



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Anna Otrubová

Průniky těles

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky a deskriptivní geometrie
pro střední školy

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. května 2019

Anna Otrubová

Název práce: Průniky těles

Autor: Bc. Anna Otrubová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Ve čtyřech hlavních kapitolách se tato práce snaží nabídnout přehled základních typů průniků těles. Důraz přitom klade na průnik dvou hranatých těles, a vyvažuje tak zájem zkoumaných středoškolských i vysokoškolských učebnic o průniky oblých těles a ploch. V první kapitole navíc nabízí velmi rozsáhlou sondu do problematiky průniku přímky s tělesem. V závěru práce čtenář nalezne stručný komentář ke zkoumané literatuře. Samotný text je doplněn řadou obrázků s řešením vzorových příkladů, v příloze pak čtenář najde jejich předtištěná zadání. Další doplňující materiál v podobě krokovaných řešení a 3D modelů vytvořených v softwaru GeoGebra a předtisky zadání některých příkladů dostupných zejména ve středoškolských učebnicích obsahuje přiložené CD.

Klíčová slova: těleso, průnik, jehlan, hranol, kužel, válec, kulová plocha

Title: Intersection of solids

Author: Bc. Anna Otrubová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The four chapters of this diploma thesis introduce a survey of the basic intersection types of solids, the focus being placed on the intersection of two pyramid and prisma solids, acting as a counterweight to most textbooks' interest in intersection of curved surfaces. The first chapter provides a detailed, wide-ranging insight into the issue of the solid and line intersection. The conclusion part of the thesis provides the reader with a brief commentary on the used literature. The work is supplemented with figures and example solutions. In the appendix part are found pre-drawn assignments. The enclosed CD contains complementary materials such as step by step solutions and 3D models created in the GeoGebra software along with drawn problems found especially in upper secondary school geometry textbooks and curriculum.

Keywords: solid, intersection, pyramide, prism, cone, cylinder, sphere

Můj velký dík patří v první řadě paní doktorce Hromadové, která se ujala vedení mé práce a s ochotou, laskavostí a trpělivostí mě v čase stráveném s průniky těles doprovázela. Dále bych chtěla poděkovat svým rodičům za podporu během studijních let, bez níž by mnohé skutečnosti nebyly samozřejmé, svým sourozencům Báře a Vojtovi za to, že mi vždy byli nablízku, a babičce. Konečně děkuji svým přátelům, zejména strejdovi Honzovi za obětavou pomoc s obstaráním zahraniční literatury, Petrovi za technickou podporu, Adéle, Heleně a Terezce s Ládou.

Obsah

Úvod	3
1 Výchozí úmluvy	5
2 Průnik přímky s tělesem	7
2.1 Jehlany a kužely	7
2.2 Hranoly a válce	15
2.3 Kulová plocha	22
3 Dvě hranatá tělesa	27
3.1 Průnik dvou jehlanů	28
3.2 Průnik jehlanu a hranolu	39
3.3 Průnik dvou hranolů	45
4 Dvě oblá tělesa	53
5 Hranaté a oblé těleso	61
6 Příklady	65
Dvě hranatá tělesa	68
Dvě oblá tělesa	71
Hranaté a oblé těleso	71
Závěr	73
Literatura	75
Přílohy	77

Úvod

Téma průniků těles je možné s trochou nadsázky označit za diferenciální a integrální počet středoškolské deskriptivní geometrie. Podobně jako on bývá často z výuky pro nedostatek času vyřazováno, podobně jako on vyžaduje naprostou jistotu a nadhled v řešení dílčích úloh, které byly náplní dosavadní výuky a jejichž spojení je často pro žáky po právu novinkou. Proto patří průniky těles jak k nejnáročnějším, tak nejhezčím partiím středoškolské deskriptivy.

Tato práce vychází z autorčiny učitelské praxe na střední průmyslové stavební škole, během níž se s průniky těles stihla setkat. Při jejich výuce často postrádala předtisky se zadanými tělesy, do kterých by žáci mohli rýsovat samotné řešení příkladu, a nerozptylovat se tak rýsováním jeho zadání. Je jistě hezké, pokud zvládnou narýsovat vše, a je bezesporu třeba to po nich vyžadovat. Mají-li se ovšem seznámit s novou problematikou, která navíc díky nárokům na prostorovou představivost a syntéze mnoha dílčích úloh a úvah není sama o sobě triviální, považuje autorka za nutné, aby se na ni mohli, alespoň zpočátku, plně koncentrovat. Vedle toho by vyučující měl mít k dispozici krokovaná řešení, která by promítal a komentoval a v nichž by dále bylo možné pohybovat s objekty, jejichž poloha se při řešení volí, případně měnit parametry zadaných prvků a zkoumat jejich vliv na výsledek.

Učebnice deskriptivní geometrie [1] určená stavebním školám obsahuje sice jednu z nejrozsáhlejších zásob příkladů, z nichž některé jsou řešené. Dobře je na tom i učebnice deskriptivní geometrie [2] zaměřená na gymnázia, jejíž součástí je dokonce CD s krokovanými řešeními vzorových příkladů. Problémem však je, že se vzorové příklady od příkladů k procvičení často typově liší. Cílem autorky tedy bylo prozkoumat dostupné příklady, kategorizovat je a ke každé z takto vzniklých skupin vymyslet vzorový příklad s krokovaným řešením ve formátu ggb, 3D model v tomtéž formátu a předtisk se zadáním ve formátu pdf. Vedle toho se snaží tato práce nabídnout učitelům (případně vysokoškolským studentům, žákům či jiným zájemcům) co možná nejširší spektrum přístupů k dané problematice, jejichž různost se zakládá jednak na časovém a jednak geografickém původu literatury za tímto účelem zkoumané.

Dalším přínosem této práce by měl být fakt, že jsou vzorové příklady v ní obsažené koncipované tak, aby se daly rýsovat kromě Mongeova promítání, které je pro tuto práci výchozí, také v kosoúhlém promítání.¹ To je v případě výuky vedené podle [1] jediným názorným promítáním, které žáci v době, kdy se věnují průnikům těles, znají. Tato možnost dvojího náhledu hraje podle autorky klíčovou roli při pěstování představ žáka o tom, které vlastnosti úlohy plynou z promítání, v němž je řešena, a které jsou jí naopak vlastní nezávisle na této skutečnosti. Na příloženém CD proto najdeme kromě výše vyjmenovaných souborů také zadání a krokované řešení vzorových příkladů v kosoúhlém promítání.²

Základní metody hledání průniku těles se různí na základě toho, o jaká tělesa

¹Neplatí to pro příklady z kapitol 4 a 5.

²Do jisté míry se o tento dvojí náhled pokouší autorka druhého z dvojice nejdůležitějších středoškolských zdrojů [2], když nabízí dva příklady průniků rýsované v rámci Mongeova promítání k opětovnému řešení v kapitole věnované pravoúhlé axonometrii. Jiný náznak je patrný v [17], kde autor ke každému obrázku s rýsovaným řešením v Mongeově promítání nabízí také model situace ve volném rovnoběžném promítání.

jde: dvě hranatá tělesa, dvě oblá tělesa, jedno hranaté a jedno oblé těleso. Tomu odpovídá i rozčlenění této práce. Kapitolám 3, 4 a 5 zabývajícími se zmíněnými třemi typy průniků předchází ještě kapitola věnovaná průniku přímky a tělesa. Jde o problém, který by měl být žákům známý z výuky stereometrie v rámci matematiky. Na stránkách gymnaziálních učebnic se setkáváme vždy s několika příklady řešenými ve volném rovnoběžném promítání (viz [18], [19] či [21]). Zpravidla nejde o látku, kterou by měli žáci dobře zažítou (pokud na ni v hodinách matematiky vůbec došlo). Představuje však jeden z nejdůležitějších základních kamenů teoretického pozadí i praktického řešení problematiky průniků těles. Druhá kapitola této práce je proto věnována relativně podrobnému zpracování průniku přímky s tělesem.

Velký důraz je v této práci kladen kromě kapitoly 2 také na kapitolu 3, která se věnuje průniku hranatých těles. Dilem je to dáno tím, že toto téma bývá i ve středoškolských učebnicích upozaděno na úkor prostoru věnovaného průniku oblých těles, dilem poměrně snadnou možností jejich klasifikace. Vedle toho je velmi náročné seskupit podle určitých pravidel příklady týkající se průniku dvou oblých těles (kapitola 4) a hranatého tělesa s oblým (kapitola 5), proto jsme se v kapitolách, které se jim věnují, omezili pouze na základní metody řešení.

Konečně v kapitole 6 čtenář najde okomentované příklady posbírané napříč středoškolskými a vysokoškolskými učebnicemi, které jsou vhodné pro použití ve výuce nebo k procvičení. Jsou uspořádány do skupin tak, že typově odpovídají jednotlivým vzorovým příkladům z této práce. Na CD, které je k ní přiloženo, se pak nacházejí soubory s předtisky jejich zadání.

1. Výchozí úmluvy

Než přistoupíme k samotnému tématu práce, je třeba uvést několik poznámek a zjednodušujících předpokladů, jichž se budeme v textu držet a které přispějí k větší plynulosti a srozumitelnosti výkladu.

Poznámka 1.1. Pod pojmem „průnik tělesa“ (konkrétně hranolu, válce, jehlanu a kužele) s přímkou či rovinou budeme rozumět průnik s jeho povrchem, tj. pláštěm a podstavou či podstavami. Podobně také slovo „řez“ zkráceně nahrazuje pojem „hranice řezu“. Průnikem dvou těles pak budeme myslet křivku, která je průnikem jejich povrchů.

Poznámka 1.2. Často budeme mluvit, zejména v souvislosti s viditelností, o „obrysu“ tělesa. Budeme tím myslet hranici jeho průmětu, čili jeho zdánlivý obrys.

Poznámka 1.3. Ačkoliv se práce zabývá tělesy, nebudeme v ní používat termín „koule“. V souladu s [1] a [2] jej nahradíme termínem „kulová plocha“.

Poznámka 1.4. Na obrázku 2.2 vidíme zadání prvního příkladu z následující kapitoly narýsované v Mongeově promítání, ovšem s poněkud zvláštním znázorněním viditelnosti přímky. Otázku viditelnosti přímky vzhledem k zadanému tělesu budeme řešit na závěr každé úlohy. Snadno si lze uvědomit, že se viditelnost může měnit buď na obryse tělesa, nebo v průmětech bodů, v nichž přímka povrch tělesa protíná. Rozhodně k tomu ale nemůže dojít mimo průmět tělesa. Z tohoto důvodu budou v zadáních ty oblasti, v nichž průmět přímky prochází přes průmět tělesa, „preventivně“ znázorněny čárkovaně. Je tedy třeba mít pokaždé na paměti, že nejde o finální podobu viditelnosti přímky, ale pouze o praktické opatření: Přerušovaná čára se snadno doplní na plnou, zatímco naopak je to horší. Zejména je nutné na to upozorňovat studenty při případném použití ve výuce! Jinak tomu je u zadání z dalších kapitol, kde už se vyskytují dvě tělesa. Ta jsou předrysovaná světle šedou barvou, která se při závěrečném řešení viditelnosti snadno překryje například tenkým černým fixem.

Poznámka 1.5. Vzorové příklady jsou původní. Ke každému z nich je na příloženém CD k dispozici předtisk ve formátu pdf se zadáním v Mongeově a kosoúhlém promítání, dále krokovaná řešení v obou promítáních a prostorové řešení, nebo alespoň 3D model situace vytvořený stejně jako krokovaná řešení v softwaru GeoGebra. Výjimku tvoří kapitoly 4 a 5, které se v kosoúhlém promítání neřeší, a některé ojedinělé příklady z kapitol 2 a 3, u nichž je na tento fakt čtenář upozorněn.

Poznámka 1.6. Kosoúhlé průměty budeme značit bez jakéhokoliv indexu. Například kosoúhlý průmět bodu A nebudeme značit obvyklým A^k , ale jen A . Stejně tak vynecháme index k i u kosoúhlých půdorysů. Kosoúhlý půdorys bodu A budeme proto značit jen A_1 .

Poznámka 1.7. U kosoúhlých průmětů bodů ležících v půdorysně nebudeme popisovat, že se rovnají svým kosoúhlým půdorysům.

Poznámka 1.8. Budeme používat levotočivou soustavu souřadnic.

Poznámka 1.9. Pro snadnou orientaci v textu je třeba, aby čtenář

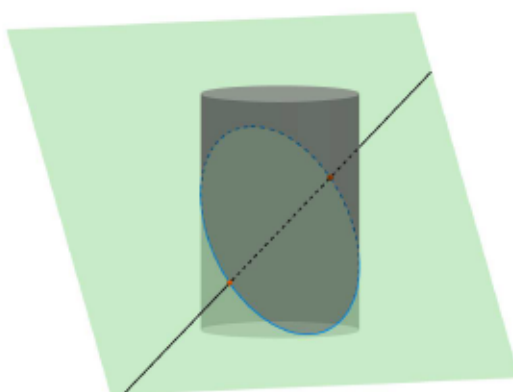
- ovládal základní polohové úlohy o bodech, přímkách a rovinách v Mongeově a kosoúhlém promítání,
- ovládal způsob zobrazení těles v těchto promítáních,
- uměl najít řez tělesa (a kulové plochy) rovinou,
- dokázal rozlišit, které části tělesa (případně kulové plochy) jsou, a které naopak nejsou viditelné v daném průmětu.

Poznámka 1.10. Všechna tělesa, která se objevují ve vzorových příkladech, se nacházejí v prvním kvadrantu. V souladu se zkoumanou literaturou mlčky předpokládáme, že z -tové souřadnice prvků zadaných jejich výškou (například vrcholu jehlanu či středu horní podstavy válce), jsou kladné.

2. Průnik přímky s tělesem

Potřeba řešit úlohu o průniku dvou těles nás přivede k problému průniku jednoho z těchto těles s hranou či úsečkou ležící na povrchu druhého. Rozumíme tím jak nalezení společných bodů přímky a tělesa, tak vyzančení viditelnosti přímky vzhledem k tělesu. V daném kontextu jde o zásadní problém, proto mu věnujeme samostatnou kapitolu.

Máme tedy řešit úlohu o průniku přímky s povrchem nějakého tělesa. Obecně nejde o nic složitého: Stačí najít řez zadaného tělesa libovolnou rovinou, která onu přímku obsahuje. Řezem bude podle typu tělesa buď uzavřená lomená čára, nebo křivka (tedy okraj mnohoúhelníka nebo například kuželosečka).¹ Řešení následně najdeme jako průnik takto vzniklého řezu se zadanou přímkou (obrázek 2.1).



Obrázek 2.1

Podrobněji si tento postup popíšeme zvlášť pro jehlany a kužely, hranoly a válce a konečně pro kulovou plochu.

2.1 Jehlany a kužely

Příklad 2.1. Najděte průnik přímky a s trojbokým jehlanem $ABCV$ (obrázek 2.2).

Přímka a je daná body $R = [7; 1; 4,5]$ a $Q = [-2; 4,5; 1]$. Vrcholy jehlanu mají souřadnice $A = [0; 1; 0]$, $B = [6; 2; 0]$, $C = [4; 6; 0]$ a $V = [4; 3; 7]$.

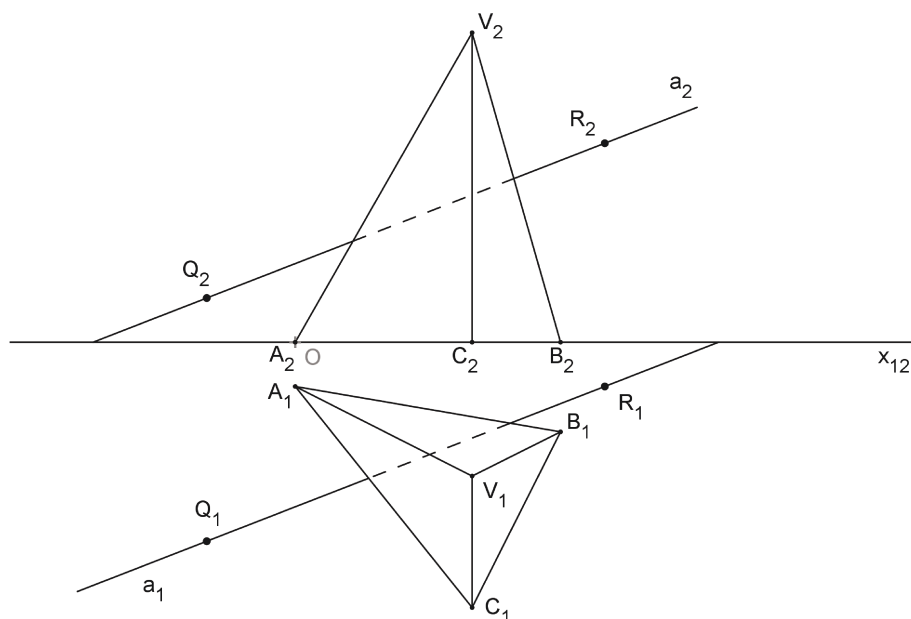
Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 145^\circ$, $q = \frac{3}{4}$

Řešení: Na začátek je třeba proložit přímkou a libovolnou rovinu (obrázek 2.3). Z hlediska řešení opravdu nezáleží na tom, jakou rovinu si zvolíme. Volme proto takovou, která je výhodná z hlediska Mongeova promítání, v němž se pohybujeme, tedy jednu z promítacích rovin přímky a , například první.² První průmět této roviny φ^a splývá s prvním průmětem přímky a .

Dále hledáme řez tělesa rovinou φ^a . Jeho půdorysem je úsečka ohraničená body I a III , které spolu s bodem II vznikly jako průsečíky přímky φ_1^a s půdorysy

¹Samozřejmě mohou nastat také speciální případy typu bod, přímka, prázdná množina a podobně. Těmi se v této práci ale nebudeme zabývat.

²Použití druhé promítací roviny je samozřejmě také možné. Zde konkrétně se ale nedoporučuje, neboť vede k průsečíkům vzniklým pod malým úhlem, a z toho plynoucím nepřesnostem.



Obrázek 2.2

hran tělesa. Nárýsy těchto bodů najdeme na ordinálách a nárýsech odpovídajících hran, tedy I na AC , II na A_2V_2 a III na A_2B_2 . Jejich spojením pak získáme nárýs řezu.

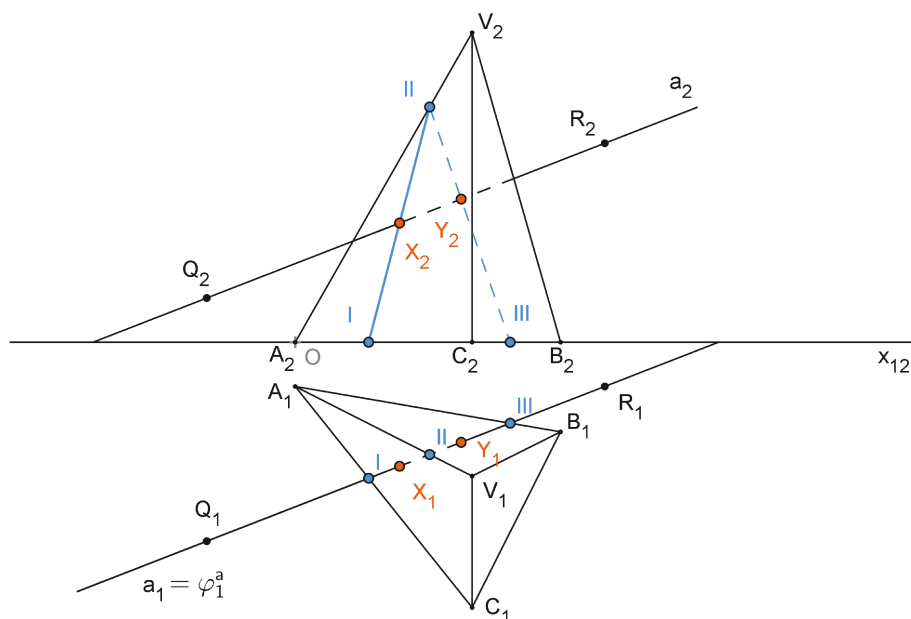
Body X a Y , které jsou průnikem přímky a s jehlanem, vidíme nejprve v nárýse jako průsečíky nárýsu řezu s přímkou a_2 . Jejich půdorysy X_1 a Y_1 leží na ordinálách a na přímce a_1 .

Nakonec se podíváme na viditelnost přímky a vzhledem k zadanému jehlanu. S přihlédnutím k poznámce 1.4 v úvodu je třeba si uvědomit následující fakta:

1. Části průmětu přímky, které leží vně průmětu tělesa, jsou vždy viditelné.
2. Rozhodně není vidět ta část přímky, která je uvnitř tělesa, tj. mezi body X a Y .
3. Stěžejními pro určování viditelnosti přímky jsou konečně ty části jejího průmětu, které se nacházejí mezi obrysem tělesa a průmětem některého z bodů průniku. Zde platí, že daná část průmětu přímky nebude viditelná, pokud se v prostoru přímka z daného pohledu nachází „za“ nebo „pod“ tělesem.

Poznatky z prvních dvou bodů nám pomohou vyřešit otázku viditelnosti pro „většinu“ přímky. Zbývá zjistit, jak na tom budou ty části jejich průmětů, které se nacházejí mezi průměty bodů průniku X a Y a obrysem tělesa. Pomůže nám uvědomit si, zda jsou z našeho pohledu viditelné ty stěny, v nichž body X a Y leží.

Začneme půdorysem. Stěna AVC , ve které leží bod X , zde vidět je. Proto vidíme i samotný bod X , a tím i příslušný kousek přímky a , která je tedy v těchto místech „nad“ jehlanem. Úplně stejně tomu je i v případě bodu Y , neboť i stěna ABV , v níž leží, je shora viditelná. První průmět přímky a tedy bude viditelný všude kromě jeho části nacházející se mezi body X_1 a Y_1 .



Obrázek 2.3

V náryse je situace stejná jako v půdoryse pouze pro bod X . I zde je totiž stěna ACV , potažmo úsečka $I-II$, viditelná. Jinak tomu ovšem bude u bodu Y . Stěna ABV , v níž leží, tím pádem i úsečka $II-III$, totiž v náryse vidět není. V prostoru to znamená, že se příslušná část přímky a nachází „za“ tělesem, a není tedy při pohledu zepředu vidět.

○

Poznámka 2.1. Při závěrečném vyznačování viditelnosti se může stát, že budou jednotlivé úseky příliš malé na to, aby byla viditelnost názorná. V takovém případě je dobré tyto úseky ještě bokem popsat slovně.

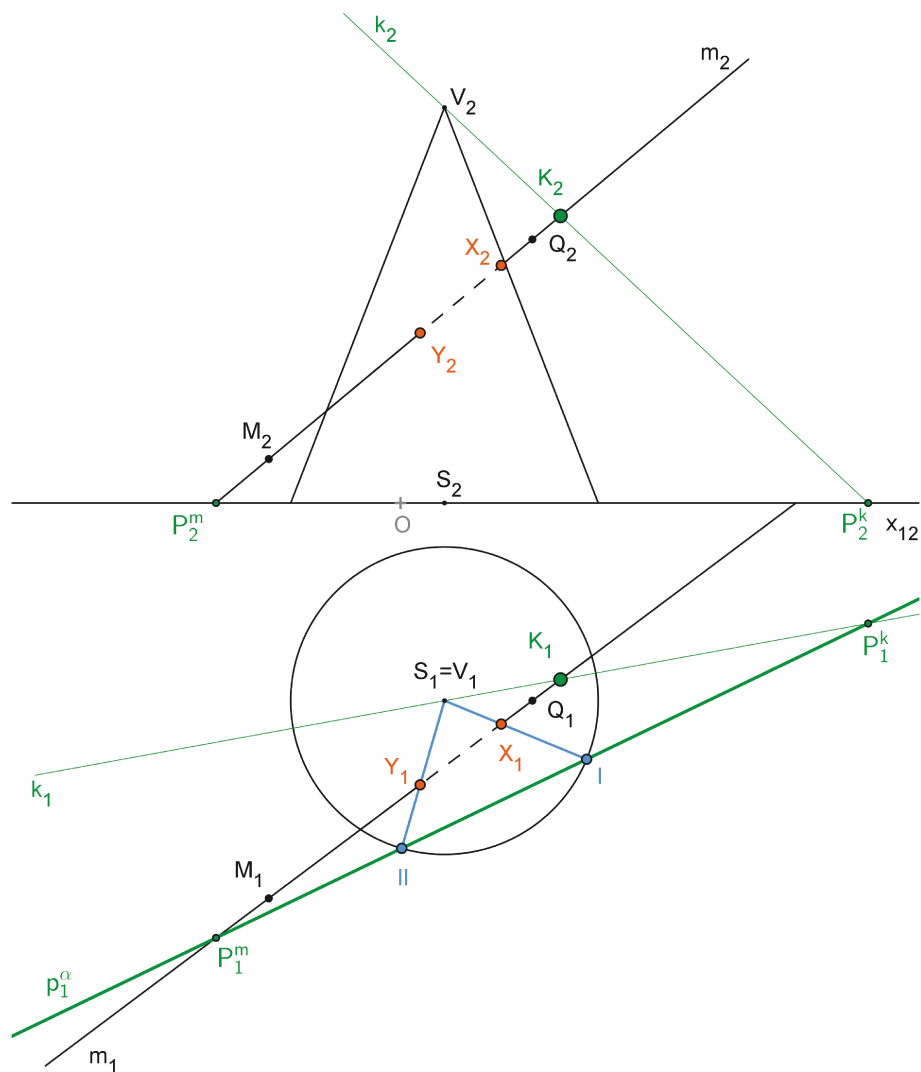
Poznámka 2.2. Je také dobré rozlišovat typem značení (například barevně) důvod, pro který není část přímky vidět. Tedy že je buď zakrytá tělesem, nebo že se nachází uvnitř něj. V rámci uvedených publikací si toho můžeme všimnout v [6, str.275, obr. 365.] na příkladu kulové plochy a přímky a dále ve většině příkladů z [4].

Poznámka 2.3. Někdy se může stát, že stopa použité vrcholové roviny nebude mít s podstavou zadaného tělesa žádný průnik. V takovém případě nebude mít ani zadaná přímka žádné společné body s tímto tělesem.

Příklad 2.2. Najděte průnik přímky m s přímým kuželem.

Podstava kužele leží v půdorysně, má poloměr 3,5, jejím středem je bod $S = [1; 4,5; 0]$. Výška kužele je 9. Přímku m určují body $M = [-3; 9; 1]$ a $Q = [3; 4,5; 6]$. Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 145^\circ$, $q = \frac{2}{3}$

Řešení: Úlohu můžeme vyřešit úplně stejně jako tu předešlou, tedy pomocí první nebo druhé promítací roviny přímky m a jejího řezu kuželem. Zde ovšem narážíme na praktický problém: Oním řezem bude téměř jistě některá z regulárních kuželoseček, nebo alespoň její část spolu s úsečkou. Takový řez se sice v jednom



Obrázek 2.4

z průmětů objeví jako úsečka, ovšem v tom druhém opět jako regulární kuželosečka (potažmo opět její část spolu s úsečkou), jejíž rýsování by bylo zdlouhavé. Při hledání jejích průsečíků s průmětem zadané přímky by navíc vedlo i k nepřesnostem. Místo promítací roviny tedy zvolíme takovou, jejímž řezem budou různoběžné úsečky.³ Taková rovina musí procházet vrcholem kužele a nazývá se VRCHOLOVÁ ROVINA.

Přímku m tedy proložíme vrcholovou rovinou α (obrázek 2.4). Podstava zadaného kužele leží v půdorysně, proto nás na rovině α bude zajímat především její půdorysná stopa p^α . Tu najdeme jako spojnici půdorysných stopníků P^m a P^k přímek m a k . Přímka k je zde vedena vrcholem V a libovolným bodem K^4 ležícím na přímce a .⁵

³Speciálními případy, v nichž by byl řezem bod či jediná úsečka, se tato práce nebude zabývat. Je na čtenáři, aby si představil, jaké vzájemné polohy kužele a přímky by k nim vedly.

⁴V souborech s krokovanými řešeními příkladů řešených tímto způsobem je jeden z průmětů (ten, který je vhodné rýsovat jako první) vždy pohyblivý. V tomto příkladě je to jeho nárys K_2 .

⁵V [4, str. 87] je pro takovou přímku zaveden a dále používán pojem VRCHOLOVÁ PŘÍMKA. V však v této práci budeme pod tímto pojmem rozumět v souladu s [1] něco jiného. Proto nyní takovou přímku necháme bez konkrétního označení.

TIP: Na přímce k hledáme půdorysný stopník. Při volbě bodu K je proto dobré začínat druhým průmětem. Průměty bodu P^k tak snadno udržíme v mezích papíru.

Nyní můžeme sestrojít půdorys řezu kužele rovinou α . Bude jím lomená čára $I-V_1-II$, jejíž vrcholy I a II jsme získali jako průsečíky půdorysné stopy roviny α s podstavou kružnicí. Máme-li půdorys řezu, najdeme snadno půdorysy X_1 a Y_1 bodů průniku přímky m s kuželem, a sice jako průsečíky m_1 s úsečkami IV_1 a IIV_1 . Na příslušných ordinálách a na přímce m_2 pak hledáme jejich nárysy X_2 a Y_2 .

Zbývá opět rozhodnout o viditelnosti přímky m vzhledem ke kuželi. Již víme, že v tomto smyslu zásadní jsou úseky mezi průměty bodů X a Y a obrysem tělesa. V půdoryse budou obě tyto úsečky viditelné, protože jsou viditelné i body X a Y , a přímka se zde proto nachází „nad“ kuželem. Stejně to v tomto případě vypadá i v náryse. Body X a Y jsou i zde vidět, neboť leží v „přední“ – viditelné části pláště kužele. Tyto úseky přímky m jsou tedy z našeho pohledu „před“ kuželem, a v náryse tedy viditelné.

○

Při řešení předchozího příkladu jsme narazili na problém s použitím promítací roviny. Našli jsme ale jiný typ roviny, který je pro řešení stejně vhodný. Použití této tzv. vrcholové roviny můžeme považovat dokonce za vhodnější, a to díky její obecnosti: Jednak totiž přednosti vrcholové roviny nezávisí na promítání, v němž příklad rýsuje. A jednak – jak už víme – ji lze kromě jehlanů dobře použít i na kužely, neboť jejich řez není nikdy ani z části tvořen regulární kuželo-sečkou, ale pouze úsečkami.

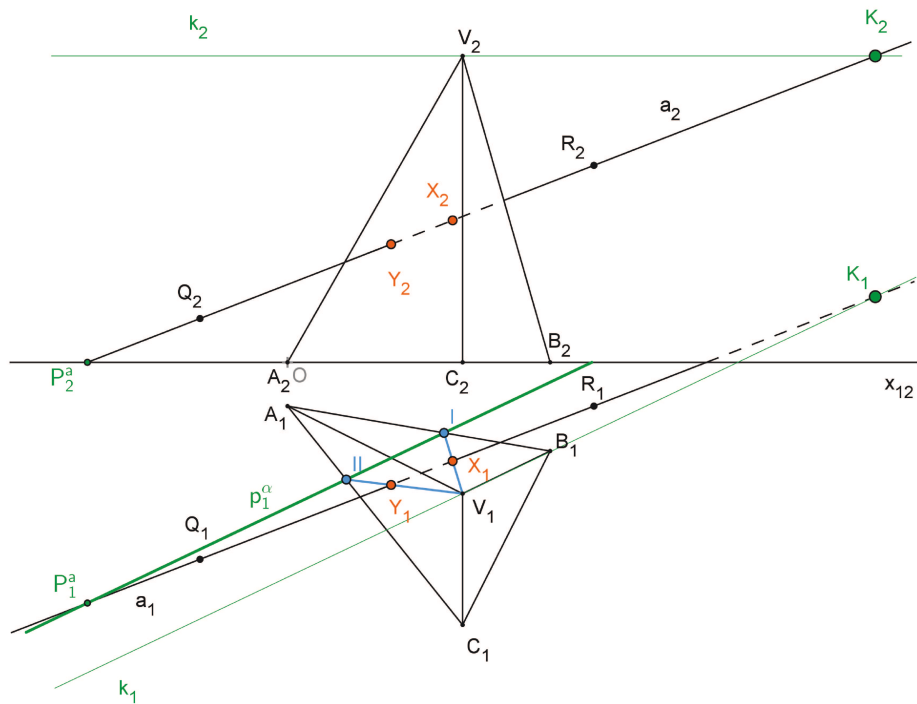
Mezi příklady z učebnic, které se na konci této kapitoly objeví, jsou i takové, které se od předešlých dvou vzorových liší například umístěním podstavy tělesa místo půdorysny do náryсны, či dokonce do obecné roviny. Další odlišnost lze spatřovat v tom, že těmito tělesy často bývají kosé kužely a jehlany namísto přímých. Je třeba zmínit, že popsané řešení je i v takovýchto případech co do principu naprosto stejné. Uveďme si je zde proto v jeho obecné podobě:

1. Zadanou přímkou proložíme vrcholovou rovinu.
2. Najdeme průsečnici vrcholové roviny a roviny, v níž leží podstava.
3. Sestrojíme řez tělesa vrcholovou rovinou.
4. Najdeme body průniku přímky a řezu, potažmo přímky a tělesa.
5. Vyřešíme viditelnost přímky vůči tělesu.

Pro úplnost se ještě vrátíme k příkladu 2.1 a vyřešíme jej pomocí vrcholové roviny (obrázek 2.5). Ukážeme si přitom zároveň jiný způsob, jakým lze dohledat její půdorysnou stopu.⁶

Přímku k jsme tentokrát volili jako rovnoběžku s půdorysnou vrcholem V , aby mohla hrát roli horizontální hlavní přímky vrcholové roviny. To znamená, že její nárys k_2 je rovnoběžka se základnicí x_{12} procházející bodem V_2 . Nárys bodu K zde vzniká teprve jako průsečík nárysů přímek k a m . Spojením jeho půdorysu K_1

⁶Tento postup má svůj význam pouze v Mongeově promítání. Krokované řešení příkladu v kosoúhlém promítání stejně jako 3D řešení tedy obsahuje stejný způsob hledání půdorysné stopy vrcholové roviny, jaký byl předveden v příkladu 2.2.

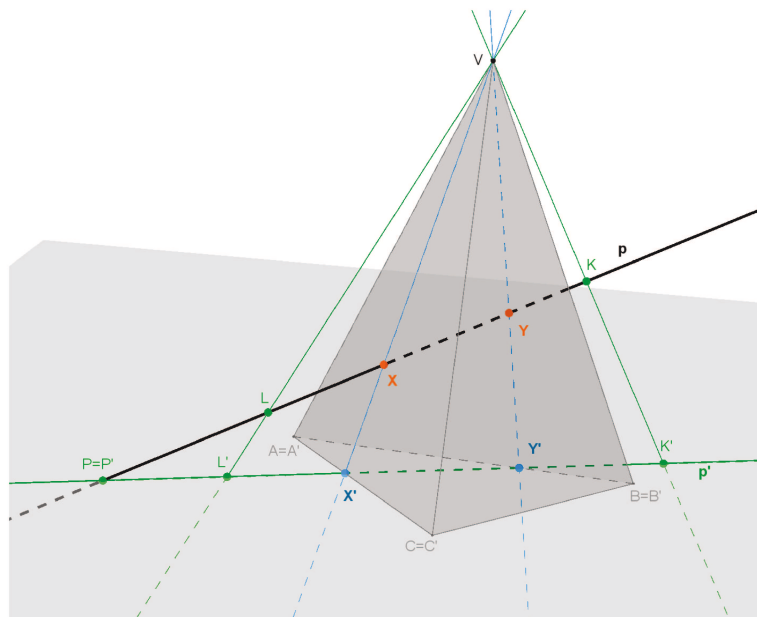


Obrázek 2.5

(leží na ordinále bodu K a přímce m_1) s bodem V_1 jsme dohledali půdorys přímky k . Protože jde o horizontální hlavní přímku roviny α , je její půdorys rovnoběžný s půdorysnou stopou p_1^α . Tu jsme tedy získali jako rovnoběžku s přímkou k_1 bodem P_1^m .

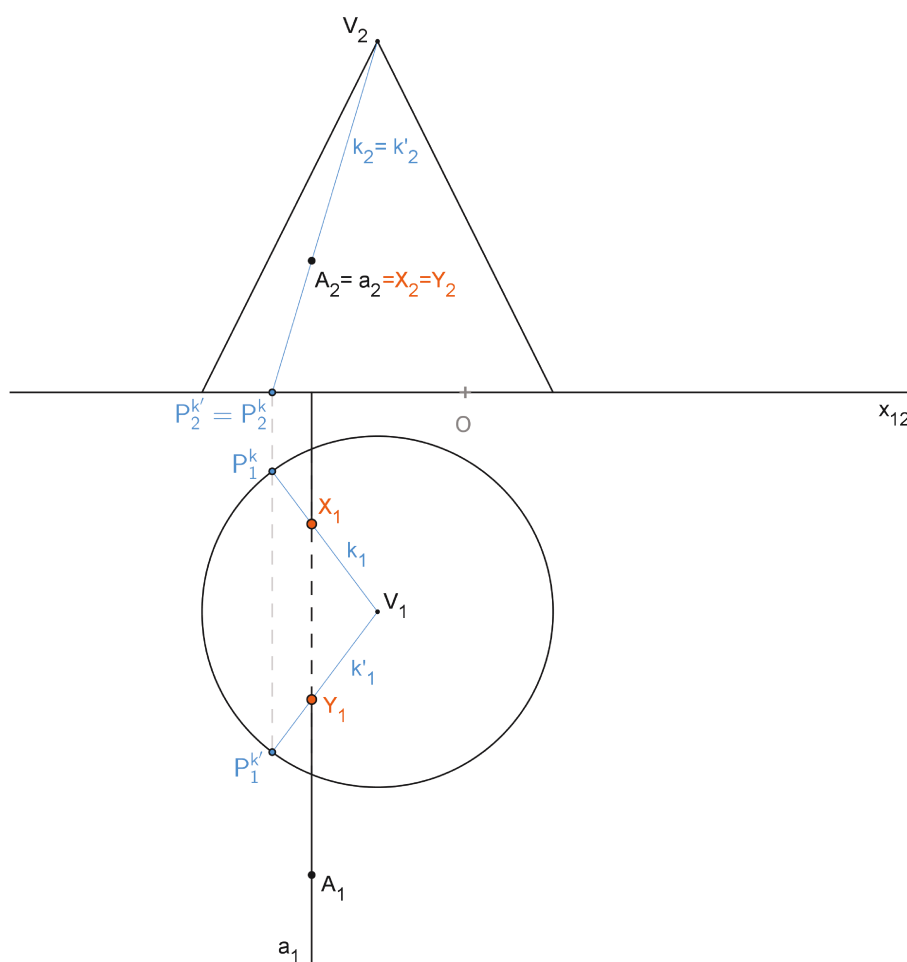
Dále je postup totožný jako u příkladu 2.2.

