritmu sekans. V pátém sloupci je číslo 3150332 vyjadřující logaritmus kosinu úhlu $43^{\circ}8'$. Logaritmus hodnoty sekans tohoto úhlu (čísla 13703048) je tedy -3150332 . Nalezli jsme tak logaritmus čísla, které je přibližně 100000násobek zadaného čísla 137. Hodnotu -3150332 odteď budeme považovat i za logaritmus čísla 13700000. Vzhledem k tomu, že poměr ku číslu zadanému je 10000, pomohlo by nám vědět, o kolik se liší logaritmy čísel s poměrem deset. Tyto údaje Napier ve své knize *Descriptio* uvádí. Čísla s poměrem 10 mají

logaritmy vzdálené 23025842. S poměrem 100 mají logaritmy vzdálené 46051684. S poměrem 1000 vzdálené 69077527. S poměrem 100000 vzdálené 115129211. S využitím tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem je jasné, že uvedené hodnoty rozdílů logaritmů jsou vždy násobky 23025842.

Tedy, známe logaritmus čísla 13703048, který je -3150332 . Tuto hodnotu považujeme za logaritmus čísla 13700000. Zajímá nás logaritmus čísla 137, které je 100000krát menší než 13700000. Vzdálenost logaritmů s poměrem 100000 známe, je rovna 115129211. Tuto hodnotu přičteme, neboť víme, že Napierův logaritmus je klesající, tj. menší čísla mají větší logaritmy. Výsledek je tedy $-3150332 + 115129211 = 111978879$. Z předpisu $\text{NapLog } x = 10^7 \log \frac{10^7}{x}$ bychom získali přesný logaritmus 111981147. Chyba výsledku je tedy 0,02 %.

4.4 Příklady použití

Ukázali jsme metody, kterými hledat logaritmy. Dále ukážeme příklady problémů, jejichž řešení nám logaritmy usnadní.

Příklad 4.4.1 (*Descriptio*, kapitola 5, příklad 1). *Třetí číslo v poměru*

Mějme čísla 10562556 a 7660445. Zajímá nás třetí číslo do pořadí takové, že sousední čísla mají stejný poměr. Standardní postup by byl vydělit druhé číslo číslem prvním, čímž bychom získali kvocient, kterým přenásobíme číslo druhé. Podrobnější postup pomocí logaritmů využije tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem. Logaritmus druhého čísla nalezneme rovnou v Napierových tabulkách pod úhlem 50° a jeho hodnota je 2665149. Logaritmus prvního čísla je -547302 . Tuto hodnotu nevyčteme z Napierových tabulek. Způsob, jakým ji Napier nejspíše získal, ukážeme v příkladu 5.3.2. Rozdíl logaritmů je 3212451. První číslo je větší než druhé a výsledná tříčlenná posloupnost je tedy klesající. Odpovídat jící aritmetická posloupnost logaritmů bude tudíž rostoucí. Rozdíl 3212451 proto přičteme k logaritmu druhého čísla a získáme 5877600. Tento logaritmus nalezneme rovnou v Napierových tabulkách u úhlu $33^\circ 45'$. Příslušný sinus a zároveň hledaný výsledek je tedy 5555702, což je přesný výsledek.

Příklad 4.4.2 (*Descriptio*, kapitola 5, příklad 2). *Geometrický průměr*

Zajímá nás geometrický průměr čísel 10^7 a $5 \cdot 10^6$. Standardní postup by byl vypočítat součin těchto čísel a potom pracně hledat jeho odmocninu. Zadaná čísla budou společně s jejich geometrickým průměrem GP uprostřed tvořit tři čísla se stejným poměrem sousedních členů. Tedy bude platit $10^7 : GP = GP : 5 \cdot 10^6$. Dle tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem se proto logaritmy sousedních členů liší vzájemně o stejnou hodnotu. Logaritmus čísla 10^7 je 0 a logaritmus druhého krajního čísla $5 \cdot 10^6$ je 6931469. Tuto hodnotu známe díky tomu, že Napier spolu s tabulkami uvádí, o kolik se liší logaritmy čísel s poměrem 2, viz příklad 5.3.3. Polovinu tohoto rozdílu přičteme k logaritmu 10^7 , čímž získáme 3465735. Toto číslo je tedy logaritmus hledaného výsledku a najdeme jej v Napierových tabulkách u úhlu 45° , jehož sinus a zároveň výsledek je 7071068.

Příklad 4.4.3 (*Descriptio*, kapitola 5, příklad 4). Čtyři čísla v poměru

Mějme dána dvě krajní čísla z posloupnosti čtyř čísel, kde sousední mají vždy stejný poměr. Zajímá nás, která dvě čísla jsou prostřední. Tato 4 čísla jsou po sobě jdoucí členy nějaké geometrické posloupnosti, jsou proto tvaru a, ax, ax^2, ax^3 . Klasický postup by byl vydelením čtvrtého člena prvním získat x^3 , výpočtem třetí odmocniny získat x , a tím dvakrát vynásobit první člen.

Při konkrétním zadání si ukážeme, jak vyřešit úlohu pohodlněji pomocí Napierových logaritmů. Ať první hodnota je 4029246 a poslední 10562556. Logaritmus druhého čísla je vypočítán v příkladu 4.4.1 a má hodnotu -547302 . Není jasné, jak Napier získal hodnotu logaritmu 9090051 pro první číslo. Je možné, že postupoval stejně jako v příkladu 5.3.2. Celkový rozsah logaritmů krajních čísel je tedy 9637353. O tento rozdíl se musí podělit tři stejné úseky s délkou $9637353/3 = 3212451$. Odečtením této hodnoty od logaritmu prvního čísla získáme 5877600, dalším odečtením pak 2665149. Nyní už stačí dohledat siny, jimž tyto logaritmy naleží.

Ještě ukážeme postup, který použil Napier ve své knize *Descriptio* při demonstraci vlastností logaritmů. Logaritmus druhého čísla nalezneme tak, že nejprve zdvojnásobíme logaritmus prvního, čímž získáme 18180102 a k tomu přičteme logaritmus posledního. Vyjde 17632800, což po vydelení třemi dá 5877600. Z Napierových tabulek získáme, že tento logaritmus odpovídá číslu 5555702, což je sinus úhlu $33^\circ 45'$. Uvedený postup plyne z následující úvahy: Logaritmus prvního čísla označme b . Logaritmy sousedních čísel se liší o konstantní zápornou hodnotu, tu označme y . Logaritmy jsou tedy tvaru $b, b+y, b+2y, b+3y$. Vydelením součtu čtvrtého logaritmu a dvojnásobku prvního logaritmu třemi proto získáme logaritmus druhého čísla. Analogicky, zdvojnásobíme logaritmus čtvrtého čísla, přičteme logaritmus prvního čísla a to vydělíme třemi. Získáme 2665149. V Napierových tabulkách nalezneme, že toto je logaritmus čísla 7660445, což je sinus úhlu 50° . Celá posloupnost čísel je tedy 4029246, 5555702, 7660445 a 10562556.

Příklad 4.4.4. Součin dvou čísel

Mějme čísla $x = 43632$ a $y = 267585$. Zajímá nás jejich součin. Protože $\frac{xy}{x} = \frac{y}{1}$, díky tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem víme, že platí

$$\text{NapLog } xy = \text{NapLog } x + \text{NapLog } y - \text{NapLog } 1.$$

Potřebujeme tedy znát hodnotu NapLog 1. Jak jsme zmínili, Napier vypočítal, že logaritmy sinů lišících se desetinásobně se liší o 23025842. Logaritmus 10^7 je roven 0. Proto je logaritmus $1 = 10^0$ roven $7 \cdot 23025842 = 161180894$. V Napierových tabulkách zjistíme, že hodnotě x naleží logaritmus 54345225 a hodnotě y logaritmus 36209009. Logaritmus součinu je tedy -70626660 . Logaritmus nejbližší tomuto číslu uvedený v Napierových tabulkách nalezneme uprostřed řádku s úhlem $89^\circ 57'$ a má hodnotu -70439560 . Víme, že prostřední sloupec tabulek udává hodnotu logaritmu tangens úhlu v posledním sloupci. V tabulkách hodnot tangens dohledáme, že tomuto úhlu odpovídá hodnota 11459152994, což považujeme za výsledek. Jde nám o postup, nikoli přesnost výpočtu. Po zadání čísel do kalkulačky získáme výsledek 11675268720. Počítali jsme tedy s chybou téměř 2 %, která není

nijak malá. Napier si byl vědom toho, že jeho tabulký mají své nedostatky, proto sám v závěru své druhé knihy v odstavci 60 navrhuje několik zpřesnění – např. $TS = 10^8$, tj. přesnost všech logaritmů v tabulce by byla navýšena o jednu cifru.

4.5 Napierův i Bürgiho logaritmus je přirozený

Obecná historie čísla e , jako například v knize (Maor, [7]), obvykle začíná právě Napierovými logaritmy. Jeho předpis ve tvaru $\text{NapLog } x = -10^7 \ln \frac{x}{10^7}$ totiž vyjadřuje, že pro své tabulky ve skutečnosti vypočítával hodnoty přirozené logaritmické funkce.

Nechť nás zajímá například hodnota $\ln 0,9636305$, v Napierových tabulkách vyhledáme číslo 9636305, které je sinem úhlu $74^\circ 30'$ s logaritmem 370474. Ze vzorečku vidíme, že Napierův logaritmus vyjadřuje -10^7 násobek přirozeného logaritmu zadaného čísla 0,9636305 takže hodnotu v tabulce interpretujeme jako $-0,0370474$, což je při zaokrouhlení na sedm desetinných míst přesná hodnota. Lze tedy tvrdit, že Napier zkonstruoval první tabulky hodnot přirozené logaritmické funkce aniž by měl vůbec tušení o Eulerově čísle e , které je někdy nazýváno právě Napierova konstanta.

Stejně tak, Bürgiho předpis ve tvaru $\text{BurgLog } x = 10 \log_{1+\frac{1}{10^4}} \frac{x}{10^8}$ vyjadřuje, že čísla v tabulkách jsou ve skutečnosti hodnoty přirozené logaritmické funkce. K uvědomění si tohoto faktu pomohou výrazy

$$\log_{1+\frac{1}{n}} x = \frac{n \ln x}{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n \ln x}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \approx \frac{n \ln x}{\ln e} = n \ln x.$$

Takže v případě, že $n = 10^k$ pro velké $k \in \mathbb{N}$, udává logaritmus o základu $1 + \frac{1}{10^k}$ hodnoty přirozených logaritmů, pouze s posunutou desetinnou čárkou o k doleva.

Nechť nás zajímá například hodnota $\ln y$, kde $y = 9,90347155$. V Bürgiho tabulkách (viz obrázek 3.4) vyhledáme číslo 990347155 a jemu příslušný logaritmus 229300. Ten je určen velmi přesně neboť po ověření dosazením do vzorečku získáme $\text{BurgLog } 990347155 = 229299,99996$. Ze vzorečku vidíme, že Bürgiho logaritmus vyjadřuje 10 násobek logaritmu o základu $1 + \frac{1}{10^4}$ ze zadaného čísla y . Z předchozího odstavce víme, že logaritmus o tomto základu vyjadřuje přibližně 10^4 násobek hodnoty $\ln y$. Hodnota z Bürgiho tabulek tak je 10^5 násobkem $\ln y$. Přirozený logaritmus čísla y určený pomocí Bürgiho tabulek má tedy hodnotu 2,293.

Na pět desetinných míst přesná hodnota je $\ln y = 2,29288$. Kdyby Bürgi nezvolil $k = 4$ ale vyšší $k = 6$, dobral by se pro své tabulky u tohoto čísla také logaritmu 229288. On však stejně jako všichni tvůrci tabulek hledal kompromis mezi jejich rozsáhlostí, s čímž souvisí časová pracnost, a přesností hodnot. Snaha každopádně

byla o co nejpřesnější výsledky. Kdyby například měl Bürgi k dispozici dostatek asistentů počtářů, nejspíše by pro svůj logaritmus zvolil vyšší k a přirozeným logaritmům by se tak přiblížil ještě více.

Je zde tak vidět jeden z mnoha argumentů, proč je logaritmus o základu e nazýván přirozeným. Dva naprosto nezávislí matematici se snažili zjednodušit výpočty s velkými čísly. Oba na to šli různými postupy. Ani jeden z nich neměl sebemenší tušení o nějakém iracionálním transcendentním čísle e . A přitom oba přirozeně došli k přirozené logaritmické funkci, jejíž hodnoty jsou v obou tabulkách vytisknutý.

Kapitola 5

Výpočet Napierových tabulek

Ukázali jsme, jak Napier definoval logaritmy pomocí pohybujících se bodů, odvodili jsme některé vlastnosti logaritmů a ukázali jejich využití na příkladech. Vysvětlili jsme, jak se vyznat v tabulkách. Zbývá popsat, jakým způsobem Napier logaritmy čísel v nich vypočítal. Ted' jde pouze o logaritmy. Hodnoty sinů daných úhlů byly známy, jim příslušné tabulky už existovaly. Výpočet tabulek zabral Napierovi 20 let.

Napier jej vysvětlil ve své druhé knize *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, anglicky *Construction of the wonderful canon of logarithms*, pro nás v celé práci zkráceně jen *Constructio* (Napier, [9]), která byla vydána až posmrtně jeho synem Robertem, roku 1619. Kniha má 159 stran, z nichž 90 obsahuje jsou tytéž tabulky jako v knize *Descriptio*. Kniha *Constructio* byla zřejmě napsána před knihou *Descriptio*. O tom svědčí například to, že v ní Napier označuje čísla jako „Natural numbers“ a logaritmy pojmem „Artificial numbers“. Až později začal používat slovo logaritmus, které daleko lépe vystihuje podstatu. Vzniklo spojením řeckých slov *logos* (poměr) a *arithmos* (číslo), viz (Clark a Montelle, [3]).

S vydáním Napier váhal proto, že si nebyl jist, zda budou jeho logaritmické tabulky pozitivně přijaty. V případě že ano, rád vysvětlí, jak při jejich tvorbě postupoval. Jinak by je nechal upadnout v zapomnění a detaily nezveřejňoval. Jeho první kniha *Descriptio* však měla velký úspěch. Bylo tedy žádoucí, aby byla zveřejněna i publikace vysvětlující konstrukci logaritmů (González-Velasco, [4]).