○



Obrázek 2.6

Poznámka 2.4. Za pozornost stojí pohled prezentovaný v [12, str. 249]. Problém hledání průsečíků řeší pomocí středové projekce z vrcholu kužele či jehlanu do roviny jejich podstavy. Celá podstava je v tomto zobrazení samodružná. Průsečíky středového průmětu přímky s podstavou (resp. jejím středovým průmětem) jsou středové průměty hledaných průsečíků. Ty získáme zpětnou projekcí z vrcholu na vzor přímky (viz obrázek 2.6). Ve své podstatě nejde o nic jiného než o použití vrcholové roviny. Její stopou je přímka, která zde vystupuje jako obraz zadané přímky. Její průsečíky s podstavou označované v našich dosavadních postupech jako I a II jsou pak obrazy hledaných bodů X a Y . Ty nakonec najdeme zpětnou projekcí, tj. spojením s vrcholem V . Jak již bylo řečeno, nejde o žádný nový postup, ale o alternativní slovní označení a teoretické pozadí pro jedny a ty samé „čáry“ či úkony. Nepřináší tedy ani případně s ním spojené výhody. Je ale možné, že právě takový jiný náhled na věc může být pro některé studenty zásadní v jejím pochopení.



Obrázek 2.7

Příklad 2.3. Najděte průnik popsaných přímek s přímým kuželem.⁷ Podstavu kuželu tvoří kruh o poloměru 4 ležící v půdorysně. Vrcholem kužele je bod $V = [-2; 5; 8]$.

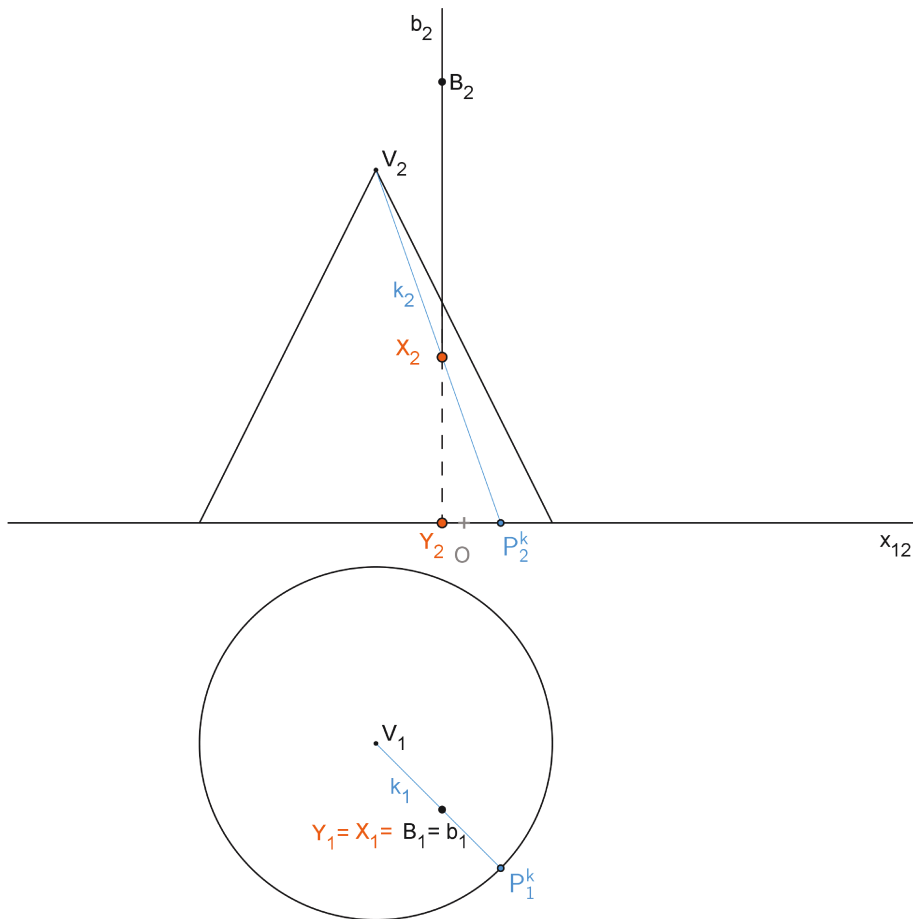
⁷Přímky zadané v tomto příkladě zaujímají zvláštní polohy vůči průmětnám. Zvláštnosti řešení z toho plynoucí jsou patrné zejména v Mongeově promítání, a proto příloha k tomuto příkladu neobsahuje řešení v kosoúhlém promítání ani 3D model.

- Ⓐ Přímka a je kolmá k nárysně a prochází bodem $A = [-3; 5; 3]$.
- Ⓑ Přímka b je kolmá k půdorysně a prochází bodem $B = [-0,5; 6,5; 10]$.
- Ⓒ Přímka c je rovnoběžná s půdorysnou i nárysnou a prochází bodem $C = [-6,5; 3; 1,5]$.

Řešení: V případě Ⓐ (obrázek 2.7) se nárys celé přímky a redukuje do bodu a_2 . Tím pádem známe i nárysy hledaných bodů X a Y , které s bodem a_2 splývají. Zbývá nám tyto body pouze dourčit nalezením jejich půdorysů.

Použijeme k tomu obdobu krycí přímky: Bodem X proložíme stranu k kužele, tedy spojnici vrcholu V s podstavou. Stejně tak proložíme bodem Y stranu k' . Jejich nárysy k_2 a k'_2 navzájem splývají a s nimi i nárysy P_2^k a $P_2^{k'}$ jejich půdorysných stopníků. Půdorysy stopníků P^k a $P^{k'}$ dohledáme na půdoryse podstavné kružnice kužele. Jejich spojením s půdorysem V_1 vrcholu kužele získáme půdorysy pomocných stran k a k' , na nichž najdeme půdorysy bodů X a Y jako průsečíky s půdorysem přímky a .

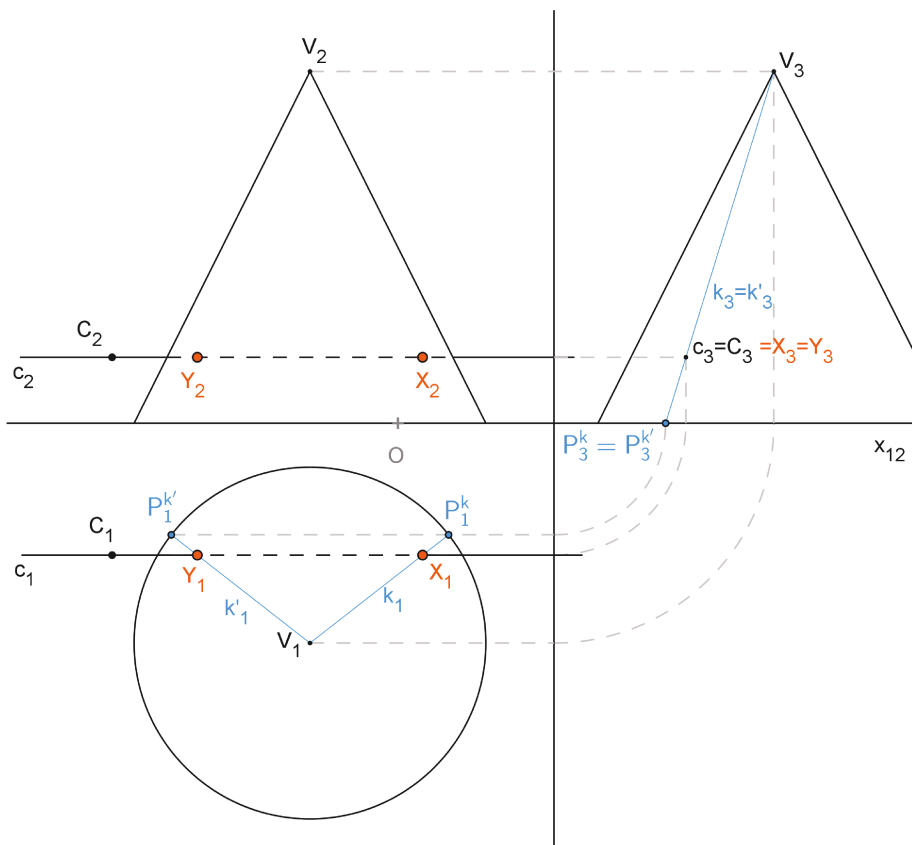
Nakonec vyřešíme viditelnost.



Obrázek 2.8

V případě Ⓑ postupujeme analogicky pouze s tím rozdílem, že bod X prokládáme stranou k v půdoryse (obrázek 2.8) a dohledáváme jeho nárys. Navíc je nasnadě, že v tomto případě bude průsečík přímky s pláštěm kužele pouze jeden. Bod Y je pak průsečíkem s podstavou.

Případ Ⓒ je možné řešit pomocí vrcholové roviny určené přímkami vedenými z vrcholu kužele do dvou libovolných bodů ležících na přímce c . Velmi se k tomu



Obrázek 2.9

hodí představa popsaná v poznámce 2.4. My ho však vyřešíme zavedením třetí průmětny, konkrétně takové, aby třetím průmětem přímky c byl bod (obrázek 2.9). Tím se problém převede na variantu \textcircled{a} .

○

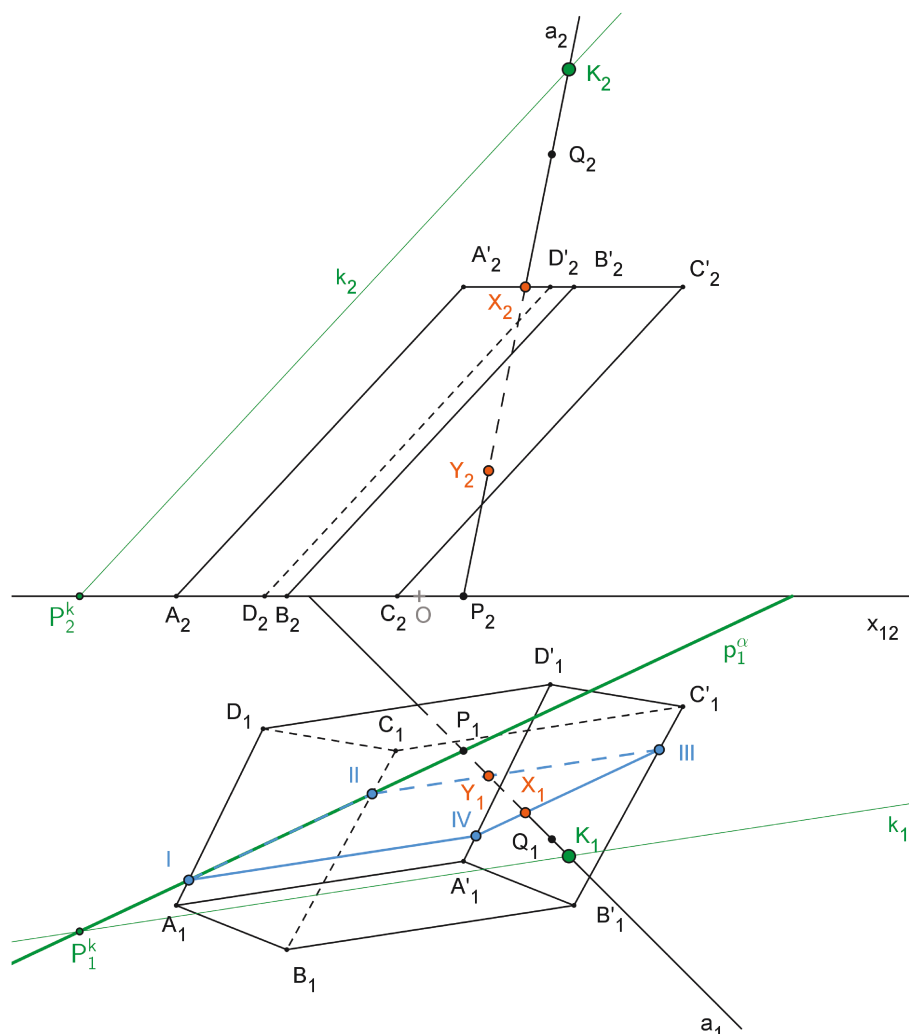
V rámci vzorových příkladů jsme předvedli dva základní postupy za pomoci vrcholové a promítací roviny. Z hlediska této práce je zásadní použití vrcholové roviny, protože právě ta bude sloužit jako základní kámen v metodě řešení úloh o průniku dvou hranatých těles.

2.2 Hranoly a válce

V předchozí kapitole jsme se seznámili s několika postupy řešení, z nichž jsme nakonec vyhodnotili jako v jistém smyslu nejvhodnější použití vrcholové roviny. U hranolů a válců je situace obdobná. Místo vrcholové roviny zde však budeme používat tzv. SMĚROVOU ROVINU, tedy rovinu, která obsahuje zadanou přímku a zároveň je rovnoběžná se stranami válce či s bočními hranami hranolu.⁸

⁸Uvažujeme-li prostor projektivně rozšířený o nevlastní prvky, nejde o nic jiného než o vrcholovou rovinu. Hranol/válec je v tomto pojetí jehlan/kužel s nevlastním vrcholem. Rovnoběžnost směrové roviny se stranami válce, případně bočními hranami hranolu pak znamená, že rovina tímto nevlastním vrcholem prochází. Proto se v některých publikacích, například v [4, str. 90] či [7, str. 174] pojem směrové roviny vůbec nezavádí a používá se dál vrcholová rovina.

Příklad 2.4. Najděte průnik přímky a s kosým hranolem $ABCD A' B' C' D'$.
 Vrcholy podstavy ležící v půdorysně mají souřadnice $A = [-5,5; 7; 0]$, $B = [-3; 8; 0]$, $C = [-0,5; 3,5; 0]$ a $D = [-3,5; 3; 0]$, jeden z vrcholů horní podstavy je $A' = [1; 6; 7]$. Přímka a je dána body $P = [1; 3,5; 0]$ a $Q = [3; 5,5; 10]$.
 Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 115^\circ$, $q = \frac{2}{3}$



Obrázek 2.10

Řešení (obrázek 2.10): Jak už bylo řečeno, přímkou a proložíme směrovou rovinu α . Proto na přímce a zvolíme libovolně bod K , kterým povedeme rovnoběžku k s bočními hranami hranolu. Směrová rovina α je tedy určena přímkami a a k . Jedna z podstav hranolu leží v půdorysně, proto potřebujeme najít půdorysnou stopu roviny α . K tomu nám poslouží půdorysné stopníky přímek a a k .

Dále najdeme půdorys řezu hranolu rovinou α . Bude jím hranice rovnoběžníka $I-III-III-IV$, jehož vrcholy I a II získáme jako průsečíky podstavných hran s půdorysnou stopou. Nyní již můžeme vyznačit půdorysy X_1 a Y_1 hledaných bodů. Budou jimi průsečíky přímky a_1 s lomenou čarou $I-III-III-IV-I$, konkrétně s úsečkami $II-III$ a $III-IV$. Pomocí ordinál najdeme na náryse přímky a nárysy bodů X a Y .

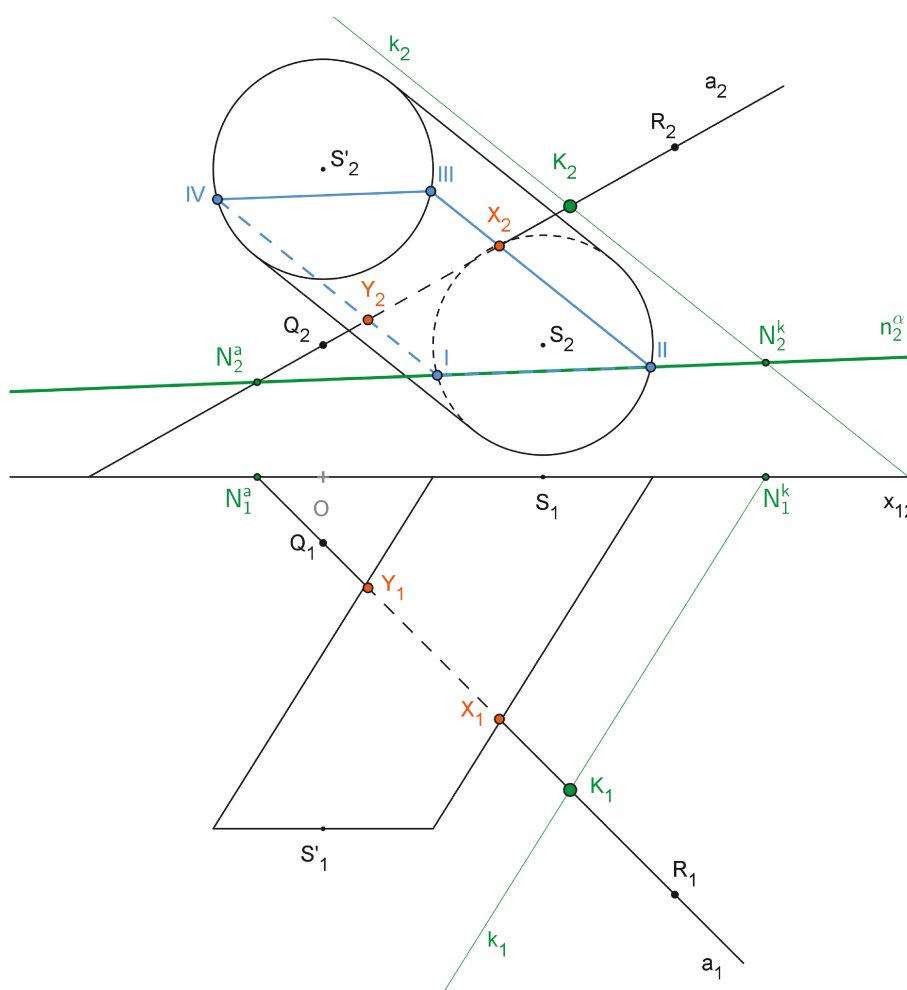
Zbývá dourčit viditelnost přímky a . I zde funguje vše stejně jako u předešlých příkladů, proto si stačí pouze správně uvědomit, ve kterých stěnách body X a Y

leží. Bod X leží v horní podstavě. Ta je v půdoryse viditelná a v náryse splývá do úsečky. Oba průměty přímky a tedy budou viditelné až po průměty bodu X , konkrétně půjde o viditelné polopřímky X_1Q_1 a X_2Q_2 . Jiné je to s bodem Y , který leží ve stěně $BCB'C'$. Zatímco v náryse je tato stěna, a tím i bod Y , vidět, v půdoryse tomu tak není. Proto i nárys přímky a uvidíme až po bod Y_2 (neboli viditelná bude polopřímka P_2Y_2), ovšem v půdoryse přestane být vidět už při přechodu přes průmět hrany DD' . ○

Příklad 2.5. Najděte průnik přímky a s kosým válcem.

Jedna z podstav válece leží v nárysně, je zadána středem $S = [5; 0; 3]$ a poloměrem 2,5. Střed druhé podstav má souřadnice $S' = [0; 8; 7]$. Přímka a je daná body $R = [8; 9,5; 7,5]$ a $Q = [0; 1,5; 3]$.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 150^\circ$, $q = \frac{1}{3}$



Obrázek 2.11

Řešení (obrázek 2.11): Budeme postupovat obdobně jako u příkladu 2.4 s tím rozdílem, že místo půdorysné budeme hledat nárysnou stopu směřové roviny α . Na přímce a tedy libovolně volíme bod K a vedeme jím rovnoběžku k se stranami válce (nebo chceme-li s úsečkou SS').⁹ Najdeme nárysné stopníky přímek a a k

⁹Zde je vhodné začínat půdorysem K_1 a volit ho tak, aby se nárysný stopník přímky k vešel na papír.

a pomocí nich nárýsnou stopu směrové roviny α , která je těmito přímkami určena. Rovnoběžník, který je řezem válce rovinou α na jeho povrchu vytne lomenou čáru *I-II-III-IV-I*, v níž je úsečka *I-II* průnikem stopy n^α s podstavou ležící v nárýsně. Průsečíky přímky a_2 s nárýsy úseček *II-III* a *III-IV* jsou nárýsy hledaných bodů X a Y . Jejich půdorysy dohledáme na půdorysu přímky a .

Na závěr vyznačíme viditelnost přímky a . Nárýs bodu X leží na viditelné části průmětu válce, proto bude nárýs přímky a viditelný až k bodu X_2 . Naproti tomu bod Y ve viditelné části válce neleží, proto přestane být přímka a v nárýse vidět už při přechodu přes obrys válce. V půdoryse dopadne viditelnost v okolí obou bodů stejně. Jak X , tak Y se totiž nacházejí ve „spodní“ části válce, to znamená v té jeho části, která není při pohledu shora vidět. Na půdoryse přímky a proto zůstane čárkovaná celá jeho část, která se nachází uvnitř obrysu válce.

Tento příklad je z takových, u nichž je vhodné viditelnost zadané přímky kromě jejího vyznačení v obrázku popsat i slovně. Úseky mezi body průniku a obrysem válce jsou totiž v půdoryse tak malé, že lze na nich viditelnost dostatečně názorně zaznačit jen stěží. ○

V příkladech 2.4 a 2.5 jsme si ukázali postup při hledání průsečíku přímky s hranolem a válcem v jeho obecné podobě. Další zobecnění pro tělesa s podstavami v obecných rovinách se po nahrazení vrcholové roviny směrovou neliší od popisu pro jehlany a kužely na straně 9. Podívejme se však na některé speciální případy.

Příklad 2.6. Najděte průnik přímky a a kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$. Podstava hranolu ležící v nárýsně má vrcholy $A = [5; 0; 1]$, $B = [1; 0; 6,5]$ a $C = [-3; 0; 3,5]$. Výška hranolu je 12. Přímka a je daná body $R = [-4; 12; 1,5]$ a $Q = [4,5; 12; 5,5]$.

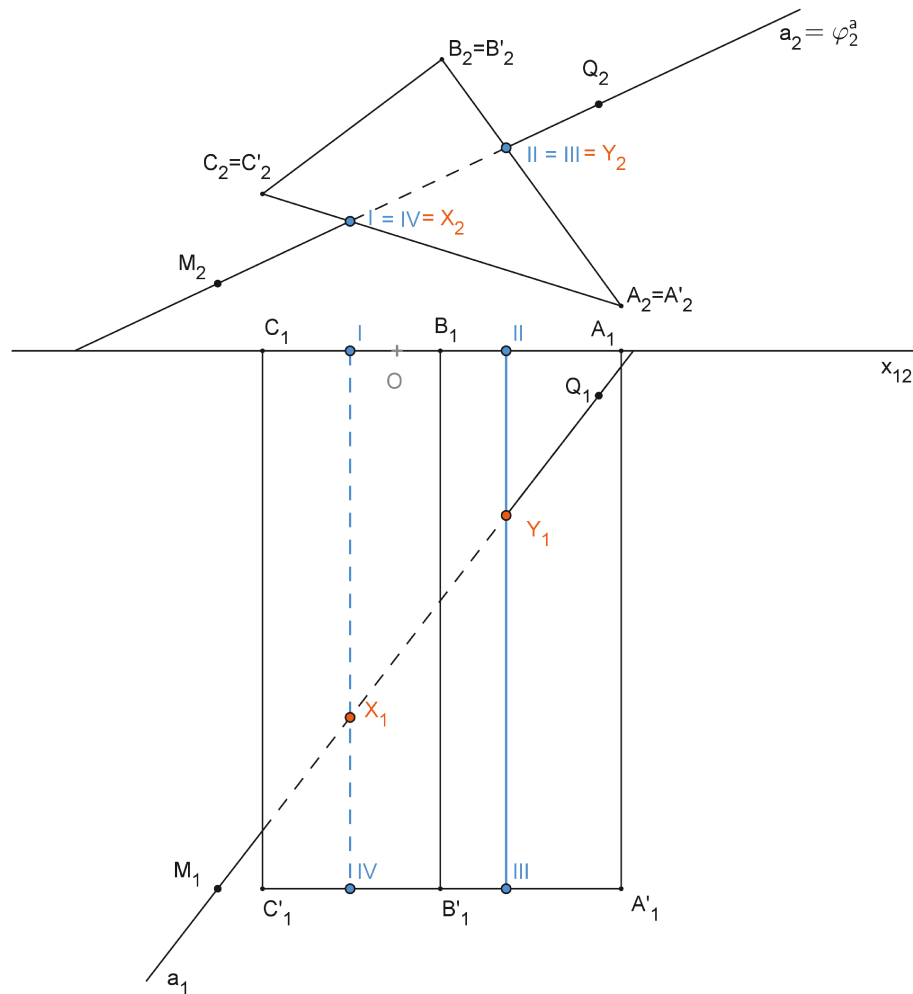
Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 130^\circ$, $q = \frac{5}{6}$

Řešení (obrázek 2.12): Zadaný hranol je kolmý k nárýsně, proto se řešení výrazně zjednoduší. Směrová rovina, kterou chceme proložit přímkou a , je totiž zároveň její druhou promítací rovinou φ^a , a její druhý průmět φ_2^a proto splývá s nárýsem přímky a . Nárýsem řezu hranolu rovinou φ^a je pak úsečka *I-II*, jejíž krajní body jsou průsečíky přímky a_2 se stranami trojúhelníka $A_2B_2C_2$. Zároveň tyto body splývají i s nárýsy hledaných bodů X a Y . Řezem, který se při pohledu zepředu jeví jako úsečka *I-II*, jsou při pohledu shora (i ve skutečnosti) strany obdélníka *I-II-III-IV*. Jejich průsečíky s přímkou a_1 potom určují půdorysy bodů X a Y .

Zbývá opět určit viditelnost přímky a . V nárýse prakticky nemusíme dělat vůbec nic: Části přímky a_2 , na něž se na základě dříve řečeného při řešení viditelnosti soustředíme, zde totiž nejsou. Přímka a tedy v nárýse není vidět pouze mezi průměty bodů průniku. V půdoryse však musíme uvažovat klasickým způsobem: Bod X leží ve stěně $CAC'A'$, která je při pohledu shora tělesem zakryta, a není tedy vidět. Nebude tak vidět ani část přímky a_1 mezi obrysem hranolu a bodem X_1 . Stěna $ABA'B'$, v níž leží bod Y , však shora vidět je. Přímku a zde proto uvidíme až po bod Y . ○

Příklad 2.7. Najděte průnik přímky a s přímým válcem.

Dolní podstavou válce, která leží v půdorysně, je kružnice se středem $S = [2; 6; 0]$ a poloměrem 4. Výška válce je 10. Přímka a prochází body $A = [3; 3; 4]$ a $B = [-3; 2,5; 8,5]$.



Obrázek 2.12

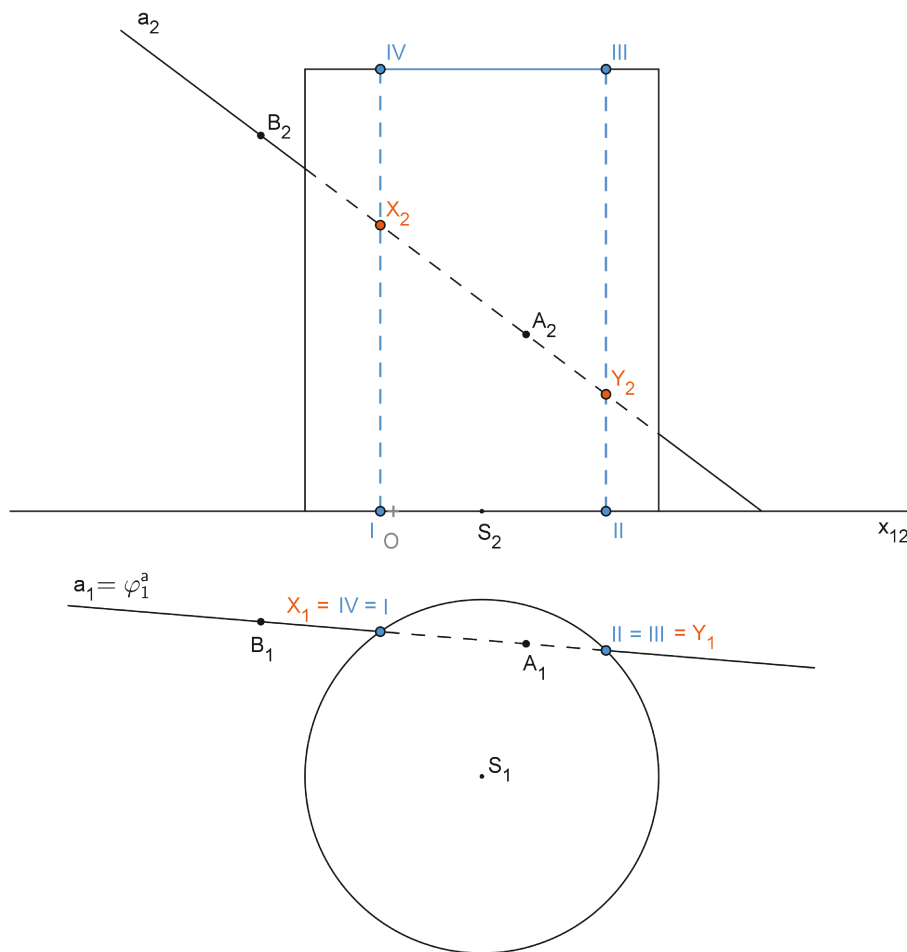
Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 120^\circ$, $q = \frac{3}{4}$

Řešení (obrázek 2.13): I zde můžeme stejně jako v příkladě 2.6 rovnou vyznačit hledané body v jednom z průmětů, tetokrát v půdoryse. Je to tím, že směrová rovina proložená přímkou a splývá s její první promítací rovinou φ^a . Půdorysem řezu je proto úsečka $I - II$, nárysem strany obdélníka $I - II - III - IV$. Nárysy bodů průniku najdeme jako průsečíky nárysů úseček $II - III$ a $I - IV$ s přímkou a_2 .

Viditelnost zde zásadním způsobem musíme řešit pouze v náryse: Celý řez se nachází v části válce, která je při pohledu zepředu skrytá, proto zůstává přímka a viditelná pouze vně průmětu tělesa.

○

V příkladech 2.6 a 2.7 jsme si ukázali, jak se zjednoduší řešení, je-li hranol či válec kolmý. Čtenáře přitom jistě napadlo, že při dourčování průnikových bodů hledáním jejich zbývajících průmětů nebylo vůbec třeba rýsovat odpovídající průmět řezu. Namísto toho stačilo chybějící průměty bodů X a Y najít pouze pomocí ordinál. Tak tomu v uvedených případech (a rovněž ve většině příkladů daného typu, které se vyskytují v učebnicích) skutečně je. Dourčení řezu včetně jeho viditelnosti (je-li správně), nám ale může pomoci při rozhodování o viditelnosti zadané přímky. Na následujícím příkladě si navíc ukážeme, v čem



Obrázek 2.13

by mohl nastat problém, a na co je proto třeba si dát pozor, rozhodneme-li se použít k dourčení pouze ordinály.

Příklad 2.8. Najděte průnik přímky m s krychlí $ABCD A'B'C'D'$.

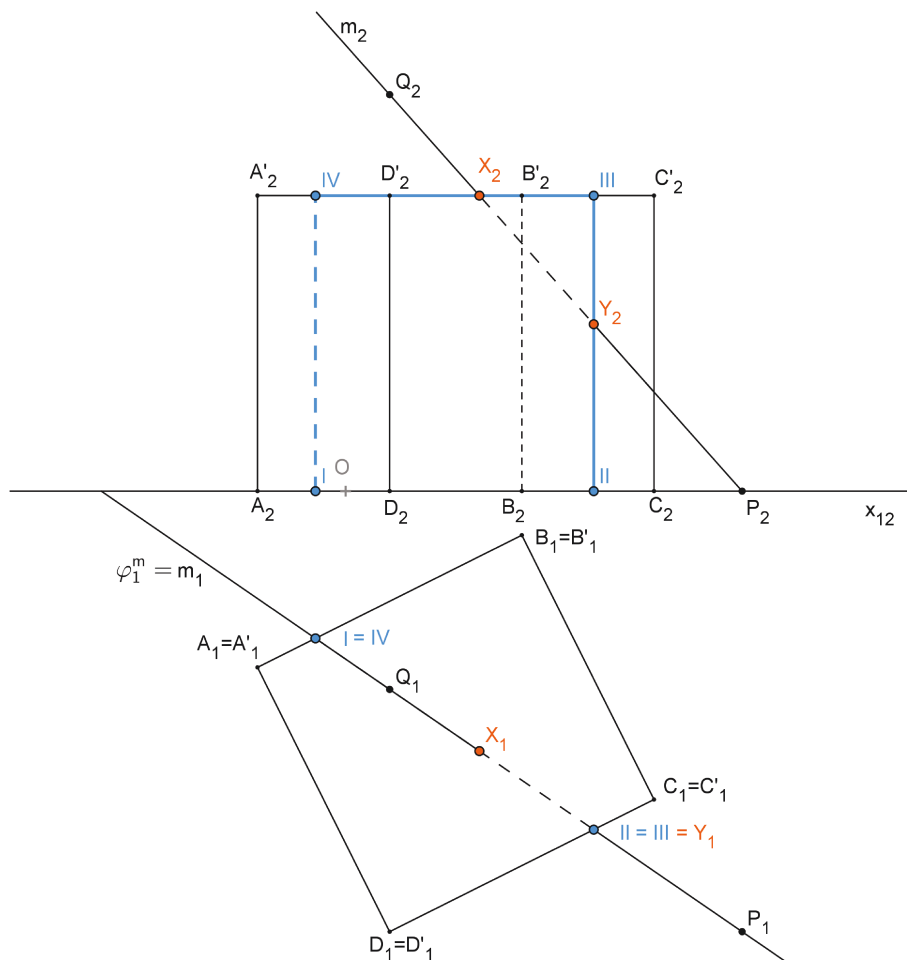
Stěna $ABCD$ krychle leží v půdorysně a jejími dvěma vrcholy jsou body $A = [-2; 4; 0]$ a $B = [4; 1; 0]$ ($y_C > y_B$). Přímka m je určena body $P = [9; 10; 0]$ a $Q = [12; 4,5; 9]$.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 145^\circ$, $q = \frac{3}{4}$

Řešení (obrázek 2.14): Pokud bychom postupovali podle úvahy naznačené v odstavci předcházejícím tomuto příkladu, označili bychom rovnou průsečík přímky m_1 s úsečkou A_1B_1 jako půdorys bodu X , s úsečkou C_1D_1 pak jako půdorys bodu Y . Jejich nárýsy bychom hledali na ordinálách a na přímce m_2 . U bodu Y by vše proběhlo hladce, zato nárýs bodu X by se tím dostal mimo obrys krychle, což je nesmysl. Problém je v tom, že přímka m neprotíná zadanou krychli ve stěně $ABA'B'$, ale ve stěně $A'B'C'D'$ (která hraje roli horní podstavy), a bod X tedy leží v ní. Od toho se pak odvíjí i viditelnost přímky m v půdoryse. Zbytek řešení je už jistě patrný z obrázku 2.14. ○

Příklad 2.9. Najděte průnik popsanych přímek s kolmým trojbokým hranolem $ABCA'B'C'$.¹⁰

¹⁰Podobně jako u příkladu 2.3 obsahuje příloha i zde řešení pouze v Mongeově promítání.



Obrázek 2.14

Podstavy hranolu leží v rovinách kolmých k půdorysně a známe souřadnice vrcholů $A = [3; 7; 3]$, $B = [1; 10; 7]$ a $C = [0; y_C; 5]$. Výška hranolu je 10.

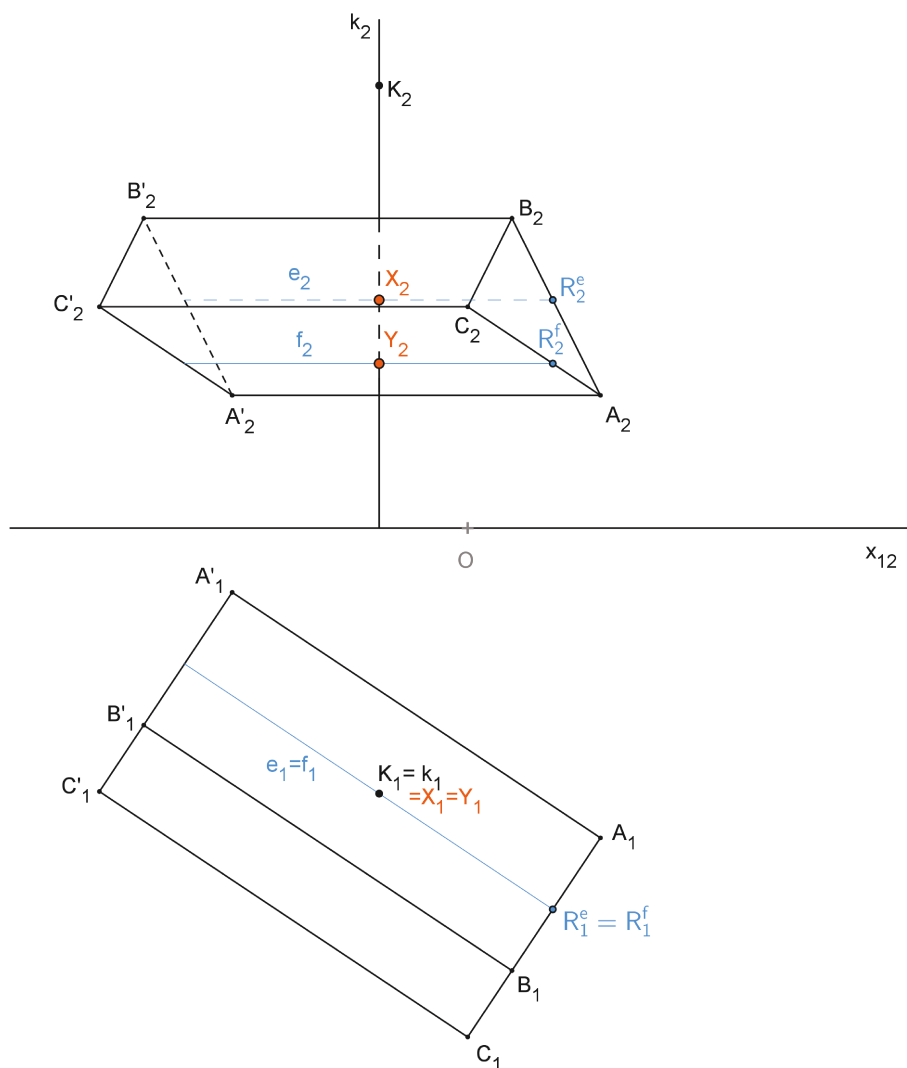
- Ⓐ Přímka k je kolmá k půdorysně a prochází bodem $K = [-2,5; 6; 10]$.
- Ⓑ Přímka l je kolmá k nárysně a prochází bodem $L = [-4; 12; 4]$.

Řešení: Ve variantě Ⓐ hned známe půdorysy hledaných bodů X a Y : Splývají s půdorysem přímky k . Pro jejich dourčení si ukážeme dvě metody řešení. První je obdobná jako u varianty Ⓑ příkladu 2.3: Použijeme překrytí libovolnou úsečkou ležící na povrchu hranolu. Aby byl tento postup použitelný i pro válec, vybereme si úsečku, která je rovnoběžná s bočními hranami hranolu. Dále je postup zřejmý z obrázku 2.15.

Druhá možnost je zavést třetí průmětnu kolmou k bočním hranám hranolu. Třetí průmět celého hranolu se tak zredukuje pouze do třetího průmětu jeho podstavy, čímž se problém převede na příklad 2.6. Postup je zřejmý z obrázku 2.16.

Pro řešení varianty Ⓑ použijeme analogii první metody použité pro variantu Ⓐ tohoto příkladu. Pouze se prohodí role půdorysu a nárysu (viz obrázek 2.17).

Poznámka 2.5. U jehlanů a kuželů jsme zmiňovali přístup popsáný v [12, str. 249], který se zakládá na středové projekci zkoumané přímky z hlavního vrcholu



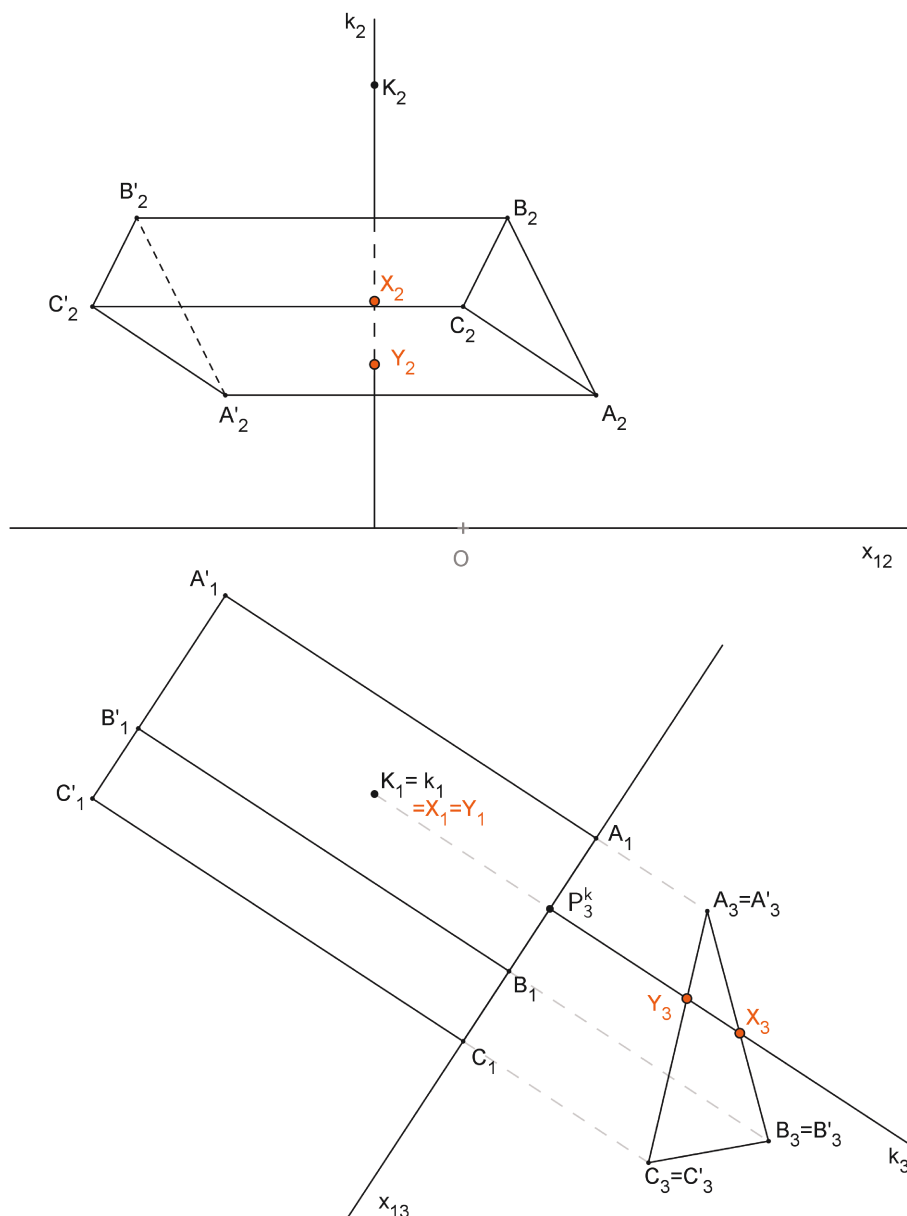
Obrázek 2.15

tělesa do roviny podstavy. Podobně je zde tomu i u hranolů a válců, jedná se pouze o rovnoběžnou projekci ve směru stran válce.

2.3 Kulová plocha

V předchozích kapitolách jsme se setkali se dvěma oblými tělesy – válcem a kuželem. Při hledání jejich průniku s přímkou jsme se nešikovnou volbou roviny mohli dostat do situace, v níž bychom byli museli rýsovat regulární kuželosečku a následně hledat její průsečíky se zadanou přímkou. Abychom se tomu vyhnuli, našli jsme a nadále používali vrcholovou (u kuželů) či směrovou (u válců) rovinu. Tím jsme zajistili, aby byly hranice vzniklých řezů složené pouze z úseček.

Podívejme se nyní na kulovou plochu. I u ní vzniká (je-li přímka v obecné poloze vůči průmětnám) tentýž problém s rýsováním řezu, kterému se navíc sebelepší volbou roviny nelze vyhnout: Průnikem jakékoliv roviny s kulovou plochou je totiž kružnice, která se alespoň v jednom z průmětů bude jevit jako elipsa. Zvolíme-li ale pro řez jednu z promítacích rovin zadané přímky, pomůže nám její sklopení do příslušné průmětny. Zde pak řez uvidíme v jeho skutečné podobě, tedy jako



Obrázek 2.16

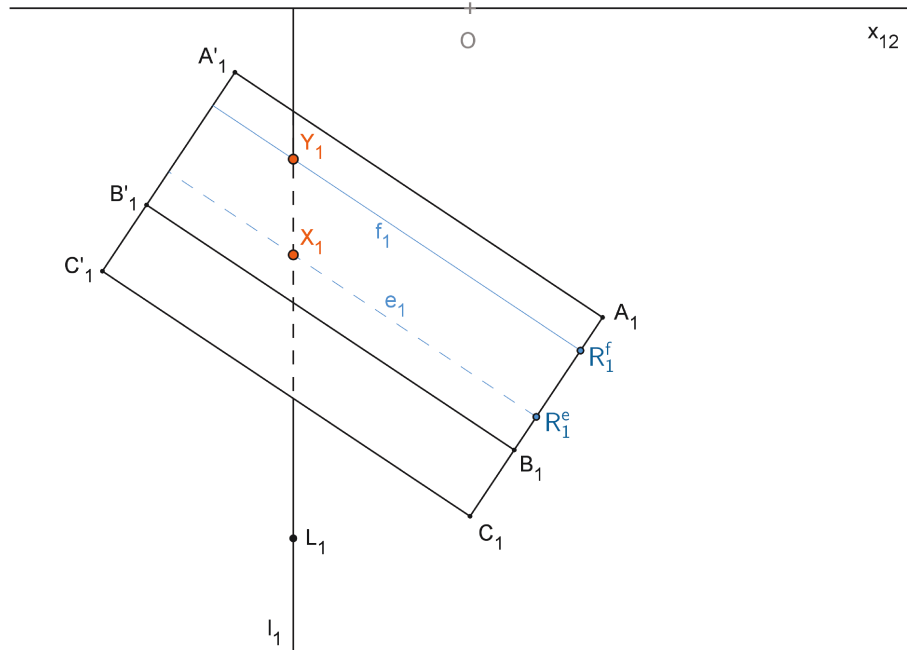
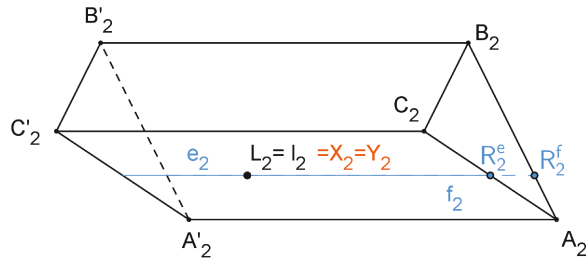
kružnici.

Příklad 2.10. Najděte průnik přímky k s kulovou plochou.¹¹

Přímka k prochází body $A = [-5, 5; 5, 5; 1]$ a $B = [4; 8; 9]$. Kulová plocha má střed $S = [0; 5; 6]$ a poloměr 4.

Řešení (obrázek 2.18): Přímku k proložíme jednu z jejích promítacích rovin, například první promítací rovinu φ^k . Půdorysem kružnice r , která je řezem kulové plochy touto rovinou, bude úsečka $I-III$, jejíž krajní body získáme jako průsečíky přímky k_1 neboli φ_1^k s kružnicí, která je půdorysným obrysem kulové plochy. Elipsu, která by byla nárysem řezu, však rýsovat nebudeme. Namísto toho sklopíme do půdorysny rovinu φ^k a s ní i kružnici r a přímku k . Ve sklopení pak

¹¹U tohto příkladu příloha neobsahuje podklady pro rýsování ani řešení v kosoúhlém promítání.



Obrázek 2.17

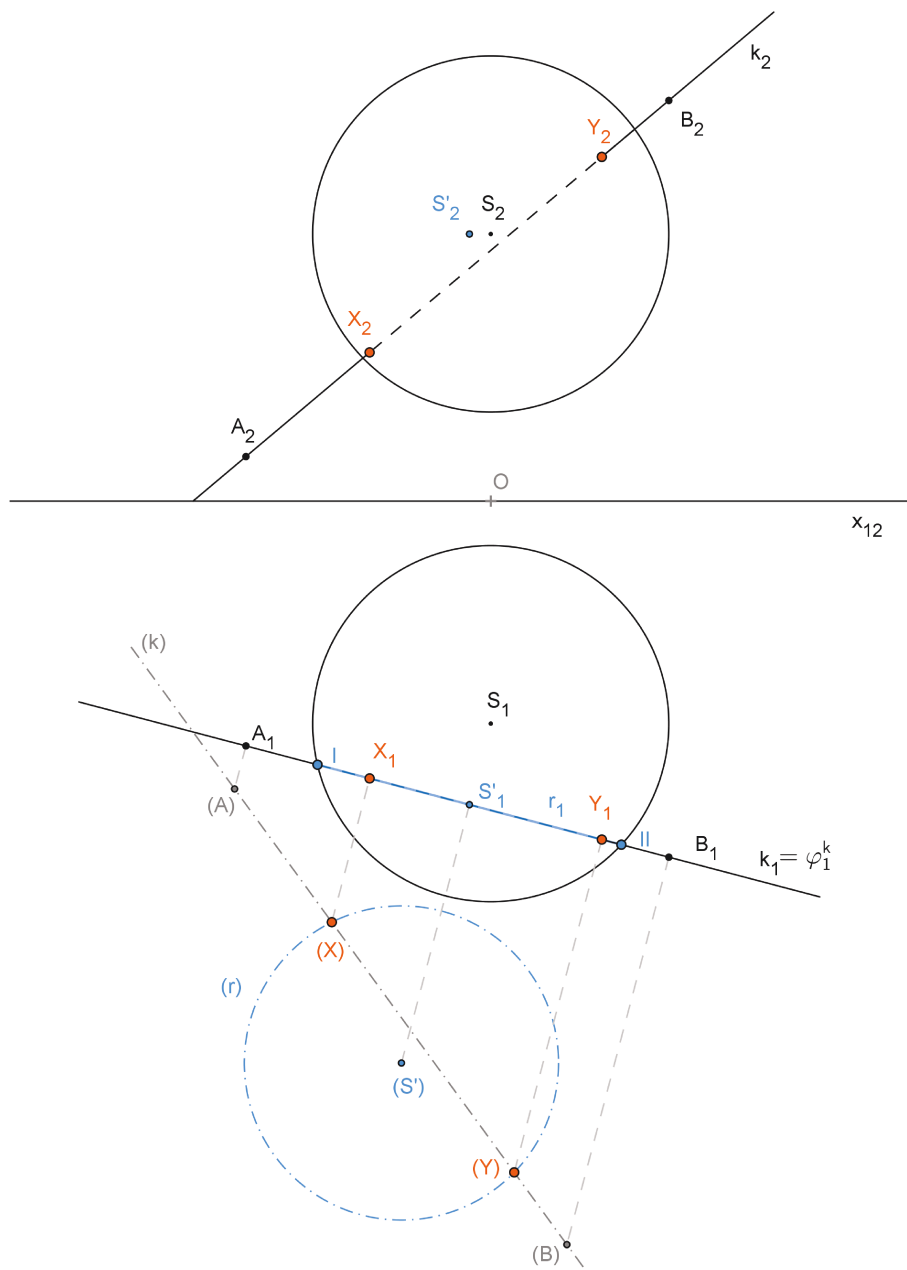
krásně uvidíme jak řez ve skutečném tvaru a velikosti, tedy kružnici (r), tak jeho průsečíky (X) a (Y) s přímkou (k). Ze sklopení je vrátíme obvyklým způsobem do půdorysu a následně převedeme do narysu.

Nakonec se zamyslíme nad viditelností přímky k . Začneme půdorysem. Z narysu (případně ze sklopení roviny φ) zjistíme, že se bod X nachází na „jižní“ polokouli, která shora není vidět. Proto nebude vidět on sám ani část přímky k_1 mezi jeho půdorysem a obrysem kulové plochy. Naproti tomu bod Y leží na „severní“ polokouli. Díky tomu je shora viditelný a s ním i odpovídající část půdorysu přímky k . Viditelnost v naryse vypadá stejně pro oba body. Jak X , tak Y se nacházejí na „přední“ polokouli, proto jsou zepředu vidět, a tím i celá přímka k kromě úseku mezi body X a Y .

○

Ukažme si ještě, jak se postup zjednoduší¹², pokud bude zadaná přímka kolmá na jednu z průměten. Vyřešíme tedy příklad, v němž bude vystupovat přímka kolmá na půdorysnu.

¹²Tak je tomu pouze v Mongeově promítání. Proto v příloze u tohoto příkladu najdeme krokované řešení pouze v této projekci.

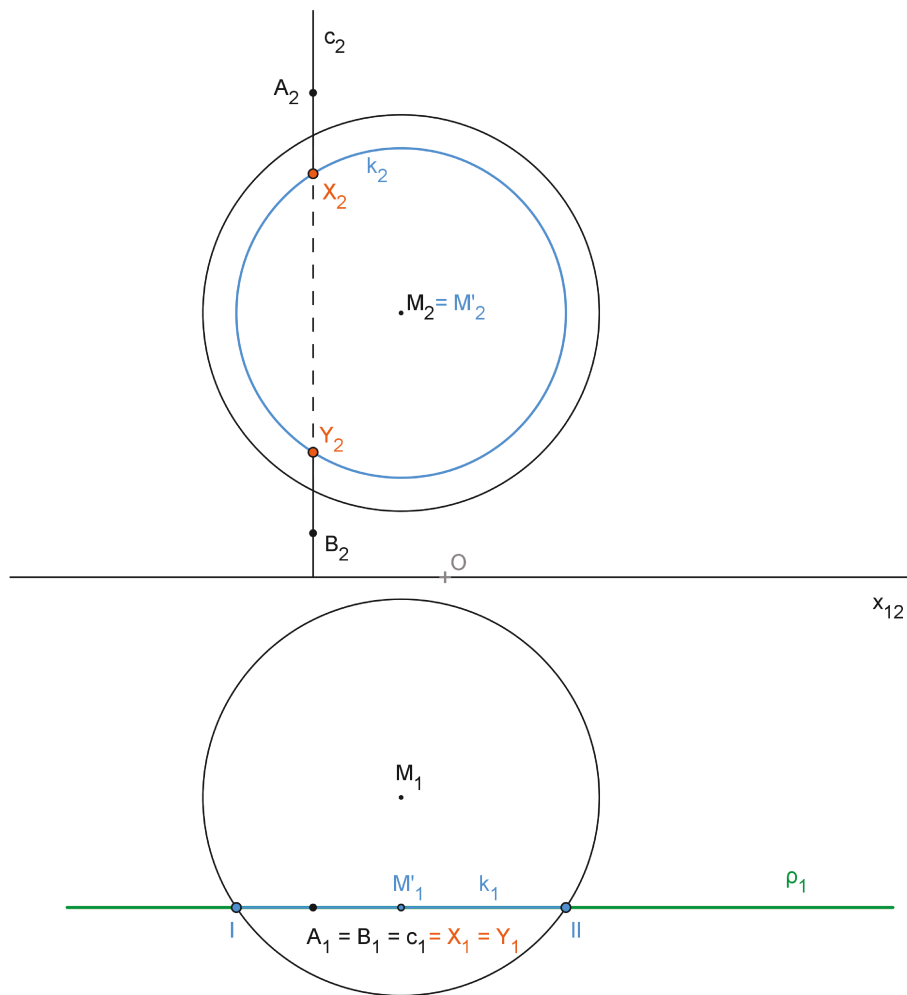


Obrázek 2.18

Příklad 2.11. Najděte průnik přímky c s kulovou plochou.

Přímka c prochází body $A = [-3; 7,5; 11]$ a $B = [-3; 7,5; 1]$. Kulová plocha má střed $M = [-1; 5; 6]$ a poloměr 4,5.

Řešení (obrázek 2.19): Přímka c je kolmá k půdorysně, proto je jejím prvním průmětem bod c_1 . S ním splývají půdorysy všech bodů ležících na přímce c , tedy i hledaných X a Y . Zbývá pouze dohledat jejich nárysy. K tomu nám pomůže řez kulové plochy, pro nějž je v tomto případě nejlepší použít rovinu ϱ . Ta obsahuje přímku c a je rovnoběžná s nárysnou. Jejím řezem je kružnice k se středem M' , kterou v půdoryse vidíme jako úsečku $I-II$; M'_1 je jejím středem. Nárysem této kružnice je kružnice k_2 se středem M'_2 o poloměru rovném vzdálenosti bodu M'_1 od jednoho z krajních bodů úsečky $I-II$. Hledané nárysy bodů průniku pak najdeme jako průsečíky přímky c_2 s kružnicí k_2 .



Obrázek 2.19

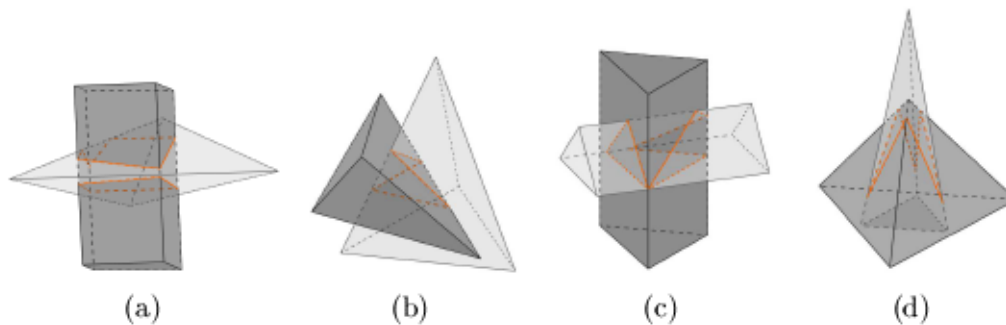
Řešení viditelnosti má v tomto případě smysl pouze pro nárys přímky c a bude vypadat stejně jak pro X , tak Y . Oba se totiž nacházejí v „přední“ části kulové plochy. Při pohledu zepředu tak bude vidět celá přímka c kromě úseku mezi body X a Y .

○

3. Dvě hranatá tělesa

V této kapitole se budeme zabývat metodami hledání průniku dvou hranatých těles. Zaměříme se zvláště na dva jehlany, jehlan s hranolem a dva hranoly.

Průnikem dvou hranatých těles v původním smyslu slova může být buď prázdná množina, bod (společný vrchol, vrchol jednoho tělesa ležící na povrchu druhého nebo průsečík hran z různých těles), úsečka (tělesa mají společnou hranu, nebo hrana jednoho leží ve stěně druhého), n -úhelník (společná část dvou dotýkajících se stěn), nebo mnohostěn. Nás bude v této práci zajímat právě posledně jmenovaný případ. Navíc v duchu poznámky 1.1 z úvodu práce a také v souladu s veškerou literaturou uvedenou na jejím konci nebudeme pod pojmem průniku dvou hranatých těles rozumět celý mnohostěn, ale pouze prostorovou lomenou čáru, která tvoří průnik pláště obou těles. Vrcholy této lomené čáry jsou pak tvořeny průsečíky hran jednoho tělesa s druhým, konkrétně s některou jeho stěnou. Právě nalezení těchto vrcholů bude (spolu s řešením viditelnosti průnikové čáry i těles vůči sobě navzájem) stěžejním úkolem této kapitoly.



Obrázek 3.1

Rozlišujeme několik typů průniku: Pokud všechny boční hrany jednoho tělesa protínají druhé těleso (zkráceně říkáme, že se „účastní průniku“), jde o PRŮNIK ÚPLNÝ (obrázek 3.1a). Existuje-li na každém z těles boční hrana, která se průniku neúčastní, říkáme, že je PRŮNIK ČÁSTEČNÝ (obrázek 3.1b). Na pomezí těchto dvou případů stojí situace znázorněná na obrázku 3.1c: Dvě hrany příslušící různým tělesům se zde protínají v tzv. DVOJNÉM BODĚ, a průnik tak není ani částečný, ani úplný.¹ Pro zvláštní případ úplného průniku, kdy se průniku účastní všechny boční hrany z obou těles, je v [4] navíc zaveden pojem DOKONALÝ PRŮNIK (obrázek 3.1d).

Platí také: Průnik dvou hranatých těles tvoří pouze jedna uzavřená lomená čára, je-li jejich průnik částečný nebo dokonalý. Vyskytuje-li se v průniku dvojný bod, je tento bod společný dvěma lomeným čarám představujícím průnik, který je tak podobný hranaté prostorové osmičce. Konečně v případě úplného průniku, který zároveň není průnikem dokonalým, se průniková lomená čára rozpadá na dvě samostatné uzavřené části.

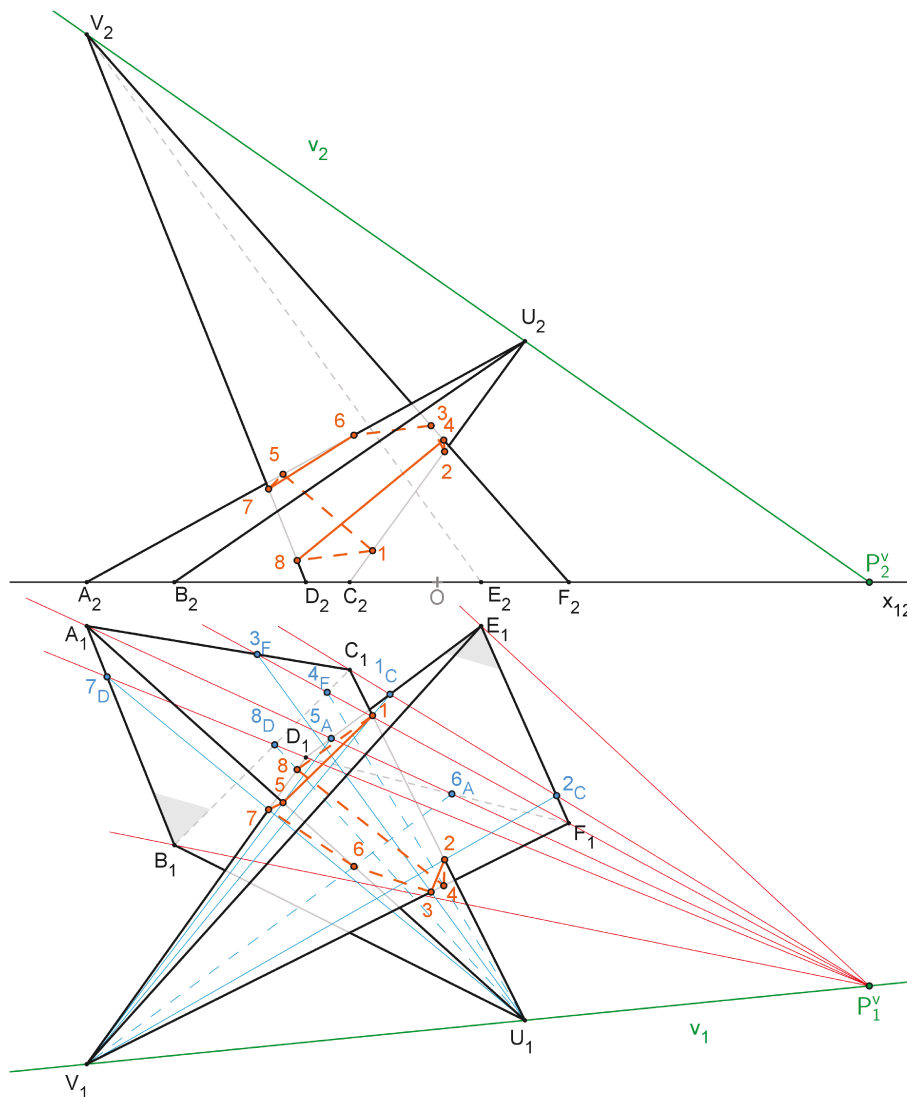
Konkrétnímu postupu při hledání průnikové čáry se budeme dále věnovat zvláště v jednotlivých podkapitolách.

¹Někdy se naopak uvádí, že je úplný i částečný zároveň, viz např. [7, str. 184]

3.1 Průnik dvou jehlanů

V druhé kapitole jsme se učili hledat průsečíky přímky, potažmo úsečky s jehlanem pomocí vrcholové roviny. Tento postup využijeme, budeme-li vyšetřovat průnik dvou jehlanů. Aplikujeme ho na všechny boční hrany jednoho jehlanu, abychom našli jejich průsečíky s bočními stěnami druhého jehlanu. Následně se role jehlanů vymění, čímž získáme všechny vrcholy jejich průnikové čáry. Každá z vrcholových rovin, které při tom použijeme, obsahuje boční hranu jednoho a vrchol druhého jehlanu. Všechny proto mají společnou spojnici obou vrcholů. O této přímce budeme dále mluvit jako o VRCHOLOVÉ PŘÍMCE.

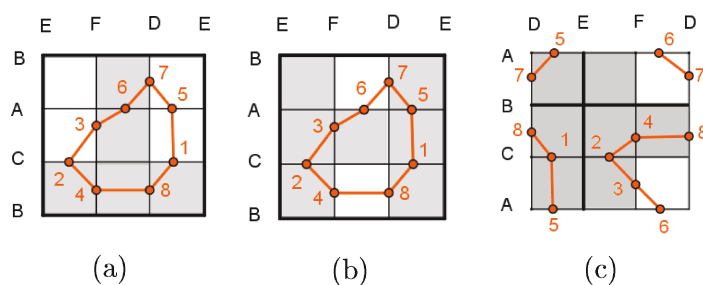
Příklad 3.1. Najděte průnik kosého jehlanu $ABC U$ s kosým jehlanem $DEF V$. Podstavy obou jehlanů leží v půdorysně a jejich vrcholy mají souřadnice $A = [-8; 1; 0]$, $B = [-6; 6; 0]$, $C = [-2; 2; 0]$; $D = [-3; 4; 0]$, $E = [1; 1; 0]$, $F = [3; 5; 0]$. Souřadnice vrcholů jsou $U = [2; 10; 5,5]$ a $V = [-8; 11; 12,5]$. Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 130^\circ$, $q = \frac{1}{2}$



Obrázek 3.2

Řešení (obrázek 3.2): Nejprve sestrojíme vrcholovou přímkou v a svazek vrcholových rovin. Podstavy obou těles leží v půdorysně, proto nás u vrcholových rovin budou zajímat pouze jejich půdorysné stopy. Každá z nich povede jednak půdorysným stopníkem P^v vrcholové přímkou, neboť je všem vrcholovým rovinám společná, a vrcholem některé z podstav. Takto vytvoříme v půdoryse šest (polo)přímek $P_1^v B_1$ až $P_1^v E_1$, z nichž většina protíná půdorysy podstav obou dvou jehlanů. Výjimkou jsou pouze krajní stopy, tedy stopy vedoucí k bodům B_1 a E_1 . Tento fakt znamená, že se příslušná boční hrana ani její nejbližší okolí průniku jehlanů neúčastní. Takovou oblast na tělese nazýváme LICHÁ ČÁST a v obrázku ji značíme šrafovou či vybarvením odpovídající části podstavy. V našem příkladě máme jednu lichou část na jehlanu $ABCU$ u hrany BU a druhou na jehlanu $DEFV$ u hrany EV . Pro takovou situaci platí, že značí částečný průnik. Budeme tedy očekávat, že jím bude jedna uzavřená lomená čára.

Nyní ke každé ze zbývajících stop sestrojíme řez odpovídající rovinou a najdeme jeho průsečíky s příslušnou hranou. Abychom se ve vrcholech řezů i v bodech průniku (zde jich bude osm) lépe vyznali, budeme je značit čísly. Začneme třeba rovinou CUV se stopou $P^v C$. Podstavu jehlanu $DEFV$ protíná tato stopa v úsečce, jejíž krajní body ležící na podstavních hranách DE a EF označíme 1_C a 2_C , kdy index C odkazuje právě k hraně CU .² Body 1_C a 2_C spojíme úsečkou s vrcholem jehlanu, na němž se nacházejí, tedy s vrcholem V . Tak získáme celý řez, jehož průsečíky s hranou CU jsou zároveň průsečíky této hrany s jehlanem $DEFV$. Označíme je 1 a 2. Tímto způsobem naložíme postupně se všemi stopami kromě těch, které vedou k lichým částem. Vůbec přitom nezáleží na tom, v jakém pořadí jejich průsečíky s podstavními hranami očíslováme. Musíme si však dát pozor, abychom hledali řez (tzn. číslovali) na správném jehlanu, tedy nikoli na tom, jehož hranu daná rovina obsahuje.



Obrázek 3.3

Dalším úkolem je spojit body průniku ve správném pořadí a vzít zároveň v potaz viditelnost průnikové čáry. Obecně se při tom řídíme faktem, že rýsovaná úsečka je viditelná, jsou-li viditelné obě stěny, v nichž leží. V opačném případě vidět není. K usnadnění těchto úvah nám pomohou schémata z obrázku 3.3.³ Jde o čtvercovou (obecně obdélníkovou) mřížku, v níž vodorovné úsečky znázorňují po řadě jdoucí boční hrany jehlanu $ABCV$. Úsečka příslušící určité hraně je vždy

²Jde přesně o ty body, které jsme ve druhé kapitole značili římskými číslicemi. Ty jsou ale pro potřeby této kapitoly prostorově náročné. Proto je zde budeme značit arabskými číslicemi stejně jako samotné body průniku, od nichž je odlišíme vedle barvy právě dolním indexem.

³Jiný způsob, jakým si můžeme pomoci, je popsán v [10, str. 12]. Jde však o způsob vyskytující se zde opravdu ojediněle, navíc nezahrnuje řešení viditelnosti průnikových úseček, takže jej necháme k dohledání případnému zájemci.

označena názvem toho svého krajního bodu, který není hlavním vrcholem jehlanu. Stejným způsobem jsou označeny i svislé úsečky, které reprezentují boční hrany jehlanu $DEFV$. Pásky mezi vodorovnými i svislými úsečkami symbolizují boční stěny obou jehlanů, které jsou odpovídajícími hranami určené. Proto je důležité umístit do mřížky první vodorovně i svisle zaznačenou hranu znovu, tentokrát jako poslední. Šedé vybarvení pásu značí, že stěna není v daném průmětu vidět. Tučné zvýraznění hrany pak, že jde o hranu nacházející se v liché části tělesa, a že se tedy na ní neocitne žádný bod průniku. Do této sítě jsou umístěny body 1 až 8 podle toho, na které hraně jednoho a ve které stěně druhého jehlanu leží. Například tedy bod 1: Je to průsečík hrany CU a stěny DEV . Proto se v síti nachází na úsečce označené podle vrcholu C , ale zároveň v pásu mezi úsečkami s krajními body D a E .⁴ Existuje jediný způsob, jak body průniku v síti správně propojit při dodržení následujících pravidel:⁵

1. Žádná z úseček nesmí spojovat body ležící na stejné hraně.
2. Žádná z úseček nesmí křížit žádnou z hran.

Správným pospojováním tedy dostaneme lomenou čáru 1-7-3-2-4-6-8-5-1. Její úsečky, které se nacházejí v šedé oblasti sítě, v daném průmětu vidět nejsou, a naopak. Protože rýsuje v promítání se dvěma průměty, musíme si kvůli viditelnosti vytvořit schémata dvě – jedno pro půdorys (obrázek 3.3a) a druhé pro nárys (obrázek 3.3b).⁶

TIP: Při kreslení sítě je dobré umístit úsečky, které symbolizují „liché“ hrany, na její okraje, tedy tak, jak jsme to udělali s úsečkami B a E v obrázcích 3.3a a 3.3b. Celá průniková křivka se nám tak udrží pohromadě. Na obrázku 3.3c vidíme ještě jednu síť s viditelností pro nárys, tentokrát však s „lichými“ hranami umístěnými dovnitř. Znázorňuje stejnou křivku se stejnou viditelností. Nesmí nás však zmást, že se křivka v takovém případě rozpadá, protože jde pouze o rozpadnutí v rámci schématu, nikoli v prostoru: Pomocí čísel bodů průniku na krajních hranách se můžeme přesvědčit, že křivka plynule navazuje, a je možné ji tak celou „projít“.

Nakonec vyřešíme viditelnost obou jehlanů vůči sobě navzájem, respektive hran jednoho vůči druhému, a naopak. Princip je stejný jako při určování viditelnosti přímky vůči tělesu ve druhé kapitole. Zde je však situace výrazně jednodušší, neboť do každého vrcholu průnikové čáry vedou dvě její úsečky, jejichž viditelnost již známe. Budeme se tedy řídit následujícím:

1. Hranami, které nebyly viditelné už v zadání, se nezabýváme (např. půdorys hrany BC).
2. Boční hrana je viditelná až po bod průniku, je-li viditelná alespoň jedna z průnikových úseček do tohoto bodu vedoucích (půdorys úsečky AU kolem bodu 5 díky viditelnosti úseček 1-5 a 5-7). V opačném případě přestne být dotyčná hrana vidět, jakmile protne obrys druhého tělesa (půdorys téže úsečky, tentokrát u bodu 6).