5.1 Posloupnosti čísel

Napier si připravil několik posloupností s hodnotami mezi $5 \cdot 10^6$ a 10^7 a určil jejich logaritmy. Pomocí těchto posloupností potom odhadl logaritmy sinů úhlů pro své tabulky. Aby se jednoduše počítaly logaritmy čísel z posloupností, jsou geometrické a, tudíž stačí pro určení logaritmů všech čísel posloupnosti znát rozdíl logaritmů prvních dvou čísel. Aby se prvky těchto geometrických posloupností jednoduše počítaly, volí Napier kvocienty $1 - \frac{1}{10^7}$, $1 - \frac{1}{10^5}$, $1 - \frac{1}{2000}$ a $1 - \frac{1}{100}$. Například u kvocientu $1 - \frac{1}{10^5}$ totiž další člen posloupnosti nalezneme snadno tak, že posuneme desetinnou čárku o pět pozic doleva, a výsledek odečteme od členu posledního.

Napier ve své knize *Constructio* postupoval tak, že nejprve vypočítal prvky několika geometrických posloupností a až následně k nim postupně doplnil logaritmy.

5.1.1 První posloupnost

Její první člen je 10^7 a kvocient $1 - \frac{1}{10^7}$. Odečtením 1,0000000 od 10000000,0000000 získáme 9999999,0000000. Od toho odečteme 0,9999999, získáme 9999998,0000001. Dalším odečtením 0,9999998 získáme 9999997,0000003. Tímto způsobem pokračujeme dále, přesnost udržujeme na 7 desetinných míst, a po 100 opakovaných odečteních dojdeme k číslu 9999900,0004950. První posloupnost tak má 101 členů.

5.1.2 Druhá posloupnost

Její první člen je opět 10^7 , nyní pro ni však Napier chce větší kvocient, aby obsáhla větší rozsah čísel. Nepotřebujeme už vysokou přesnost po malých krůčcích, neboť tu jsme si zajistili první posloupností. Na to se výborně hodí kvocient $1 - \frac{1}{10^5}$. Zaprvé se s ním velmi dobře počítá a zadruhé, druhým prvkem posloupnosti bude 9999900, což je číslo velice blízké poslednímu číslu předchozí posloupnosti. Až se budeme zabývat výpočtem logaritmů, ukážeme, jak lze odhadnout logaritmus nějakého čísla pomocí logaritmu čísla blízkého. Tento odhad bude logicky o to přesnější, čím blíže si daná čísla budou. Až tedy vypočítáme logaritmus čísla 9999900,0004950, velmi přesně pomocí něj odhadneme logaritmus druhého prvku druhé posloupnosti 9999900. Potom už díky geometričnosti posloupnosti doplníme logaritmy ostatních prvků jednoduchým přičítáním. Druhá posloupnost bude mít 51 členů.

První tři členy druhé posloupnosti jsou 10000000, 9999999,0000000, 9999800,001000, padesátý první je 9995001,222927. Ve druhé posloupnosti tak Napier pracuje s přesností na šest desetinných míst. Když si necháme přesně (na mnohem vyšší počet desetinných míst) vypočítat výraz $10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{50}$ tak

zjistíme, že výsledek je 9995001, 224804. Když Napierův postup zrekonstruujeme pomocí počítače a necháme jej opakovat odečítat stotisícinu s přesností na 6 desetinných míst, získáme výsledek 9995001, 224826. Toto číslo by proto mělo být uvedeno v Napierově knize jako poslední prvek druhé posloupnosti namísto 9995001, 222927. Vzhledem k tomu, že výpočet druhé tabulky, stejně jako první, je díky volbě kvocientu jen prosté odečítání, nejspíše se nejednalo o chybu záměrnou, usnadňující výpočet (už tak byl snadný), a vznikla spíše nepozorností. Zároveň nemůžeme zjistit, kde přesně k chybě došlo, neboť Napier v knize *Constructio* uvádí hodnoty pouze prvních pěti prvků posloupnosti a prvek poslední. Tato chyba dále nehráje významnou roli. Potřebujeme ji hlavně pro odhad logaritmu čísla 9995000 do další posloupnosti. Po dočtení této kapitoly si může čtenář sám spočítat, že tato Napierova chyba má za následek to, že logaritmus čísla 9995000 se od správné hodnoty získané pomocí čísla 9995001, 224826 liší o 0, 0019.

5.1.3 Třetí posloupnost

Její první člen je také 10^7 , Napier za poměr sousedních členů zvolil $0,9995 = 1 - \frac{1}{2000}$. Každé následující číslo tedy získáme zmenšením předchozího o jeho dvoutisícinu. Druhý prvek je 9995000, následuje 9990002, 5 a tak dále, až k 9900473, 57808, které je dvacáté první. Napier ve své knize *Constructio* neuvádí celou posloupnost, ale jen prvních pět čísel a číslo poslední. V odstavci 25 ve své knize *Constructio* popisuje, že počítá s přesností na pět desetinných míst. Například když vydělíme čtvrté číslo 9985007, 49875 číslem 2000, získáme přesně 4992, 503749375, pro Napiera to je jen 4992, 50374. Páté číslo 9980014, 99501 tak získal odečtením 4992, 50374 od čtvrtého. Nicméně, když tento postup zopakujeme dvacetkrát, dojdeme k poslednímu číslu 9900473, 57811 a nikoli 9900473, 57808, jak uvádí Napier. Kdybychom počítali s přesností na 6 desetinných míst, poslední číslo by bylo 9900473, 578032. Pro úplnost, přesná hodnota $10^7(1 - \frac{1}{2000})^{20}$ je 9900473, 57802. Nevíme tedy, jak zrekonstruovat jeho výpočty, abychom došli ke stejnemu číslu, Napier při svých výpočtech nejspíše opět někde chyboval, možná počítal v jednotlivých krocích s různou přesností, možná se jedná o chybu sazeče.

5.1.4 Tabulka radikálů

Poměr prvního a posledního čísla třetí posloupnosti je přibližně 0, 99. Tento poměr následně Napier využije k tomu, aby pro každý z 21 prvků třetí posloupnosti sestrojil posloupnost 68 čísel. Tento soubor čísel tak má charakter matice, kterou Napier nazývá tabulka radikálů. Třetí posloupnost s 21 čísly o poměru 0, 9995 tvoří její první sloupec. Každému z nich přísluší řádek s dalšími 68 hodnotami se vzájemným poměrem 0, 99. Pro celou tabulku jsou hodnoty čísel uvedeny s přesností na 4 desetinná místa a na tolik míst je prováděn i výpočet. Každé další číslo v řádku získáme z předchozího tak, že předchozí nejprve vydělíme stem (posuneme desetinnou čárku), odstraníme poslední dvě číslice (pátá a šestá pozice za desetinnou čárkou) a to odečteme od čísla předchozího. Například, v posledním řádku máme na začátku

poslední prvek třetí posloupnosti neboli prvního sloupce tabulky 9900473, 5780. Po vydělení stem a vynecháním posledních dvou cifer máme 99004, 7357. To odečteme, čímž získáme 9801468, 8423 neboli druhé číslo posledního řádku tabulky radikálů.

Když napišeme program, který přesně tento postup realizuje, pro 69. sloupec vypočítáme hodnoty, které jsou v řádcích číslo 1, 2, 3 a 5 stejné jako ty v Napierově knize *Constructio*, pro čtvrtý řádek získáme číslo lišící se od Napierovy hodnoty o 0,0001 a pro řádek 21 je rozdíl 0,0009. Na více řádcích to není možné ověřit, neboť je Napier ve své práci neuvádí. Zvýšení přesnosti výpočtu vede ve všech případech k větším rozdílům od Napierových hodnot. Opět tedy není zcela jasné, jak přesně Napier při zaokrouhlování postupoval. Například chyba v posledním řádku nápadně spočívá v prohození posledních dvou cifer – ty jsou v knize *Constructio* 34, zrekonstruovaný výpočet má na těchto pozicích 43. Může tak jít o nepozornosti při přepisu či sazbě.

Příslušný algoritmus rekonstruující Napierův výpočet (například pro 21. řádek tabulky radikálů) je následující.

```
x:= 99004735780;
for i:=1 to 69 do
begin
    writeln(x);
    y:= trunc(x/100);
    x:= x-y;
end;
```

Nejmenší číslo v tabulce radikálů je 4998609, 4034, tedy zhruba polovina původního čísla 10^7 , se nachází na posledním řádku posledního sloupce.

5.2 Doplnění logaritmů k posloupnostem

Dalším cílem je nalézt logaritmy k číslům (sinům) v tabulce radikálů. Pomocí nich potom už vypočítáme logaritmy sinů úhlů mezi 0 a 90 stupni. Připomeňme Napierovu definici logaritmu, viz sekce 4.1.3. Bod B se po přímce pohybuje konstantní rychlostí a tedy za stejně dlouhé časové úseky urazí stejné vzdálenosti. Bod G se pohybuje od bodu T k bodu S tak, že pro stejně časové úseky je poměr vzdáleností GS před a po uplynutí tohoto času stejný. Oba body startují svůj pohyb najednou, stejnou rychlostí. Logaritmus vzdálenosti (sinu) GS je potom roven vzdálenosti uražené bodem B . Vzdálenost TS Napier položil rovnou 10^7 .

5.2.1 První posloupnost

Než se konečně pustíme do výpočtu logaritmu nějakého dalšího čísla po 10^7 , jehož nulový logaritmus známe už dlouho, potřebujeme několik pomocných tvrzení.

Tvrzení 5.2.1 (*Constructio*, odstavec 25). *O rychlosti bodu G*

Napier tvrdí, že rychlosť bodu G přibližujícího se k S je přímo úměrná vzdálenosti GS . Jak zjistíme v kapitole 6, je to pravda.

Napierovo vysvětlení, které nelze považovat za plnohodnotný důkaz, je následující. Bod G se začne pohybovat z bodu $T_0 = T$. Zvolme libovolně kladný časový interval Δt a po každém jeho uplynutí zaznamenejme polohu bodu G , čímž vzniknou body T_1, T_2, \dots . Dle definice pohybu G označme pevný poměr $a = \frac{T_{i+1}S}{T_iS}$, kde i je libovolné. Postupnými úpravami získáme

$$\frac{T_{i+1}T_{i+2}}{T_iT_{i+1}} = \frac{T_{i+1}S - T_{i+2}S}{T_iS - T_{i+1}S} = \frac{T_{i+1}S - aT_{i+1}S}{T_iS - aT_iS} = \frac{T_{i+1}S}{T_iS} = a.$$

Zjistili jsme tedy, že posloupnost vzdáleností T_iT_{i+1} je geometrická a s týmž kvocientem jako posloupnost vzdáleností T_iS . Jinými slovy $T_iT_{i+1} = a^i T_0 T_1$ a $T_iS = a^i T_0 S$, z čehož plyne

$$T_iT_{i+1} = \frac{T_0 T_1}{T_0 S} T_i S$$

tj. že vzdálenost T_iT_{i+1} je přímo úměrná vzdálenosti GS , jestliže se G nachází v bodech T_i .

Dle Napiera jsou nutně přímo úměrné této vzdálenosti i rychlosti v bodech T_i . Rozhodně to platí pro průměrné rychlosti \bar{v}_i bodu G na úsecích T_iT_{i+1} , neboť ty splňují vztah

$$\bar{v}_i = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{T_i T_{i+1}}{\Delta t} = \frac{T_0 T_1}{\Delta t \cdot T_0 S} T_i S.$$

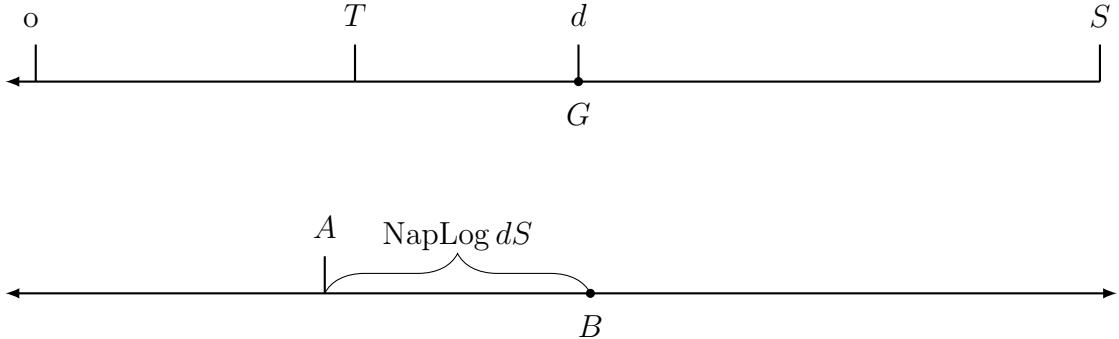
Vzhledem k tomu, že pro malou volbu délky časového intervalu Δt je průměrná rychlosť na úseku T_iT_{i+1} téměř rovna okamžité rychlosťi v T_i , dalo by se pomocí limit pro $\Delta t \rightarrow 0$ dokázat, že toto tvrzení platí i pro okamžité rychlosťi. Speciálně, pro bod T_0 bychom získali v_0 rychlosť, se kterou G (i B) startuje svůj pohyb. Pro okamžitou rychlosť v bodu G bychom tak došli ke vztahu

$$v = \frac{v_0}{T_0 S} GS.$$

Ke stejnemu výsledku dojdeme v kapitole 6, kde toto tvrzení dokážeme jednoduše po nalezení předpisu pro vzdálenost GS v závislosti na čase.

Tvrzení 5.2.2 (*Constructio*, odstavec 28). *O hranicích logaritmu*

Logaritmus AB daného sinu dS je **větší**, než **rozdíl** Td poloměru TS a tohoto sinu a **menší**, než **rozdíl** oT poloměru TS a délky oS , která je ku poloměru ve stejném poměru jako je poloměr k danému sinu dS . Tyto rozdíly jsou nazvány limity logaritmu.