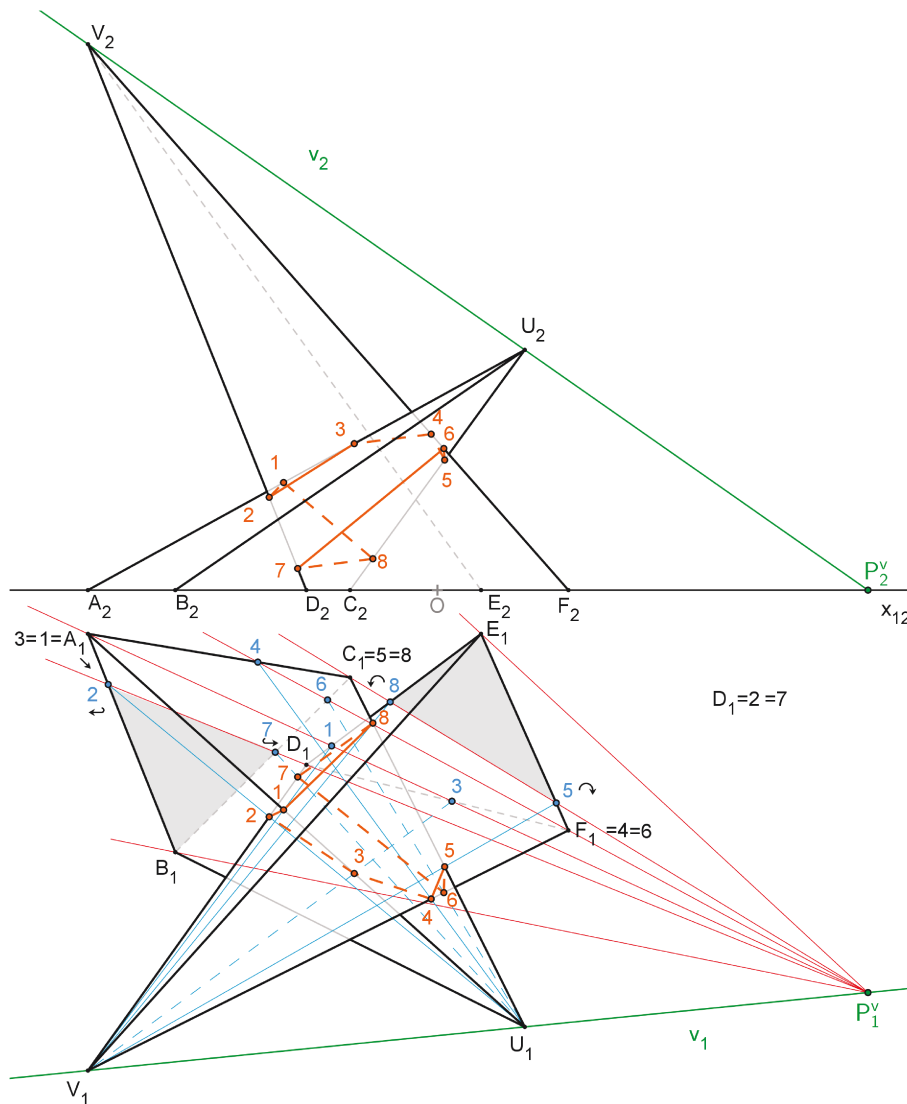
⁴Pěkně je způsob tvoření těchto schémat popsán v [13, str. 155] či v [12, str. 256]

⁵Čtenář nechť si promyslí, co by jejich porušení pro průnikovou křivku v prostoru znamenalo.

⁶V [2, str. 231 a 232] je předvedeno, jak se kreslení dvou sítí vyhnout zaznačením viditelnosti v obou průmětech pouze do jedné. Viditelnost průnikových úseček z něj ale není přímo vidět, musí se odvodit; proto zde tuto pomůcku používat nebudeme.

3. Nachází-li se hrana v liché části tělesa, je vidět buď celá (půdorys hrany EV), nebo pouze její část, která není zakrytá viditelnou částí druhého tělesa (půdorys hrany BU).
4. Pro podstavné hrany platí totéž co pro hrany z lichých částí.

○

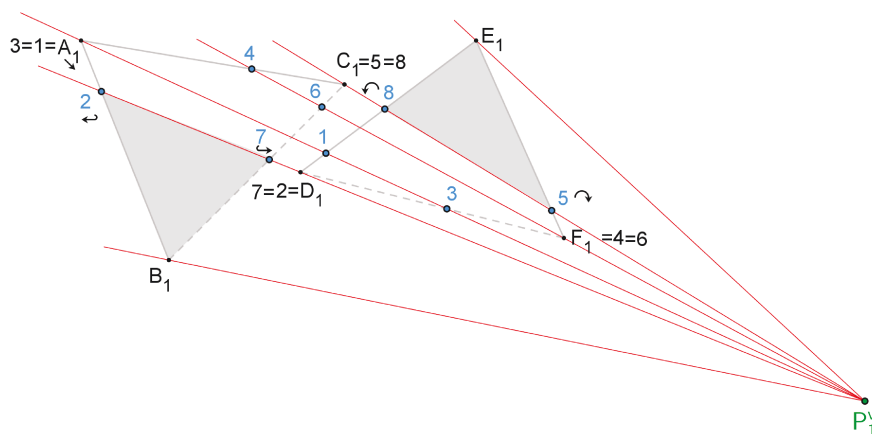


Obrázek 3.4

Popsanou metodu číslování používá v rámci zkoumané literatury z českých pramenů pouze [2]. Zdá se tak, že má svou tradici spíše na západě, zatímco u nás moc známá není, což je také jeden z důvodů, proč ji budeme dále používat v této práci. Ve všech ostatních tuzemských zdrojích, v nichž se číslování používá, se provádí jiným způsobem. Abychom si ho zde také předvedli, vyřešíme pomocí něj znovu příklad 3.1.

Řešení (obrázek 3.4): Začátek je stejný; zastavíme se až v momentě, kdy bychom začali umísťovat čísla k průsečíkům stop s podstavnými hranami, tedy hned po stanovení lichých částí. Tentokrát tyto body, a posléze body průniku, nebudeme

číslovat v libovolném pořadí. Čísła totiž rozdáme rovnou tak, abychom mohli na konci body průniku správně pospojovat v pořadí 1-2-3-4-5-6-7-8-1. Budeme proto postupně obcházet podstavy obou těles a číslovat na nich odpovídající si dvojice bodů. Jedním z nich bude vždy vrchol a druhým průsečík stopy, která do tohoto vrcholu vede, s podstavnou hranou druhého jehlanu. Průsečík spojnice tohoto bodu s hlavním vrcholem a odpovídající boční hrany na prvním jehlanu bude vrcholem průnikové čáry.



Obrázek 3.5

Vybereme si tedy libovolnou ze stop (obrázek 3.5).⁷ Číslo 1 připíšeme jak k podstavnému vrcholu, kterým prochází, tak k jednomu z jejích průsečíků s okrajem podstavy druhého tělesa. V obrázku 3.4 jsme jako první zvolili stopu procházející bodem A . Jednička je proto připsaná k jeho průmětu A_1 a k průmětu průsečíku této stopy s hranou DE . Nyní postoupíme z bodu A k další stopě. Mezi stopami P^vD a P^vF jsme v obrázku zvolili první z nich (znázorněno šipkou).⁸ Tato stopa prochází bodem D , zatímco na druhém jehlanu protíná v sousedství vrcholu A hranu AB . Průmět tohoto bodu označíme spolu s průmětem bodu D dvojkou. Další v pořadí je stopa P^vB . Vede však do liché části, proto musíme po přidělení čísla 2 na podstavě ABC změnit směr obcházení, což značí šipka u čísla 2. Na podstavě DEF jsme zatím lichou část nepotkali, proto pokračujeme dál. Dostáváme se zpět ke stopě P^vA , ovšem tentokrát jsme na podstavě DEF v jejím průsečíku s hranou FD . Jeho průmětu proto patří číslo 3 stejně jako průmětu bodu A . V dalším kroku se ocitneme na stopě P^vF . Čtyřka se proto objeví u průmětu jejího průsečíku s hranou CA a u bodu F_1 . Číslo pět pak náleží k bodu C_1 a k průmětu průsečíku stopy P^vC s hranou EF . V tomto bodě ovšem musíme změnit směr obcházení podstavy DEF , neboť bychom se na ní v dalším kroku dostali do liché části. Vrátime se tedy zpět ke stopě P^vF a označíme číslem 6 jak bod F_1 , tak průmět jejího průsečíku s hranou BC . Dál znovu potkáme stopu P^vA . Tentokrát však není ani jeden z bodů, v nichž přes ni přecházíme, vrcholem. Proto k jejich průmětům žádné číslo neumístíme a postoupíme ke stopě

⁷V [1, str. 27] se uvádí, že se vždy jako první vybírá jedna ze stop, kterými „končí“ liché části. Není to ale nutné, můžeme začít odkudkoli. Číslování bude v rámci výsledné křivky pouze posunuté.

⁸Volba P^vF v tomto kroku by způsobila pouze změnu smyslu, ve kterém by byly vrcholy průnikové čáry označeny. Přiřazení čísla 1 k průmětu průsečíku stopy P^vA s hranou FD ve kroku předešlém by pak měla za následek opět jen posunutě označení.

P^vD . Číslo 7 se tak objeví až u bodu D_1 a u průmětu průsečíku této stopy s hranou BC . Na podstavě ABC změním kvůli liché části směr obcházení; na podstavě DEF pokračujeme ve stejném smyslu dál. Ze stejného důvodu jako při předchozím setkání přejdeme stopu P^vA , a tentokrát navíc i P^vF ; zajímavá bude až stopa P^vC . Protíná hranu DE v bodě, jehož průmět označíme stejně jako bod C_1 číslem 8. Protože se tím na podstavě DEF opět dostaneme k liché části, změním na ní směr obcházení. Znovu necháme z dříve objasněných důvodů bez povšimnutí stopu P^vF , čímž se na obou podstavách dostaneme do počáteční pozice, a sice do bodů označených číslem 1. To znamená, že jsme již našli všechny body průniku, a jsme tedy s číslováním u konce.

Další postup při hledání samotných vrcholů průnikové čáry je stejný jako v prvně použité metodě: Očíslované body na podstavních hranách spojíme úsečkou s vrcholem jehlanu, na němž se nacházejí, a najdeme průsečík každé z nich s hranou, jež nese u svého vrcholu v podstavě stejné číslo, kterým tento průsečík označíme. Tak je tedy například oranžový bod číslo 5 průsečíkem úseček $5V$ a CU .

Nakonec tyto body propojíme. Tentokrát sice už známe jejich pořadí, zato však nevíme, jak to bude s viditelností úseček mezi nimi. Před rýsováním každé z nich je proto potřeba provést úvahu nad tím, které ze stěn obou jehlanů se v ní protínají a zda jsou vidět. Pro začátečníka může být pomocí seznam stěn spolu s jejich viditelností, který si na začátku řešení vytvoří bokem a do nějž postupně připisuje objekty, které do uvedených stěn rýsuje, od bodů průniku stop s podstavními hranami přes jejich spojnice s vrcholy jehlanů až k samotným vrcholům průnikové čáry. Jde ale o poněkud těžkopádný proces, kterým při použití této metody platíme za pořadí vrcholů průnikové čáry, které dostaneme zdarma při jejich nalezení. ○

Poznámka 3.1. Použití první číslovací metody se dobře obejde bez uvažování a zakreslování lichých částí. Proto se v učebnicích, které tuto metodu používají, pojem liché části vůbec nezavádí. Ve druhé metodě jsou ale nepostradatelné, protože upozorňují řešitele, že má změnit směr obcházení příslušné podstavy. Proto trojúhelníky značící liché části v obrázcích 3.4 a 3.5 dosahují až k první stopě, která protíná obě podstavy. V této práci budeme o lichých částech mluvit a ve zmenšené verzi je zakreslovat do řešení i při používání první metody.

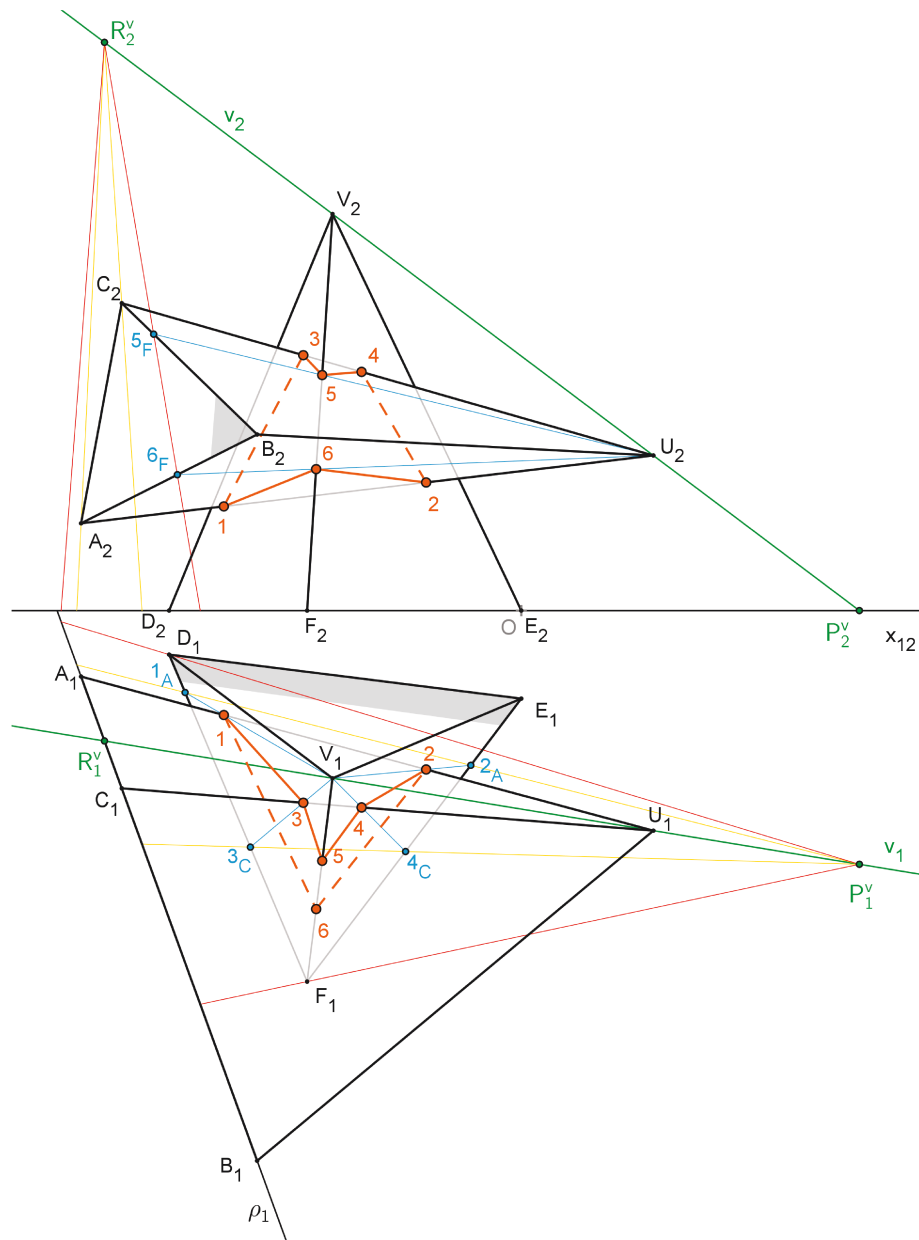
Příklad 3.2. Najděte průnik jehlanu $ABCU$ s jehlanem $DEFV$.

Podstava jehlanu $ABCU$ leží v rovině ρ , která je kolmá k půdorysně, a její vrcholy mají souřadnice $A = [-10; 1,5; 2]$, $B = [-6; 12,5; 4]$, $C = [-9; y_c; 7]$. Souřadnice vrcholu U jsou $U = [3; 5; 3,5]$. Podstavu jehlanu $DEFV$ tvoří rovnostranný trojúhelník DEF ležící v půdorysně daný vrcholy $D = [-8; 1; 0]$, $E = [0; 2; 0]$ a podmínkou $y_F > y_E$; výška jehlanu DEF je 9.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 105^\circ$, $q = \frac{3}{5}$

Řešení (obrázky 3.6 a 3.7): Oproti příkladu 3.1 tentokrát leží v půdorysně podstava pouze jednoho z jehlanů. Při práci s vrcholovými rovinami (obsahujícími vždy stejně jako v příkladě 3.1 boční hranu jednoho a vrchol druhého jehlanu) si tak nevystačíme s jejich půdorysnými stopami, protože budou protínat pouze podstavu DEF . Z tohoto důvodu najdeme průsečnici každé z těchto rovin s rovinou ρ .⁹ Kromě svazku půdorysných stop se středem v půdorysném stopníku

⁹Tyto průsečnice můžeme vnímat také jako „stopy“ vrcholových rovin vzhledem k rovině ρ .

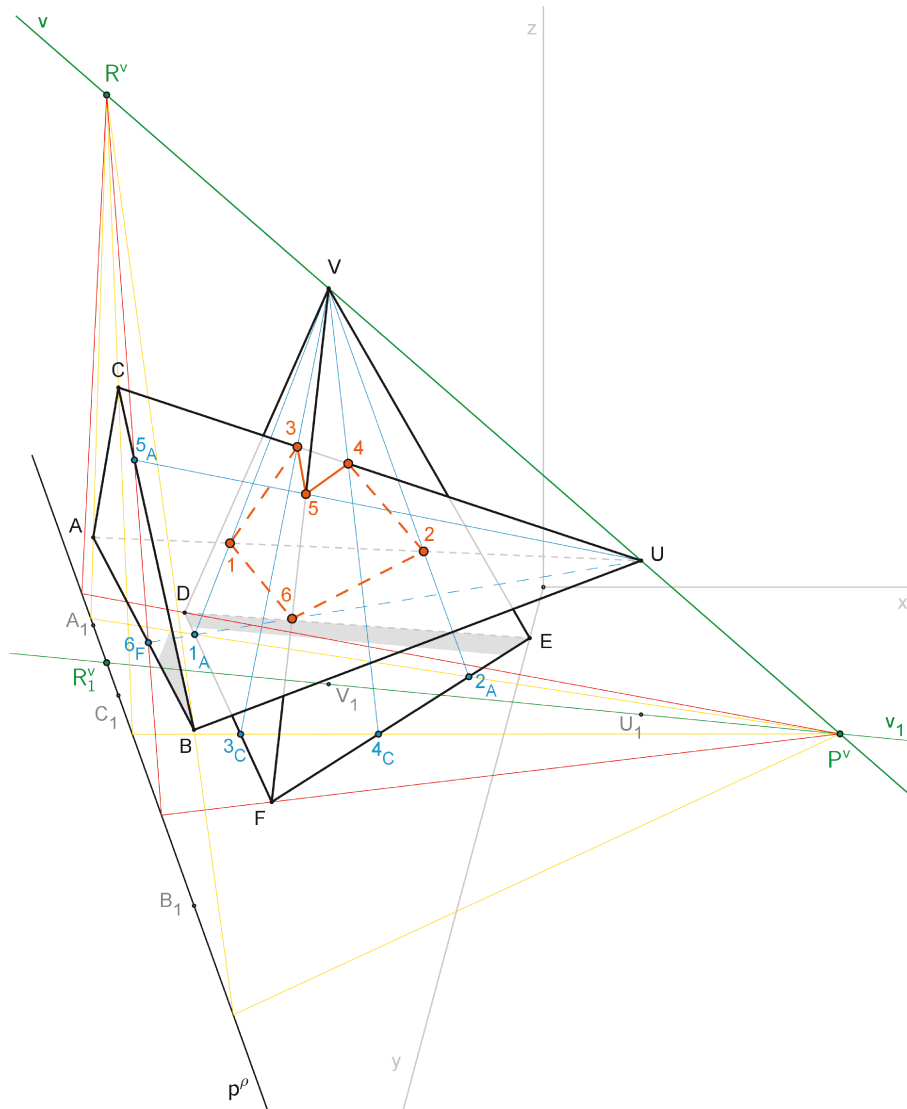


Obrázek 3.6

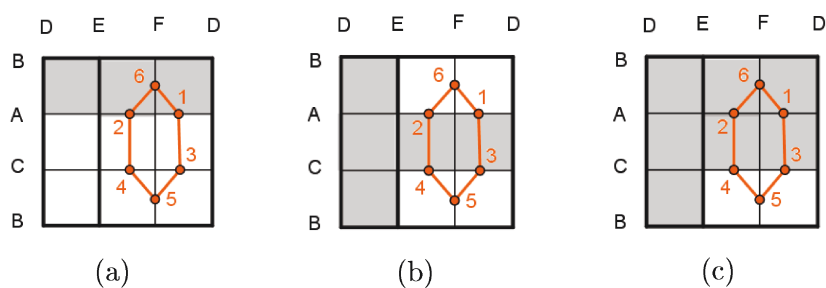
P^v vrcholové přímky v tak vytvoříme ještě druhý – svazek průsečnic vrcholových rovin s rovinou ϱ , jehož středem bude průsečík R^v vrcholové přímky v s touto rovinou.¹⁰

Liché části se nacházejí na obou tělesech, průnik proto bude i zde částečný. K jejich stanovení však nepotřebujeme znázornit všechny vrcholové roviny svazku: Protože už průsečnice vrcholové roviny DVU s rovinou ϱ neprotíná podstavu ABC , není potřeba se zabývat rovinou EVU . (Její průsečnice s rovinou ϱ by se od podstavy ABC nacházela ještě dál.) V liché části jehlanu $DEFV$ se tedy bude kromě boční hrany DV nacházet i hrana EV . V řešení v Mongeově promítání

¹⁰V obrázcích 3.6 a 3.7 i v příložených souborech s krokovanými řešeními značíme pro názornost červenou barvou stopy a průsečnice rovin procházejících bočními hranami jehlanu $DEFV$ a vrcholem U , zatímco stopy a průsečnice rovin obsahujících boční hrany jehlanu $ABCU$ a vrchol V rýsujeme žlutě.



Obrázek 3.7



Obrázek 3.8

navíc chybí i průsečnice a stopa vrcholové roviny BUV . Z půdorysu totiž víme, že se hrana BU průniku rozhodně účastnit nebude. Pokud příklad rýsujeme v jiném promítání, například v kosoúhlém (obrázek 3.7), musíme se o tom přesvědčit stejně jako v případě hrany AU či CU .

Průnik je tedy tvořen jednou uzavřenou lomenou čarou, jejíž vrcholy najdeme stejným způsobem jako v příkladech 3.1. Při jejich spojování a určování viditelnosti průnikové čáry si opět pomůžeme schémata. Obrázek 3.8a uvádí příklad takového

schématu pro půdorys, obrázek 3.8b pro nárýs a 3.8c pro kosoúhlý průmět.
Nakonec vyřešíme viditelnost jehlanů.

○



Obrázek 3.9

Poslední typ průniku dvou jehlanů, který si ukážeme, můžeme potkat například jako zastřešení věží. Jde o dva pravidelné jehlany, jejichž podstavy se překrývají, a navíc mají společný střed. Dávají tak vzniknout dokonalému průniku. Na obrázku 3.9 můžeme vidět příklad takové střechy nad sochou sv. Jana Nepomuckého na náměstí v rakouském Kaprunu tvořené osmibokým a pravidelným čtyřbokým jehlanem.

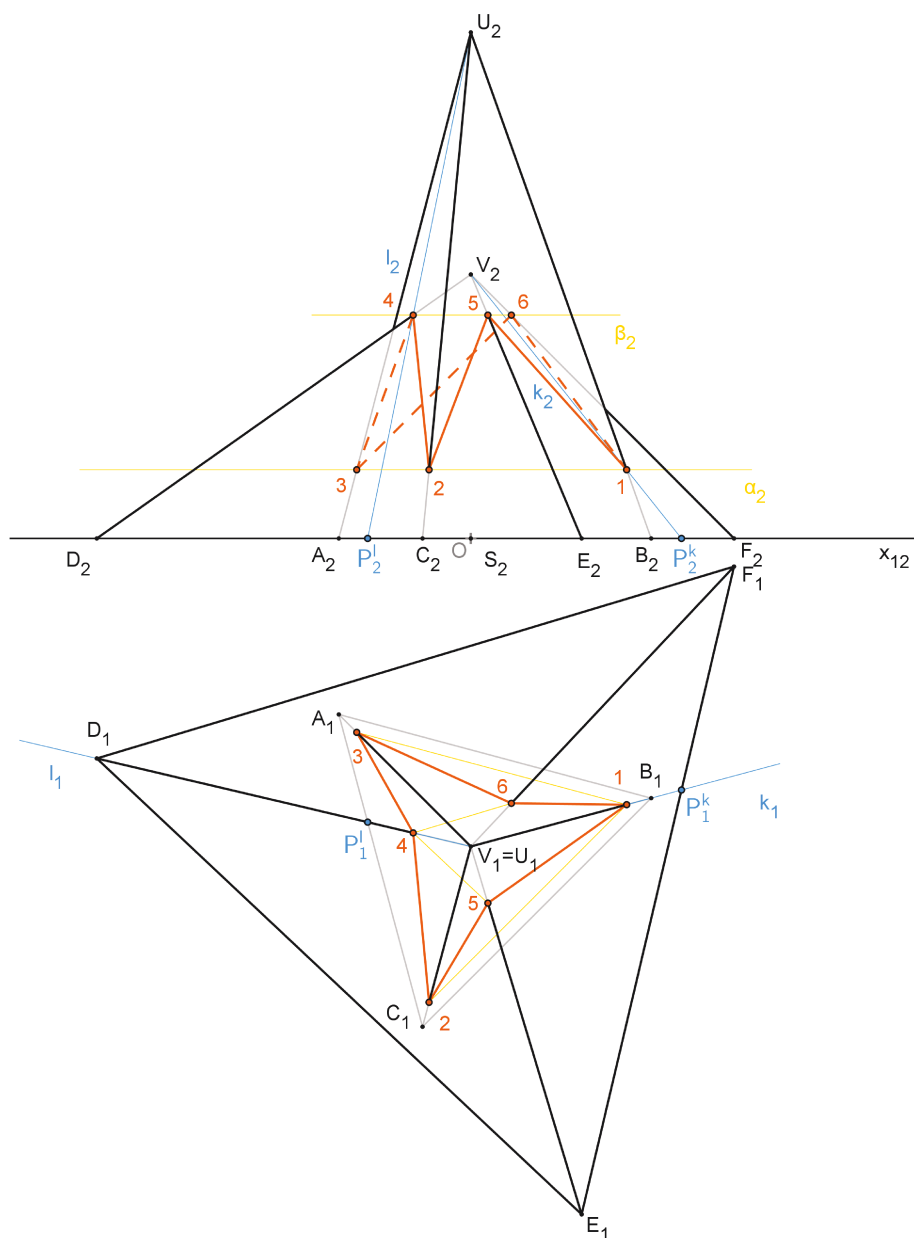
Příklad 3.3. Najděte průnik kolmých trojbokých jehlanů $ABCU$ a $DEFV$.

Podstavy obou jehlanů jsou rovnostranné trojúhelníky ležící v půdorysně. Dále je dáno: $A = [-3; 4; 2]$, $U = [0; 7; 11,5]$; $D = [-8,5; 5; 0]$, $V = [0; 7; 6]$

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 105^\circ$, $q = \frac{1}{3}$

Řešení (obrázky 3.10 a 3.11): I ve speciálních případech, jako je tento, můžeme uvažovat ve smyslu vrcholové přímky jako průsečnice všech vrcholových rovin, které použijeme k pomocným řezům. Tento příklad je ale natolik speciální, že je možné ho snadno vyřešit i intuitivně, bez pomoci těchto úvah.

Z postavení jehlanů vůči sobě je zřejmé, že se na průniku budou podílet všechny boční hrany obou dvou z nich. Nenajdeme zde tedy žádnou lichou část. V takovém případě platí, že se jedná o dokonalý průnik – výsledkem opět bude jediná uzavřená lomená čára.

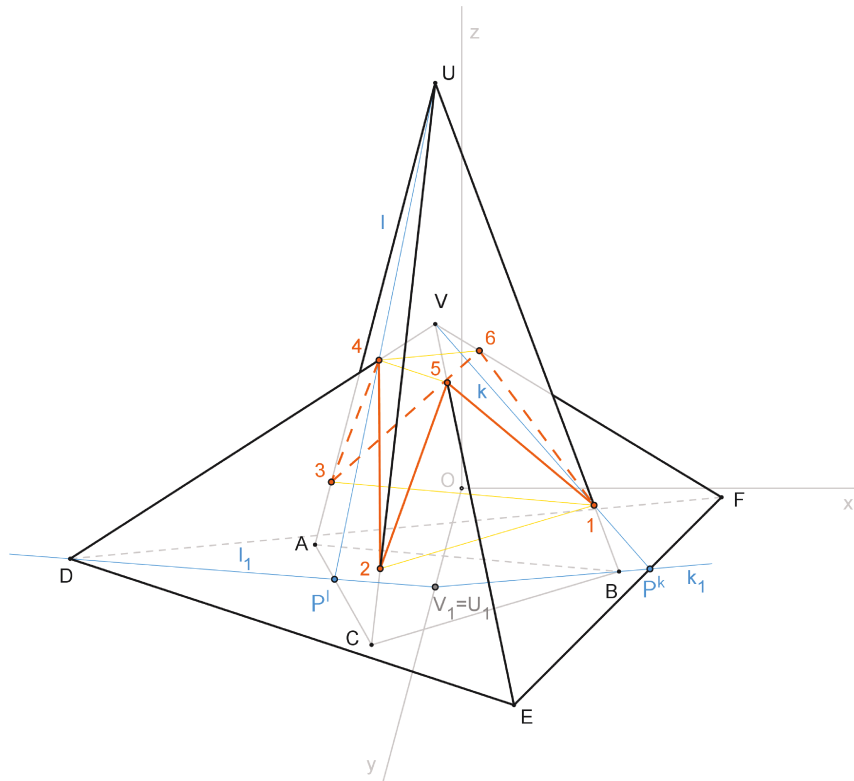


Obrázek 3.10

Stejně tak je snadné nahlédnout, že hrana BU protne jehlan $DEFV$ ve stěně EFV . Pro sestrojení jejich průsečíku 1 překryjeme v jednom z průmětů – zde je to v případě Mongeova i kosoúhlého promítání půdorys – hranu BU přímkou k ležící v rovině stěny EFV . Stejným způsobem můžeme najít i průsečík 2 hrany CU se stěnou DEV a průsečík 3 hrany AU a stěny FDV . Díky symetrii celé situace ale můžeme využít skutečnosti, že všechny tyto průsečíky leží ve stejné výšce. Stačí tedy sestrojit část řezu rovinou α , která je rovnoběžná s půdorysnou a prochází již známým bodem 1, a další dva průsečíky získat jako její průnik s hranami CU a AU .¹¹

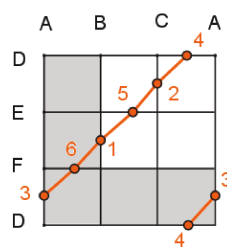
Zaměříme se dále na hranu DV , která protne jehlan $ABCU$ ve stěně ACU .

¹¹V případě bodu 2 se jeho hledání pomocí krycí přímky nedoporučuje, neboť vede ke vzniku průsečíků pod malými úhly, a z toho plynoucím nepřesnostem.



Obrázek 3.11

Jejich průsečík označíme 4. Abychom ho našli, použijeme krycí přímku l ležící v rovině stěny ACU , která hranu DV v jednom z průmětů (zde opět v půdoryse) překryje. Pomocí překrývání bychom mohli najít i průsečík číslo 5 hrany EV se stěnou BCU či společný bod 6 hrany FV a stěny ABU . I zde ale vezmeme raději v potaz, že leží stejně jako body 1–3 v rovině β rovnoběžné s půdorysnou, a dohledáme je pomocí části jejího průniku s jehlanem $ABCU$.



Obrázek 3.12

Další postup včetně vytvoření pomocných schémat a řešení viditelnosti jehlanů je stejný jako u předchozích příkladů. Na obrázku 3.12 opět uvádíme příklad sítě sloužící k určení viditelnosti průnikové čáry v jednotlivých průmětech, tentokrát však pouze pro nárys a zároveň kosoúhlý průmět (výsledek bude v obou případech stejný). Viditelnost jejího půdorysu jistě zvládneme stanovit „z hlavy“.

Na závěr si pro zajímavost uvedme, jak by vypadalo řešení, kdybychom postupovali stejně jako v příkladech 3.1 a 3.2. Vrcholovou přímkou v bychom našli jako spojnicí vrcholů, tedy kolmicí k půdorysně s půdorysným stopníkem P^v splývajícím se středem obou podstav (neboli společným půdorysem obou vrcholů). Stopy

vrcholových rovin by byly spojnice tohoto stopníku s podstavnými vrcholy obou jehlanů. V případě rovin UBV a VDU by pak splynuly s půdorysem krycích přímkou použitých v našem řešení. Úsečky tvořící odpovídající řezy na jehlanech zase se zbývajícími průměty těchto krycích úseček (nárysem či kosoúhlým průmětem). Jak vidno, rýsovali bychom stejné čáry, jen bychom je jinak chápali. ○

3.2 Průnik jehlanu a hranolu

Při vyšetřování průniku jehlanu s hranolem potřebujeme najít jednak průsečíky bočních hran hranolu s jehlanem a jednak průsečíky bočních hran jehlanu s hranolem. Použijeme při tom roviny, které jsou vzhledem k jehlanu vrcholové a vzhledem k hranolu směrové. Všechny tak procházejí vrcholem jehlanu a jsou rovnoběžné s bočními hranami hranolu (některé z nich těmito hranami dokonce procházejí). Přímka, kterou mají společnou, nese tedy oba tyto atributy, totiž že obsahuje vrchol jehlanu a směr bočních hran hranolu.¹² I v tomto případě ji budeme nazývat vrcholovou přímkou.

Příklad 3.4. Najděte průnik kosého hranolu $ABCA'B'C'$ a kosého jehlanu $DEFV$. Dolní podstava hranolu leží v půdorysně a její vrcholy mají souřadnice $A = [-8; 1; 0]$, $B = [-4; 7,5; 0]$, $C = [-1; 2,5; 0]$; jedním z vrcholů horní podstavy je $A' = [0,5; 9,5; 11]$. Podstava jehlanu leží také v půdorysně a souřadnice jejích vrcholů jsou $D = [2; 0; 0]$, $E = [-2; 5; 0]$ a $F = [6; 6; 0]$. Hlavním vrcholem jehlanu je bod $V = [-5; 13; 9]$.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 130^\circ$, $q = \frac{2}{3}$

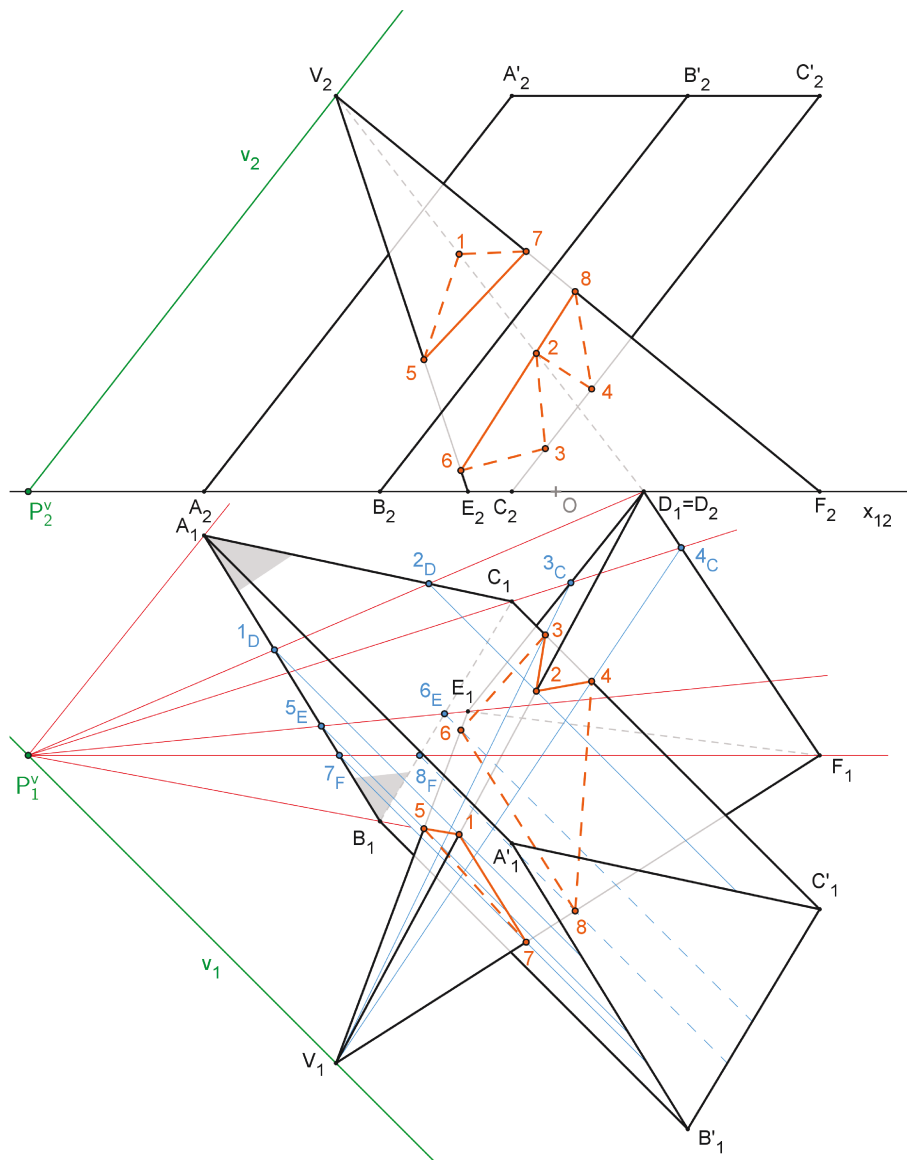
Řešení (obrázek 3.13): Vrcholovou přímkou sestrojíme jako rovnoběžku s bočními hranami hranolu $ABCA'B'C'$ vedoucí bodem V . Protože podstavy obou těles¹³ leží v půdorysně, stačí znát z pomocných rovin jejich půdorysné stopy. Každá z nich bude procházet půdorysným stopníkem P^v vrcholové přímky v a některým z podstavných vrcholů jehlanu či hranolu. Stopy, které protínají pouze jednu z podstav, zde vedou k vrcholům A a B . Liché části se tak vyskytují pouze na jednom z těles, což znamená, že průnik těles je úplný a křivka, která ho tvoří, se rozpadá na dvě samostatné lomené čáry.

Dál můžeme přistoupit k očíslování průsečíků zbylých stop s podstavnými hranami tělesa, jehož vrcholem neprocházejí. Opět nezáleží na tom, jakým způsobem číslování provedeme. Řezné úsečky, na nichž hledáme samotné vrcholy průnikové čáry, rýsujeme buď jako spojnice vyznačených bodů na podstavných hranách s vrcholem v případě jehlanu, nebo jako rovnoběžky těmito body s bočními hranami v případě hranolu.