Nechť je dána hodnota sinu dS a G se nachází od S v této vzdálenosti. At oS je vzdálenost, která přesahuje poloměr TS v poměru $\frac{oS}{TS} = \frac{Td}{dS}$. Dle definic pohybů bodů jsou vzdálenosti oT , Td i AB uraženy příslušnými body za stejný čas. Protože rychlosti G a B jsou stejné v bodech T a A , rychlosť G je klesající (viz předchozí tvrzení) a rychlosť B konstantní, přičemž rychlosť B v A je rovna rychlosći G v T , nutně platí

$$Td < AB = \text{NapLog } dS < oT.$$

Dolní odhad Td logaritmu čísla dS tedy získáme odečtením daného čísla dS od $TS = 10^7$. Zřejmě platí $\frac{oT}{TS} = \frac{Td}{dS}$. Horní hranici oT tak získáme vynásobením dolní hranice Td celým sinem TS a vydělením logaritmovaným číslem dS . Vyjádření hranic pouze pomocí zadaného čísla x tedy je

$$10^7 - x \leq \text{NapLog } x \leq \frac{10^7(10^7 - x)}{x}.$$

Výpočet logaritmů k první posloupnosti

Logaritmus prvního čísla 10^7 známe už od definice, ten je roven nule. Zajímá nás logaritmus druhého čísla první posloupnosti, 9999999. Využijeme předchozí tvrzení. Spodní limita Td je 1. Horní limita oT je 1,0000001. Nyní využijeme toho, že posloupnost čísel je geometrická. Z tvrzení 4.2.1 víme, že dvojice čísel se stejným poměrem mají stejně vzdálené logaritmy. Takže když rozdíl logaritmu prvního čísla posloupnosti a logaritmu druhého čísla leží mezi 1 a 1,0000001, leží mezi těmito hranicemi i rozdíl logaritmu druhého a třetího čísla, třetího a čtvrtého,... i stého a sto prvního. Logaritmus třetího čísla 9999998,0000001 tedy leží v rozmezí 2 a 2,0000002, čtvrtého čísla 9999997,0000003 v rozmezí 3 a 3,0000003, a tak dále. Jako logaritmy čísel Napier zvolil aritmetické průměry mezí, viz obrázek 5.1.

pořadí	číslo	logaritmus
1	10000000.000000	0.0000000
2	9999999.0000000	1.0000001
3	9999998.0000001	2.0000001
4	9999997.0000003	3.0000002
...		
99	9999902.0004753	98.0000049
100	9999901.0004851	99.0000050
101	9999900.0004950	100.0000050

Obrázek 5.1: První posloupnost s logaritmami

Vzhledem k tomu, že rychlosti B a G jsou nejpodobnější těsně po začátku pohybu, je odhad z předchozího tvrzení nejpřesnejší pro siny blízké TS . Toho využíváme právě v první posloupnosti, která je velmi jemná a její druhý údaj je velice blízký hodnotě TS . Jeho logaritmus proto známe velmi přesně a tím pádem i logaritmy ostatních čísel první posloupnosti.

5.2.2 Druhá posloupnost

Stejně jako u první posloupnosti, je klíčové získat logaritmus jejího druhého čísla, neboť poté díky geometričnosti doplníme zbylé logaritmy jednoduchým přičítáním. S tvrzením 5.2.2 o hranicích logaritmu už si však nevystačíme.

Kdybychom tento odhad aplikovali na nějaké vzdálenější číslo, například $9 \cdot 10^6$, získali bychom $1000000 < \text{NapLog } 9000000 < 1111111$, což je příliš široké rozmezí pro výběr logaritmu pro početní potřeby. Pro nalezení logaritmů ostatních čísel si proto budeme pomáhat jinak. Využijeme zaprvé vypočítané hodnoty z první posloupnosti, a navíc nové, velmi důležité tvrzení.

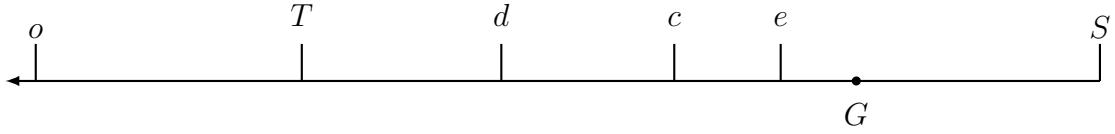
Tvrzení 5.2.3 (*Constructio*, odstavec 39). *O odhadu rozdílu logaritmů dvou čísel*

Napier uvádí návod, jak odhadnout rozdíl logaritmů dvou sinů cS a eS . Tvrdí, že horní limita (hranice) pro tento rozdíl je ku TS ve stejném poměru jako rozdíl sinů $cS - eS$ ku menšímu sinu eS . Dolní limita je ku poloměru TS ve stejném poměru jako rozdíl sinů ku většímu sinu cS . Jinými slovy, pro rozdíl logaritmů čísel $cS \geq eS$ platí

$$\frac{TS \cdot (cS - eS)}{cS} \leq \text{NapLog } eS - \text{NapLog } cS \leq \frac{TS \cdot (cS - eS)}{eS}.$$

Hranice pro rozdíl logaritmů dvou čísel tedy spočítáme jednoduše – rozdíl těchto čísel vydělíme buďto větším (dolní hranice) či větším (horní hranice) z čísel a desetinnou čárku posuneme o sedm pozic doprava. Nyní si ukážeme, proč toto tvrzení platí.

Nalevo od bodu T vyznačme bod o splňující $\frac{TS}{oT} = \frac{eS}{ce}$. Napravo od T vyznačme bod d splňující $\frac{TS}{Td} = \frac{cS}{ce}$.



Z těchto dvou rovností plyne

$$\frac{eS}{cS} = \frac{cS - ce}{cS} = 1 - \frac{ce}{cS} = 1 - \frac{Td}{TS} = \frac{TS - Td}{TS} = \frac{dS}{TS}.$$

Tyto dvojice čísel mají dle tvrzení 4.2.1 o logaritmách dvojic se stejným poměrem stejně vzdálené logaritmy, takže $\text{NapLog } dS = \text{NapLog } eS - \text{NapLog } cS$. I tady je vidět, proč bylo vhodné zvolit $\text{NapLog } TS = 0$. Z uvedených rovností dále plyne

$$\frac{TS}{oS} = \left(\frac{oT + TS}{TS} \right)^{-1} = \left(\frac{ce}{eS} + 1 \right)^{-1} = \left(\frac{cS}{eS} \right)^{-1} = \frac{dS}{TS}.$$

Dle tvrzení 5.2.2 o hranicích logaritmu proto leží logaritmus čísla dS mezi čísly Td a oT . Z uvedených rovností ale také plyne $Td = \frac{TS \cdot ce}{cS}$ a $oT = \frac{TS \cdot ce}{eS}$, což jsou krajní body nerovnosti ze začátku tvrzení a to je tím dokázáno.

Příklad 5.2.4 (*Constructio*, odstavec 40). *Aplikace tvrzení o odhadu rozdílu logaritmů*

Ať větší číslo je $9999975,5000000 = cS$, jehož logaritmus zatím neznáme a menší číslo $9999975,0000300 = eS$, což je číslo z první tabulky které jsme získali jako $10^7(1 - 10^{-7})^{25}$. Rozdíl logaritmů těchto čísel je dle vzorečku minimálně $0,49997122$ a maximálně $0,49997124$. Protože logaritmus eS máme s přesností na 7 desetinných míst, nemá smysl zabývat se u rozdílu logaritmů místem osmým, proto jej ignorujeme. Víme, že logaritmus čísla eS leží mezi $25,0000000$ a $25,0000025$. Číslo cS je větší než eS a tudíž má menší logaritmus. Ten tedy leží v rozmezí $25,0000000 - 0,4999712 = 24,5000288$ a $25,0000025 - 0,4999712 = 24,5000313$. Zvolíme průměr těchto hranic $24,5000300$, který je shodný s hodnotou, kterou bychom získali na počítači použitím vzorečku pro Napierův logaritmus.

Výpočet logaritmů k druhé posloupnosti

Podobně jako v předchozím příkladu, bychom pomocí posledního čísla první posloupnosti $9999900,0004950$, jehož logaritmus leží v rozmezí $100,0000000$ a $100,0000100$, vypočítali logaritmus druhého čísla druhé posloupnosti 9999900 . Dolní a horní hranice rozdílu jejich logaritmů se liší až na čtrnáctém místě desetinného rozvoje, na prvních 7 míst to je $0,0004950$ a logaritmus čísla 9999900 tak leží v rozmezí $100,0004950$ a $100,0005050$.

Protože logaritmus prvního čísla druhé posloupnosti 10^7 je roven nule, je rozdíl logaritmů prvního a druhého čísla roven logaritmu čísla 9999900. Sousední čísla druhé posloupnosti jsou vždy ve stejném poměru, mají tudíž stejně vzdálené logaritmy. Pro tuto vzdálenost známe dolní a horní odhad. Tudíž pro zisk odhadů logaritmů dalších čísel vždy stačí přičíst 100,0004950 k dolní hranici a 100,0005050 k horní hranici. Logaritmus třetího čísla druhé posloupnosti tedy leží v rozmezí 200,0009900 a 200,0010100. Padesáté první číslo druhé posloupnosti 9995001, 224804 má logaritmus z rozmezí 5000,0247500 a 5000,0252500. Za hodnoty logaritmů do druhé tabulky volíme, stejně jako u první tabulky, průměr těchto hranic.

Na následujícím obrázku vidíme začátek a konec druhé posloupnosti s doplněnými hodnotami logaritmů. Vzhledem k tomu, že jak jsme ukázali v sekci 5.1.2, není jasný Napierův postup při výpočtu druhé posloupnosti a proto je tato tabulka vypočítána postupem u kterého se domníváme, že se jej Napier snažil dodržet. Poslední hodnota v tabulce se tak od té uvedené Napierem nepatrně liší. Na hodnoty logaritmů to vliv nemá, ty jsou v souladu s hodnotami uvedenými v Napierově knize.

pořadí	číslo	logaritmus
1	10000000,000000	0,0000000
2	9999900,000000	100,0005000
3	9999800,001000	200,0010000
4	9999700,003000	300,0015000
...		
49	9995201,127848	4800,0240000
50	9995101,175837	4900,0245000
51	9995001,224826	5000,0250000

Obrázek 5.2: Druhá posloupnost s logaritmy

5.2.3 Třetí posloupnost

Ukážeme, jak najít logaritmus čísla x , které není přímo prvkem druhé posloupnosti, ale je z jejího **rozsahu**, čímž máme na mysli to, že kdybychom rozšířili druhou posloupnost o jeden prvek z každého konce, leží x právě mezi některými dvěma čísly z této rozšířené posloupnosti. V takovém případě nalezneme a_i prvek druhé posloupnosti nejbližší číslu x a manuálním dělením vypočítáme y splňující

$$\frac{y}{10^7} = \frac{x}{a_i} \text{ pro } x < a_i,$$

respektive

$$\frac{y}{10^7} = \frac{a_i}{x} \text{ pro } x > a_i.$$

Pak totiž bude platit, že y je z rozsahu první posloupnosti, která má prvky méně vzdálené a logaritmus čísla y tak určíme přesně. Použitím tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem pak dopočítáme logaritmus čísla x , jak ukážeme v následujícím příkladu. Alternativní možností pro nalezení logaritmu x by bylo aplikovat rovnou tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů na čísla x a a_i . Tato čísla už si však mohou být dost vzdálena a odhad by tak byl méně přesný. Zde je tedy vidět, proč Napier volil poměry do svých posloupností právě takto a proč je buduje způsobem od „nejjemnější“ po „nejhrubší“.

Příklad 5.2.5 (*Constructio*, odstavec 43). *Logaritmus druhého čísla třetí posloupnosti*

Hledejme logaritmus druhého čísla třetí posloupnosti $c_2 = 9995000$. Hodnota z druhé posloupnosti nejbližší tomuto číslu je (záměrně) ta poslední, $b_{51} = 9995001, 222927$ s logaritmem v rozmezí 5000, 0247500 až 5000, 0252500. Dle předchozího odstavce vypočítáme číslo $y = 9999998, 7764614$, pro které platí

$$\frac{y}{10^7} = \frac{c_2}{b_{51}}.$$

Číslu y nejbližší číslo z první posloupnosti je to druhé, $a_2 = 9999999, 0000000$ s logaritmem v rozmezí 1, 0000000 a 1, 0000001. Dle tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů je rozdíl logaritmů y a a_2 roven 0, 2235386 (dolní a horní hranice pro tento rozdíl se liší až na 9. desetinném místě, proto uvádíme jedno číslo). Logaritmus čísla y tedy leží v rozmezí 1, 2235386 až 1, 2235387.

Tyto hodnoty dle tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem zároveň určují, o kolik se liší logaritmus c_2 a b_{51} . Spojením rozmezí získáme, že logaritmus c_2 leží v intervalu 5001, 2482886 až 5001, 2487888. Zvolíme průměr jeho hranic: 5001, 2485387.

Pro porovnání, vzorečkem získaná přesná hodnota logaritmu je 5001, 2504168. Zde si dovolím upozornit na drobnou nesrovonalost. Napier totiž tvrdí, že toto rozmezí získáme sečtením předchozích rozmezí, tj. speciálně horní hranice má být $5001, 2487888 = 5000, 0252500 + 1, 2235387$, což není pravda pro poslední desetinnou pozici. Napier změnil poslední lichou číslici 7 na sudou číslici 8 nejspíše proto, aby snadno určil střed tohoto rozmezí.

5.2.4 Tabulka radikálů

Podobně jako u předchozích dvou posloupností, protože známe rozdíl logaritmů prvního (10^7) a druhého (995000) čísla, můžeme logaritmy všech zbylých prvků třetí posloupnosti, tj. prvního sloupce tabulky radikálů, dopočítat přičítáním tohoto rozdílu 5001, 2485387. Poslední, 21. prvek třetí posloupnosti $9900473, 5780 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^{20}$ má tedy logaritmus $100024, 970774 = 20 \cdot 5001, 2485387$.

Pro doplnění logaritmů v ostatních sloupcích tabulky radikálů se hodí znát logaritmus prvního čísla druhého sloupce, 9900000.