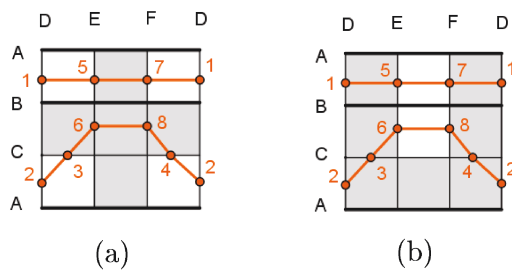
Schéma vytvořené za účelem spojení průnikových bodů v náležitém pořadí se správnou viditelností si můžeme prohlédnout na obrázcích 3.14a (půdorys) a 3.14b (nárys). Všimněme si, že se v něm průniková čára rozpadá na dvě části. Z obrázku 3.3 víme, že to samo o sobě nemusí znamenat její skutečný rozpad. Zde tomu tak ale je, protože tyto části od sebe oddělují hrany A a B označené jako hrany nacházející se v liché části.

¹²Pokud bychom uvažovali projektivní prostor, můžeme říci stejně jako u případu dvou jehlanů, že přímka prochází jak vlastním vrcholem jehlanu, tak nevlastním vrcholem hranolu.

¹³U hranolu máme samozřejmě na mysli jen dolní podstavu ABC .



Obrázek 3.13

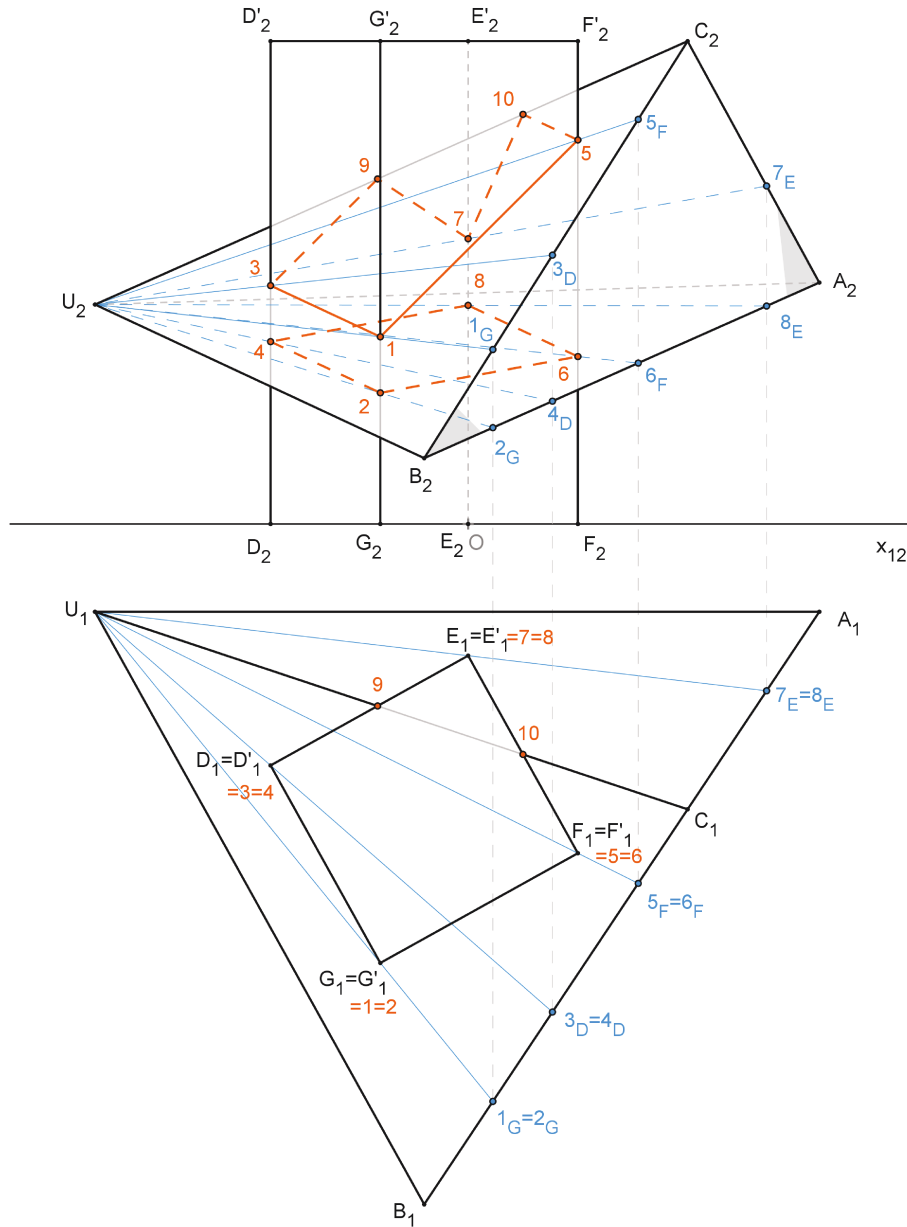


Obrázek 3.14

Nakonec vyřešíme viditelnost obou těles.

○

Příklad 3.5. Najděte průnik jehlanu $ABCU$ a kolmého hranolu $DEFGD'E'F'G'$. Podstava jehlanu leží v rovině ϱ , která je kolmá k půdorysně a její vrcholy mají souřadnice $A = [8; 2; 5,5]$, $B = [-1; 15,5; 1,5]$, $C = [5; y_C; 11]$. Dolní podstavou



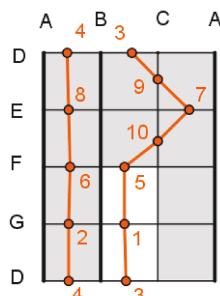
Obrázek 3.15

hranolu je čtverec $DEFG$ ležící rovněž v půdorysně daný souřadnicemi sousedních vrcholů $D = [-4,5; 5,5; 0]$ a $E = [0; 3; 0]$ a podmínkou $y_G > y_D$. Výška hranolu je 11.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 130^\circ$, $q = \frac{1}{2}$

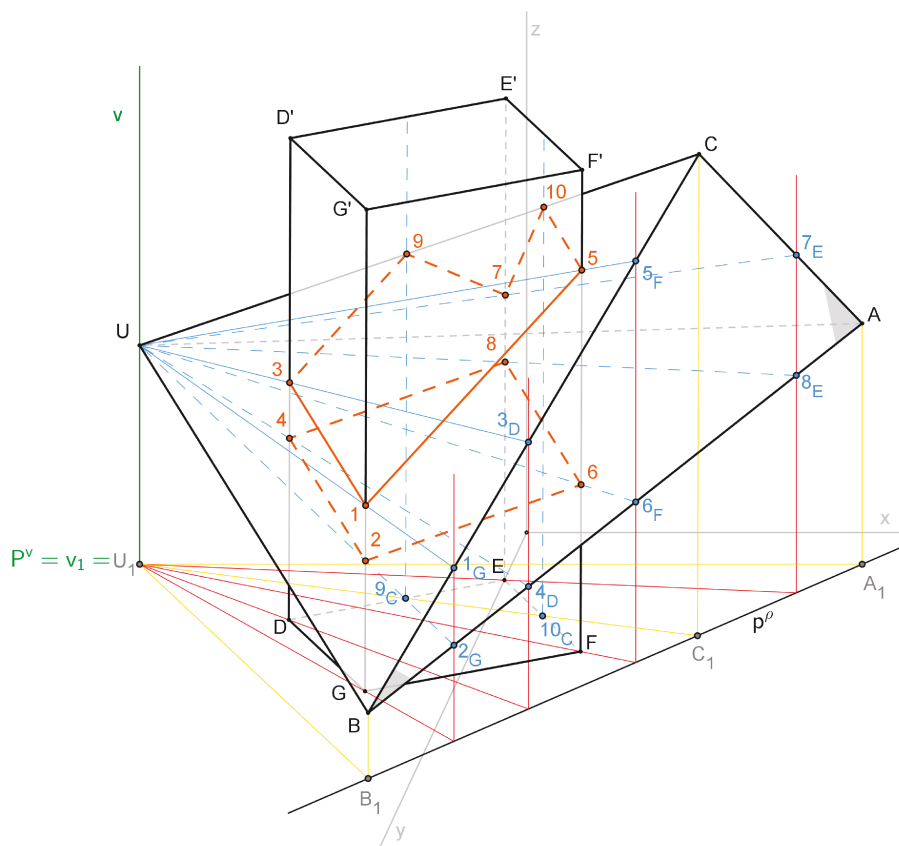
Řešení (obrázky 3.15 a 3.17): Podstava jehlanu a dolní podstava hranolu leží v různých rovinách. Kromě toho zaujímá hranol zvláštní postavení vůči půdorysně – jeho boční hrany jsou k ní kolmé. Při rýsování v Mongeově promítání se tím výrazně zjednoduší situace. Vzpomeneme-li si na příklad 2.3 a aplikujeme postup v něm popsany na všechny čtyři boční hrany hranolu, čímž získáme jejich průsečíky s bočními stěnami jehlanu, tedy body označené 1–8. Dál vyšetříme průnik bočních hran jehlanu s hranolem. Z půdorysu je patrné, že hrany AU a BU hranol vůbec neprotínají, a nacházejí se tak v lichých částech jehlanu. (Z toho, že

se tyto liché části nacházejí pouze na jednom z těles, můžeme usoudit, že průnik bude úplný, a průnikové čáry tedy dvě.) Zbývá boční hrana CU . Její průsečíky s hranolem opět přímo vidíme v půdoryse (viz příklad 2.6) jako průsečíky úsečky C_1U_1 s úsečkami D_1E_1 (bod 9) a E_1F_1 (bod 10). Stačí je pouze pomocí ordinál přenést do nárýsu na úsečku C_2U_2 .



Obrázek 3.16

Nyní, když budeme mít všechny vrcholy průnikových čar (víme již, že budou dvě), zbývá je pospojovat a určit viditelnost. V půdoryse nemusíme dělat nic: První průmět celého průniku totiž splývá s prvním průmětem bočních stěn hranolu, v nichž se průnikové čáry nacházejí. Navíc zde ani nemá smysl řešit jejich viditelnost. Nárys průniku už ale sestrojíme standardním způsobem, můžeme si opět pomoci schématem (obrázek 3.16).



Obrázek 3.17

Při rýsování v kosoúhlém promítání speciální poloha bočních hran hranolu

téměř žádnou výhodu nepředstavuje. Proto v něm příklad vyřešíme klasicky. Vrcholem U jehlanu povedeme vrcholovou přímkou v rovnoběžnou s bočními hranami hranolu. Půjde o kolmici k půdorysně, proto bude jejím prvním průmětem bod, který tak splyne jak s jejím půdorysným stopníkem P^v , tak s půdorysem vrcholu U . Z půdorysného stopníku pak povedeme svazek půdorysných stop pomocných rovin do vrcholů D, E, F a G dolní podstavu hranolu. Průsečíkem každé z nich s půdorysnou stopou p^ρ pak sestrojíme rovnoběžku s vrcholovou přímkou v , tedy průsečnicí příslušné pomocné roviny s rovinou ρ . U vrcholů A, B a C začneme naopak touto průsečnicí, jejíž průsečík se stopou p^ρ pak spojíme se stopníkem P^v . Celý proces tvoření těchto svazků průsečnic a stop je stejný jako v příkladu 3.2. Pouze absence průsečíku R^v přímky v s rovinou ρ je zde nahrazena rovnoběžností průsečnic s přímkou v .

Další postup už není ničím zvláštní. Stanovíme liché části, očíslováme průsečíky stop a průsečnic s podstavami, sestrojíme řezy pomocnými rovinami a vrcholy průnikové čáry. Pořadí, v jakém je máme správně spojit, jakož i viditelnost spojovacích úseček vyčteme ze schématu (v tomto případě je pro kosoúhlý průmět opět stejné jako pro nárys, tedy obrázek 3.16).

Nakonec stanovíme viditelnost obou těles.

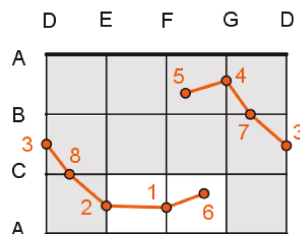
○

Příklad 3.6. Najděte průnik kolmého hranolu $ABCA'B'C'$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $DEFGV$.

Podstavou jehlanu je čtverec $DEFG$ ležící v půdorysně, z něhož známe souřadnice vrcholu $D = [-4; 1; 0]$. Vrcholem jehlanu je bod $V = [-2; 7; 10,5]$. Dolní podstava ACB hranolu leží také v půdorysně a její vrcholy mají souřadnice $A = [5; 9; 0]$, $B = [1; 4; 0]$, $C = [-6; 7; 0]$. Výška hranolu je 13.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 70^\circ$, $q = \frac{2}{5}$

Řešení (obrázky 3.19 a 3.20): Poloha bočních hran hranolu umožní i v tomto příkladě zvláštní uvažování při jeho řešení v Mongeově promítání. Způsobem známým z příkladu 2.6 najdeme průsečíky bočních hran jehlanu se stěnami hranolu, tedy body 1–4. Nově zde však potkáváme průsečíky podstavných hran obou těles, body označené čísly 5 a 6. Body průniku bočních hran hranolu s bočními stěnami jehlanu najdeme nakonec způsobem, jaký jsme se naučili při řešení příkladu 2.3. Patří jim čísla 7 a 8. Hrana AA' se průniku evidentně účastnit nebude, nachází se tedy v liché části hranolu.



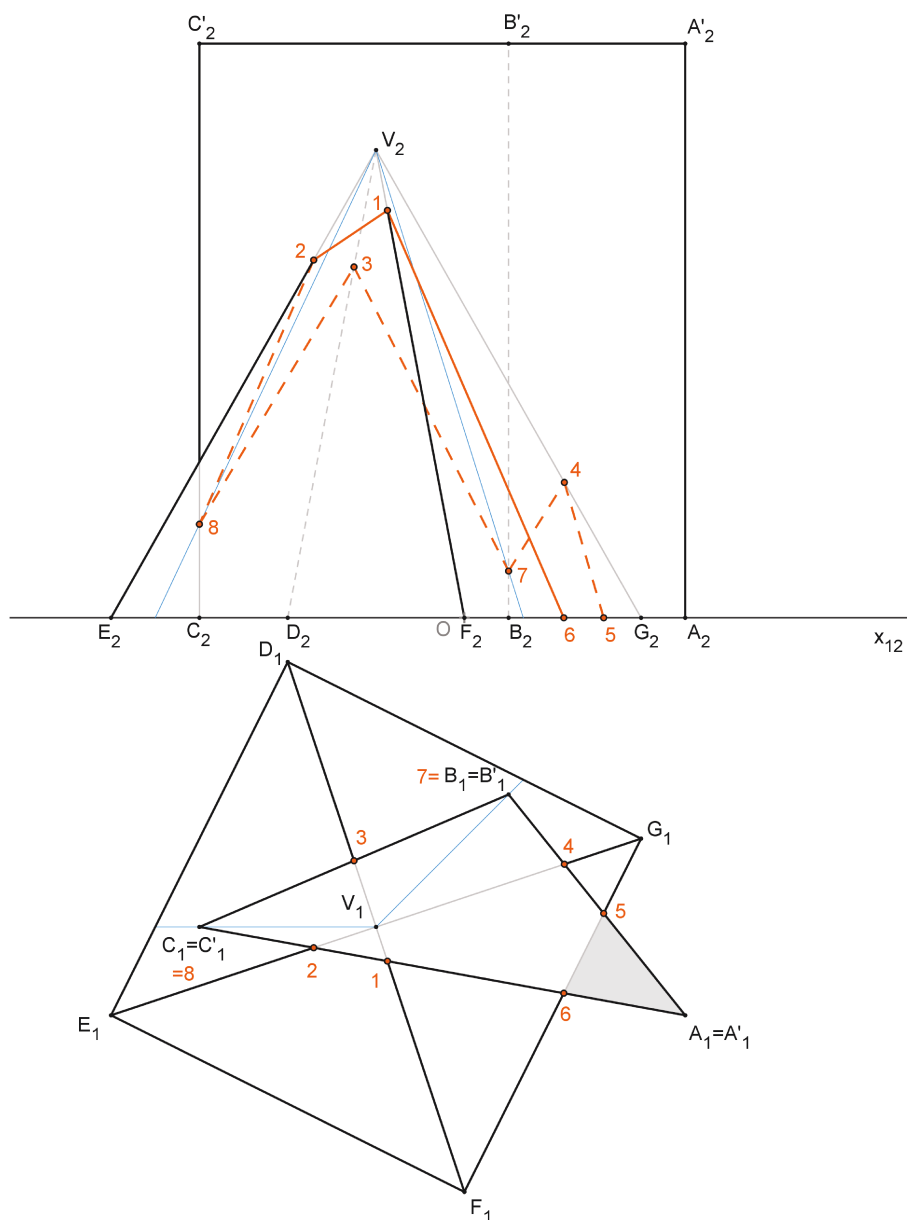
Obrázek 3.18

Zde se objevuje situace, jaká v dosavadních případech ještě nastala: Lichá část se vyskytuje na jednom tělese, a navíc je pouze jedna. Značí to, že půjde o nestandardní typ průniku, který nemůžeme označit ani jako částečný, ani jako

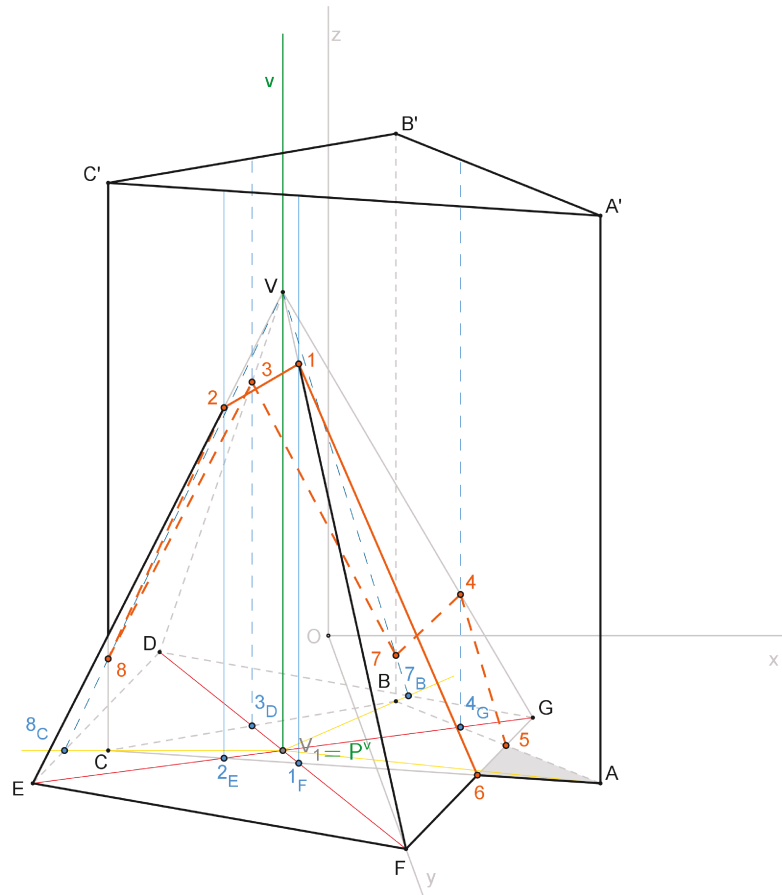
úplný, dokonce se v něm nebude vyskytovat žádný dvojný bod. Pokud si ale vytvoříme pomocné schéma a zaneseme do něj vrcholy průnikové čáry, uvidíme, že průnik tvoří jedna neuzavřená křivka. Problém s umístěním průsečíků 5 a 6 podstavných hran, které ve schématu znázorněné nejsou, můžeme obejít například způsobem předvedeným v obrázku 3.12.

Podle schématu 3.18 pospojujeme nárysy vrcholů průnikové čáry. Její půdorys s výjimkou úsečky 5-6 podobně jako v příkladě 3.5 nevybočí z půdorysů bočních stěn zadaného hranolu.

V kosoúhlém promítání příklad vyřešíme přes svazek pomocných rovin. Vrcholovou přímkou sestrojíme jako rovnoběžku s bočními hranami hranolu vrcholem V jehlanu. Jelikož půjde o kolmici k půdorysně, splyne její první průmět, a tím i půdorysný stopník v první průmět vrcholu V . Z něj pak povedeme svazek půdorysných stop rovin obsahujících jednotlivé boční hrany obou těles. Najdeme



Obrázek 3.19



Obrázek 3.20

jejich průsečíky s příslušnými podstavními hranami. Ty dál buď spojíme s vrcholem jehlanu, nebo jimi povedeme rovnoběžku s bočními hranami hranolu. Průsečíky těchto úseček s odpovídajícími bočními hranami druhého tělesa pak označíme jako vrcholy průnikové čáry. Díky tomu, že jsou v kosoúhlém průmětu vidět stejné stěny obou těles jako v naryse, můžeme k určení viditelnosti úseček, které je budou spojovat, použít schéma 3.18 vytvořené pro narys.

Nakonec vyřešíme viditelnost obou těles.

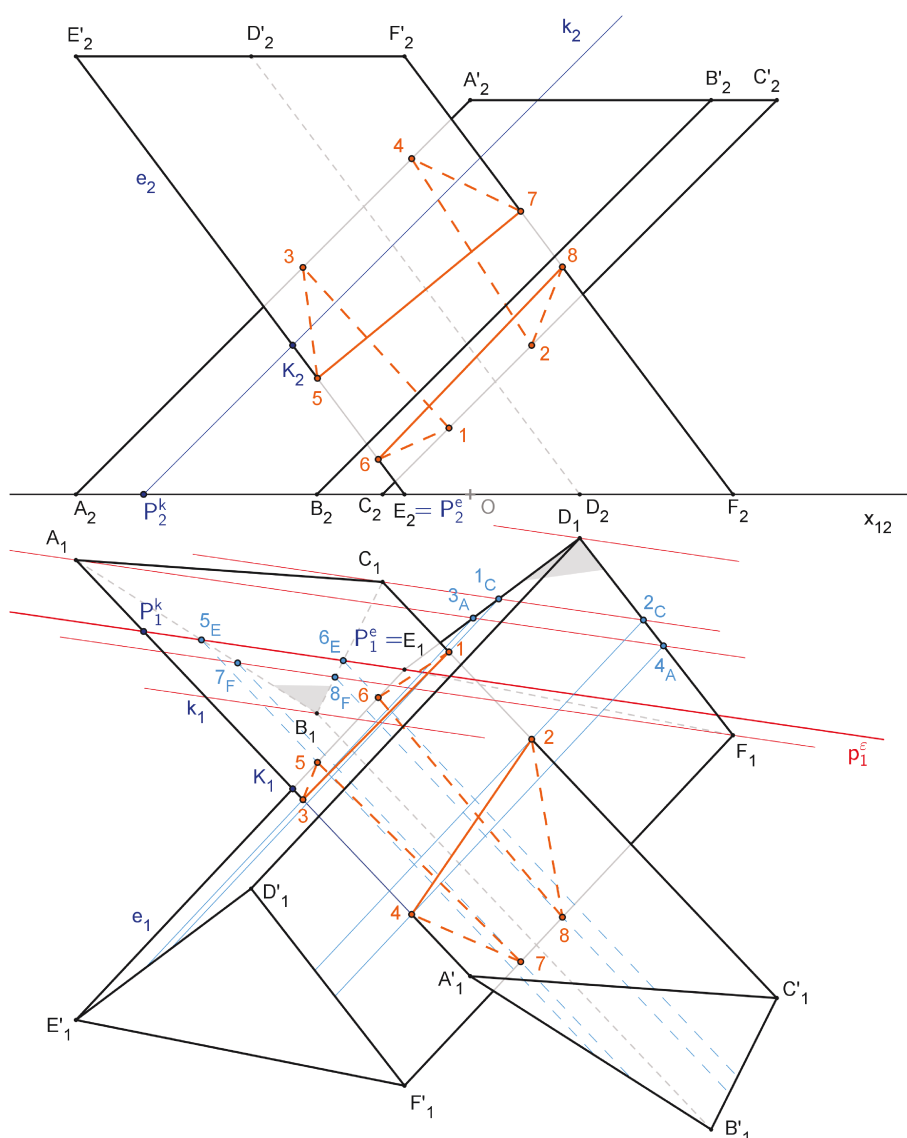
○

V posledních dvou příkladech jsme si ukázali dva možné přístupy k jejich řešení. Je zřejmé, že šlo pouze o jiná ideová pozadí pro ty samé úkony či jiné náhledy na rýsované objekty. Odráží to skutečnost, že se ne každý přístup, jakkoliv je v daném promítání proveditelný, se k němu také dobře hodí či mu je vlastní.

3.3 Průnik dvou hranolů

Už víme, že při hledání průniku přímky s hranolem skýtá jisté výhody, když dotýcnou přímkou proložíme směrovou rovinu. Chceme-li tedy vyšetřit postupně průnik bočních hran prvního hranolu s druhým a naopak, použijeme roviny, které budou směrové vzhledem k oběma hranolům, neboť každá z nich bude obsahovat hranu (a tím i její směr) jednoho a směr bočních hran druhého. Všechny tyto

roviny tak budou vzájemně rovnoběžné, proto zde nebude existovat nic jako vrcholová přímka v případě dvou jehlanů či jehlanu a hranolu.¹⁴ Rovnoběžné tak budou i průsečnice těchto rovin s rovinami podstav obou hranolů.



Obrázek 3.21

Příklad 3.7. Najděte průnik kosých hranolů $ABCA'B'C'$ a $DEFD'E'F'$.

Dolní podstavy obou hranolů leží v půdorysně a jejich vrcholy mají souřadnice $A = [-9; 1; 5; 0]$, $B = [-3; 5; 5; 0]$, $C = [-2; 2; 0]$; $D = [-3; 4; 0]$, $E = [1; 1; 0]$, $F = [3; 5; 5; 0]$. Souřadnice vrcholů horních podstav jsou $A' = [0; 11; 9]$ a $D' = [-5; 9; 10]$.

Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 60^\circ$, $q = \frac{2}{5}$

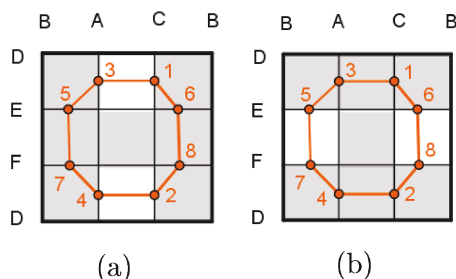
Řešení (obrázek 3.21): Po všech dosavadních příkladech bychom již měli zvládnout najít vrcholy průnikové křivky, pokud bychom měli sadu průsečnic pomocných rovin s rovinami podstav obou těles. Klíčovým krokem v řešení tohoto pří-

¹⁴I zde můžeme samozřejmě říci, že bereme-li prostor za projektivní, vrcholová přímka je nevlastní spojnicí nevlastních vrcholů obou hranolů.

kladu tak je naučit se tyto průsečnice hledat. Zde půjde pouze o půdorysné stopy, neboť dolní podstavy obou hranolů leží v půdorysně. Nemáme ale vrcholovou přímkou, takže chybí i její půdorysný stopník, kterým bychom jinak tyto stopy vedli. Víme však, že budou navzájem rovnoběžné. Potřebujeme proto najít jejich směr.

Můžeme si vzít na pomoc libovolnou rovinu danou dvěma různoběžnými přímkami s tím, že jedna z nich bude rovnoběžná s bočními hranami hranolu $ABCA'B'C'D'$ a druhá s bočními hranami hranolu $DEFD'FE'F'$. Sestrojení půdorysné stopy takové roviny je triviální. Je ale dobré už při volbě přímek určujících tuto původní rovinu uvažovat tak, aby její stopa byla jednou z těch, které budeme při hledání průnikových bodů přímo používat, to znamená aby procházela podstavným vrcholem některého ze zadaných těles. Za jednu z přímek tuto rovinu určujících si proto vybereme přímkou obsahující přímo některou z bočních hran jednoho z hranolů, v obrázku 3.21 to je hrana EE' (označená v obrázku jako e) s půdorysným stopníkem E (neboli P^e). Z důvodu další úspory místa je dobré volit druhou z přímek tak, aby v jednom z průmětů částečně překrývala některou z bočních hran druhého hranolu. V obrázku 3.21 jde o přímkou k , která se v půdoryse kryje s hranou AA' . Nárýs přímkou k je dohledán pomocí jejího průsečíku K s úsečkou e . Půdorysnou stopou roviny ϵ těmito přímkami určené pak je spojnice jejich půdorysných stopníků.

Máme tedy stopu roviny obsahující hranu EE' . Další potřebné stopy získáme jako rovnoběžky vedené zbývajícími vrcholy obou dolních podstav. Vidíme, že stopy vedené body B a D protínají pouze jednu z podstav. Hrany BB' a DD' se tak nacházejí v lichých částech. Každý z hranolů tedy obsahuje jednu lichou část, takže se opět setkáváme s částečným průnikem.



Obrázek 3.22

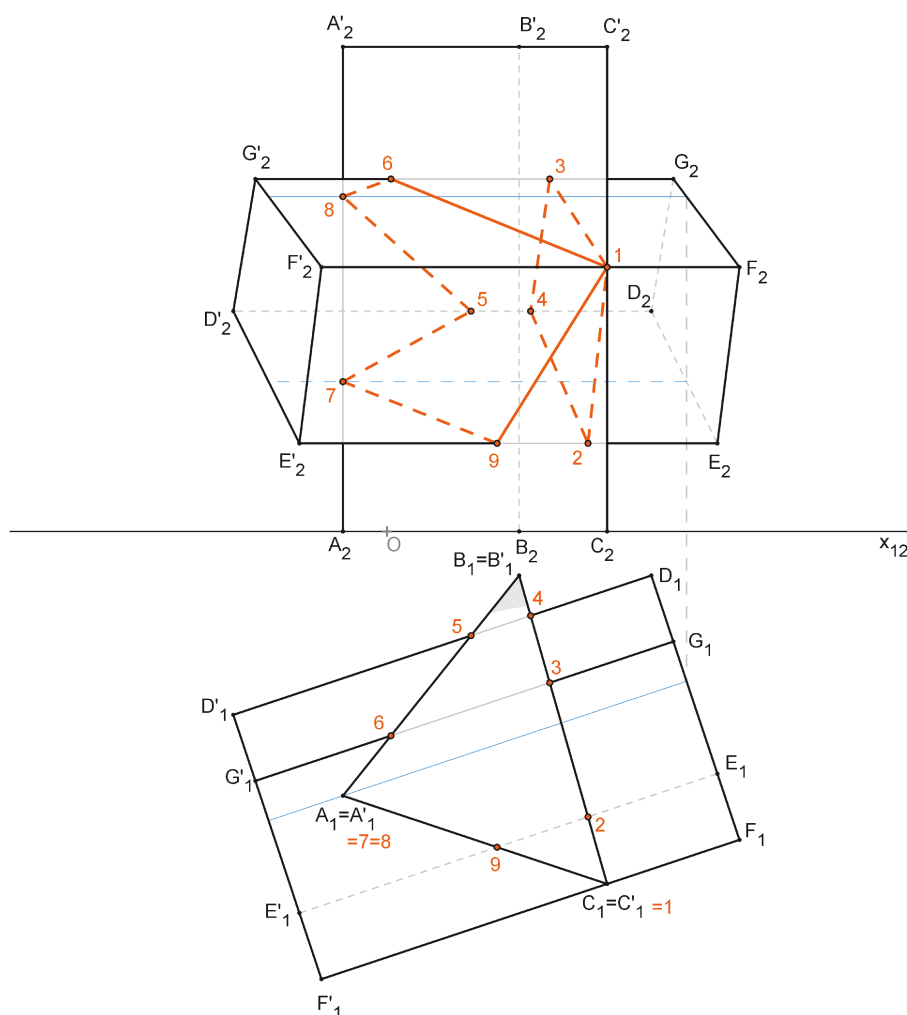
Další postup už není ničím nový. Příklad schématu pro spojování vrcholů průnikové čáry si můžeme prohlédnout na obrázcích 3.22a s viditelností pro půdorys a 3.22b s viditelností pro nárýs.

○

Na předchozím příkladu jsme si ukázali postup při hledání průniku dvou hranolů v jeho obecnosti. Mnohem častěji se ale v literatuře setkáváme s příklady speciálnějšího charakteru: Hranoly bývají kolmé a zaujímají zvláštní polohu vůči sobě navzájem nebo vůči průmětnám. Zjednodušení řešení si ukážeme na posledním příkladě, kterému se budeme v této kapitole věnovat.

Příklad 3.8. Najděte průnik kolmých hranolů $ABCA'B'C'$ a $DEFGD'E'F'G'$.

Dolní podstava ABC prvního hranolu leží v půdorysně a její vrcholy mají souřadnice $A = [-1; 6; 0]$, $B = [3; 1; 0]$, $C = [5; 8; 0]$. Výška tohoto hranolu je 11. Podstava $DEFG$ druhého z hranolů leží v rovině ρ , která je kolmá k půdorysně. Její vrcholy jsou dány souřadnicemi $D = [6; 1; 5]$, $E = [7; 5; y_E; 3]$, $F = [8; 7; 6]$ a $G = [6; 5; y_G; 8]$. Výška tohoto hranolu je 10. Navíc platí: $x_{D'} < x_D$. Vhodné parametry pro rýsování v kosoúhlém promítání: $\omega = 140^\circ$, $q = \frac{6}{7}$

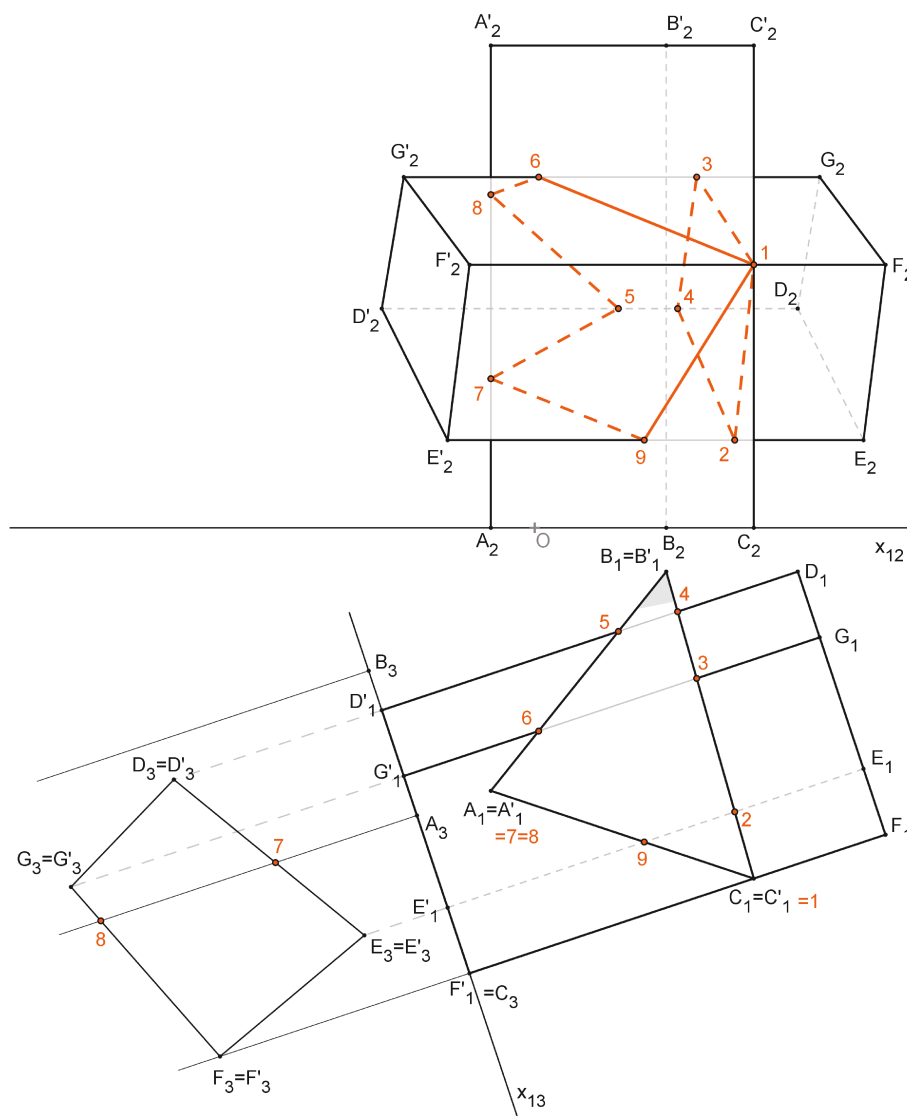


Obrázek 3.23

Řešení (obrázky 3.23, 3.24 a 3.26): Příklad vyřešíme nejprve v Mongeově promítání. Oba dva hranoly zaujímají natolik specifická postavení vůči průmětnám, že se hledáním půdorysů vrcholů průnikové křivky nemusíme zvlášť zabývat: Půdorysy bodů 2, 3, 4, 5, 6 a 9 jsme získali jako průsečíky půdorysů bočních hran DD' , GG' , EE' s půdorysy bočních stěn druhého hranolu. Dále rovnou máme i půdorysy dvou bodů, v nichž protíná čtyřboký hranol hrana AA' ; jsou označeny čísly 7 a 8. Vidíme také, že hrana BB' na průniku žádný podíl nemá, a nachází se tak v liché části tělesa. O druhé liché části můžeme říci, že buď chybí, nebo že se redukuje do jednoho bodu, konkrétně do bodu nesoucího číslo 1, který představuje průsečík hran FF' a CC' . Máme tak před sebou typ průniku, který jsme doposud nepotkali, a sice průniku s dvojným bodem.

Nárysy všech bodů kromě 7 a 8 dohledáme hravě pomocí ordinál na příslu-

šných hranách. Problém dourčení těchto zbývajících dvou bodů pak objasňuje řešení příkladu 2.9. Stejně jako tam si i zde ukážeme dvě varianty. První z nich je použití pomocné úsečky ležící na povrchu čtyřbokého hranolu, jak je předvedeno na obrázku 3.23.