Mohli bychom použít rovnou tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů, zjistit o kolik se liší logaritmy čísel 9900000 a 9900473, 57808 a tento rozdíl přičíst k logaritmu čísla 9900473, 5780. Zjistili bychom tak, že logaritmus 9900000 se nachází v rozmezí $100503, 3045062 = 100024, 9657720 + 478, 3387342$ až $100503, 3373921 = 100024, 9757760 + 478, 3616161$, které má rozpětí 0, 0328859 a jeho prostřední hodnota je $100503, 32094915$. Budeme však postupovat jako v předchozím příkladu a pro logaritmus 9900000 získáme rozmezí s rozpětím 0, 0100562 a prostřední hodnotou $100503, 3210291$, což je o malinko správnější výsledek. Přesná hodnota získaná vzorečkem by byla $100503, 3585350$.

Příklad 5.2.6 (*Constructio*, odstavec 45). *Logaritmus prvního čísla druhého sloupce tabulky radikálů*

Hledáme logaritmus čísla $d_{1,2} = 9900000$. Číslo z prvního sloupce nejbližší číslu $d_{1,2}$ je to poslední, $c_{21} = 9900473, 57808$. Mechanicky vypočítáme $y = 9999521, 6611850$, splňující

$$\frac{y}{10^7} = \frac{d_{1,2}}{c_{21}}.$$

Číslu y nejbližší číslo ze druhé posloupnosti je to šesté, $b_6 = 9999500, 0100000$ s logaritmem 500, 002475 až 500, 0025250.

Postup zopakujeme a nalezneme číslo $x = 9999978, 3477792$, splňující

$$\frac{x}{10^7} = \frac{b_6}{y}.$$

Dostali jsme se tak do rozsahu první posloupnosti a můžeme začít určovat logaritmy. Číslu x nejbližší prvek z první posloupnosti je $a_{23} = 9999978, 0000231$ s logaritmem z rozmezí 22, 0000000 až 22, 0000022. Dle tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů je rozdíl logaritmů čísel x a a_{23} roven 0, 3477569 (hranice rozmezí se liší až od osmé pozice). Logaritmus čísla x proto leží v rozmezí 21, 6522431 až 21, 6522453.

Pokračujeme o úroveň výše, kde díky předchozímu najdeme logaritmus čísla y v rozmezí $478,3502297 = 500,0024750 - 21,6522453$ až $478,3502819 = 500,0025250 - 21,6522431$. Napier ve své knize uvádí hodnoty tohoto rozmezí $478,3502290$ až $478,3502812$. Jeho rozmezí se tak od našeho liší na posledním desetinném místě. V knize každopádně není uvedeno, jak přesně Napier postupoval a tudíž není jasné, proč se výsledky liší.

Logaritmus posledního čísla prvního sloupce c_{21} leží v rozmezí $20 \cdot 5001,2482886 = 100024,9657720$ a $20 \cdot 5001,2487888 = 100024,9757760$. Kombinací hranic získáme, že logaritmus $d_{1,2}$ leží mezi $100503,3160010 = 100024,965772 + 478,3502290$ a $100503,3260572 = 100024,9757760 + 478,3502812$. Za logaritmus čísla $d_{1,2}$ vybereme průměr těchto hodnot, $100503,3210291$.

V tuto chvíli už dokážeme jednoduše dopočítat logaritmy všech čísel z tabulky radikálů. První sloupec $d_{1,*}$ už máme vyplněný. Protože známe logaritmus prvního čísla prvního sloupce i prvního čísla druhého sloupce a všechna sousední čísla v řádcích jsou ve stejném poměru a mají tudíž stejné rozdíly logaritmů rovné $100503,3210291$, logaritmy dalších čísel prvního řádku získáme přičítáním tohoto rozdílu k číslu předchozímu. Stejně můžeme postupovat pro všechny řádky. Vyplněním posledního řádku posledního sloupce Napier dospěl k logaritmu $6934250,8007528$ čísla $4998609,4034$. V ukázce 5.3 tabulky radikálů pro svou knihu zaokrouhlil Napier logaritmy na jedno desetinné místo.

pořadí	sloupec 1		sloupec 2		sloupec 69	
	číslo	logaritmus	číslo	logaritmus	číslo	logaritmus
1	10000000.0000	0.0	9900000.0000	100503.3	5048858.8900	6834225.8
2	9995000.0000	5001.2	9895050.0000	105504.6	5046334.4605	6839227.1
3	9990002.5000	10002.5	9890102.4750	110505.8	5043811.2932	6844228.3
...
21	9900473.5780	100025.0	9801468.8422	200528.2	4998609.4034	6934250.8

Obrázek 5.3: Tabulka radikálů s logaritmy

5.3 Nalezení logaritmů k sinům úhlů

Nyní už můžeme popsat, jak získáme logaritmy všech čísel pro Napierovu tabulkou logaritmů sinů úhlů. Pro čísla mezi 9996700 a 10^7 je nalezení logaritmu velmi jednoduché a spočívá v odečtení zadaného čísla od čísla 10^7 . Je to důsledkem tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů, kdy spočítáme, že logaritmus čísla 9996700 leží v rozmezí 3300 a 3301 . Vzhledem k tomu, že rozmezí logaritmů je široké pouze 1 a číslice za desetinnou čárkou nás pro Napierovy tabulky logaritmů sinů úhlů nezajímá, nemůžeme se dopustit výrazné chyby. Proto můžeme za logaritmus klidně zvolit dolní hranici, která je rovna rozdílu daného čísla a 10^7 . Stejná situace platí i pro všechna čísla větší než 9996700 a menší než 10^7 .

5.3.1 Čísla z rozsahu tabulky radikálů

Pro nalezení logaritmu čísla z rozsahu tabulky radikálů nalezneme číslo, které je danému číslu nejbližše. Dle tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů vynásobíme rozdíl těchto čísel hodnotou 10^7 a tento součin vydělíme buď zadaným číslem, nejbližším číslem z tabulky či něčím mezi tím, čímž získáme horní, dolní, či průběžný odhad. Díky tomu, jak jsou čísla třetí tabulky vzdálena a vzhledem k tomu, že pro tabulku logaritmů sinů nás zajímá jen celá část, libovolný z těchto odhadů bude dostatečně blízko správné hodnotě. Proto Napier doporučuje vybírat takové číslo z tohoto rozsahu, kterým se bude nejsnáze dělit.

Příklad 5.3.1 (*Constructio*, odstavec 50). *Výpočet logaritmu konkrétního sinu*

Hledáme logaritmus sinu úhlu $48^\circ 30'$, neboli čísla 7489557. Jemu nejbližší číslo z tabulky radikálů je $d_{16,29} = 7490786,6119 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^{15} \cdot 0,99^{28}$ s logaritmem 2889111,7.

Nyní použijeme tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů. Rozdíl zadaného čísla a čísla z tabulky je 1229,6119. Ten vynásobíme 10^7 a vybereme si co nejjednodušší (pro snadnou práci) dělitel z rozmezí mezi zadaným číslem a číslem z tabulky, například číslo 7490000 z poloviny rozsahu. Dělením získáme 1640,1. Protože zadané číslo je menší než číslo z tabulky, tento rozdíl k tabulkové hodnotě logaritmu přičteme. Získáme 2890751,8, což zaokrouhlíme, neboť v Napierových tabulkách chceme pouze celá čísla. Za logaritmus zadaného sinu proto volíme hodnotu 2890752.

Příklad 5.3.2. *Výpočet logaritmu z příkladu 4.4.1*

V příkladu 4.4.1 v předchozí kapitole jsme tvrdili, že logaritmus čísla $y = 10562556$ je -547302 . Jak jej Napier získal? Ukážeme jeden z možných postupů. Mechanickým výpočtem nalezneme číslo $x = 9467405,4272$, které splňuje

$$\frac{x}{10^7} = \frac{10^7}{y}.$$

Dle tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem potom platí NapLog $y = -\text{NapLog } x$. Číslu x nejbližší číslo z tabulky radikálů je $d_{7,6} = 9481406,4361 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^6 \cdot 0,99^5$ s logaritmem 532524,1 = 5001,2485387·6+100503,3210291·5. Tyto hodnoty najdeme v 6. sloupci na 7. řádku.

Dle tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů leží rozdíl logaritmů čísel $d_{7,6}$ a x v rozmezí

$$14766,8060 = \frac{10^7 \cdot (d_{7,6} - x)}{d_{7,6}} \quad \text{až} \quad 14788,64441 = \frac{10^7 \cdot (d_{7,6} - x)}{x},$$

kde zvolíme střední rozdíl 14777,7. Protože $x < d_{7,6}$, tak tuto hodnotu přičteme k logaritmu z tabulky a získáme hledanou hodnotu NapLog $x = 547301,8$. Tu stačí zaokrouhlit na jednotky a obrátit znaménko, čímž získáme hledaný logaritmus čísla y .

5.3.2 Čísla mimo rozsah tabulky radikálů

Protože rozsah tabulky radikálů je od $TS/2$ do TS , nevíme jak hledat logaritmy sinů úhlů menších než 45° . To řeší následující dva příklady.

Příklad 5.3.3 (*Constructio*, odstavec 51). *Rozdíl logaritmů čísel s poměrem 1:2*

K získání této hodnoty se nabízí čísla 10^7 a $5 \cdot 10^6$. Protože logaritmus 10^7 je nula, stačí získat hodnotu logaritmu polovičního čísla. K tomu můžeme použít tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů a poslední číslo v tabulce radikálů $d_{21,69} = 4998609, 4034 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^{20} \cdot 0, 99^{68}$ s logaritmem 6934250, 8. Tím pro rozdíl uvedených čísel NapLog $d_{21,69} - \text{NapLog } \frac{1}{2}TS$ získáme odhad

$$2781, 1932 = \frac{TS(\frac{1}{2}TS - d_{21,69})}{\frac{1}{2}TS} \quad \text{až} \quad 2781, 9669 = \frac{TS(\frac{1}{2}TS - d_{21,69})}{d_{21,69}}.$$

Výsledek $\text{NapLog } \frac{1}{2}TS = 6934250, 8 - 2781, 5800 = 6931469, 22$ získáme zprůměrováním krajních hodnot.

Příklad 5.3.4 (*Constructio*, odstavec 52). *Rozdíl logaritmů čísel s poměrem 1:10*

Nejprve zjistíme logaritmus čísla $8 \cdot 10^6$. Jemu nejbližší číslo z tabulky radikálů je $d_{5,23} = 8000285, 3052 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^4 \cdot 0, 99^{22}$ s logaritmem 2231078, 056795 = 5001, 2485387 · 4 + 100503, 3210291 · 22. Pomocí tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů bychom zjistili, že střední rozdíl logaritmů těchto čísel je 356, 625141. Za logaritmus čísla 8000000 proto bereme 2231434, 68 = 2231078, 056795 + 356, 625141.

Díky předchozímu příkladu víme, že logaritmus osmkrát menšího čísla 10^6 je $23025842, 34 = 2231434, 68 + 3 \cdot 6931469, 22$. Známe tedy logaritmy dvou čísel, 10^7 a 10^6 s poměrem 10 : 1. Jejich rozdíl je 23025842, 34.

Příklad 5.3.5 (*Constructio*, odstavec 54). *Výpočet logaritmu sinu ostrého úhlu*

Hledáme logaritmus sinu úhlu $2^\circ 10'$ neboli čísla $x = 378064$. To není číslo z rozsahu tabulky radikálů. Když jej vynásobíme dvaceti, získáme 7561280. Jemu nejbližší číslo z tabulky radikálů je $d_{17,28} = 7562667, 8976 = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{2000})^{16} \cdot 0, 99^{27}$ s logaritmem 2793609, 6 = 5001, 2485387 · 16 + 100503, 3210291 · 27. Dle tvrzení 5.2.3 o odhadu rozdílu logaritmů je střední rozdíl logaritmů těchto čísel 1835, 3. Logaritmus $20 \cdot x$ je tedy 2795444, 9. Protože jsme toto číslo získali násobením dvěma a deseti, bude výsledný logaritmus větší o $6931469, 22 + 23025842, 34$. Výsledek je tedy 32752756, 4. Do tabulky logaritmů sinů použijeme celé číslo 32752756. Pro porovnání, přesná hodnota získaná vzorečkem pro NapLog je 32752769.

5.4 Rozdíl mezi Bürgiho a Napierovým logaritmem

Zjednodušeně lze říci, že rozdíl těchto dvou logaritmů spočívá v tom, že první je vybudován „shora“ přičemž ten druhý „zdola“.

Bürgi si připravil jednu jedinou geometrickou posloupnost s kvocientem 1,0001, prvním prvkem 10^8 a posledním prvkem $10^9 - 1$. Prvkům této posloupnosti přiřadil čísla 0, 10, 20 a tak dále. Výpočet jeho tabulek byl tedy jednoduchý a spočíval pouze ve vyčíslení prvků geometrické posloupnosti.

Naproti tomu Napier si nejprve pomocí dvou pohyblivých bodů definoval, co logaritmus znamená, a pak následně vypočítal jeho hodnoty pro konkrétní čísla. To, že k výpočtu těchto logaritmů použil geometrické posloupnosti, je věc vedlejší. Šlo pouze o způsob, kterým si Napier pomohl při výpočtu logaritmů sinů.

Můžeme tedy říci, že Bürgi si nejprve řekl, jakým číslům mají příslušet jaké logaritmy. Bürgiho funkční předpis logaritmu je tak určen hodnotami konkrétních čísel. Naopak, Napier nejprve definoval logaritmus obecně (pro všechna čísla) a až potom začal hledat, jakým číslům přísluší jaké hodnoty. Napierův předpis je určen nikoli několika konkrétními hodnotami ale vztahem, který mají zachovávat pohybující se body. Jak jsme ukázali v kapitole 4.5, Napierovy tak Bürgiho tabulky udávají hodnoty přirozených logaritmů.

5.5 Chybná interpretace v některých publikacích

V literatuře se někdy uvádí, že Napierův logaritmus čísla x není vyjádřen (správným) předpisem

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x},$$

jak tvrdíme i v této práci, ale že je jím číslo L , splňující

$$x = 10^7 (1 - 10^{-7})^L,$$

neboli že Napierův logaritmus je vyjádřen (chybným) předpisem

$$\text{NapLog } x = 10^7 \log \left(\frac{10^7}{\frac{10^7}{10^7 - 1}} \right)^{10^7} \frac{10^7}{x}.$$

Uvědomme si, že jedna věc je to, jak Napier svůj logaritmus definoval a druhá věc, jak hodnoty pro své tabulky vypočítal. A to může vést pokaždé na jiný vzoreček.

Navíc, vzhledem k tomu, že tehdejší vyjadřování matematiků nebylo tak exaktní, mohlo by se stát, že Napierovy definice lze interpretovat více způsoby. Tím se budeme částečně zabývat v sekci 6.2.1, kde ale ukážeme, že nalezené nesrovnalosti vedou k témuž závěru. Z Napierových knih každopádně plyne, že jak jeho definice, tak způsob výpočtu vedou na tentýž předpis, první z výše uvedených.

Dle mého názoru autor chybného předpisu nahlédl pouze zběžně do knihy *Constructio*, kde prvky v první Napierově posloupnosti jsou právě výše uvedeného tvaru $10^7(1 - 10^{-7})^n$ a na základě toho si domyslel, že Napier uvažoval stejně jako Joost Bürgi v sekci 3.3.2 a realizoval myšlenku, která spočívá v zahuštění geometrické posloupnosti volbou kvocientu blízkého jedné, čímž je zajištěno pokrytí co nejvíce čísel a jejich logaritmů jsou celá čísla. Napier jen nezvolil jako Bürgi koeficient $1 + 10^{-4}$, nýbrž $1 - 10^{-7}$.

U první Napierovy posloupnosti z knihy *Constructio* ale podobnost s Bürgim končí. Kdyby byla tato úvaha správná, bez počítání by Napier n -tému číslu v první posloupnosti přiřadil logaritmus n , stejně jako to u svých tabulek udělal Bürgi tj. speciálně poslednímu číslu první posloupnosti by Napier přiřadil logaritmus 100, neboť $9999900,000495 = 10^7(1 - 10^{-7})^{100}$.

Napier však přiřazuje tomuto číslu hodnotu 100,0000050. Správný předpis pro NapLog, odvozený v následující kapitole, přiřazuje tomuto číslu také 100,0000050. První Napierova posloupnost je minimálně zatížena zaokrouhlovacími chybami, a proto na ní lze ověřit, který předpis je správný. Na jiných číslech (ke kterým Napier někde ve svých knihách udává logaritmus) nemá smysl porovnávat, který z výše uvedených vzorců je správný, neboť tato čísla jsou více zkreslená zaokrouhlením, než o kolik se liší výsledky získané těmito předpisy. Konkrétně, ve výše zmíněném příkladu 5.3.5 bychom pomocí chybného předpisu získali logaritmus o hodnotě 32752767, která se málo liší od hodnoty 32752769 získané naším vzorečkem. Obě tato čísla se ale výrazně liší od hodnoty 32752756 uvedené Napierem a tudíž je pouze na základě hodnot těžké určit, kdo má pravdu byť by se mohlo zdát, že chybný vzoreček je správné hodnotě malinko blíže. Vzhledem k tomu, že $(\frac{10^7}{10^7-1})^{10^7}$ je velice blízko číslu e , jsou rozdíly v těchto předpisech nepatrné.

Chybný vzoreček udává například kniha (Maor, [7]), správný vzoreček potom například (Roegel, [11]).

Kapitola 6

Odvození předpisu pro Napierův logaritmus

Hned v první kapitole jsme uvedli, že Napierův logaritmus je funkce a lze jej vyjádřit předpisem

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x},$$

kde $x > 0$. V této kapitole podrobně zdůvodníme, proč Napierova definice (viz sekce 4.1.3) vede na uvedený předpis. Začneme přesným popisem pohybujících se bodů, pomocí nichž svůj logaritmus zavedl. Napierovy předpoklady vyjádříme v řeči dnešní matematiky a ukážeme, že z nich uvedený vzorec opravdu plyne.

6.1 Pohybující se body

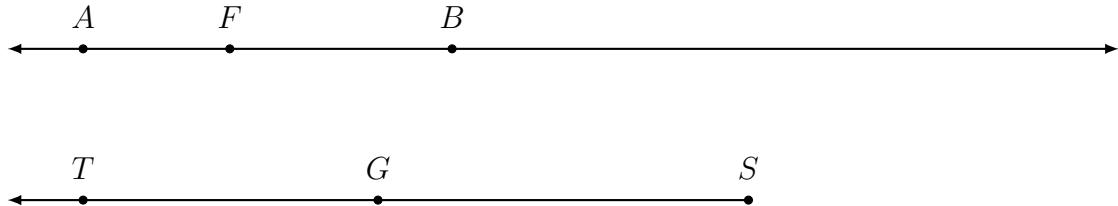
6.1.1 Použité geometrické útvary

V rovině máme přímku s body $A \neq F$ a B , polopřímku s body T, G a počátečním bodem S , přičemž vzdálenost bodů T a S je 10^7 .

Vzdálenost AF je libovolná kladná, její hodnotu nebudeme nikdy potřebovat. Bod F použijeme pouze pro vyjádření směru na přímce. Kdybychom měli přímku s jen jediným vyznačeným bodem, nedokážeme určit, co znamená před tímto bodem či za ním, přičemž pro definici logaritmu to rozlišovat potřebujeme. Určíme podle toho totiž znaménko logaritmu. Body B a G jsou na rozdíl od ostatních pohyblivé a jejich pozice se mění s časem. Proto nemůžeme bod B pro určení směru na přímce použít – může se vyskytovat kdekoliv na celé přímce. Mohli bychom sice pro určení směru použít počáteční polohu bodu B , to by ale zkomplikovalo vyjadřování.

Navíc, stále by to neřešilo situaci, kdy B začíná svůj pohyb v A a museli bychom tak tuto možnost zakázat, což by bylo silně v rozporu s Napierovým popisem. Proto směr zavádíme pomocí dodatečného bodu F .

Přímku a polopřímku si představujeme orientovanou rovnoběžně horizontálně tak, že A leží nalevo od F a bod T leží nalevo od S , viz následující obrázek.

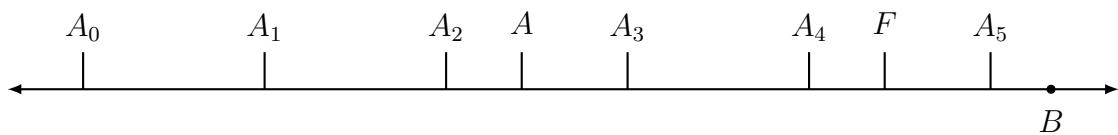


Na poloze přímky a polopřímky v rovině samozřejmě nezáleží. Tato konkrétní se stavba však výrazně zjednoduší vyjadřování a upevní představy, čímž se situace stane pochopitelnější. Namísto formulace „bod B se nachází ve směru AF v ne-nulové vzdálenosti od bodu A “ napíšeme jednoduše „ B je napravo od A “ apod.

Dále předpokládáme, že v rovině se nachází pouze zmíněná přímka a polopřímka, na nichž leží všechny zmiňované body. Použitím pojmu „přímka“ tedy máme na mysli vždy tu jedinou výše zmíněnou přímku procházející body A a B . Obdobně pro polopřímku.

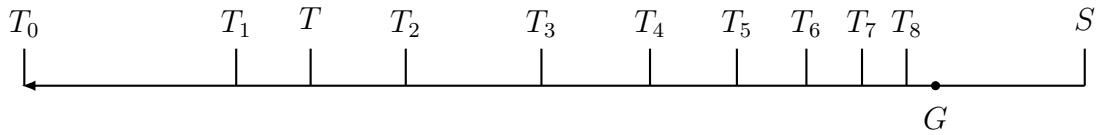
6.1.2 Přesný popis pohybu bodu B

Na přímce se pohybuje bod B počínaje v bodě A_0 ležícím nalevo od A či v A takovým způsobem, že pro libovolně zvolený kladný časový úsek Δt platí následující. Pokud zaznamenáme polohu bodu B po každém uplynutí Δt , čímž vzniknou body A_1, A_2, \dots , tak pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ je vzdálenost bodů $A_i A_{i+1}$ stejná. Tato shodná vzdálenost tedy závisí na volbě Δt .



6.1.3 Přesný popis pohybu bodu G

Na polopřímce se pohybuje bod G počínaje v bodě T_0 ležícím nalevo od T či v T takovým způsobem, že pro libovolně zvolený kladný časový úsek Δt platí následující. Pokud zaznamenáme polohu bodu G po každém uplynutí Δt , čímž vzniknou body T_1, T_2, \dots , tak pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ je poměr $T_{i+1}S : T_iS$ stejný. Tento shodný poměr tedy závisí na volbě Δt .



6.1.4 Dodatečné požadavky

Body se pohybují zleva doprava

B se pohybuje jedině ve směru od A k F a G jedině ve směru od T k S , tj. v průběhu času se nezastavují ani nevracejí. Jinými slovy, když vzdálenost B od počátku svého pohybu A_0 v čase t vyjádříme funkcí $S(t)$ a vzdálenost G od počátku svého pohybu T_0 v čase t funkcí $s(t)$, tak platí zaprvé, že tyto funkce jsou rostoucí a zadruhé, že se body B a G v každém časovém okamžiku vyskytují v počátku svého pohybu či napravo od něj.

Například pro bod G první podmínka znamená, že se vzdaluje od počátku pohybu a druhá vymezuje směr tohoto vzdalování, a to k bodu S . Bez druhé podmínky bychom určitě našli pohyb, kdy G zachovává poměr vzdáleností k S , a přitom se po polopřímce zrychleně vzdaluje od tohoto bodu i od počátku svého pohybu směrem doleva.

Z podmínky že funkce vzdálenosti mají být rostoucí navíc plyne, že čas musí začít běžet právě ve chvíli začátku pohybu obou bodů zároveň. Kdyby nejprve uběhl nějaký kladný čas a až poté se jeden z bodů začal pohybovat, stál by do té doby na místě, což jsme vyloučili. Oba body se tak začnou pohybovat naráz a v čase 0.

Napier pohyby bodů ve své první knize *Descriptio* popsal tak, že jeden vykresluje (prodlužuje) úsečku a druhý maže (zkracuje) úsečku přičemž logaritmickou délkou zkracované úsečky byla délka prodlužované úsečky. Tato představa je v souladu s naším požadavkem, že se body mají pohybovat jedním pevně zvoleným směrem.

B prochází bodem A právě ve chvíli, kdy G prochází bodem T .

Jestliže se v nějakém čase B na přímce nachází v A , potom se G na polopřímce v tomtéž čase nachází v T a naopak – pokud se G nachází v T , potom se B bude nacházet v A . Nevyžadujeme tedy nutně, aby body B a G prošly body A a T . V průběhu odvozování však ukážeme, že už z předchozích požadavků plyne, že body A a T musí nutně být někdy pohybujícími se body navštíveny a tudíž varianta, kdy ani jeden z nich není navštíven, nikdy nenastane.

Podstata tohoto požadavku je to, že A a T musí být navštíveny najednou. Pro základní představu je tedy vhodné umístit si počátek pohybu B do A a počátek pohybu G do T , neboť výše zmíněná podmínka je pak splněna triviálně, a navíc je jasné, že body A a T budou navštíveny – hned v čase 0. Tuto představu ve svých textech používá Napier.

B prochází bodem A stejnou rychlostí, jakou G prochází bodem T

Nakonec do hry vstupuje ještě rychlosť pohybujících se bodů, která musí být při průchodech body A a T stejná pro oba body B a G . Zatímco Napier ve svých knihách používá intuitivní představu rychlosti a nijak její význam nevysvětluje, my si ji definujeme přesně.

Pojem rychlosť známe z fyziky, kapitoly o kinematici hmotného bodu. Pohyby reálných předmětů (letící letadlo, hrot propisky píšící po papíře, Země obíhající kolem Slunce) si v případě, že jsou rozměry těchto těles v dané vztažné soustavě zanedbatelné, zjednodušeně představujeme jako pohyby myšlených, takzvaných hmotných bodů ve zjednodušeném – myšlenkovém světě, například v prostoru \mathbb{R}^3 . Tyto hmotné body reprezentují reálné předměty pouze jejich polohou a hmotností. Pro spoustu úloh jsou totiž vlastnosti jako tvar či hustota zanedbatelné a proto nemá smysl je zohledňovat. Hmotné body svým pohybem s postupem času opisují **trajektorii** (myšlená čára v prostoru, po které se bod pohybuje), jejíž délku nazýváme **dráhou**. Pro každý čas od začátku pohybu má trajektorie nějakou délku, proto lze na dráhu nahlížet jako na reálnou funkci, jejíž proměnná je čas. Důležité vlastnosti pohybů předmětů v reálném světě jsou, že nemění skokově svou pozici ani rychlosť, vše se děje plynule (i kulka vystřelená z pistole plynule zrychluje z nulové na nadzvukovou rychlosť). To souvisí s tím, že předměty reálného světa mají nenulovou hmotnost. Zmíněné vlastnosti se přenáší i na hmotné body reprezentující tyto předměty.

Hmotné body tedy splňují dvě vlastnosti. Zaprvé, pohybují se souvisle – neteleportují se na vzdálené pozice. Ekvivalentně říkáme, že mají **spojitou** trajektorii. Zadruhé, jejich rychlosť se mění plynule. Tím máme na mysli, že dráha hmotného bodu je spojitě diferencovatelná neboli **hladká**. Derivací jeho dráhy v čase t pak máme na mysli okamžitou **rychlosť hmotného bodu** v čase t .

Stejná představa bude platit i pro body B a G , nicméně u nich ještě nevíme, zda se pohybují spojité a hladce. Neodpovídají totiž žádným reálným pohybům a nemají ani žádnou hmotnost. Kdyby se pohybovaly nespojité, má u nich vůbec smysl hovořit o trajektorii? Tu bychom si pak představovali jako čáru, která je někde přerušená – jako by se bod v určitém okamžiku teleportoval z místa na jiné místo a pokračoval v pohybu tam. A co potom znamená dráha? Máme do ní započítávat i úsek, který bod přeskocil teleportací, nebo ne? Anebo, ať jsou pohyby bodů spojité, ale jejich dráhy nejsou hladké tj. grafy drah mají ostré přechody (rychlost se nemění plynule). Tomu by odpovídala například situace, kdy délku trajektorie bodu popisuje funkce $S(t) = 5t$ pro $t \in <0, 1>$ a $S(t) = 10t - 5$ pro $t \in <1, 2>$. Graf funkce S je pak lomená čára, která má v čase 1 zlom. V čase 1 se tedy bod pohybuje okamžitou rychlostí 5? Anebo 10? Anebo něco mezi? Jak už jsme zmínili, tyto otázky nemusíme u hmotných bodů řešit proto, že díky jejich kladné hmotnosti pro ně tyto situace nenastávají.