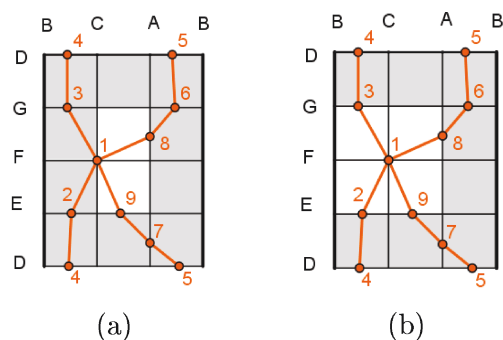
Obrázek 3.24

Ukážeme si ale ještě druhou možnost. Nejde sice o srovnatelně rychlý proces, zato však bude použitelný i v případě, že by byla rovina ρ kolmá vedle půdorysny také k nárysně (například obrázek v [14, str. 98]). Boční hrany hranolu $DEFGD'E'F'G'$ by pak byly rovnoběžné s osou x a úsečkami by byly kromě půdorysů obou podstav i jejich nárysy. Použití pomocných povrchových úseček rovnoběžných s bočními hranami by pak nepřipadalo v úvahu.¹⁵ Zavedeme tedy třetí průmětnu tak, aby třetí průmět hranolu $DEFGD'E'F'G'$ splýnul s třetími průměty jeho podstav, to znamená kolmo k jeho bočním hranám. Třetí průměty

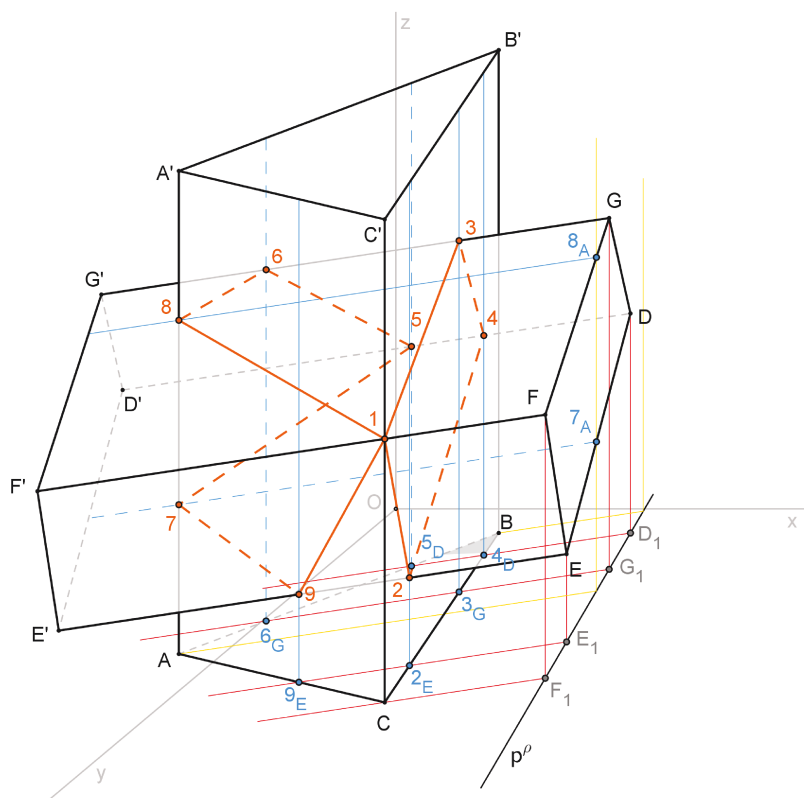
¹⁵I v takovém případě by samozřejmě bylo možné dohledat nárysy bodů 7 a 8 pomocí jakýchkoli jiných úseček ležících na povrchu hranolu. Postup, který předvedeme zde, je však použitelný i v případě, že by byl místo hranolu $DEFGD'E'F'G'$ zadán válec s osou rovnoběžnou se základnicí.

bodů 7 a 8 uvidíme jako průsečíky úsečky $A_3A'_3$ se čtyřúhelníkem, který je třetím průmětem hranolu $DEFGD'E'F'G'$. Odtud pak odečteme jejich z -ové souřadnice a přeneseme na hranu AA' do nárýsu.

Viditelnost průnikové čáry řešíme pouze v nárýse, neboť její půdorys splývá s částmi půdorysů bočních stěn hranolu $ABCA'B'C'$. Pomocné schéma pro nárýs pak vidíme na obrázku 3.25a.



Obrázek 3.25



Obrázek 3.26

Na obrázku 3.26 je předvedeno řešení obecným způsobem, který je vhodný pro použití v kosoúhlém promítání. Jen k určení směru půdorysných stop směrových rovin, jakož i jejich průsečnic s rovinou ρ není díky zvláštní poloze obou hranolů nutné zavádět žádné nové přímky a hledat jejich stopníky. Schéma použité při určování viditelnosti průnikových úseček vidíme na obrázku 3.25b.



Na závěr kapitoly věnující se průniku dvou hranatých těles uvedeme několik poznámek týkajících se převážně cizojazyčné literatury.

Poznámka 3.2. Při řešení vzorových příkladů v této kapitole jsme si ukázali (mimo jiné) souvislost výskytu lichých částí na jednotlivých zkoumaných tělesech, případně jejich existence vůbec, s typem průniku:

1. Nacházejí-li se části na obou tělesech, jde o částečný průnik.
2. Nacházejí-li se části pouze na jednom z těles, jde o úplný průnik.
3. Redukuje-li se (alespoň) jedna z lichých částí do bodu, jde o průnik s (alespoň) jedním dvojným bodem.
4. Pokud liché části neexistují, je průnik dokonalý.
5. Ostatní případy odkazují na zvláštní typy průniků.

Tyto souvislosti jsou také důvodem, proč jsou v této práci liché části vyznačovány i v příkladech řešených metodou, která jinak s lichými částmi nepracuje. Díky jejich zaznačení můžeme o typu průniku rozhodnout hned po sestrojení svazku stop (případně průsečnic) vrcholových či směrových rovin, což představuje možnost kontroly při rýsování průnikové křivky.

Poznámka 3.3. Každá z obou popsaných metod číslování má své klady i zápory. Rozhodnutí používat v této práci metodu známou z [2], vzniklo na základě několika faktorů:

1. Kromě [2] se v české literatuře nevyskytuje.
2. Dá se elegantně použít i v případech, kdy body průniku vidíme rovnou, nebo je dohledáváme alternativními způsoby a často ne v pořadí, v němž je budeme nakonec spojovat.
3. Průnikovou čáru rýsujeme rovnou s viditelností.
4. Je schůdnější pro řešitele s horší prostorovou představivostí. Zůstává ovšem otázkou, zda jde o klad, či zápor metody.

Poznámka 3.4. Při rozhodování o typu průniku jsme si zvykli využívat liché části těles. V [4, str. 217-218] je uveden jiný způsob klasifikace pomocí vzájemné polohy stopníku vrcholové přímky a podstavných n -úhelníků (zde nazvaných stopními mnohoúhelníky) ležících v jedné rovině. Zde je třeba podotknout, že autor neuvažuje průnik dvou těles, ale ploch, konkrétně jehlanových. Navíc prostor bere jako projektivní, proto do těchto úvah zahrne i hranolové plochy.

Poznámka 3.5. V [7, str. 182] se nabízí ještě jiná možnost. Ačkoliv autoři zavádějí a používají pojem lichá část, rozhodují o typu průniku na základě toho, zda okrajové stopy ve svazku pomocných rovin vedou k vrcholům jednoho tělesa, nebo dvou těles. Těmito krajními rovinám svazku pak říkájí „styčné“ roviny.

Poznámka 3.6. Postup, při kterém jsme používali pomocné roviny a jejich řezy zkoumanými tělesy, nese v německé literatuře vlastní název – „Pendelebenen-Verfahren“, což můžeme velmi volně přeložit jako „metoda pendlujících rovin“. Ve slově „pendel“ tak můžeme cítit dynamické chápání celého problému; v [12, str. 256] se dokonce přímo mluví pouze o jediné rovině, která „pendluje“ postupně skrz všechny boční hrany obou těles.

Poznámka 3.7. Další zajímavostí, která se objevuje v [12, str. 254] hned při seznámení s problémem, je uvedení dvou základních přístupů, z nichž je možné při jeho řešení vycházet: Jde buď o „Kantenprinzip“ – tedy „princip hran“, nebo „Ebeneprinzip“ – „princip rovin“. V prvně jmenovaném zkoumáme průnik každé hrany jednoho z těles s druhým a naopak; hledáme tak jejich průsečíky. Jde o přístup, který dál rozvíjí a jehož metodám se věnujeme i v této práci. Ve druhém pak jde o hledání průsečnic dvojic stěn pocházejících z různých těles.

Poznámka 3.8. Pozoruhodná je – a to nejen z hlediska této kapitoly – i americká publikace [16]. Průniku dvou hranatých těles se věnuje na stranách 536 a 537. Můžeme říct, že používá v podstatě nejpřímochařejší metodu spadající do „principu hran“ z poznámky 3.7. Průsečíky hran jednoho tělesa s povrchem druhého hledá s použitím pomocných řezů promítacími rovinami těchto hran.¹⁶ V podstatě jde o hledání průsečíku hrany jednoho tělesa s některou ze stěn druhého tělesa pomocí krycí přímků, přesněji řečeno úsečky. Zajímavé je také prohození půdorysu a nárysu v obrázcích, což je ale záležitost anglicky psané literatury obecně.

¹⁶Přesněji bychom řekli promítacími rovinami přímků, jichž jsou jednotlivé hrany součástí.

4. Dvě oblá tělesa

Problematika průniku oblých těles, respektive zakřivených ploch, se vyskytuje často i ve zdrojích, které vůbec nepojednávají o průnicích hranatých objektů. Je to dáno zřejmě její přímější provázaností s technickou praxí, ale i jejím výrazně širším záběrem. Přístupy používané při hledání průniku se totiž mohou výrazně lišit v závislosti jak na typech zkoumaných těles, tak na jejich vzájemné poloze i na promítání, v němž problém řešíme, či na poloze obou těles vůči průmětně (nebo průmětnám). V této práci se ale nebudeme zabývat plochami. Omezíme se na tělesa, a navíc pouze na tělesa rotační. K tomu budeme ve smyslu poznámky 1.1 za jejich průnik považovat křivku společnou jejich pláštům. Do našich úvah nebudeme zahrnovat ani speciální případy, v nichž by měla tělesa společnou pouze úsečku, bod či prázdnou množinu.

Je tedy zřejmé, že lze na problém nahlížet z mnoha stran. Základní princip, z něhož téměř všechny takové úvahy vycházejí, je však tento: Každý z bodů průnikové křivky lze nalézt jako průsečík dvou křivek. Každá z nich leží na povrchu jednoho ze zkoumaných těles a obě jsou zároveň jejich průniky s jedinou pomocnou plochou, například rovinou. Není-li ani jedním ze zkoumaných objektů kulová plocha, můžeme uplatnit například metodu hledání průniku přímky s oblym tělesem známou z druhé kapitoly a použít ji stejným způsobem, jako jsme to udělali v případě dvou hranatých těles v kapitole třetí. Zmiňovanými pomocnými plochami tak budou vrcholové či směrové roviny, zatímco v rolích řezů, jejichž průsečíky budeme hledat, se objeví úsečka na povrchu jednoho tělesa a uzavřená lomená čára na povrchu druhého. Takový přístup je vlastně úplně stejný jako v případě, kdy byla obě tělesa hranatá, takže pro nás nepředstavuje nic nového. Jeho výhodou je navíc univerzalita, jelikož ho lze použít jak nezávisle na promítání, v němž příklad rýsuje, tak na typu těles a jejich poloze vůči sobě navzájem i průmětně (či průmětnám).

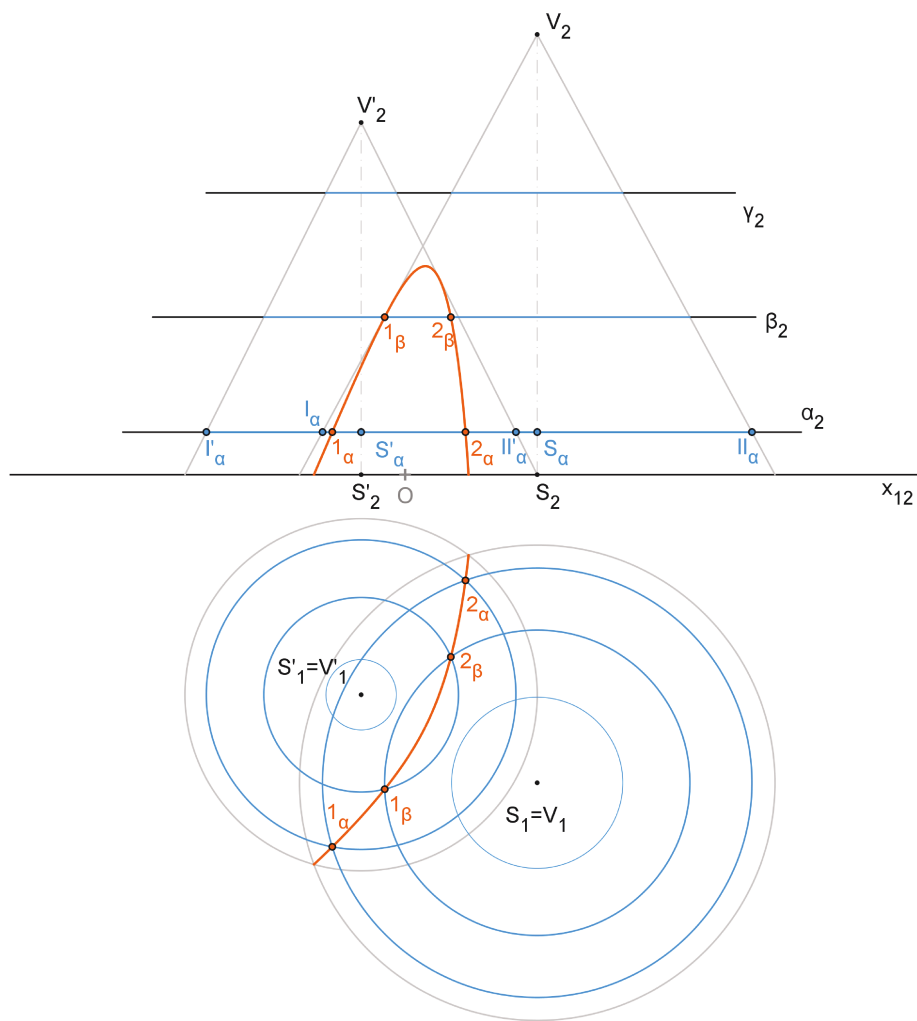
Tento postup už ale známe, proto si v této kapitole ukážeme pouze jiné dvě metody, které jsou vhodné pro řešení průniku rotačních těles s osami ve speciální poloze vůči průmětnám v Mongeově promítání. Ze širokého spektra příkladů, které se v literatuře vyskytují, tak vyjme a do této práce zahrneme jen opravdu malou, ale zato specifickou část. Zájemce o podrobnější proniknutí do problematiky by měla uspokojit literatura uvedená na konci práce a průběžně odkazovaná v této kapitole.

Příklad 4.1. Najděte průnik dvou rotačních kuželů.

Podstavy obou kuželů leží v půdorysně. První z nich má střed $S' = [-1; 5; 0]$ a poloměr 4; výška tohoto kuželu je 8. Středem druhé s poloměrem 5,5 je bod $S = [3; 7; 0]$; vrchol V tohoto kuželu má souřadnice $[3; 7; 10]$.

Řešení: Podstavy obou zadaných rotačních kuželů leží v půdorysně, takže jejich osy jsou vzájemně rovnoběžné úsečky¹ k ní. V takovém případě budeme za pomocné plochy volit roviny kolmé k oběma těmto osám, to znamená roviny rovnoběžné s půdorysnou. Na obrázku 4.1 to jsou roviny α , β a γ . Jejich výhoda

¹Obecně jsou osami rotačních ploch přímky. V rámci této práce, kdy mluvíme o rotačních tělesech, budeme z určitých důvodů místo celých přímek uvažovat většinou pouze úsečky, přesněji řečeno společné body tělesa a jeho osy. Na řešení, či dokonce typ průniku to žádný vliv nemá.



Obrázek 4.1

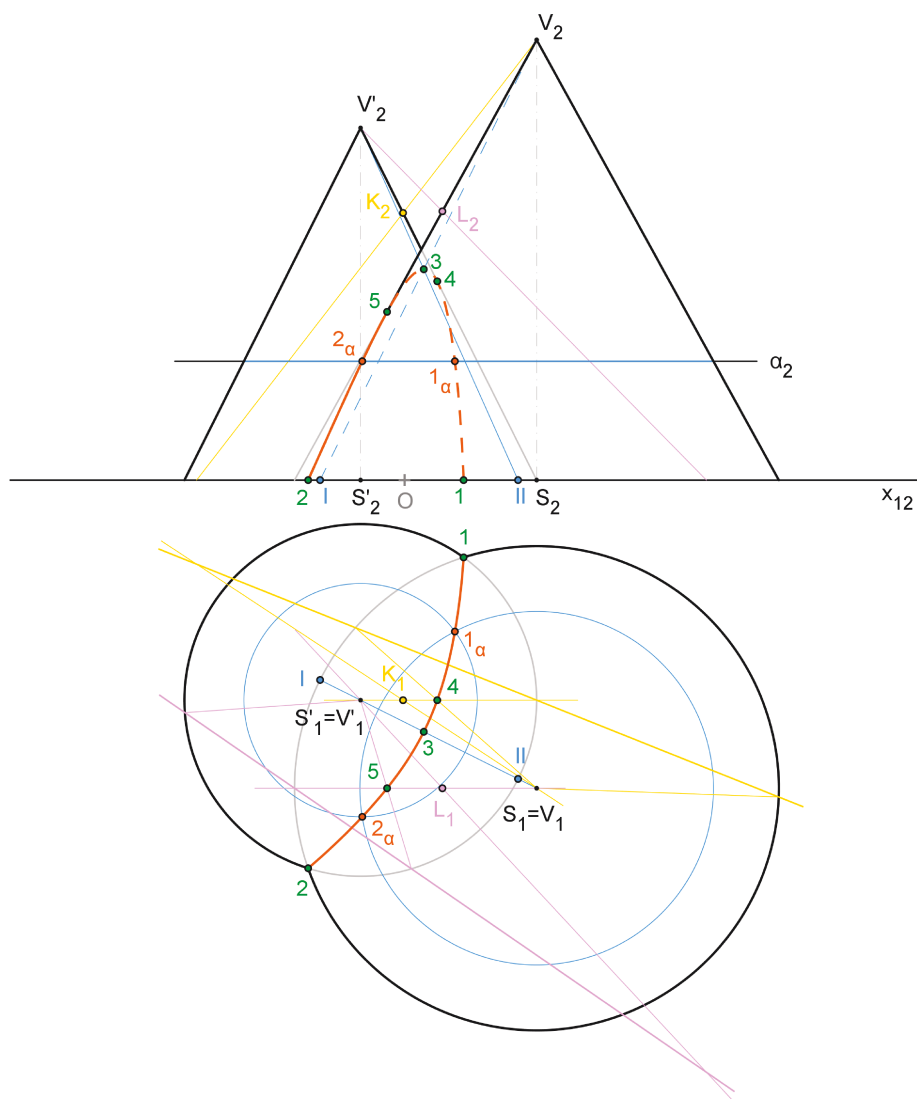
spočívá v tom, že řezy zkoumaných kuželů jsou kružnice, které navíc vidíme v náryse jako úsečky a v půdoryse jako kružnice ve skutečné velikosti.

Nárysy řezů zadaných kuželů rovinou α jsou tedy úsečky $I'_\alpha II'_\alpha$ a $I_\alpha II_\alpha$. V prostoru jde o kružnice se středy S'_α a S_α , které najdeme v náryse jako průsečíky α_2 s nárysy os obou kuželů. Jejich půdorysy, které z úsporných dovodů nejsou v obrázku zaznačené, pak splývají s půdorysy bodů S' a S . Poloměry obou řezných kružnic vidíme rovněž v náryse jako vzdálenosti středů S'_α a S_α od krajních bodů I'_α , II'_α či I_α , II_α . Body průniku 1_α a 2_α najdeme nejdříve v půdoryse jako průsečíky půdorysů řezných kružnic. Do nárysu je přeneseme na společnou část úseček $I'_\alpha II'_\alpha$ a $I_\alpha II_\alpha$.

Zopakujeme-li tento postup pro několik různých voleb vzdálenosti pomocné roviny od půdorysnů², obdržíme dostatečný počet bodů průniku, které propojíme. Získáme tak průnikovou křivku, prozatím bez zohlednění její viditelnosti v obou průmětech. Na případě roviny γ je ukázáno, že nemá smysl volit pomocnou rovinu příliš vysoko, konkrétně nad bodem, jenž je v náryse průsečíkem obrysových úseček obou kuželů. Taková rovina na kuželech vytíná kružnice, které nemají

²V obrázku 4.1 je takto pro ukázkou zvolená ještě o něco výš rovina β . Krokované řešení pak nabízí možnost měnit výšku roviny α pomocí posuvníku.

žádné společné body, takže nám při hledání průniku ničím nepomůže.



Obrázek 4.2

Dále se zaměříme na nalezení některých význačných bodů na průmětech průnikové křivky (obrázek 4.2). Například body 1 a 2 představují její krajní body, tedy průsečíky podstavných kružnic zadaných kuželů. Vznikají jako průnik řezů obou kuželů, volíme-li za rovinu α půdorysnu.

Dalším důležitým bodem je bod 3. Průniková křivka je v prostoru souměrná podle roviny určené osami zúčastněných kuželů. Je tomu tak proto, že jde o rovinu, podle níž jsou oba symetrické. V našem řešení se to projeví v půdoryse, kde se tato rovina zobrazí do spojnice průmětů středů podstav. Půdorys průnikové křivky je pak podle této přímky souměrný, a bod 3 je tak důležitý jakožto samodružný bod této souměrnosti. V prostoru jde navíc o bod s nejvyšší z -ovou souřadnicí, proto je i jeho nárys nejvyšším bodem nárysu řezu. K sestavení průmětů bodu 3 využijeme strany kuželů VI a $V'III$, které jsou částmi jejich řezů zmiňovanou rovinou souměrnosti. V půdoryse se tyto úsečky částečně překrývají. V náryse však jde o různoběžné úsečky, jejichž průsečíkem je nárys hledaného bodu 3. Do půdorysu ho přeneseme na splývající půdorysy úseček VI a $V'III$.

Posledními významnými body průnikové křivky jsou body, v nichž může dojít ke změně její viditelnosti, tedy průsečíky s obrysem jednoho či druhého kužele. Budeme se řídit analogií pravidla známého z minulé kapitoly: Určitý úsek průnikové křivky je v daném průmětu viditelný, jsou-li viditelné části obou kuželů, v nichž zkoumaný úsek průniku leží.

V půdoryse je situace jednoduchá: křivka je viditelná celá, neboť jsou zde viditelné celé pláště obou kuželů. Její krajní body 1 a 2 zároveň rozdělují kružnice, které jsou zde obrysy kuželů, na viditelné vnější a neviditelné vnitřní části. Pro určení viditelnosti nárysu křivky i obrysů kuželů dále potřebujeme dohledat body, v nichž křivka přes oba obrysy přechází, tedy body 4 a 5. Strana kuželu s vrcholem V' , která v náryse představuje „pravou část“ jeho obrysu, je v půdoryse rovnoběžná se základnicí. Bod 4 je pak její průsečík s druhým kuzelem. Stejně tak je se základnicí rovnoběžný půdorys strany druhého kuželu, která je v náryse jeho „levou částí“. Průsečíkem této úsečky s prvním z kuželů je bod 5. V obrázku 4.2 je pro jejich sestavení použit klasický postup při hledání průsečíků přímky a kužele známý z příkladu 2.2. V případě bodu 4 je konstrukce provedena žlutě, u bodu 5 pak růžově. Popisky použitých pomocných objektů jsou až na průměty bodů K a L^3 z úsporných důvodů vynechané, jde přeci jen o již známou konstrukci. V [2, str. 285–286] jsou tyto body určeny dokonce pouze přibližně jako průsečíky průnikové křivky se zmiňovanými stranami kuželů.

S ohledem na zásadu uvedenou v předminulém odstavci je snadné nahlédnout, že z nárysu průnikové křivky bude viditelný pouze její úsek 2-5, neboť leží v předních částech obou kuželů. Přechodem přes bod 5 se pak křivka dostane za obrys většího z nich, čímž přestane být vidět. Obrysové úsečky, které neprotínají nárys průnikové křivky, jsou viditelné celé. O tom, která ze zbývajících obrysových úseček bude viditelná až po svůj bod průniku, a která bude naopak částečně zakryta druhým kuzelem, rozhodneme podle toho, ve kterém z těchto bodů průnikové křivky se mění její viditelnost. V našem případě je to bod 5. Úsečka V_25 proto bude viditelná až k němu, zatímco úsečka V'_24 přestane být viditelná, jakmile protne obrys kužele s vrcholem V .

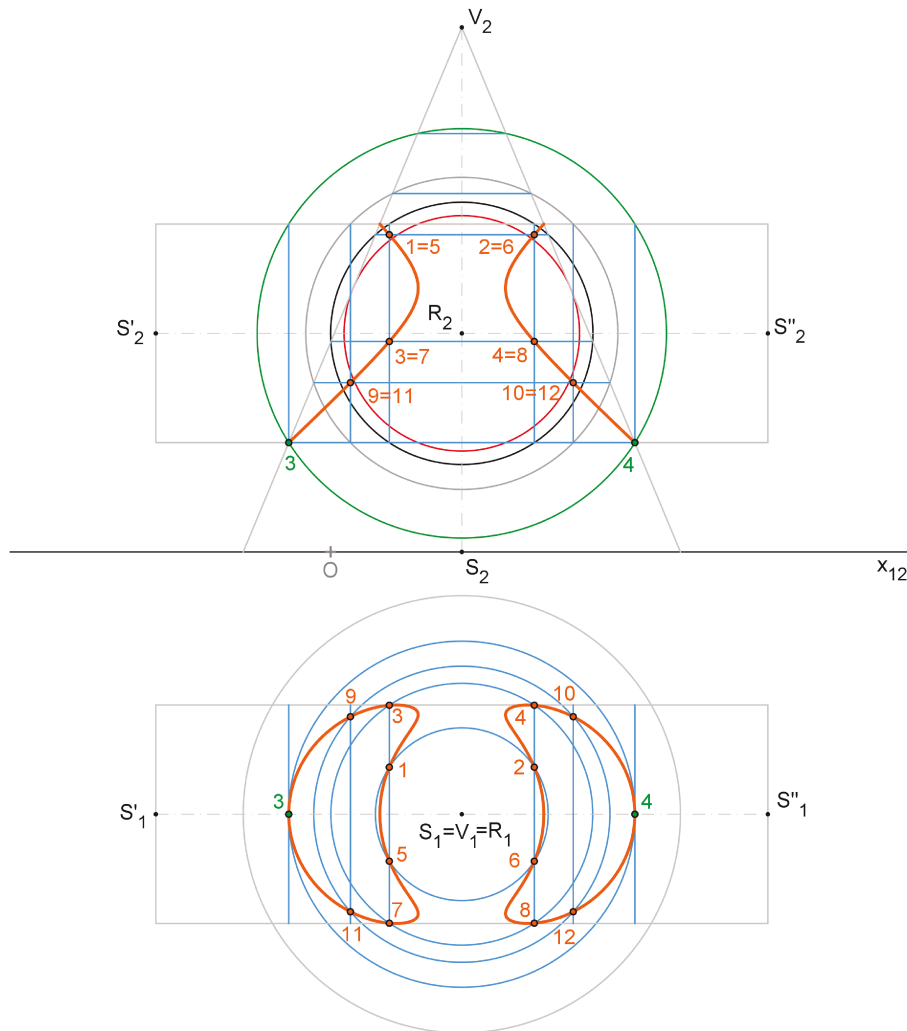
○

Popsanou metodu s použitím rovin v rolích pomocných ploch budeme používat při řešení takových příkladů, v nichž jsou osy zadaných těles vzájemně rovnoběžné, a navíc kolmé k jedné z průmětů. Můžeme mezi ně zahrnout i příklady, v nichž by jedním ze zkoumaných objektů byla kulová plocha. Stačí si uvědomit, že její osou je každá přímka procházející jejím středem, tedy i taková, která by byla rovnoběžná s osou druhého zkoumaného tělesa.

Poznámka 4.1. Při řešení příkladu 4.1 jsme nepoužívali směrové roviny, na základě jejichž stop (potažmo poloze lichých částí) jsme byli zvyklí rozhodovat, zda je průnik hranatých těles úplný, nebo částečný. V souladu s [2, str. 280] proto v případě oblých těles vůbec nebudeme zavádět pojem liché části a o typu průniku rozhodneme až dodatečně podle toho, zda bude mít průniková křivka jednu, nebo dvě části. V prvním případě půjde o průnik částečný, ve druhém úplný. Průnik dvou kuželů v příkladě 4.1 je tedy částečný.

³V souboru s krokovaným řešením je navíc možné jejich prvními průměty pohybovat.

Příklad 4.2. Najděte průnik rotačního kuželu a rotačního válce.
 Podstava kuželu se středem $S = [3; 6; 0]$ a poloměrem 5 leží v půdorysně. Výška kužele je 12. Podstavy válce o poloměru 2,5 leží v rovinách kolmých k půdorysně, středem jedné z nich je bod $S' = [-4; 6; 5]$. Osa kužele protíná osu válce v jejím středu.



Obrázek 4.3

Řešení: Stejně jako v příkladě 4.1 nejprve sestrojíme průnikovou křivku bodově pomocí zavedení dostatečného počtu pomocných ploch, abychom následně našli některé speciální body této křivky.

V tomto příkladě však nejsou osy zkoumaných těles rovnoběžné, ale různoběžné, dokonce kolmé. Volba rovin rovnoběžných s půdorysnou jako pomocných ploch pro získání řezů obou těles by se mohla i zde zdát vhodnou volbou: Zadaný kužel by takové roviny protínaly způsobem známým z příkladu 4.1, na válci by vytínaly dokonce obdélník (byly by vůči němu směrové). Každý takový řez válce by se v náryse jevil jako úsečka, jenže při dourčování jeho půdorysu bychom narazili na stejný problém popsany v řešení příkladu 3.8. Kdyby šlo o hranol, mohli bychom si pomoci jinou úsečkou, která by ležela na jeho povrchu. V případě válce však žádné jiné úsečky než ty rovnoběžné s jeho osou na plášti nenajdeme. Máme tak dvě možnosti: Tou první je zavedení třetí průmětny, která by byla kolmá

k ose válce. Jeho třetí průmět by se pak redukoval na kruh, s jehož hraniční kružnicí (anebo její částí) by splýnul i třetí průmět hledané křivky. Jde o metodu, která je velmi rozšířená jednak ve staré české (například [7, str. 366]) a jednak v zahraniční (například [12, str. 272]) literatuře, a to nejen pro tuto speciální polohu válce. My se jí zde věnovat nebudeme, protože jsme si její použití ukázali ve zmíněném příkladu 3.8.

Druhou možností je nepoužívat v roli pomocných ploch roviny, ale kulové plochy se středem v průsečíku R os obou těles. Každá taková kulová plocha (jejíž poloměr se nachází v určitých mezích) protne zadaný kužel ve dvou kružnicích ležících zároveň v rovinách rovnoběžných s půdorysnou. Válec s ní pak má společné také dvě kružnice, které leží v rovinách kolmých k základnici. Společné body těchto křivek budou společnými body obou těles. Při volbě jedné kulové plochy jich můžeme v závislosti na jejím poloměru obrdžet až 8. Konkrétně si to ukažme v obrázku 4.3. Nárysným obrysem zkoumané kulové plochy je černě nakreslená kružnice se středem v bodě R_2 a poloměrem zvoleným tak, aby ve vnitřních bodech protínala všechny strany lichoběžníku, v němž se překrývají nárysy obou těles. Nárysem průniku takové kulové plochy s kuzelem jsou dvě vodorovné spojnice průsečíků jejího obrysu s obrysem kužele. Stejně je tomu u válce; nárysy kružnic, které má společné s kulovou plochou, jsou tentokrát pouze svislé. Při současné volbě poloměru kulové plochy se tyto čtyři úsečky po dvou protnou ve čtyřech bodech. Protože je však celá situace souměrná podle společné roviny symetrie obou zadaných těles určené jejich osami a protože je tato rovina rovnoběžná s nárysnou, půjde ve skutečnosti o průměty osmi bodů průniku. Přesvědčit se o tom můžeme po dohledání půdorysů řezů. Zatímco kružnice na válci se i v půdoryse zobrazí do svislých úseček, půjde u řezů kužele o dvojici soustředných kružnic s poloměry získanými stejně jako v předchozím příkladě. Průsečíky půdorysů těchto řezů pak budou půdorysy průnikových bodů 1-8. V tomto pohledu navíc žádné dva nebudou splývat.

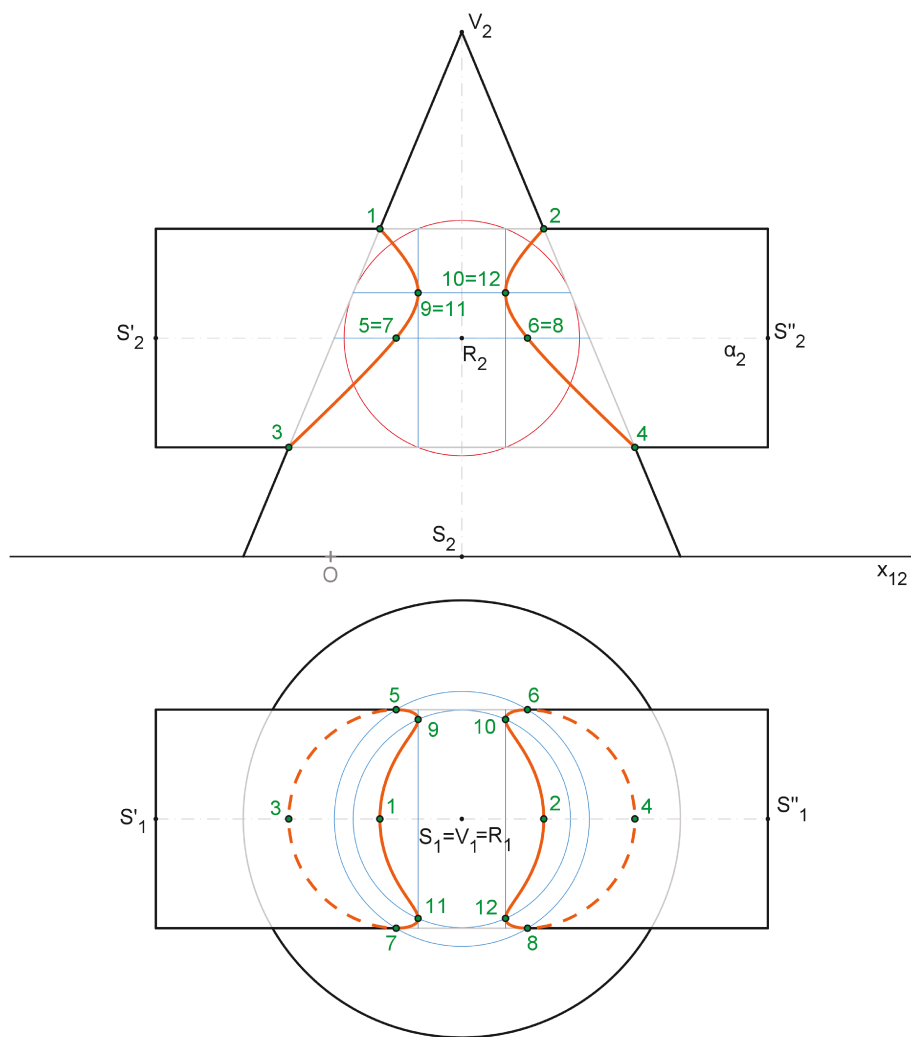
Při různých volbách poloměrů pomocných kulových ploch⁴ můžeme vypočítat, že nemá smysl uvažovat poloměr menší než takový, aby se příslušná kulová plocha zevnitř dotýkala pláště kužele (viz červená kružnice v náryse).⁵ O bodech průniku získaných touto volbou poloměru bude řeč později, proto v obrázku 4.3 tyto body chybí. Podobně nemá smysl volit poloměr kulové plochy natolik velký, aby její obrys v náryse vůbec neprotínal hranici lichoběžníka, v němž se překrývají nárysy zadaných těles. Největší kulovou plochou, kterou má smysl volit, je tak kulová plocha vyznačená v obrázku zeleně, která prochází vrcholy dolní podstavy zmiňovaného lichoběžníka.⁶ Je zřejmé, že kulové plochy s větším poloměrem by na zadaných tělesech vytínaly kružnice, které by žádné společné body neměly.

Použijeme-li dostatečné množství kulových ploch, získáme průměty dostatečného množství bodů průniku na to, abychom jejich propojením získali představu o tvaru průnikové křivky. Ta se rozpadá na dvě samostatné části, a průnik je tedy podle poznámky 4.1 úplný. Každému bodu nárysu průnikové křivky (s výjimkou čtyř bodů, z nichž dva jsou již známé body 3 a 4) navíc v půdoryse odpovídají dva různé body souměrně sdružené podle přímky S'_1S_1 .

⁴V krokovaném řešení k tomu opět slouží posuvník.

⁵Je na čtenáři, aby si promyslel, proč právě pláště kužele, a ne válce.

⁶Zelené body 3 a 4 jsou zde z jistých důvodů vyznačené, ačkoliv se jimi budeme zabývat i v obrázku 4.3, kde si však ukážeme jiný způsob jejich nalezení.



Obrázek 4.4

Pro lepší představu o tvaru křivky a kvůli stanovení viditelnosti její i těles dohledáme ještě několik jejích speciálních bodů (obrázek 4.4).⁷ Nejsnadněji se dostaneme k zeleně zaznačeným bodům 1-4, neboť jejich nárysy můžeme vidět v podstatě hned: jsou jimi průsečíky obrysů obou těles. Strany, jejichž průměty tyto obrysy tvoří, nejsou různoběžné jen v náryse, ale i v prostoru, protože leží ve společné rovině symetrie obou těles. Ověříme to například přezkoumáním jejich půdorysů. Těmi jsou úsečky ležící na přímce S'_1S_1 , na níž proto také najdeme půdorysy bodů 1-4. Jde o jediné body průnikové křivky, které se o svůj nárys nedělí s žádným jiným jejím bodem.