Ve fyzice ale vždy záleží na mře zjednodušení. Výše zmíněnému příkladu by mohla (při adekvátní mře zjednodušení) odpovídat situace, kdy kamion jedoucí rychlostí 10 km/h nabere mouchu letící týmž směrem rychlostí 5 km/h po sekundě letu. Pro pozorovatele stojícího ve škarpě tak dojde ke skokovému nárůstu rychlosti mouchy, a její dráhu by pak bylo rozumné přirovnat k výše uvedené funkci S .

Jak později zjistíme, body B a G se pohybují jako objekty reálného světa, tj. spojité a hladce, a mohli bychom na ně nahlížet jako na hmotné body. Protože to ale ještě nevíme, nemůžeme pro ně použít pojmy trajektorie a dráha, které dávají smysl jen pro hmotné body. Nicméně, pojem trajektorie nebudeme vůbec potřebovat, a tedy se ani nemusíme snažit o jeho definici. Pak ale dráhu musíme definovat jinak než ve fyzice (jako délku trajektorie).

Dráhou bodu B a G v daném čase máme na mysli jeho euklidovskou vzdálenost od počátku svého pohybu v tomto čase. To samozřejmě není obecně v souladu s fyzikální definicí dráhy, nicméně v našem speciálním případě, kdy se body pohybují přímočaře jedním směrem, tyto dva způsoby definice dráhy splývají.

Rychlostí bodů B a G v daném čase máme na mysli derivaci jeho dráhy v případě, že derivace existuje. Pokud v daném čase derivace dráhy neexistuje, potom v něm nemá bod rychlost definovánu. Derivací v čase 0 máme na mysli derivaci zprava. Situací, kdy derivace neexistuje, se však zabývat nemusíme, neboť uvidíme, že už z předchozích předpokladů o pohybech bodů plyne, že takto definovaná dráha je diferencovatelná pro všechny časy.

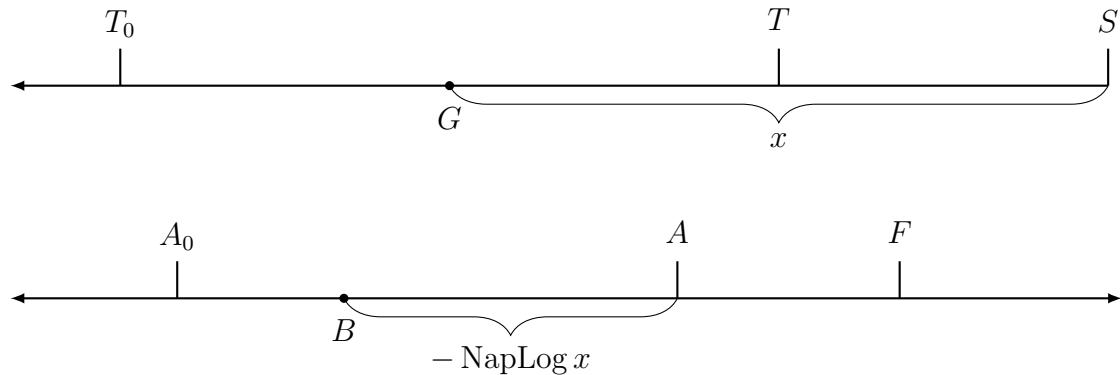
Nechť \bar{t} je čas, v němž se B nachází v A , G se nachází v T a funkce popisující dráhy bodů B a G jsou spojité diferencovatelné v \bar{t} . Potom požadujeme, aby se derivace těchto funkcí (neboli rychlosti) v čase \bar{t} rovnaly. Zatím jsme nedokázali, že takový čas \bar{t} existuje, ani že dráhy bodů B a G jsou v tomto čase diferencovatelné. Požadujeme ale, aby v případě, že tato situace nastane, si derivace byly rovny.

Uvedené požadavky shrneme do stručného seznamu:

1. Pravidlo pohybu bodu B o zachování vzdálenosti.
2. Pravidlo pohybu bodu G o zachování poměru.
3. Body B a G se pohybují zleva doprava.
4. B prochází bodem A právě ve chvíli, kdy G prochází bodem T .
5. B prochází bodem A stejnou rychlostí, jakou G prochází bodem T .

6.2 Definice logaritmu

Logaritmus vzdálenosti GS je za těchto předpokladů definován jako vzdálenost bodu B od bodu A , jestliže se v danou chvíli B nachází napravo od A . Pokud je v danou chvíli B nalevo od A , je logaritmem hodnota vzdálenosti BA opatřená záporným znaménkem.



Vzhledem k tomu, že se body pohybují jedním směrem a B prochází A právě ve chvíli, kdy G prochází T , je logaritmus nulový pro číslo $TS = 10^7$ (situace kdy se G nachází v T), kladný pro čísla menší než 10^7 , neboli když se G nachází napravo od T , a je záporný pro čísla větší než 10^7 , kdy se G nachází nalevo od T .

6.2.1 Otázky vznikající ohledně Napierovy definice

Ještě než se pustíme do dokazování platnosti předpisu pro Napierův logaritmus z výše uvedených předpokladů, objasníme několik otázek, které mohly při čtení této kapitoly anebo dříve při prvním definování pohybů bodů vyvstat.

Může se G dostat až za bod S ?

Situace, kdy se G dostane za S nemůže nastat jednoduše proto, že součástí definice pohybu bodu G je, že se tento pohyb uskutečňuje na dané polopřímce. Pohyb bodu G v rovině, při kterých se G nachází mimo tuto polopřímku, tedy v úvahu

nebereme. Ukážeme si ale, jak by teoreticky takový pohyb, kdy se G dostane až za S , mohl vypadat. Pomyšlně prodloužíme polopřímku v přímku, bod G po ní necháme pohybovat tak, aby se v čase $t = 0$ nacházel v bodě T a v čase $t > 0$ se nacházel na prodloužené polopřímce napravo od S v bodě vzdáleném od S přesně $TS \cdot 2^t$. Pak by se jednalo o pohyb splňující všechny požadavky, při kterém se G dostal až za bod S a dále se od něj vzdaluje.

Nemůže se ani stát, že by se G dostal do bodu S . Pak by totiž nemohla být splněna podmínka, že se G pohybuje zleva doprava. Kamkoli by se v pozdějším čase posunul, bud' by se nacházel mimo polopřímku, což jsme vyloučili, nebo by byl stále v bodu S a tudíž se neposunul zleva doprava, anebo by se nacházel na polopřímce nalevo od místa, ve kterých už byl, což také porušuje požadavek 3. Zde je vidět, že musíme požadovat, aby se G pohyboval zleva doprava a nikoli jen to, že jeho dráha (vzdálenost od počátku pohybu) má být rostoucí. V takovém případě by se totiž bod G mohl z bodu T posunovat zrychlující tendencí směrem doleva a zachovávat všechny zbylé podmínky, což by nebyl pohyb dle Napierových představ.

Proč pohyby musí začínat nalevo od bodů A a T ?

To, že pohyb B začíná před A nebo v A a pohyb G začíná před T nebo v T potřebujeme jen proto, abychom dále mohli vyžadovat, že B prochází A přesně ve chvíli, kdy G prochází T a prochází jím stejnou rychlosťí. Musíme totiž pohyby bodů B a G vhodným způsobem provázat. Kdybychom to neudělali, nedalo by se mluvit o konkrétní definici Napierova logaritmu. Jistě bychom vymysleli spoustu pohybů bodů B a G (například dvě různé rychlosti bodu B při jednom daném pohybu G), které by splňovaly dané požadavky. Nebylo by jasné, pro kterou variantu se rozhodnout. Logaritmů bychom tak měli nekonečně mnoho a závisely by na výběru konkrétních pohybů. My ukážeme, že když pohyby provážeme podmínkami 4 a 5, vede to na jednoznačnou definici logaritmu.

Napier tuto podmínu realizoval tak, že nechal oba body pohybovat najednou stejnou rychlostí právě z bodů A a T . Celkem precizně popsal, co se děje v situaci, kdy se G nachází na úsečce TS , čemuž odpovídají kladné hodnoty logaritmů, ale poté zmínil už jen pář větami, že pro opačný směr myšleného pohybu bodu G (před bod T) platí tytéž vztahy analogicky a že hodnoty logaritmů jsou záporné. My na rozdíl od Napiera postupujeme stejně precizně pro každou situaci.

Musíme explicitně požadovat, aby se body pohybovaly zleva doprava?

Intuitivně si pohyb bodů představujeme tak, že probíhá jedním směrem a k tomu navíc spojitě. Existují však pohyby bodů, které probíhají nespojitě anebo se dokonce vrací doleva a přitom splňují pravidla o zachování vzdálenosti či poměru. Příklad takového pohybu si ukážeme u bodu B . Háček je v tom, že jsme schopni zkoumat pohyby pouze v časech, které jsou celočíselnými násobky zvoleného Δt .

Představme si, že B začíná svůj pohyb v A , vyskytuje se pouze napravo od A či v A a jeho vzdálenost od A v čase $t \geq 0$ je popsána funkcí $S(t) = t$ pro t racionální a funkcí $S(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ pro časy iracionální. Pravidlo 1 je tak splněno. V čase 1 je tak B od A vzdálený 1. V čase $t = 1,4$ se nachází ve vzdálenosti $S(t) = 1,4$. Potom se v čase $\sqrt{2}$ najednou nachází zase ve vzdálenosti 1. Tudíž se vrátil zpět (jeho dráha není rostoucí) a navíc tam, kde už jednou byl (jeho dráha není prostá). Takové chování bodů Napier rozhodně nechtěl. On předpokládal, že se body pohybují pouze zleva doprava, což bylo vyjádřeno tím, že jeden bod svým pohybem maže, a druhý vykresluje úsečku. My tento předpoklad vyžadujeme explicitně.

Kdybychom bodům zakázali pouze vracet se, mohlo by se stát, že body B a G budou celou dobu stát na místě v počátku svého pohybu, za který zvolíme bod různý od A a různý od T . Bod B by se pohyboval konstantní nulovou rychlostí a vzdálenost GS měřená po jednotlivých časových úsecích by měla konstantní poměr 1. Tyto pohyby splňují všechny ostatní podmínky, ale jsou nezajímavé a rozhodně neurčují žádný logaritmus.

Jak to Napier vlastně myslí?

Následující věty jsou doslovními překlady Napierových definic pohybů bodů z knihy *Constructio*.

Def. 1 Řekneme, že úsečka se prodlužuje uniformě, jestliže bod, který ji popisuje, urazí za stejně dlouhé časové úseky stejně dlouhé intervaly vzdáleností.

Def. 2 Řekneme, že úsečka se zkracuje proporcionálně, jestliže bod, který ji popisuje, ji ve stejných časových intervalech postupně zkracuje na úseky v pevném poměru k délce čáry, která zbývala před zkrácením.

První definice odpovídá pohybu bodu B , druhá bodu G . Tyto definice se však dají chápat mnohem striktněji, než jak jsme zatím zvyklí se na pohyby bodů dívat. Rozdíl si vysvětlíme na bodu B . Doted' jsme požadovali určité chování tohoto bodu v časech $i\Delta t, i \in \mathbb{N}$ pro zvolené Δt . Bod B se má mezi dvěma sousedními časy uvedeného tvaru posunout vždy o stejnou vzdálenost. Napierovu definici však můžeme chápat striktněji tak, že pro zvolené Δt a následně libovolné dvě volby t_1 a t_2 platí, že B urazí mezi časy t_1 a $t_1 + \Delta t$ stejnou vzdálenost, jako mezi časy t_2 a $t_2 + \Delta t$. My jsme doted' používali slabší podmínu, kdy jsme tuto vlastnost vyžadovali pouze od časů t_1, t_2 tvaru $i\Delta t$ a nikoli zcela libovolných časů.

Nad touto záležitostí se pozastavuji proto, že z Napierových textů není zcela jasné, kterou variantu výkladu měl na mysli. Je dost možné, že o tom vůbec ani nepřemýšlel. Na jednu stranu jeho definice sama o sobě ve své obecnosti vyjadřuje striktnější variantu. Na stranu druhou, ve svých výpočtech a odvozeních Napier používá vždy pouze slabší způsob výkladu, pracuje pouze se sousedními časy tvaru $i\Delta t$.

Slabší varianta společně s podmínkou 3 o jednosměrnosti pohybu implikuje, že pohyby bodů splňují striktnější variantu. Naopak, kdybychom nahradili pravidla o pohybu bodů striktnějšími a vynechali požadavek 3, dostali bychom se do situace, kdy nic nebrání tomu, aby se body začaly pohybovat doleva. Takže bod G by se s pevným poměrem začal vzdalovat S a logaritmus by byl rostoucí. Tedy, podmínce 3 potřebujeme v obou případech a vzhledem k tomu, že pro korektní definování logaritmu k ní stačí přidat slabší variantu pravidla pohybu, budeme si Napierovy definice vykládat v tomto smyslu.

6.3 Odvození prvním způsobem

Nejprve ukážeme rychlejší a možná přímočařejší cestu, jak se dobrat cíleného vzorce. Pro dobrý myšlenkový vstup do situace je čtenáři doporučeno rozmyslet si následující úlohu: Po úsečce délky 1 se z jednoho kraje na druhý pohybuje bod tak, že jeho okamžitá rychlosť je rovna aktuální vzdálenosti ke konci. Cílem je zjistit funkční předpis pro dráhu tohoto bodu.

Postup staví na mnohem více předpokladech. Některé intuitivní vlastnosti nedokazujeme. Předpokládáme speciálně, že oba body začínají svůj pohyb v bodech A a T . Využijeme také Napierova tvrzení 5.2.1 z knihy *Constructio*, že rychlosť bodu G je přímo úměrná jeho vzdálenosti k S , neboli že pro nějaké kladné k platí $v_G(t) = k(TS - s(t))$, kde s je dráha bodu G . Vzhledem k tomu, že rychlosť je derivací dráhy, získáme

$$k(TS - s(t)) = v_G(t) = s'(t).$$

Stačí uhodnout funkci s splňující tuto diferenciální rovnici. Můžeme si všimnout, řešením je $s(t) = TS + ce^{-kt}$. Protože $s(0) = 0$, musí být $c = -TS$ a získáváme tak

$$s(t) = TS(1 - e^{-kt}).$$

Mějme tedy bod G , který započal svůj pohyb z bodu T a po nějaké době t byl zastaven, čímž byla odměřena vzdálenost $GS = TS - s(t) = TSe^{-kt}$. Logaritmem této vzdálenosti je dle Napierovy definice dráha, kterou B urazil za tento čas. Protože se B se pohybuje rovnoměrně přímočaře neboli konstantní rychlostí, která je navíc rovna rychlosti G na začátku pohybu v v čase 0, máme pro dráhu S bodu B v čase t vztah $S(t) = tv_G(0) = tkTS$. Platí tedy

$$\text{NapLog } TSe^{-kt} = tkTS.$$

Zvolme libovolné x z intervalu $(0, TS)$. Nalezneme čas t , ve kterém je x vzdálenost, která zbývá bodu G do bodu S , tj. $x = GS = TSe^{-kt}$. Tento čas získáme jako $t = \frac{1}{k} \ln \frac{TS}{x}$. Víme, že Napier položil $TS = 10^7$. Pak tedy jest

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Uvedený postup má však několik nedostatků. Například není jasné, zda vzoreček platí pro čísla větší než 10^7 , anebo proč platí Napierovo tvrzení, že rychlosť bodu G je přímo úměrná jeho vzdálenosti k S .

6.4 Precizní odvození vzorce pro Napierův logaritmus

Nechť jsou dány pohyby bodů B a G splňující podmínky 1 až 5. Ještě nevíme, zda vůbec takové pohyby existují, ani zda je tyto podmínky určují jednoznačně, tj. zda tyto podmínky vedou na jednu jedinou možnou definici logaritmu. Předpokládáme každopádně, že nějaké pohyby splňující tyto podmínky existují a v procesu odvozování budeme postupně zjišťovat, jaké další vlastnosti pro ně plynou. Zjistíme, že zmíněných pět požadavků přesně určuje, jak musí takové pohyby vypadat. To bude zároveň návod, jak pohyby s požadovanými vlastnostmi nalézt.

6.4.1 Pohyb bodu B na přímce

Pohyb začíná v čase 0 v bodě A_0 , umístěném nalevo od bodu A nebo v bodě A . V každém časovém okamžiku se bod B nachází někde na přímce, a má tak od bodu A_0 konečnou vzdálenost. Můžeme tedy definovat funkci $S(t)$ vyjadřující vzdálenost bodu B od počátečního bodu A_0 v čase t , kterou nazveme dráhou bodu B . Protože se B pohybuje pouze jedním směrem a tudíž se od počátku pohybu vzdaluje, je funkce S rostoucí, tedy v čase $t = 1$ máme $S(1) > 0$.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\Delta t = \frac{1}{n}$. Dle podmínky 1 urazí B za každý časový úsek Δt stejnou vzdálenost. Vzhledem k tomu, že celková vzdálenost za všech n úseků je $S(1)$, je vzdálenost uražená za čas Δt rovna $\frac{S(1)}{n}$. Máme tedy $S(i\Delta t) = i\frac{S(1)}{n}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$. Pro časy tvaru $t = \frac{i}{n} = i\Delta t$ tudíž platí

$$S(t) = tS(1). \quad (1)$$

Už tedy víme, jak funkce S vypadá v časech, které jsou racionálními čísly. Otázkou dále je, co se děje v časech iracionálních.

Budeme se snažit dokázat, že předpis (1) platí pro všechny časy. Předpokládejme pro spor, že pro nějaký iracionální čas t platí $tS(1) < S(t)$ neboli že v tomto čase je skutečná vzdálenost B od A_0 větší, než vzdálenost získaná použitím předpisu (1) odvozeného pro racionální časy. Vydělením vztahu číslem $S(1) > 0$ získáme $t < \frac{S(t)}{S(1)}$. Z hustoty racionálních čísel v \mathbb{R} existuje racionální čas t_r splňující $t < t_r < \frac{S(t)}{S(1)}$. Vynásobením druhé nerovnosti číslem $S(1)$ dostaneme $t_r S(1) < S(t)$. Čas t_r je ale racionální a tudíž pro něj platí $t_r S(1) = S(t_r)$. Za předpokladu existence času t jsme tedy nalezli čas t_r splňující $t < t_r$ a zároveň $S(t_r) < S(t)$, což je spor s tím, že funkce S je rostoucí.

Předpokládejme nyní $tS(1) > S(t)$. Podobně jako v předchozí úvaze nalezneme racionální číslo t_s , že $tS(1) > S(t_s) = t_s S(1) > S(t)$. Pak bude platit $t_s < t$ a zároveň $S(t_s) > S(t)$, což je opět spor s tím, že S je rostoucí viz požadavek 3.

Jediná možnost která zbývá je tak $S(t) = tS(1)$. Dráha S bodu B je tedy lineární funkce, která je diferencovatelná ve všech bodech svého definičního oboru. Protože rychlosť je derivací dráhy podle času, pro bod B v čase t získáme

$$v_B(t) = S'(t) = S(1), \quad (2)$$

bod B se tedy pohybuje konstantní rychlosťí přesně tak, jak si to představoval Napier.

6.4.2 Pohyb bodu G na polopřímce

Pohyb začíná v čase 0 v bodě T_0 , umístěném nalevo od bodu T nebo v bodě T . Opět nás bude zajímat funkce vyjadřující jeho vzdálenost od počátku pohybu T_0 v čase t . Tuto funkci označíme $s(t)$. Protože se bod G pohybuje jedním směrem (zleva doprava), je funkce s rostoucí. Bod polopřímky, v němž se nachází G v čase t , budeme značit T_t . Označme

$$a = \frac{T_1 S}{T_0 S}. \quad (3)$$

Díky požadavku 3 nemůže G stát na místě a pohybuje se směrem k S , tudíž je $a < 1$. Protože se G nemůže nikdy nacházet v S , je $a > 0$.

Zvolme $\Delta t = \frac{1}{2}$ a zaznamenejme polohu G po těchto časových intervalech. Vzniknou body $T_{\frac{1}{2}}, T_1, T_{\frac{3}{2}}, \dots$. Z definice pohybu bodu G platí

$$\frac{T_{\frac{1}{2}} S}{T_0 S} = \frac{T_1 S}{T_{\frac{1}{2}} S} = \frac{T_{\frac{3}{2}} S}{T_1 S} = \frac{T_2 S}{T_{\frac{3}{2}} S} \dots$$

Protože $T_1 S \stackrel{(3)}{=} a T_0 S$, z první rovnosti výše tak můžeme vyjádřit $T_{\frac{1}{2}} S = \sqrt{a} \cdot T_0 S$. Z druhé rovnosti vyjádříme $T_{\frac{3}{2}} S = \frac{(T_1 S)^2}{T_{\frac{1}{2}} S} = \frac{(a T_0 S)^2}{a^{\frac{1}{2}} T_0 S} = a^{\frac{3}{2}} T_0 S$. Zobecněním pro $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$ máme

$$T_{\frac{i}{2}} S = \frac{(T_{\frac{i-1}{2}} S)^2}{T_{\frac{i-2}{2}} S} = \frac{(a^{\frac{i-1}{2}} T_0 S)^2}{a^{\frac{i-2}{2}} T_0 S} = a^{\frac{i}{2}} T_0 S.$$

Pro časy t , které jsou celočíselným násobkem $\frac{1}{2}$ tedy platí

$$T_t S = a^t T_0 S. \quad (4)$$

Protože obecně $s(t) = T_0S - T_tS$, získáme pro tyto časy předpis funkce s ve tvaru

$$s(t) = T_0S(1 - a^t). \quad (5)$$

Stejně jako u pohybu po přímce budeme dále chtít dokázat, že tento vzoreček platí pro všechny časy $t > 0$ a nejen pro ty, které jsou násobky $\frac{1}{2}$.

Nejprve jeho platnost ukážeme pro racionální čísla. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\Delta t = \frac{1}{n}$. Dle definice pohybu bodu G platí

$$\frac{T_{\frac{1}{n}}S}{T_0S} = \frac{T_{\frac{2}{n}}S}{T_{\frac{1}{n}}S} = \frac{T_{\frac{3}{n}}S}{T_{\frac{2}{n}}S} = \cdots = \frac{T_1S}{T_{\frac{n-1}{n}}S} = \frac{T_{\frac{n+1}{n}}S}{T_1S} = \cdots$$

Členy $T_{\frac{j}{n}}S$ chceme vyjádřit univerzálně pomocí T_0S a T_1S . Jak vidíme, sousední prvky posloupnosti $T_0S, T_{\frac{1}{n}}S, T_{\frac{2}{n}}S, \dots$ mají konstantní poměr, a tvoří tedy geometrickou posloupnost s nějakým kvocientem q . Protože T_1S je n -tým prvkem této posloupnosti, znamená to $T_1S = q^n T_0S$ a kvocient je tedy $q = (\frac{T_1S}{T_0S})^{\frac{1}{n}} \stackrel{(3)}{=} a^{\frac{1}{n}}$.

Každý člen této posloupnosti je tedy tvaru $T_{\frac{j}{n}}S = q^j T_0S = a^{\frac{j}{n}} T_0S$. Ověřili jsme tak, že pro časy t , které jsou celočíselnými násobky $\frac{1}{n}$, také platí předpis (4) a tudíž i (5). Protože n bylo voleno libovolně, platí tento vztah pro všechny kladné racionální časy.

Uvažujme nyní pro spor čas t , který je iracionálním číslem, pro nějž neplatí $T_tS = a^t T_0S$. Předpokládejme nejprve $a^t T_0S < T_tS$. Obě strany nerovnosti vydělíme kladným číslem T_0S a zlogaritmujeme při základu $a < 1$, čímž dojde ke změně znaménka nerovnosti a získáme $t > \log_a \frac{T_tS}{T_0S}$. Z hustoty racionálních čísel v \mathbb{R} nalezneme racionální čas t_r splňující $t > t_r > \log_a \frac{T_tS}{T_0S}$. Odlogaritmováním druhé nerovnosti a přenásobením obou jejích stran T_0S získáme $a^{t_r} T_0S < T_tS$. Protože t_r je racionální, dle předchozího platí $a^{t_r} T_0S = T_{t_r}S$. Nalezli jsme tedy čas t_r splňující $t_r < t$ a zároveň $T_{t_r}S < T_tS$, přičemž druhá nerovnost říká, že vzdálenost G k S je v dřívějším čase t_r menší, než v pozdějším čase t . To je spor s požadavkem 3, že G se k S s časem přibližuje, tj. že se posouvá doprava.

Předpokládejme nyní, že platí $T_tS < a^t T_0S$. Opět najdeme racionální čas t_s splňující $T_tS < a^{t_s} T_0S < a^t T_0S$. Z druhé nerovnosti plyne $t_s > t$. První říká, že v pozdějším čase t_s je bod G od bodu S více vzdálený, než v čase dřívějším t . To je opět spor s tím, že se G posouvá doprava.

I v iracionálním čase t proto platí vztahy (4) a (5). Popsali jsme tedy dráhu bodu G funkčním předpisem.

Z toho například plyne Napierovo tvrzení 5.2.1 z knihy *Constructio*, že rychlosť bodu G je přímo úměrná jeho vzdálenosti k S . Protože funkce s je nekonečně

hladká (jedná se o exponenciální funkci), má bod G v každém čase nějakou okamžitou rychlost a platí pro ni vztah

$$v_G(t) = s'(t) = -a^t T_0 S \ln(a). \quad (6)$$

Protože dle (4) je vzdálenost bodu G k bodu S v čase t rovna $a^t T_0 S$, tak opravdu platí, že rychlosť bodu G je pŕímo úmerná jeho vzdálenosti k S . Koeficient úmernosti je zde $-\ln(a)$.

Podmínky 1 až 3 jsme tedy využili k tomu, abychom popsali dráhy bodů A a G funkcmi $S(t)$ a $s(t)$.

6.4.3 Použití podmínek o rychlostech a finální odvození

Protože funkce $S(t)$ je surjektivní a oborem hodnot je celý interval $\langle 0, \infty \rangle$, funkce $s(t)$ je také surjektivní a oborem hodnot je celý interval $\langle 0, T_0 S \rangle$ a body se dle podmínky 3 posouvají doprava, bude A někdy navštíven bodem B a T někdy navštíven bodem G . Dle podmínky 4 se tyto časy mají rovnat. Tento společný čas návštěvy bodů A a T budeme značit \bar{t} .

To, že se G v čase \bar{t} nachází v bodě T znamená, že v tomto čase urazil dráhu délky $T_0 T$, což je vyjádřeno vztahem $T_0 S (1 - a^{\bar{t}}) \stackrel{(5)}{=} s(\bar{t}) = T_0 T$ neboli

$$a^{\bar{t}} T_0 S = T_0 S - T_0 T = TS. \quad (7)$$

Protože dle podmínky 5 se v čase \bar{t} mají rovnat rychlosti, musí platit také

$$S(1) \stackrel{(2)}{=} v_B(\bar{t}) = v_G(\bar{t}) \stackrel{(6)}{=} -a^{\bar{t}} T_0 S \ln(a) \stackrel{(7)}{=} -TS \ln(a). \quad (8)$$

To, že se B v čase \bar{t} nachází v bodě A znamená, že v tomto čase urazil dráhu délky $A_0 A$, což je vyjádřeno vztahem $A_0 A = S(\bar{t}) \stackrel{(1)}{=} \bar{t} S(1)$. Ze vztahu (7) vyjádříme $\bar{t} = \log_a \frac{TS}{T_0 S}$ a získáme tak

$$A_0 A = \bar{t} S(1) = S(1) \log_a \frac{TS}{T_0 S}. \quad (9)$$

Připomeňme, že Napier za těchto podmínek definoval logaritmus vzdálenosti, která zbývá bodu G k bodu S následovně. Jestliže je B napravo od A či v A , je logaritmem čísla GS vzdálenost $AB = S(t) - A_0A$. Jestliže je B nalevo od A , potom je logaritmem čísla GS záporná hodnota vzdálenosti BA neboli $-(A_0A - S(t))$. Hodnotu logaritmu tedy můžeme souhrnně vyjádřit jako

$$\text{NapLog } GS = S(t) - A_0A, \quad (10)$$

kde t je čas, za který se G dostal do aktuální polohy.