Při hledání bodů 9-12 jsme použili standardní postup využívající pomocnou kulovou plochu. Význačné jsou však tím, že šlo právě o nejmenší z kulových ploch, které má smysl použít. Jejich průměty jsou proto nejblíže průmětům osy kužele, a tvoří tak jakési „vrcholy“ průmětů křivky. V případě bodů 5-8, které nám pomohou při rozhodování o viditelnosti v půdoryse, jsme postupovali způsobem, který jsme na začátku řešení zavrhlí jako nevyhovující. V tomto jediném případě je jeho použití možné, a dokonce vhodné pro úspornost. Rovina α je totiž zvolená

⁷Je-li řešitel zběhlý, vyplatí se význačnými body začít a s využitím pomocných ploch pak dourčit body průniku podle potřeby.

tak, že obsahuje osu válce. Proto půdorys jeho řezu takovou rovinou (na jehož hledání jsme dříve ztroskotali) splyne s jeho půdorysným obrysem. Stačí tak známým způsobem dohledat nárys a následně půdorys řezu kužele a jeho průsečíky s obrysem válce, tedy půdorysy bodů 5-8. Jejich nárysy pak najdeme na úsečce, jež je nárysem odpovídajícího řezu kužele.⁸

Při stanovování viditelnosti průnikových křivek uvažujeme stále stejně. Vše, co v náryse z celé křivky vidíme, zde bude viditelné, neboť jde o její část, která se nachází ve předních částech plášťů obou těles. V půdoryse naproti tomu uvidíme pouze oblouky 7-11-1-9-5 a 8-12-2-10-6.

Nakonec vyřešíme viditelnosti obou těles.

○

Na příkladě 4.2 jsme si ukázali situaci, v níž je vhodné za pomocné plochy volit plochy kulové. Obecně je tomu tak v případech, kdy mají zadaná tělesa různoběžné osy. Pěknou klasifikaci volby pomocných ploch v závislosti na vzájemné poloze os zkoumaných objektů nabízí [5] na stranách 120 až 124.

Závěrem kapitoly uvedme dvě poznámky:

Poznámka 4.2. V některých učebnicích (například v [2, str. 281 a 285]) nesou metody používané v této kapitole speciální názvy: „metoda rovnoběžných řezů“ a „metoda soustředných kulových ploch“.

Poznámka 4.3. V přiložených souborech obsahujících krokované řešení vzorových příkladů z této kapitoly je možné pomocí posuvníků měnit poloměry zadaných těles. V závislosti na nich tak uživatel může zkoumat proměny průnikové křivky.

⁸Opět se doporučuje čtenáři, aby si rozmyslel, jak by se tyto body našly pomocí kulové plochy.

5. Hranaté a oblé těleso

V rámci zkoumané literatury nebývá pravidlem věnovat průniku hranatého tělesa s oblým zvláštní pozornost. Většinou se s touto problematikou nesetkáme buď vůbec, nebo je jí věnováno několik příkladů v rámci tématu průniku dvou oblých ploch. Výjimku tvoří pouze [1], [9], [10] a [11], kde na toto téma najdeme samostatnou kapitolu a kromě [9] i četné příklady. Tak málo prostoru věnovaného v literatuře průniku hranatého tělesa s oblým však má své opodstatnění. K jeho nalezení totiž nepotřebujeme nic, s čím bychom se už nebyli setkali. Existují dvě možnosti, jak na problém nahlížet:

1. Postupujeme stejně jako u průniku dvou oblých těles, tj. volíme soustavu pomocných rovin, hledáme jejich řezy se zadanými tělesy a průsečíky těchto řezů, které pak tvoří průnikovou křivku obou těles. Soustavu rovin volíme podle polohy tělesa vůči průmětnám tak, aby byly průměty řezů co nejjednodušší.
2. Využijeme faktu, že stěny hranatého tělesa jsou částmi rovin, a znalosti metod hledání řezů oblého tělesa rovinou. Řezem oblého tělesa částí roviny je (ve smyslu poznámky 1.1) vždy některá z kuželoseček, případně její část, někdy také doplněná úsečkou (protíná-li rovina i podstavu tělesa). Kuželosečkami nebo jejich částmi jsou také průměty takového řezu. Průnikovou křivku hranatého tělesa s oblým tedy můžeme sestavit jako části kuželoseček pomocí jejich vlastností a význačných bodů.

Nejčastěji bývá výhodné oba zmíněné postupy kombinovat. V této kapitole si použití obou z nich ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 5.1. Najděte průnik kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ a rotačního válce.

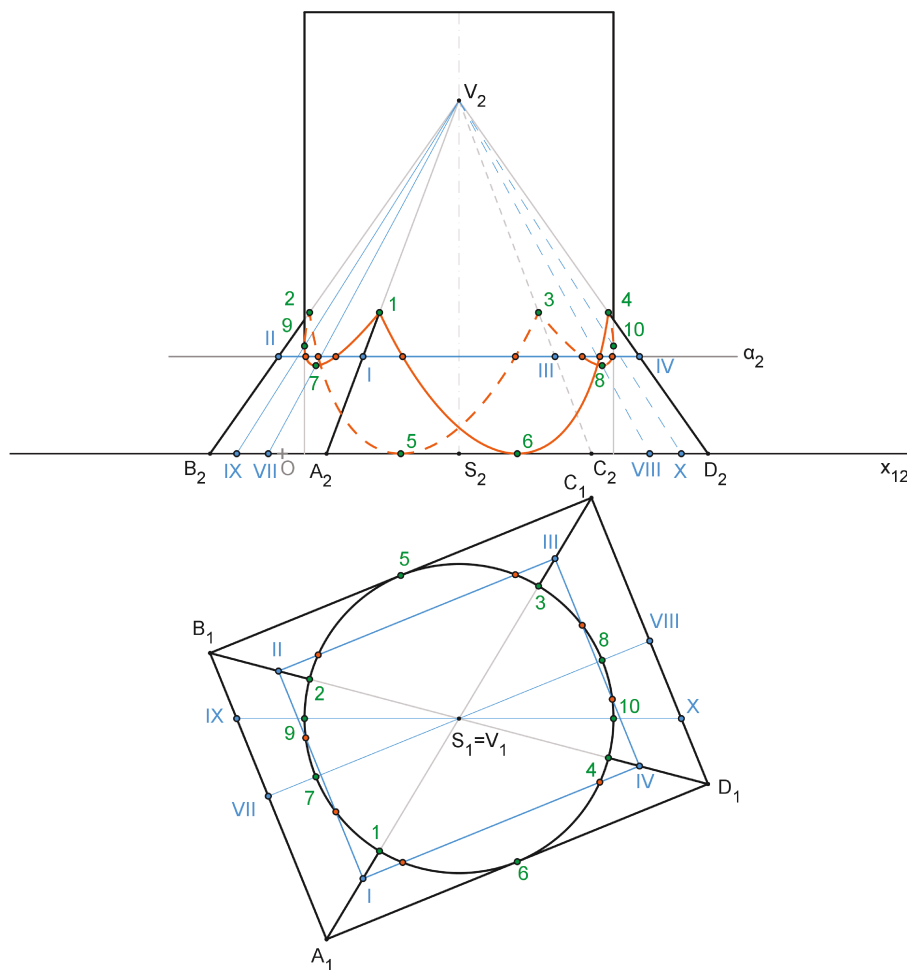
Poloměr válce je 3,5 a jedna z jeho podstav, která leží v půdorysně, má střed $S = [4; 6; 0]$. Výška válce je 10. Podstava jehlanu leží také v půdorysně. Tvoří ji obdélník $ABCD$ daný úhlopříčkou AC , v níž $A = [1; 11; 0]$, $C = [7; 1; 0]$, a podmínkou, že jeho strany BC a DA se dotýkají podstavné kružnice válce. Výška jehlanu je 8.

Řešení: Osa válce je kolmá k půdorysně. Proto se celý plášť promítne do půdorysu jako kružnice. Vzhledem k tomu, že průniková křivka bude v tomto plášti ležet¹, překryje v půdorysu právě tuto kružnici, nebo alespoň její část. Zbývá však dohledat její nárys.

Nejdříve to uděláme bodově, tedy způsobem popsáním v případě 1. Vhodnými pomocnými rovinami budou roviny rovnoběžné s půdorysnou.² V obrázku 5.1 je zastupuje rovina α . Nárysy řezů obou těles takovou rovinou jsou překrývající se

¹Uvažujeme opět pouze průnik plášťů, proto pomíjíme kruh, který je společný podstavám obou těles.

²Z hlediska typu řezů by se mohly jevit jako přijatelné i roviny směrové vzhledem k válci. V tomto případě se však jejich použití až na speciální případy nedoporučuje, neboť by vedlo zpravidla k průsečíkům pod malými úhly.



Obrázek 5.1

úsečky ležící na přímce α_2 . Půdorys řezu jehlanu jsme dohledali pomocí bodů $I-IV$, zatímco kružnice, jež je průnikem válce s rovinou α , v půdorysu splývá s jeho obrysem. Oranžové průsečíky řezů (v závislosti na volbě vzdálenosti roviny α od půdorysny jich můžeme obdržet až osm³) najdeme nejdříve v půdoryse, jejich nárysy pak leží na společné části narysů řezů obou těles.

Sestrojíme-li takto dostatečný počet bodů, můžeme získat hrubou představu o tom, jak bude nárys průnikové křivky vypadat. Abychom tuto představu zpřesnili, najdeme ještě průměty několika jejích významných bodů. Zelené body 1-4, v nichž na sebe jednotlivé oblouky křivky navazují, získáme jako průsečíky bočních hran jehlanu s válcem. Dále body 5 a 6, tedy body společné hranicím obou podstav a také nejnižší body dvou větších oblouků křivky ve skutečnosti i v náryse. Vznikají obsazením půdorysny do role roviny α .⁴ Nejnižší body 7 a 8 zbývajících menších oblouků i jejich nárysů získáme jako průsečíky řezů obou těles rovinou obsahující osu válce a rovnoběžnou se stranami BC a DA . Řez válce je v obrázku z úsporných důvodů vynechán; jeho úsečky, které by nás zajímaly, navíc také můžeme chápat jako části ordinál bodů 7 a 8. Úplně stejným způsobem najdeme body 9 a 10, v nichž nárys průnikové křivky protíná obrys válce, a které

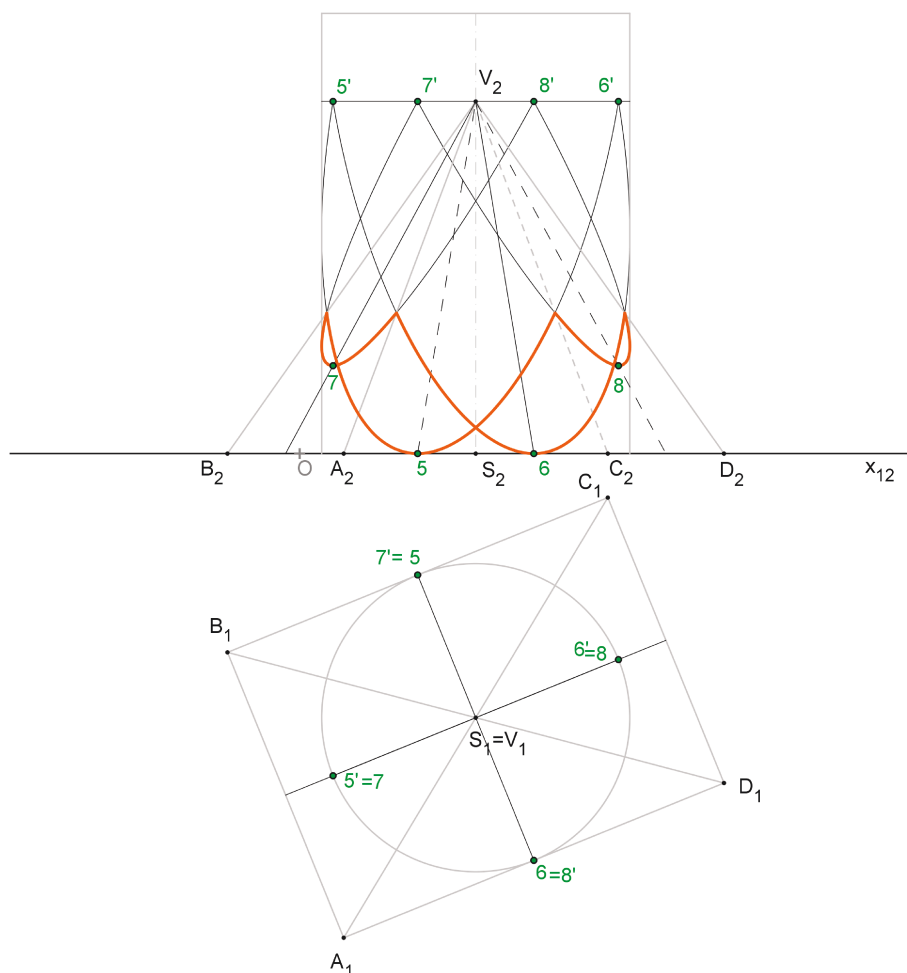
³V souboru s krokovaným řešením opět použijeme posuvník.

⁴Při jejich hledání můžeme také uvažovat stejně jako u následujících bodů 7 a 8.

jsou tedy důležité pro určování viditelnosti jejího nárysu. Pomocná rovina proto tentokrát bude rovnoběžná s nárysnou.

Nyní můžeme nárys průnikové křivky sestavit o poznání přesněji než ve chvíli, kdy jsme neměli k dispozici „zelené“ body. Můžeme už také rozhodnout o jeho viditelnosti. Opět se budeme řídit tím, zda se jeho zkoumaný úsek nachází ve viditelných částech obou zadaných těles. Celý viditelný bude pouze oblouk 1-6-4. Leží ve viditelné stěně DAV a k tomu ve viditelné „přední“ části válce. Přejdem přes bod 4 se však křivka dostane do stěny CDV , která vidět není, takže nebude vidět ani celý oblouk 4-10-8-3. Jinak tomu nebude ze zřejmých důvodů ani v případě oblouku 3-5-2. Viditelnost se změní až v rámci zbývajících oblouku 2-9-7-1, konkrétně v bodě 9, v němž přejde z neviditelné části válce do viditelné.

Na závěr vyřešíme viditelnost hran jehlanu vzhledem k válci a obrysových křivek válce vzhledem k jehlanu. Budeme přitom kombinovat úvahy, které jsme používali jak u průniků hranatých, tak oblých těles.



Obrázek 5.2

Nyní se na problém podíváme z perspektivy druhé možnosti řešení. Podle polohy bočních stěn jehlanu vůči válci můžeme usoudit, že průniková křivka těchto dvou těles bude složená z částí elips. Stejně tak bude z částí elips složen i druhý průmět průnikové křivky. Ke každé z těchto elips se pokusíme najít dvojici os,

nebo alespoň sdružených průměrů, k nimž bychom následně dohledali osy Rytzovou konstrukcí. Budeme vycházet z půdorysu, protože zde už všechny čtyři řezy máme – zobrazují se do kružnice, která představuje obrys válce. V každém z těchto řezů zvolíme dvojici na sebe kolmých průměrů, jejichž nárysy budou představovat sdružené průměry elipsy, která bude nárysem příslušného řezu. V případě řezu válce rovinou DAV se jedná o dvojici $6V_1$ a $5'6'$, kdy úsečka $6V_1$ představuje samozřejmě pouze polovinu zmiňovaného průměru. Ta je pro Rytzovu konstrukci dostačující, a můžeme se na ni proto s ohledem na úsporu místa omezit. Obdobně je tomu u ostatních řezů.

Nárysy elips se musí protínat na nárysech bočních hran jehlanu. Proto je i zde vhodné, pokud nerýsujeme na počítači, zvláště najít průměty průsečíků těchto hran s válcem. Stejně tak musíme i zde najít kvůli stanovení viditelnosti nárysy bodů 9 a 10. Ani v dalších krocích se již řešení od předchozí metody neliší. ○

Poznámka 5.1. V knize [15] jsou mezi průniky hranaté a oblé plochy zahrnuty také úlohy o umístění komunikace do terénu v kótovaném promítání.

Poznámka 5.2. Ve výukových materiálech [20] jisté učňovské školy ve švýcarském Thunu najdeme na straně 6 příklad odvozený ze zajímavé situace. Svíčka tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu zde tvoří průnik se sousým válcem, v jehož tvaru se podle autora šíří teplo kolem plamene.

Poznámka 5.3. V ústí Týnské uličky se nachází patník složený z komolého jehlanu a koule (obrázek 5.3). Kolemjdoucí se tak může pokochat částmi kružnic, z nichž je složená průniková křivka těchto těles a které jsou na patníku pěkně vidět.



Obrázek 5.3

6. Příklady

V poslední kapitole uvedeme přehled příkladů sesbíraných napříč středoškolskými i některými vysokoškolskými učebnicemi. Jsou roztříděny tak, aby typově odpovídaly vzorovým příkladům řešeným v této práci. Předtisky s jejich zadáními nalezne čtenář na přiloženém CD.

Přímka a těleso

Příklady typu 2.1

Řešený příklad 1.1.4.1 [1, str. 18]: Pravidelný pětiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 1.1.4.2 [1, str. 19]

Pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 1.1.4.3 [1, str. 21]

Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad je řešen v kosoúhlém promítání. *Příklad 1.* [1, str. 23]

Čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 2. [1, str. 23]

Pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 3. [1, str. 23]

Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 8.16 [2, str. 223]

Čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad je vyřešen jak pomocí obou promítacích rovin, tak s použitím vrcholové roviny.

Řešený příklad 10.10 [2, str. 316]

Předcházející příklad 8.16 je zde řešen v axonometrii s parametry $|XY| = 10$, $|YZ| = 11$, $|XZ| = 12$. *Příklad 8.31* [2, str. 226]

Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 8.32 [2, str. 226]

Pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v nárysně a přímka rovnoběžná s nárysnou. Při hledání nárysné stopy vrcholové roviny není možné využít nárysný stopník zadané přímky, neboť neexistuje. Je proto potřeba najít nárysné stopníky dvou přímků vzniklých dvěma volbami bodu K .

Příklad 8.33 [2, str. 226]

Pravidelný čtyřstěn s podstavou v obecné rovině a přímka v obecné poloze.

Příklad 201. [3, str. 42]

Pětiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 202. [3, str. 42]

Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v rovině kolmé k nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 64. [3, str. 66]

Pětiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad je zadán obrázkem v pravoúhlé axonometrii.

Příklad 9. [8, str. 159]

Pravidelný pětiboký jehlan s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Pro rýsování příkladu včetně zadání je třeba ovládat konstrukci pravidelného pě-

tiúhelníka na základě jeho úhlopříčky.

Příklady typu 2.2

Řešený příklad 1.1.4.4 [1, str. 21]: Kosý kužel s podstavou v nárysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 1.1.4.5 [1, str. 21]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 7. [1, str. 23]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 8. [1, str. 23]: Kosý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 9.20 [2, str. 270]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 9.56 [2, str. 278]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 9.57 [2, str. 278]: Přímý kužel s podstavou v rovině kolmé k půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 73. [3, str. 50]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 68. [3, str. 68]: Přímý kužel s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad je zadán obrázkem v pravoúhlé axonometrii.

Řešený příklad 4.13 [8, str. 156]: Dutý kosý kužel s podstavou v rovině rovnoběžné s půdorysnou a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.3 Ⓟ

Příklad 74. [3, str. 50]: Přímý kužel s podstavou v rovině kolmé k půdorysně a přímka kolmá k půdorysně.

Příklad 10.25 [4, str. 335]: Přímý kužel s podstavou v rovině rovnoběžné s půdorysnou a osa z . Příklad se řeší v pravoúhlé axonometrii. Zde je zřejmě chyba v zadání středu podstavy; měl by mít stejnou z -ovou souřadnici jako rovina, v níž leží.

Příklady typu 2.3 Ⓞ

Příklad 18. [8, str. 159]: Přímý kužel s podstavou v rovině rovnoběžné s půdorysnou a přímka rovnoběžná s půdorysnou.

Příklady typu 2.4

Řešený příklad 1.2.1 [1, str. 13]: Kosý hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 1.1.2.2 [1, str. 14]: Kosý hranol s podstavou v obecné rovině a přímka v obecné poloze. Řešenou pouze s použitím promítací roviny.

Příklad 4. [1, str. 23]: Kosý hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 6. [1, str. 23]: Kosý hranol s podstavou v obecné rovině a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 8.13 [2, str. 216]: Kosý hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Řešenou pomocí první promítací i směrové roviny.

Příklad 8.22 [2, str. 218]: Kosý hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 187. [3, str. 41]: Kosý hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 7. [8, str. 159]: Kosý šestiboký hranol s podstavou v nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.5

Řešený příklad 1.1.3.3 [1, str. 18]: Dutý kosý válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 9. [1, str. 23]: Kosý válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad nemá řešení.

Příklad 10. [1, str. 23]: Kosý válec s podstavou v nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 17. [8, str. 159]: Kosý válec s podstavou v půdorysně a stranami rovnoběžnými s nárysnou a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.6

Příklad 5. [1, str. 23]: Pravidelný pětiboký hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 8.21 [2, str. 224]: Kolmý čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 186. [3, str. 41]: Pravidelný šestiboký hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 62. [3, str. 65]: Kolmý čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad je zadán obrázkem v pravoúhlé axonometrii.

Příklady typu 2.7

Řešený příklad 1.1.3.1 [1, str. 15]: Rotační válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 9.17 [2, str. 263]: Rotační válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 55. [3, str. 49]: Rotační válec s podstavou v nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 66. [3, str. 67]: Rotační válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze. Příklad je zadán obrázkem v pravoúhlé axonometrii.

Příklady typu 2.8

Příklad 9.47 [2, str. 270]: Rotační válec s podstavou v půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.9

Řešený příklad 1.1.3.2 [1, str. 16]: Rotační válec s podstavou v rovině kolmé k půdorysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 56. [3, str. 49]: Rotační válec s podstavou v rovině kolmé k nárysně a přímka v obecné poloze.

Příklad 8. [8, str. 159]: Kosý čtyřboký hranol s podstavou v rovině kolmé k základnici a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.10

Řešený příklad 1.1.5.1 [1, str. 22]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Příklad 11. [1, str. 23]: Kulová plocha a přímka procházející základnicí.

Příklad 12. [1, str. 23]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Řešený příklad 9.16 [2, str. 261]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Příklad 9.42 [2, str. 261]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Příklad 45. [3, str. 49]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Příklad 70. [3, str. 69]: Kulová plocha se středem v počátku a souřadnicové osy. Příklad je zadán obrázkem v pravoúhlé axonometrii.

Řešený příklad 4.15 [8, str. 158]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze.

Příklady typu 2.11

Příklad 19. [8, str. 159]: Koule a přímka kolmá k půdorysně.

Příklad 20. [8, str. 159]: Kulová plocha a přímka rovnoběžná se základnicí.

Příklad 9.43 [2, str. 261]: Na zadané přímce se mají nalézt body v určité vzdálenosti od daného bodu.

Příklad 46. [3, str. 49]: Kulová plocha a přímka v obecné poloze. Střed kulové plochy má ležet na zadané přímce, dále známe dva body, kterými prochází. Konstrukce zadání tohoto příkladu je náročnější než jeho řešení.

Řešený příklad „Schnitt Kugel / Gerade“ [12, str. 90 souboru na přiloženém CD] – přibližný překlad: Je dána koule Φ se středem M a přímka $g = AB$. Přímka g protíná kouli v bodě A . Najděte půdorys a nárys druhého společného bodu přímky g a zadané koule.

Řešený příklad „Kugel I“ a) [12, str. 121 souboru na přiloženém CD] – přibližný překlad: Jsou dány půdorysy a nárysy přímky a a bodu A ($A \notin a$). Kružnice, kterou opíše bod A při rotaci kolem přímky a , tvoří rovník k_a koule Φ představující glóbus. Narýsujte půdorys a nárys severního (N) a jižního (S) pólu ($z_N > z_S$). Uvedený úkol je pouze malou částí komplexnějšího příkladu, v němž se rýsuje například zmiňovaný rovník k_a či rovnoběžka s danou deografickou šířkou. I tak je ovšem při jeho řešení třeba použít některé základní polohové úlohy v Mongeově promítání (například konstrukce roviny kolmé k zadané přímce skrz zadaný bod). Jde tedy o velmi pěkný aplikační příklad se širším záběrem.

Dvě hranatá tělesa

Příklady typu 3.1

Řešený příklad 1.2.2.1 [1, str. 27]: Dva trojboké jehlany s podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Řešený příklad 1.2.2.2 [1, str. 29]: Dva trojboké jehlany s podstavami v půdorysně; částečný průnik.

Řešený příklad 8.19 [2, str. 231]: Dva trojboké jehlany s podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Příklad 8.39 [2, str. 233]: Dva trojboké jehlany s podstavami v půdorysně; příklad nemá řešení.

Příklady typu 3.2

Příklad 1. [1, str. 53]: Čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně a trojboký jehlan s podstavou v rovině kolmé na půdorysnu; úplný průnik.

Příklad 4. [8, str. 175]: Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v půdorysně a čtyřboký jehlan s podstavou v rovině kolmé na půdorysnu; částečný průnik.

Příklady typu 3.3

Řešený příklad „Durchdringung zweier Pyramiden“ [12, str. 133 souboru na přiloženém CD]: Pravidelný čtyřboký a pravidelný šestiboký jehlan s podstavami v půdorysně a společnou osou; dokonalý průnik.

Příklady typu 3.4

Řešený příklad 1.2.2.9 [1, str. 36]: Kosý čtyřboký hranol a kosý čtyřboký jehlan s podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Příklad 8.40 [2, str. 233]: Kosý trojboký hranol a kosý trojboký jehlan s podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Řešený příklad 4.20 [8, str. 167]: Kosý čtyřboký hranol a kosý čtyřboký jehlan s podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Příklady typu 3.5

Řešený příklad 1.2.2.10 [1, str. 36]: Kolmý čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a čtyřboký jehlan s podstavou v rovině kolmé napůdorysnu; částečný průnik.

Příklad 7. [1, str. 54]: Kolmý trojboký hranol s podstavou v půdorysně a čtyřboký jehlan s podstavou v rovině kolmé napůdorysnu; úplný průnik.

Řešený příklad 8.18 [2, str. 227]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v nárysně a pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně; částečný průnik.

Příklad 6. [8, str. 175]: Kosý čtyřboký hranol s podstavou v nárysně a kosý čtyřboký jehlan s podstavou v půdorysně; úplný průnik. Úloha nemá řešení.

Řešený příklad „Durchdringung Prisma / Pyramide I“ [12, str. 127 souboru na přiloženém CD]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v nárysně a čtyřboký jehlan s podstavou v rovině kolmé k nárysně; částečný průnik.

Řešený příklad „Durchdringung Pyramide / Prisma II“ [12, str. 129 souboru na přiloženém CD]: Hranolová plocha s hranami rovnoběžnými se základnicí a trojboký jehlan s podstavou v půdorysně; částečný průnik. Příklad vyžaduje buď zavedení třetí průmětny, nebo využití krycích přímk.

Příklady typu 3.6

Řešený příklad 1.2.2.11 [1, str. 37]: Pravidelný čtyřboký hranol a pravidelný čtyřboký jehlan, oba s podstavou v půdorysně; speciální typ průniku.

Příklad 8.34 [2, str. 231]: Pravidelný čtyřboký hranol a pravidelný čtyřboký jehlan, oba s podstavou v půdorysně a se společnou osou. Varianty *a)*, *b)*, *c)* se liší natočením těles vůči sobě a délkami podstavových hran hranolu. Vždy však jde o dokonalý průnik.

Příklad 8.35 [2, str. 231]: Pravidelný trojboký hranol a pravidelný trojboký jehlan, oba s podstavou v půdorysně a se společnou osou; dokonalý průnik.

Řešený příklad 4.24 [8, str. 171]: Pravidelný čtyřboký hranol a pravidelný čtyřboký jehlan, oba s podstavou v půdorysně a se společnou osou; dokonalý průnik. Příklad se řeší v kosoúhlém promítání.

Příklady typu 3.7

Řešený příklad 1.2.2.4 [1, str. 31]: Dva kosé čtyřboké hranoly se čtvercovými podstavami v půdorysně; úplný průnik.

Příklad 2. [1, str. 53]: Kosý trojboký hranol a kosý čtyřboký hranol, oba s podstavou v půdorysně; částečný průnik. Didakticky nevhodný příklad; dvě boční stěny čtyřbokého hranolu se v náryse promítají do velmi úzkých čtyřúhelníků.

Příklad 3. [1, str. 54]: Kosý trojboký hranol a kosý čtyřboký hranol, oba s podstavou v půdorysně; částečný průnik.

Příklady typu 3.8

Řešený příklad 1.2.2.5 [1, str. 32]: Kolmý čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; úplný průnik.

Řešený příklad 1.2.2.6 [1, str. 34]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; částečný průnik.

Řešený příklad 1.2.2.7 [1, str. 35]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; průnik s dvojným bodem.

Příklad 4. [1, str. 54]: Pravidelný trojboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; částečný průnik.

Příklad 5. [1, str. 54]: Pravidelný šestiboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý čtyřboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; průnik s dvojným bodem.

Příklad 6. [1, str. 54]: Pravidelný šestiúhelníkový hranol s podstavou v půdorysně a kolmý čtyřboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; průnik s dvojným bodem. Vzhledem k vysokému počtu bočních hran prvního tělesa se vyplatí použít zavedení třetí průmětny.

Příklad 8.36 [2, str. 231]: Pravidelný trojboký hranol s podstavou v půdorysně a trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; částečný průnik.

Příklad 7.37 [4, str. 230]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; úplný průnik.

Příklad 7.38 [4, str. 230]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a pravidelný trojboký hranol s podstavou v rovině kolmé k půdorysně; částečný průnik.

Řešený příklad „Durchdringung zweier Prismen I“ [12, str. 125 souboru na příloženém CD]: Pravidelný čtyřboký hranol a hranolová plocha s hranami v obecné poloze vůči průmětnám; částečný průnik. Vhodné pro řešení zavedením třetí průmětny kolmé ke hranám hranolové plochy.

Řešený příklad 1.2.2.8 [1, str. 35]: Dva pravidelné čtyřboké hranoly: jeden s podstavou v půdorysně, boční hrany druhého jsou rovnoběžné se základnicí; úplný průnik. Vhodné pro řešení pomocí třetí průmětny.

Řešený příklad 8.17 [2, str. 227]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s bočními hranami rovnoběžnými se základnicí; úplný průnik. Vhodné pro řešení pomocí třetí průmětny. V rámci řešení je předvedena i situace, v níž se trojboký hranol posune tak, že se průnik změní na

částečný.

Řešený příklad 10.15 [2, str. 322]: Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně a kolmý trojboký hranol s bočními hranami rovnoběžnými se základnicí; částečný průnik. Jde o druhou variantu předchozího příkladu řešenou v pravouhlé axonometrii.

Řešený příklad 4.21 [8, str. 169]: Pětiboký hranol s podstavou v půdorysně a čtyřboký hranol s podstavou v bokorysně; průnik s dvojným bodem. Příklad se řeší v kosoúhlém promítání.

Řešený příklad „Durchdringung zweier Prismen II“ [12, str. 131 souboru na příloženém CD]: Hranolová plocha s hranami rovnoběžnými se základnicí a hranolová plocha s hranami v obecné poloze vůči průmětnám; částečný průnik. Řeší se pomocí řezů promítacími rovinami bočních hran hranolových ploch.

Dvě oblá tělesa

Příklady typu 4.1

Příklad 12. [1, str. 54]: Dva rotační kužely s podstavami v půdorysně.

Řešený příklad 9.27 [2, str. 285]: Dva rotační kužely s podstavami v půdorysně.

Příklad 9.75 [2, str. 293]: Dva rotační kužely s podstavami v nárýsně.

Příklad 9.76 [2, str. 293]: Dva rotační kužely. Podstava jednoho leží v půdorysně, podstava druhého v rovině rovnoběžné s půdorysnou.

Příklad 9.77 [2, str. 293]: Rotační kužel s podstavou v půdorysně a kulová plocha.

Příklady typu 4.2

Řešený příklad 1.2.4.5 [1, str. 48]: Dva rotační válce s navzájem kolmými osami. Osa jednoho z nich je rovnoběžná se základnicí a osa druhého kolmá k nárýsně. Příklad se řeší pro dva různé poměry poloměrů obou těles, vždy ale s použitím třetího průmětu.

Příklad 14. [1, str. 54]: Rotační kužel s podstavou v půdorysně a rotační válec s osou rovnoběžnou se základnicí.

Řešený příklad 9.28 [2, str. 287]: Komolý rotační kužel s dolní podstavou v půdorysně a rotační válec s osou rovnoběžnou se základnicí.

Příklad 9.72 [2, str. 292]: Dva rotační válce s navzájem kolmými osami. Osa jednoho z nich je rovnoběžná se základnicí a osa druhého kolmá k nárýsně. Příklad se řeší pro tři různé dvojice poloměrů zadaných válců.

Příklad 9.74 [2, str. 293]: Rotační kužel s podstavou v půdorysně a rotační válec s osou rovnoběžnou se základnicí.

Hranaté a oblé těleso

Příklady typu 5.1

Řešený příklad 1.2.3.2 [1, str. 40]: Rotační válec a pravidelný trojboký jehlan, oba s podstavou v půdorysně a společnou osou.

Řešený příklad 1.2.3.3 [1, str. 41]: Rotační kužel a kvádr, oba s podstavou v půdorysně a společnou osou.

Příklad 10. [1, str. 54]: Rotační válec a jehlan, oba s podstavou v půdorysně a společnou osou.

Řešený příklad 9.24 [2, str. 280]: Rotační válec a kvádr, obas podstavou v půdorysně a společnou osou.

Závěr

Ve čtyřech kapitolách jsme se seznámili s problematikou průniků těles. Velký důraz jsme při tom kladli vedle průniku dvou hranatých těles na průnik přímky s tělesem jakožto důležité téma pro vypěstování potřebných představ a zautomatizování určitých konstrukcí.

Směrů, kterými by bylo možno práci rozvíjet dál, je vícero:

1. Pro výuku by se jistě hodilo zastoupení a zpracování většího množství vzorových příkladů v kapitolách 4 a 5. Čtenáře můžeme v tomto případě odkázat na středoškolské učebnice deskriptivní geometrie [1] a [2], které takových příkladů nabízejí opravdu nemalé množství, a na přílohu této práce, která k nim nabízí předtisky zadání.
2. Dále by bylo možné rozšířit oblast zájmu z těles na plochy, což by zejména v případě oblých ploch přineslo spolu s řadou nových zkoumaných objektů také nejednu zajímavou úlohu z technické praxe. Pro přiblížení této cesty se čtenáři doporučuje k nahlédnutí [5], [13], [20] či [16].
3. Z didaktického hlediska by mohlo být zajímavé rozšíření vhodné spíše pro vysokou školu, kdy bychom průnikové křivky nehledali pouze synteticky, ale také analyticky. Následovat by mohlo propojení například s diferenciální geometrií.
4. Dalšími objekty zájmu by se mohly stát (ne nutně užité) objekty, které se nacházejí kolem nás a jejichž tvar nějakým způsobem souvisí s průniky těles. Kdyby učitel takové objekty vyhled(áv)al a zad(áv)al žákům například jako rysy (v opravdu jednoduchých případech kombinované třeba s jejich osvětlením), mohlo by to představovat oživení, zpřítomnění či jakousi konkretizaci probírané látky. Je přeci jen „důvěrnější“ záležitostí rýsovat „střechu věžičky na kostele“ či „valenou klenbu v podloubí na náměstí“, kolem kterých žák denně chodí, než odosobněné průniky dvou jehlanů či válců. Dva takové objekty nabízí autorka na obrázcích 3.9 a 5.3.
5. Rozšířením bodu 4 by mohlo být i rýsování sítí a lepení modelů příslušných těles a jejich průniků. Konstrukce sítí jsou zahrnuty do řešení příkladů v [14].
6. Posledním navrhovaným směrem, kterým by se mohla práce ubírat, je přístup autora práce [11]. Průnikům těles se nevěnuje pouze v Mongeově a kosouhlém promítání, ale i ve všech ostatních. Bohužel tak nečiní v rámci jednoho příkladu. Přesto jde ale o ojedinelou záležitost hodnou doporučení. Sbírkou úloh, která tvoří přílohu práce [11], je možné pojmout například jako ukazatel míry, do jaké čtenář rozumí opravdové podstatě problematiky průniků těles oproštěné od konkrétního promítání, pomocí něhož ji zkoumal.

Jak vidíme, představují průniky těles – opět stejně jako diferenciální a integrální počet v matematice – výchozí pozici jak směrem k problémům sahajícím nad rámec středoškolské deskriptivní geometrie, tak k novému náhledu na již známé objekty. Odhlédneme-li od těchto aplikací a zůstaneme-li u průniků samotných, jde o silný nástroj k rozvoji prostorové představivosti a pečlivosti.

Proto autorce nezbývá než doufat, že tato práce jejich výuku na střední škole alespoň trochu usnadní či obohatí.