Ať je někde na polopřímce bod G zastaven v čase t , čímž je dána vzdálenost $GS = T_tS = \stackrel{(4)}{=} a^tT_0S$. Potom máme

$$\begin{aligned} \text{NapLog } a^tT_0S &= \text{NapLog } GS \stackrel{(10)}{=} S(t) - A_0A \stackrel{(1)}{=} tS(1) - A_0A \\ &\stackrel{(9)}{=} tS(1) - S(1) \log_a \frac{TS}{T_0S} \stackrel{(8)}{=} TS \ln(a) \left(\log_a \frac{TS}{T_0S} - t \right). \end{aligned}$$

Nechť nás zajímá logaritmus čísla $x > 0$. Necháme bod G startovat svůj pohyb ve vzdálenosti od S větší nebo rovné x , tj. $T_0S \geq x$. Potom totiž existuje čas $t \geq 0$ splňující $x = a^tT_0S$, který bychom nalezli jako $t = \log_a \frac{x}{T_0S}$. Dosazením získáme rovnici

$$\text{NapLog } x = TS \ln(a) \left(\log_a \frac{TS}{T_0S} - \log_a \frac{x}{T_0S} \right) = TS \ln(a) \log_a \frac{TS}{x} = TS \ln(a) \frac{\ln \frac{TS}{x}}{\ln(a)}.$$

Protože $TS = 10^7$, konečný tvar Napierova logaritmu pro libovolně zvolené kladné x je

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Zajímavé na tomto výsledku je, že ačkoliv jsme celou dobu pracovali s časem a parametry jako je počáteční vzdálenost B od A , počáteční vzdálenost G od T , rychlosti obou bodů či poměr a , tak se ve výsledku ukázalo, že na ničem z toho není definice Napierova logaritmu závislá. Tyto parametry byly jen pomocné a vytvořili jsme si je uměle pro způsob, kterým jsme funkční předpis logaritmu odvodili.

Závěr

Ukázali jsme, jaké okolnosti vedly k zavedení logaritmů, kdo je považován za jejich vynálezce a jakým způsobem uvažoval při jejich definování. V závěru ještě stručně zmíníme následný vývoj logaritmů jakožto mechanismu urychlujícího zdlouhavé výpočty. Historické informace pro tuto kapitolu jsou čerpány z knihy (González-Velasco, [4]).

Napierovy logaritmy se na světě příliš dlouho neohrály. Byly totiž brzy nahrazeny efektivnějšími logaritmy dekadickými. Rok po vydání knihy *Descriptio Napiera* navštívil londýnský profesor geometrie Henry Briggs (1561–1631) s návrhem několika změn. Ty se týkaly dvou následujících problémů.

Jak jsme viděli v příkladu 4.4.4 zabývajícím se výpočtem součinu dvou čísel pomocí Napierova logaritmu, protože z $\frac{xy}{x} = \frac{y}{1}$ díky tvrzení 4.2.1 o logaritmech dvojic se stejným poměrem plyne $\text{NapLog } xy = \text{NapLog } x + \text{NapLog } y - \text{NapLog } 1$, je při každém použití logaritmů pro zjednodušení součinu dvou čísel potřeba odečíst konstantu $\text{NapLog } 1 = 161180894$. Navíc, protože je tento logaritmus hodně velký, v důsledku kumulace zaokrouhlovacích chyb je dokonce určen dost nepřesně. Dnes můžeme vypočítat, že správná zaokrouhlená hodnota by měla být 161180957. Stejně tak se tato konstanta vyskytuje při výpočtu logaritmu podílu $\text{NapLog } \frac{x}{y} = \text{NapLog } x - \text{NapLog } y + \text{NapLog } 1$.

Další nepříjemnost je přičítání čísla 23025842, 34, které určuje rozdíl logaritmů čísel s poměrem $10 : 1$, což používáme velmi často v případech, kdy se čísla liší velikostí, ale ne ciframi. S touto konstantou musíme pracovat při používání Napierových hodnot k hledání logaritmů čísel malých či naopak velkých.

O řešení těchto nedostatků přemýšleli Napier s Briggsem nezávisle. V obou případech to vedlo na nový logaritmus a výpočet nových tabulek zcela od začátku.

Shodli se, že nejvhodnější bude, aby logaritmus jedné byl nula a navíc, aby logaritmus deseti měl hodnotu 10^{10} , čímž jsou vyřešeny oba původní nedostatky. Tyto požadavky na nový logaritmus jsou zmíněny v dodatku knihy *Constructio*

„*Among the various improvements of Logarithms, the more important is that which adopts a cypher as the Logarithm of unity, and 10,000,000,000 as the Logarithm of either one tenth of unity or ten times unity.*“

Výpočtu nových tabulek se ujal už jen mladší Briggs. Proto jsou dekadické logaritmy také někdy nazývány Briggsovy. V létě 1617, navštívil Briggs Napiera podruhé, aby mu ukázal své šestnáctistránkové tabulky *Logarithmorum Chilias Prima* s logaritmy čísel 1 až 1000 přičemž přesnost zvýšil na 14 cifer oproti deseti. První strana těchto tabulek je vidět na obrázku 6.1.

Logaritmy tedy stále byla celá čísla, jejich ciferné hodnoty se ale od těch dnešních nijak neliší.

Briggs roku 1624 v díle *Arithmetica logarithmica* vydal nové velké tabulky, pro čísla 1 — 20 000 a 90 000 – 100 000 s přesností na 14 cifer. Mezera od 20 000 do 90 000 vznikla proto, že Briggs nejprve neznal metody, jak efektivně spočítat logaritmy čísel z tohoto rozmezí. Tuto mezeru doplnil roku 1628 holand'an Adriaan Vlacq (1600 – 1667), snížil nicméně přesnost na 10 cifer. Tyto tabulky sloužily bez výraznějších změn až do století dvacátého. Na oslavu prvních dekadických tabulek z roku 1624 začal roku 1924 Alexander John Thompson pracovat na nových tabulkách s přesností na 20 desetinných míst, dokončeny byly roku 1949. Kapesní kalkulátory se začaly objevovat až v 70. letech.

<i>Logarithm.</i>	<i>Logarithm.</i>	<i>Logarithm.</i>
1 00000,00000,00000	34 15314,78917,04226	67 18260
2 03010,29995,66398	35 15440,68044,35028	8 18325
3 04771,21254,71966	36 15563,02500,76729	69 18388
4 06020,59991,32796	37 15682,01724,06700	70 18450
5 06989,70004,33602	38 15797,83596,61681	71 18512
6 07781,51250,38364	39 15910,64607,02650	2 18573
7 08450,98040,01426	40 16020,59991,32796	73 18633
8 09030,89986,99194	41 16127,83856,71974	4 18692
9 09542,42509,43932	2 16232,49290,39790	75 18750
10 10000,00000,00000	43 16334,68455,57959	6 18808
11 10413,92685,15823	4 16434,52676,48619	77 18864
12 10791,81246,04762	45 16532,12513,77534	8 18920
13 11139,43352,30684	6 16627,57831,68157	79 18976
14 11461,28035,67824	47 16720,97857,93572	80 19030
15 11760,91259,05568	8 16812,41237,37559	81 19084
16 12041,19982,65592	49 16901,96080,02851	82 19138
17 12304,48921,37827	50 16989,70004,33602	83 19190
18 12552,72505,10331	51 17075,70176,09794	4 19242
19 12787,53600,95283	2 17160,03343,63480	85 19294
20 13010,29995,66398	53 17242,75869,60079	6 19344
21 13222,19294,73392	4 17323,93759,82297	87 19395
22 13424,22680,82221	55 17403,62689,49424	8 19444
23 13617,27836,01759	6 17481,88027,00620	89 19493
24 13802,11241,71161	57 17558,74855,67249	90 19542
25 13979,40008,67204	8 17634,27993,56294	91 19590
26 14149,73347,97082	59 17708,52011,64214	92 19637
27 14313,63764,15899	60 17781,51250,38364	93 19684
28 14471,58031,34222	61 17853,29835,01077	4 19731
29 14623,97997,89896	2 17923,91689,49825	95 19777
30 14771,21254,71966	63 17993,40549,45358	6 19822
31 14913,61693,83427	4 18061,79973,98389	97 19867
32 15051,49978,31991	65 18129,13356,64286	8 19912
33 15185,13939,87789	6 18195,43935,54187	99 19956
34 15314,78917,04226	67 18260,74802,70083	100 20000

Obrázek 6.1: Tabulka dekadických logaritmů, zdroj: <http://www.pmonta.com/tables/logarithmorum-chiliadas-prima/index.html>, staženo dne 4. 3. 2019

Literatura

- [1] BÜRGİ J. (1620). *Aritmetische vnd Geometrische Progress Tabulen sambt gründlichem vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen, vnd verstanden werden sol.* Sessen, Prag. [Dostupné z: bilddsuche.digitale-sammlungen.de/index.html?c=viewer&bandnummer=bsb00082065, citováno 20.1.2019]
- [2] CLARK, K. M. (2015). *Jost Bürgi's Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen (1620)*. Birkhäuser, Basel. ISBN 978-1-4939-3161-3.
- [3] CLARK K. M. Clark a MONTELLE, C. (2011), *Logarithms: The Early History of a Familiar Function*. Mathematical Association of America (MAA), Washington, D.C. DOI:10.4169/loci003495. [Dostupné z: maa.org, citováno 5.3.2018]
- [4] GONZÁLEZ-VELASCO, E. A. (2011). *Journey through Mathematics: Creative Episodes in Its History*. Springer, New York. ISBN 978-0-387-92154-9.
- [5] HANSEN J. (2007).., *John Napier's Bones*, Jim's Math and Science, New Hampshire. [Dostupné z: 17centurymaths.com/contents/napier/jimsnewstuff/. citováno 22.1.2019]
- [6] HARAN B. (2015). *58 and other Confusing Numbers - Numberphile*. Numberphille, Bristol. [Dostupné z: [youtube.com/watch?v=14bmZ1gRqCc](https://www.youtube.com/watch?v=14bmZ1gRqCc), citováno 6.2.2019]
- [7] MAOR, E. (1994). *e: the story of a number*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. ISBN 0-691-03390-0.
- [8] NAPIER J. (1614). *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Andrew Hart, Edinburgh. [Dostupné z: gdz.sub.uni-goettingen.de, citováno 14.1.2018, anglický překlad od Iana Bruce dostupný z: 17centurymaths.com, citováno 25.1.2018]
- [9] NAPIER J. (1619). *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Andrew Hart, Edinburgh. [Dostupné z: [digitale-sammlungen.de](http://bilddsuche.digitale-sammlungen.de), staženo 27.1.2018, anglický překlad od Iana Bruce dostupný z: 17centurymaths.com, citováno 25.1.2018]

- [10] NAPIER M. (1834). *Memoirs of John Napier of Merchiston, his lineage, life, and times, with a history of the invention of logarithms*. William Blackwood, Edinburgh. [Dostupné z: electricscotland.com/History/other/memoirsofjohnnap00napi.pdf, citováno 4.2.2019]
- [11] ROEGEL D. (2012). *Napier's ideal construction of the logarithms*. The Loria collection of mathematical tables, Villers-lès-Nancy. [Dostupné z: locomat.loria.fr, citováno 18.1.2018]
- [12] SEDLÁKOVÁ J. (2003/2004). *Počítání na prstech*. Seminární práce, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha. [Dostupné z: [kps.pedf.cuni.cz/archivvyzkumu/kpsc/prace/jitka.pdf](http://kps.kps.pedf.cuni.cz/archivvyzkumu/kpsc/prace/jitka.pdf), citováno 19.1.2019]
- [13] SHEOPORY M. (2014). *Wishing Everyone A Logarithmic 2014!* [Dostupné z: sheopory.wordpress.com/2014/02/03/wishing-everyone-a-logarithmic-2014/, citováno 15.2.2019]
- [14] SPIEGEL M. R. (1988). *Maghematical Handbook of Formulas and Tables*. Druhé revidované vydání. McGraw-Hill Education, New York. ISBN 978-0070382039.
- [15] WALDVOGEL J. (2014). Jost Bürgi and the discovery of the logarithms. *Elemente der Mathematik*, **69**(3), 89-117. DOI: 10.4171/EM/253. ISSN 0013-6018. [Dostupné z: semanticscholar.org, staženo 28.1.2019]

Pro případ nefunkčnosti uvedených odkazů nabízím k dispozici verze stažené v době platnosti odkazů, a to včetně webových stránek.

Seznam obrázků

1.1	Tabulka dekadických logaritmů (Spiegel, [14])	8
1.2	Tabulka dekadických logaritmů (Spiegel, [14])	9
1.3	Tabulka dekadických antilogaritmů (Spiegel, [14])	10
1.4	Tabulka dekadických antilogaritmů (Spiegel, [14])	11
1.5	Logaritmické pravítko při výpočtu $2 \cdot 3$	12
2.1	Graf funkce $f_{551}(z)$	20
2.2	Malá násobilka v desítkové soustavě	24
2.3	Malá násobilka ve dvanáctkové soustavě	24
2.4	Vyjádření běžných zlomků v desítkové a dvanáctkové soustavě	26
3.1	Tabulka pro metodu čtvrtin čtverců	29
3.2	Aritmetická a geometrická posloupnost pro $q = 2$	30
3.3	První strana Bürgiho tabulek (Waldvogel, [15])	35
3.4	Poslední, 58. strana Bürgiho tabulek (Waldvogel, [15])	36
3.5	Historický <i>sinus</i>	38
4.1	První strana Napierových tabulek (Napier, [8])	46
4.2	Poslední, 90. strana Napierových tabulek (Napier, [8])	47
4.3	Historický <i>sinus, kosinus a tangens</i>	48
4.4	Historický <i>sinus, kosinus a sekans</i>	50
5.1	První posloupnost s logaritmy	61
5.2	Druhá posloupnost s logaritmy	63
5.3	Tabulka radikálů s logaritmy	66
6.1	Tabulka dekadických logaritmů	87