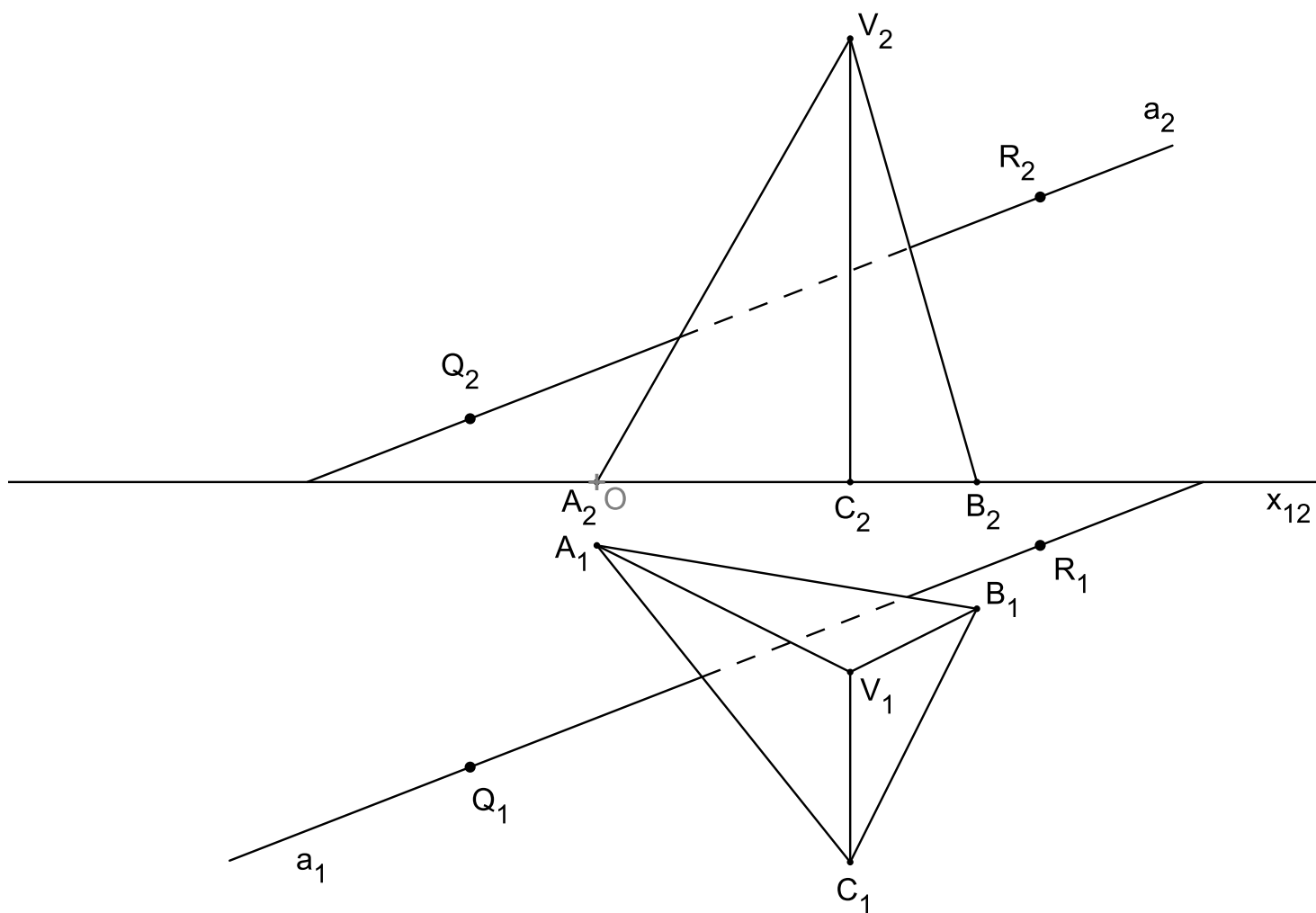
Literatura

- [1] MUSÁLKOVÁ, Bohdana. *Deskriptivní geometrie II pro 2. ročník SPŠ stavebních*. 1. vydání. Praha: Sobotáles, 2000. ISBN 80-85920-65-4.
- [2] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- [3] MAŇÁSKOVÁ, Eva. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-160-4.
- [4] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1977.
- [5] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1979.
- [6] KADERÁVEK, František; KLÍMA, Josef; KOUNOVSKÝ, Josef. *Deskriptivní geometrie I*. 1. vydání. Praha: JČMF, 1929.
- [7] KOUNOVSKÝ, Josef; VYČICHLO, František. *Deskriptivní geometrie*. 3. vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1954.
- [8] DRÁBEK, Karel; HARANT, František; SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie I*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1982.
- [9] SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie II. díl*. 1. vydání. Praha: SNTL, 19682.
- [10] BRAUNER, Martin. *Průniky těles v kolmé axonometrii*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2006.
- [11] KOZÁK, Petr. *Průniky těles v různých projekcích*. Bakalářská práce. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2010.
- [12] KLIX, Wolf-Dieter. *Konstruktive Geometrie*. 1. vydání. Leipzig: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2001. ISBN 3-446-21566-2
- [13] BEREIS, Rudolf. *Darstellende Geometrie I*. 1. vydání. Berlin: Akademie-Verlag, 1964.
- [14] KURZ, Ulrich; WITTEL, Herbert. *Böttcher/Forberg Technisches Zeichnen*. 25. vydání. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag – Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2010. ISBN 978-3-8348-0973-5
- [15] STÄRK, Roland. *Darstellende Geometrie*. 1. vydání. Paderborn: Ferdinand Schöningh, 1978. ISBN 3-506-37443-5
- [16] FRENCH, Thomas E.; VIERCK, Charles J. *Graphic Science: Engineering Drawing, Descriptive Geometry, Graphical Solutions*. 1. vydání. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- [17] HAWK, Minor C. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Descriptive Geometry*. 1. vydání. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- [18] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*. 3. vydání (dotisk). Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-178-7

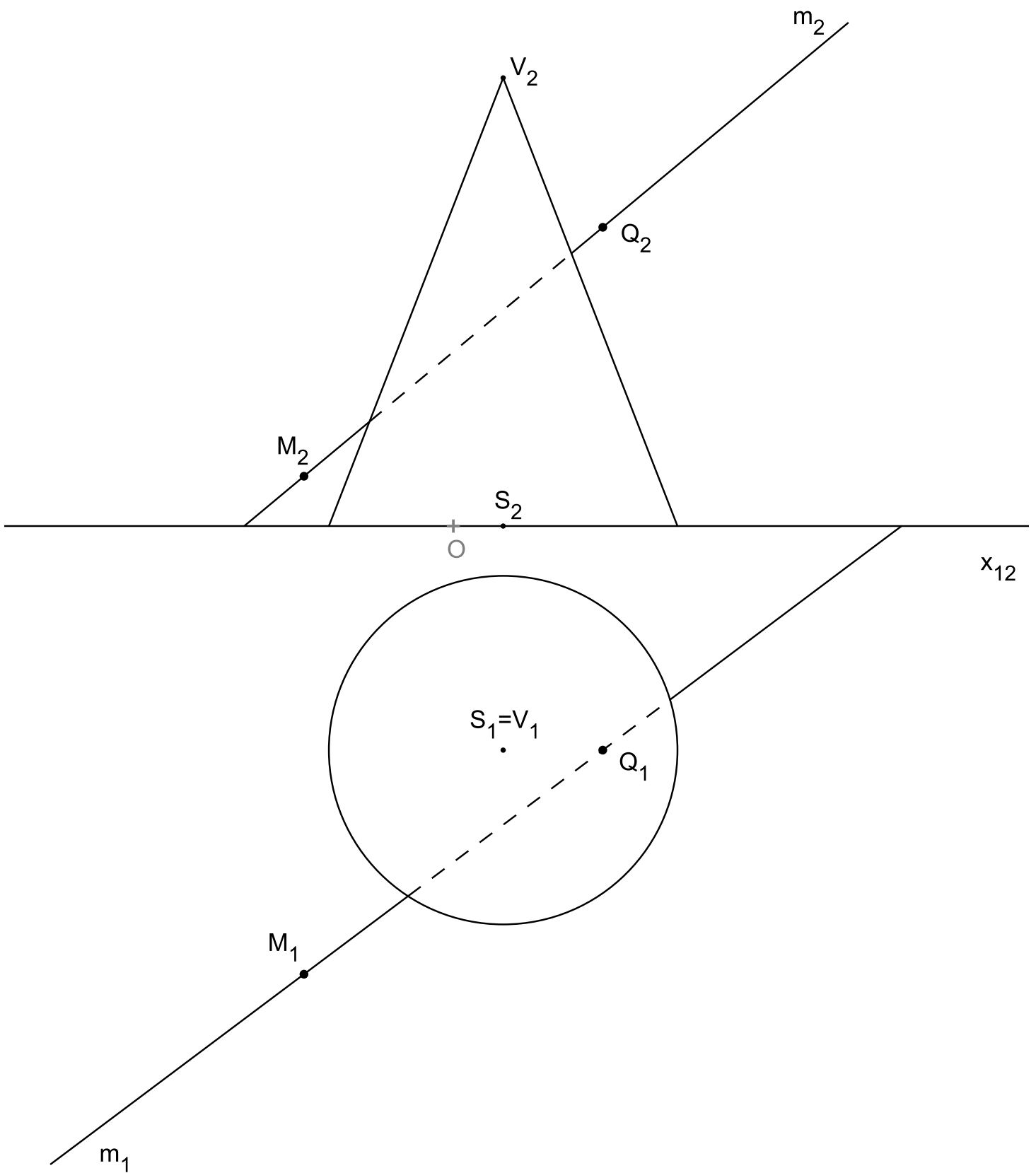
- [19] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání (dotisk). Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-099-7
- [20] Kastelers‘aab IDM Thun: *Christian Haas: Zeichentechnik Z13, Durchdringungen* [online]. [cit. 5.5.2019]
<https://kastelersaab.jimdo.com/fachunterricht/unterrichtsthemen-zeichentechnik/z13/>
- [21] [Www.realisticky.cz](http://www.realisticky.cz): *Další polohové úlohy* [online]. Poslední revize 18.4.2015 [cit. 9.5.2019]
<http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1539>

Přílohy

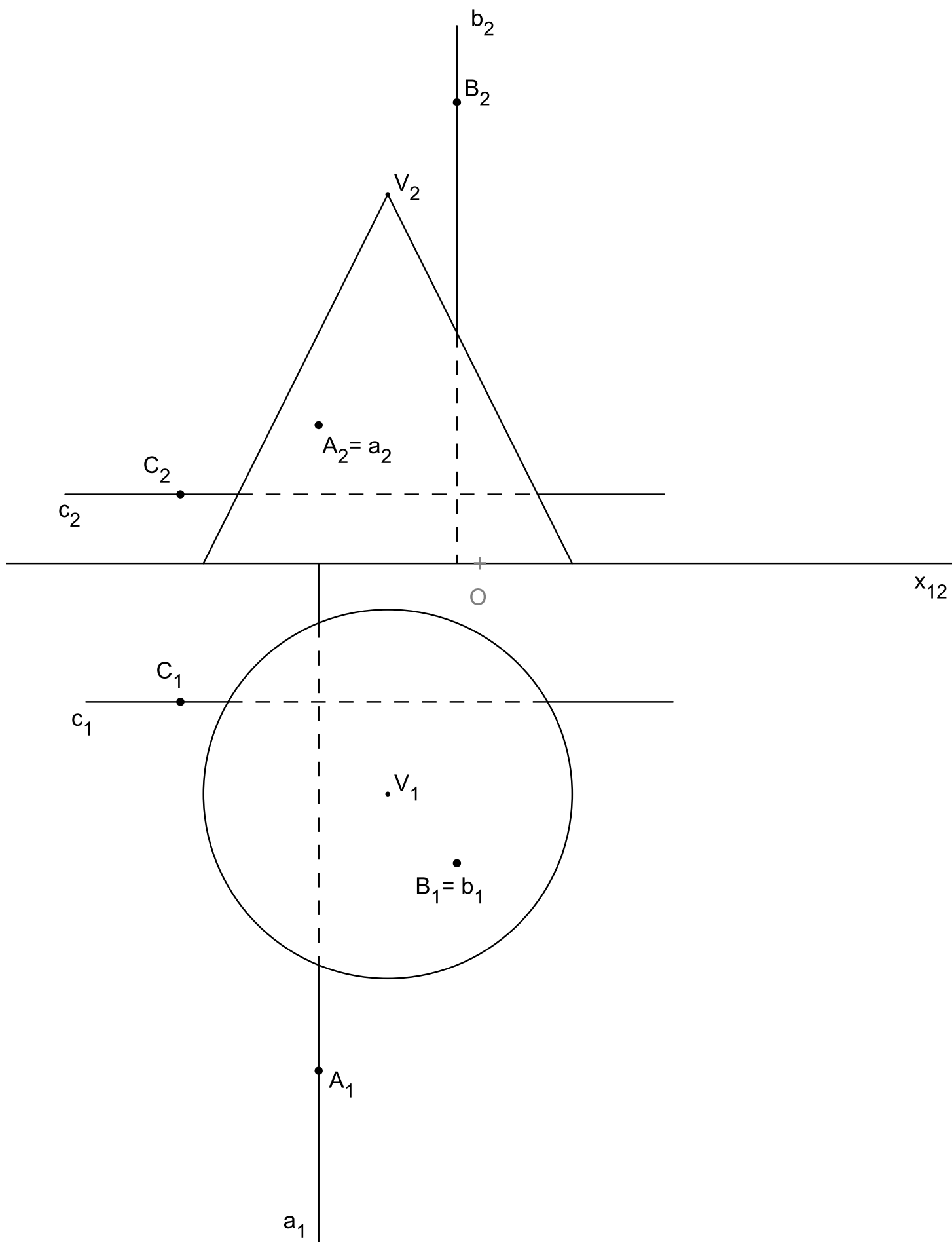
Příklad 2.1



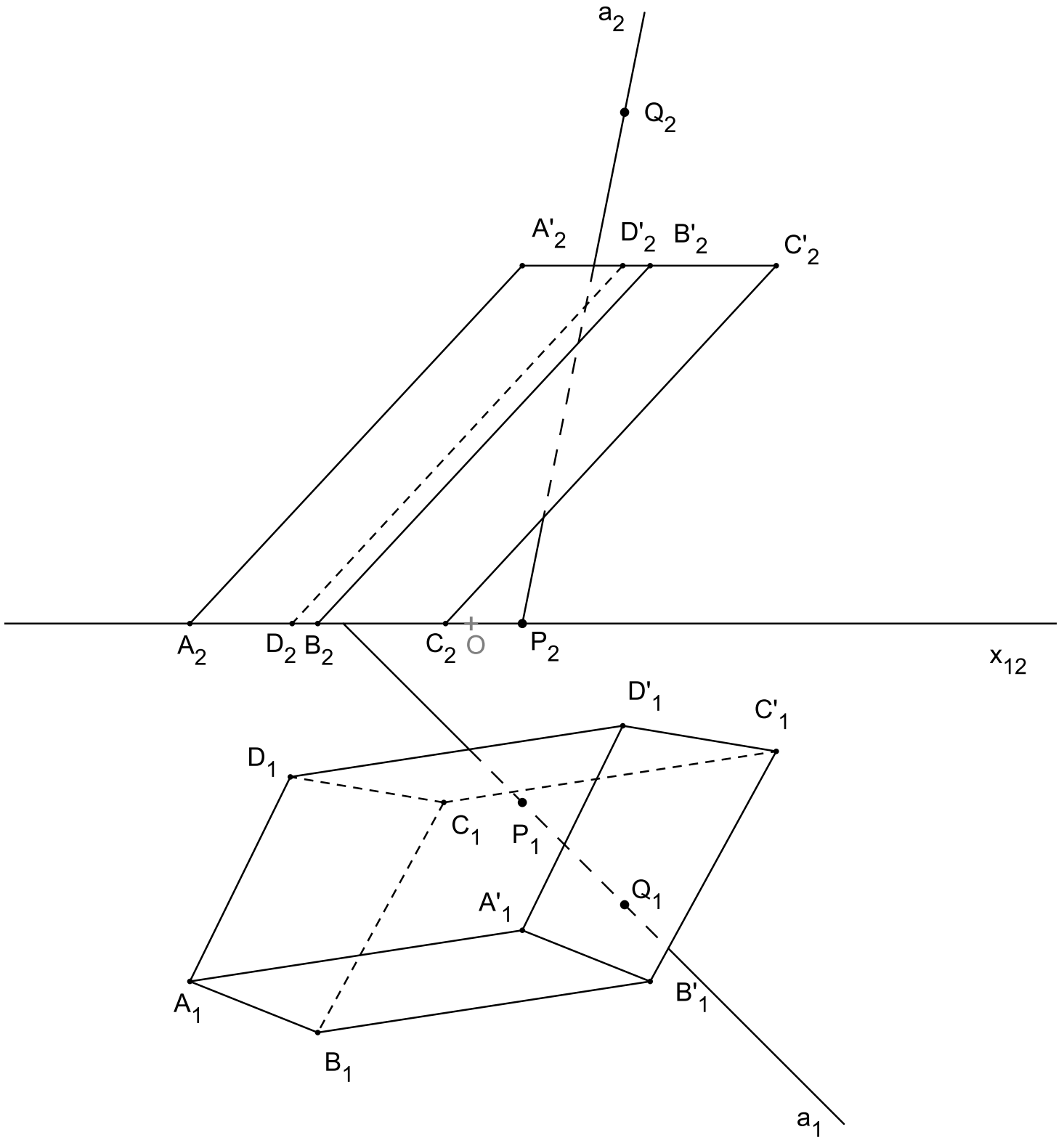
Příklad 2.2



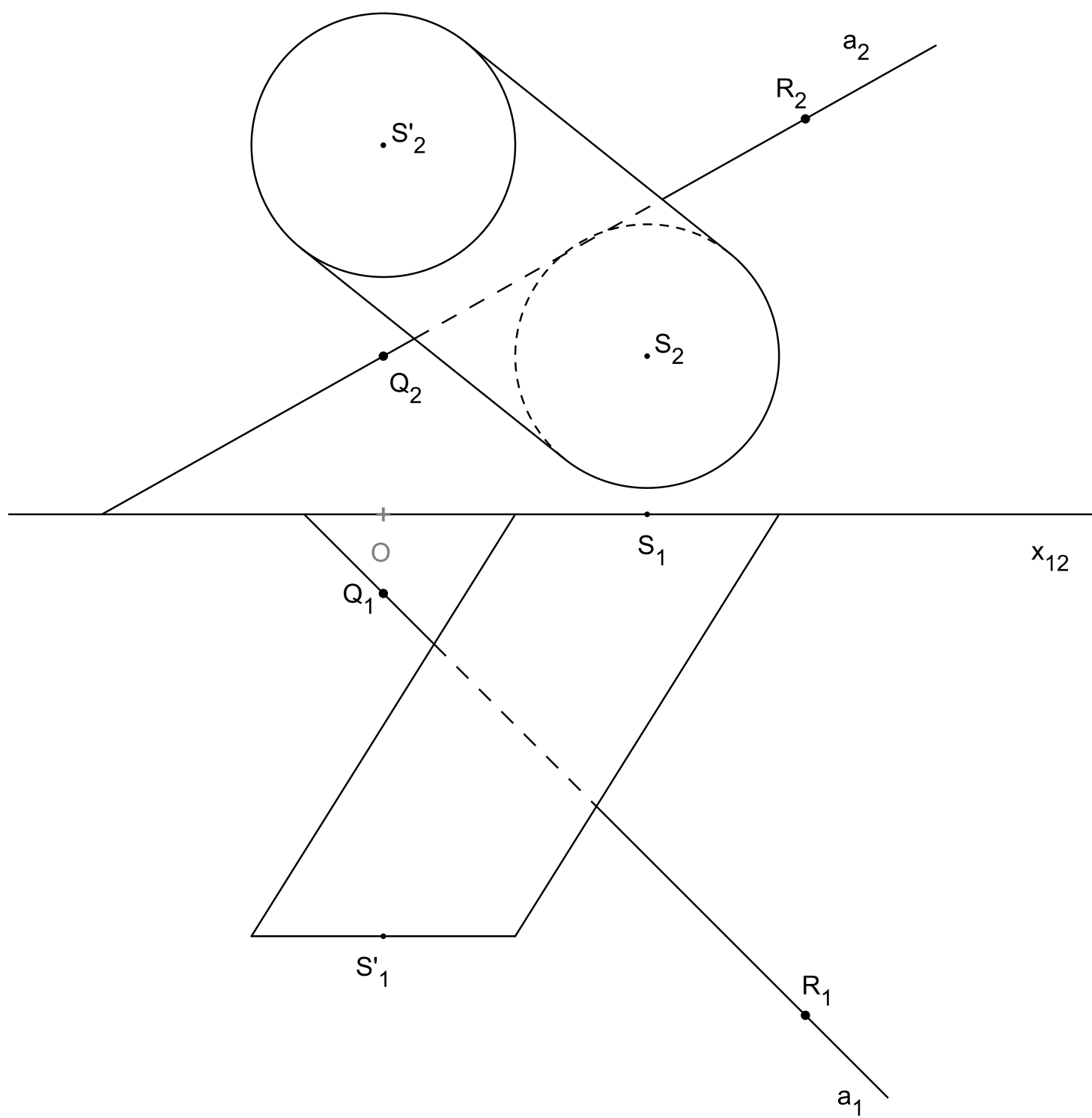
Příklad 2.3



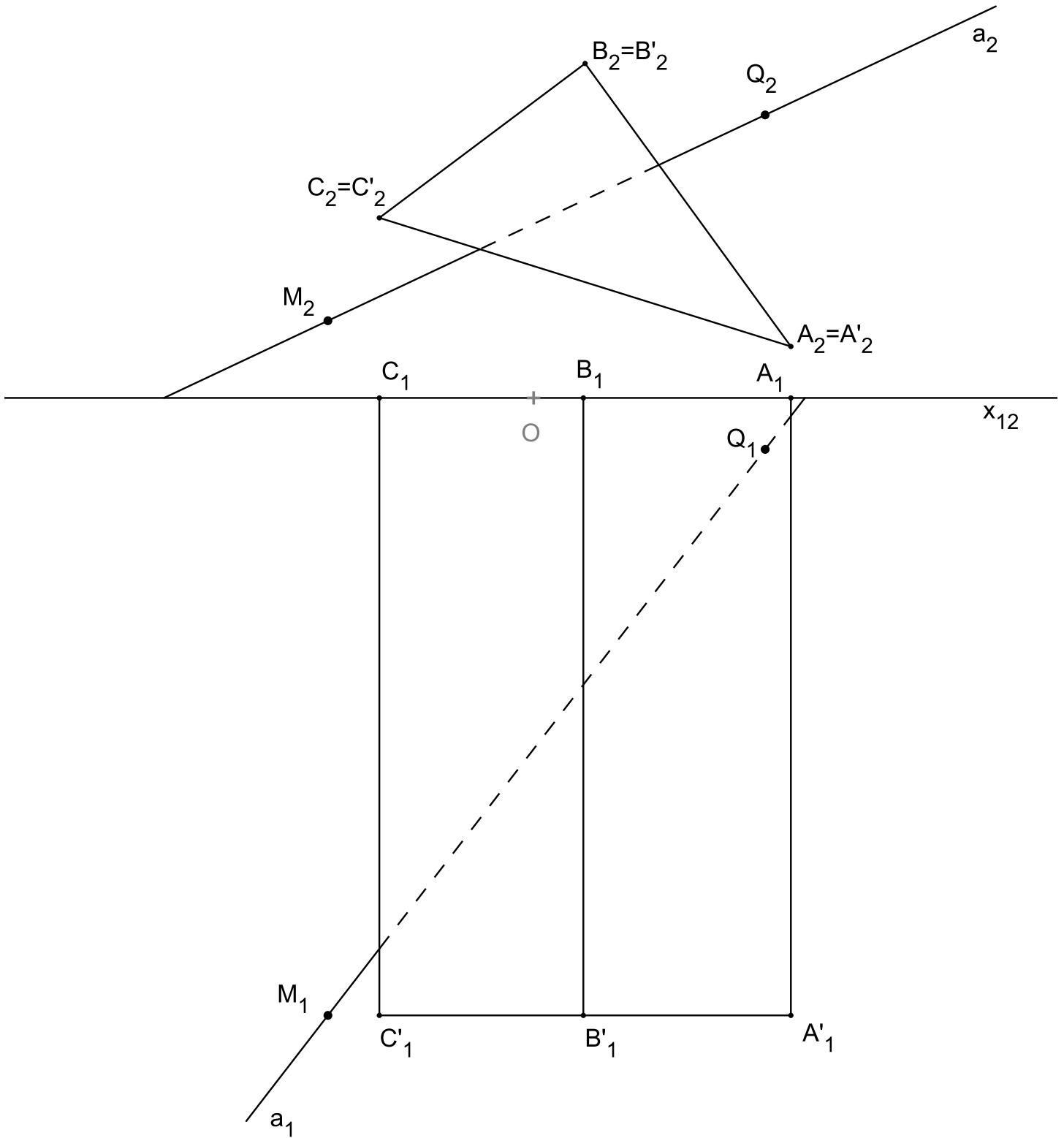
Příklad 2.4



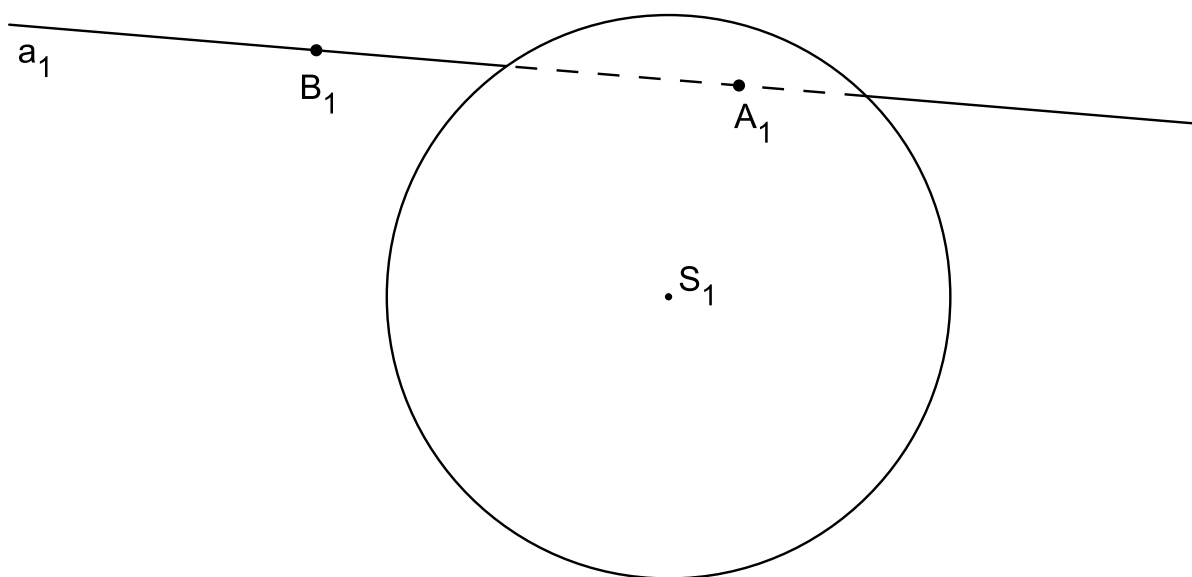
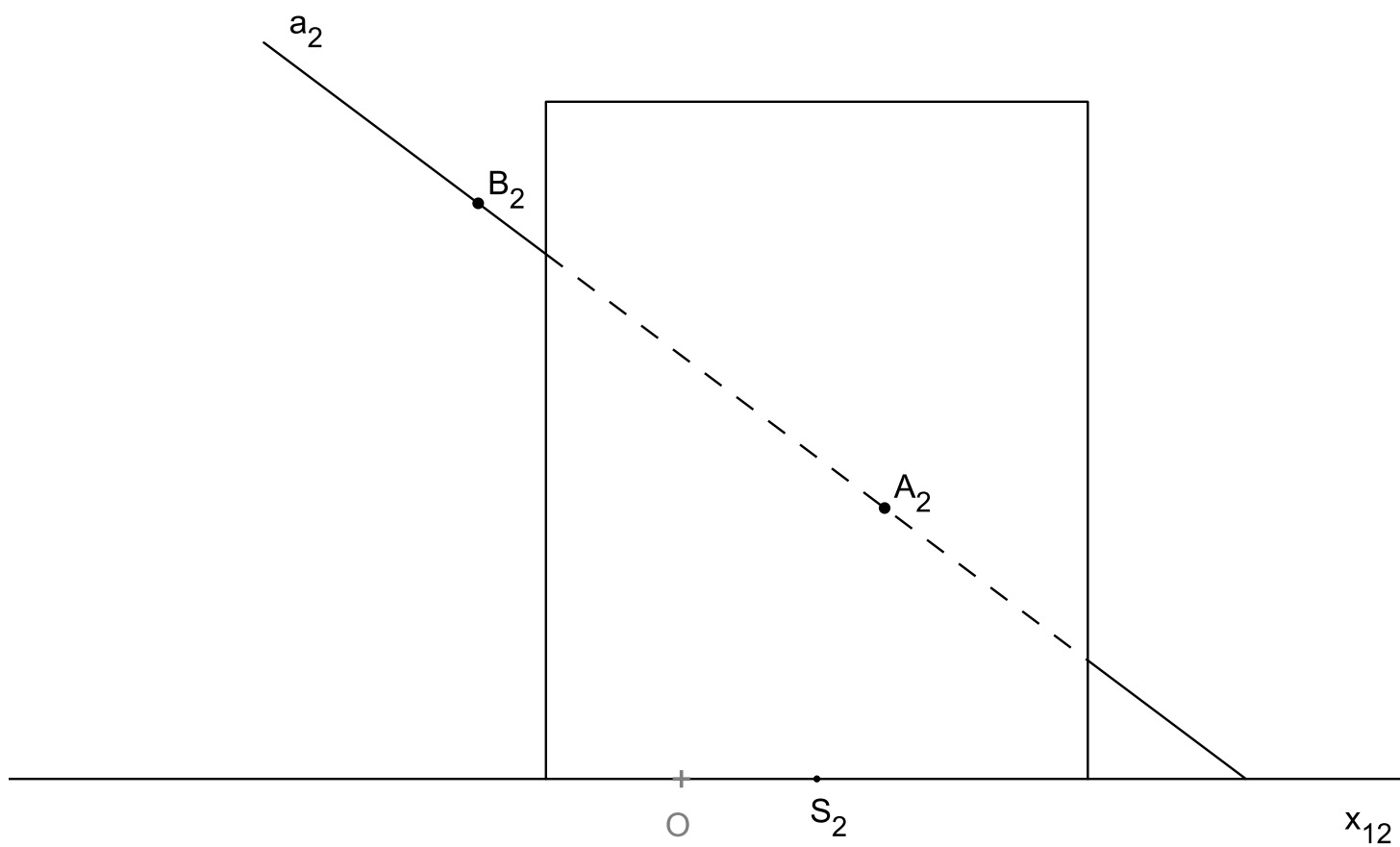
Příklad 2.5



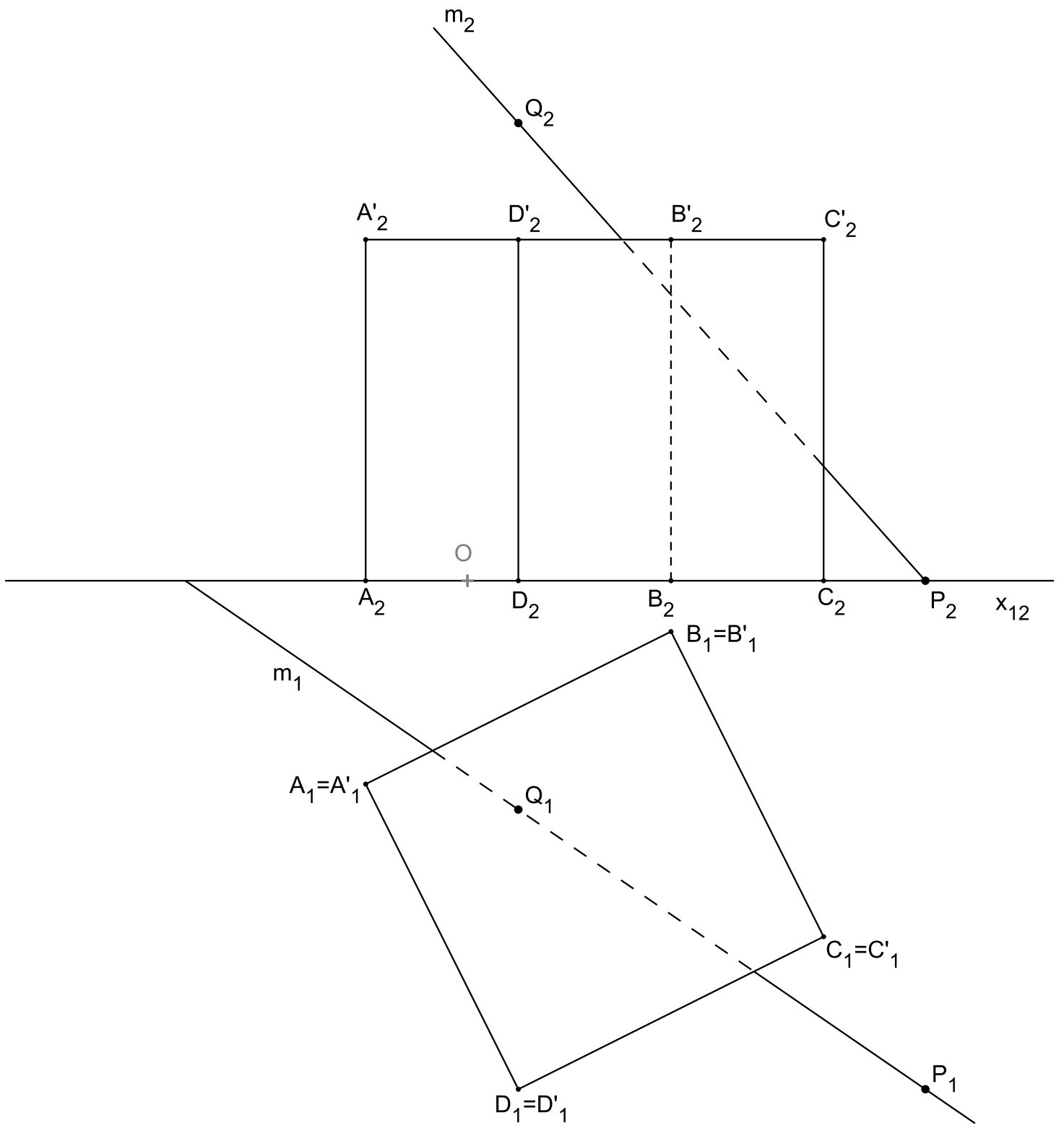
Příklad 2.6



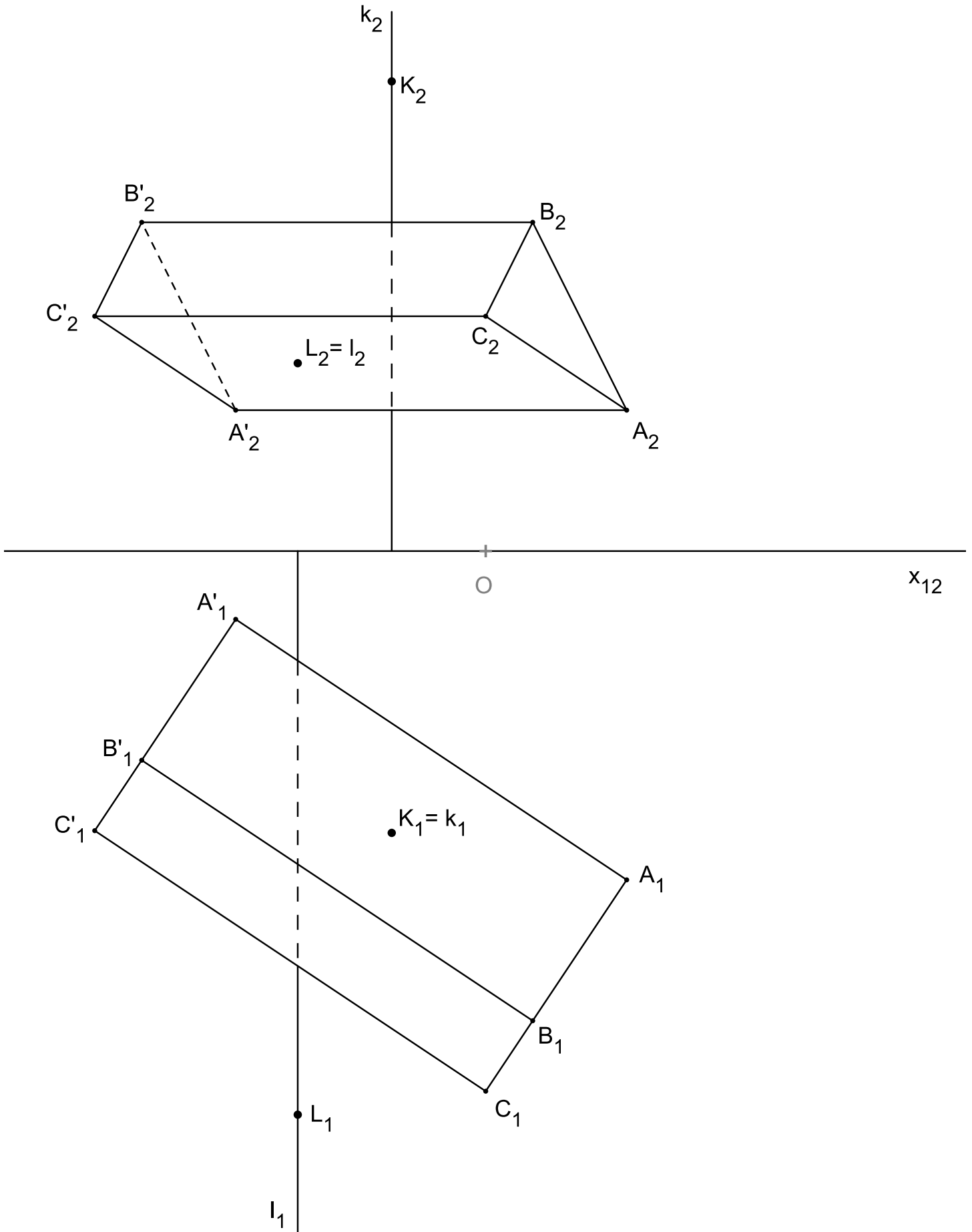
Příklad 2.7



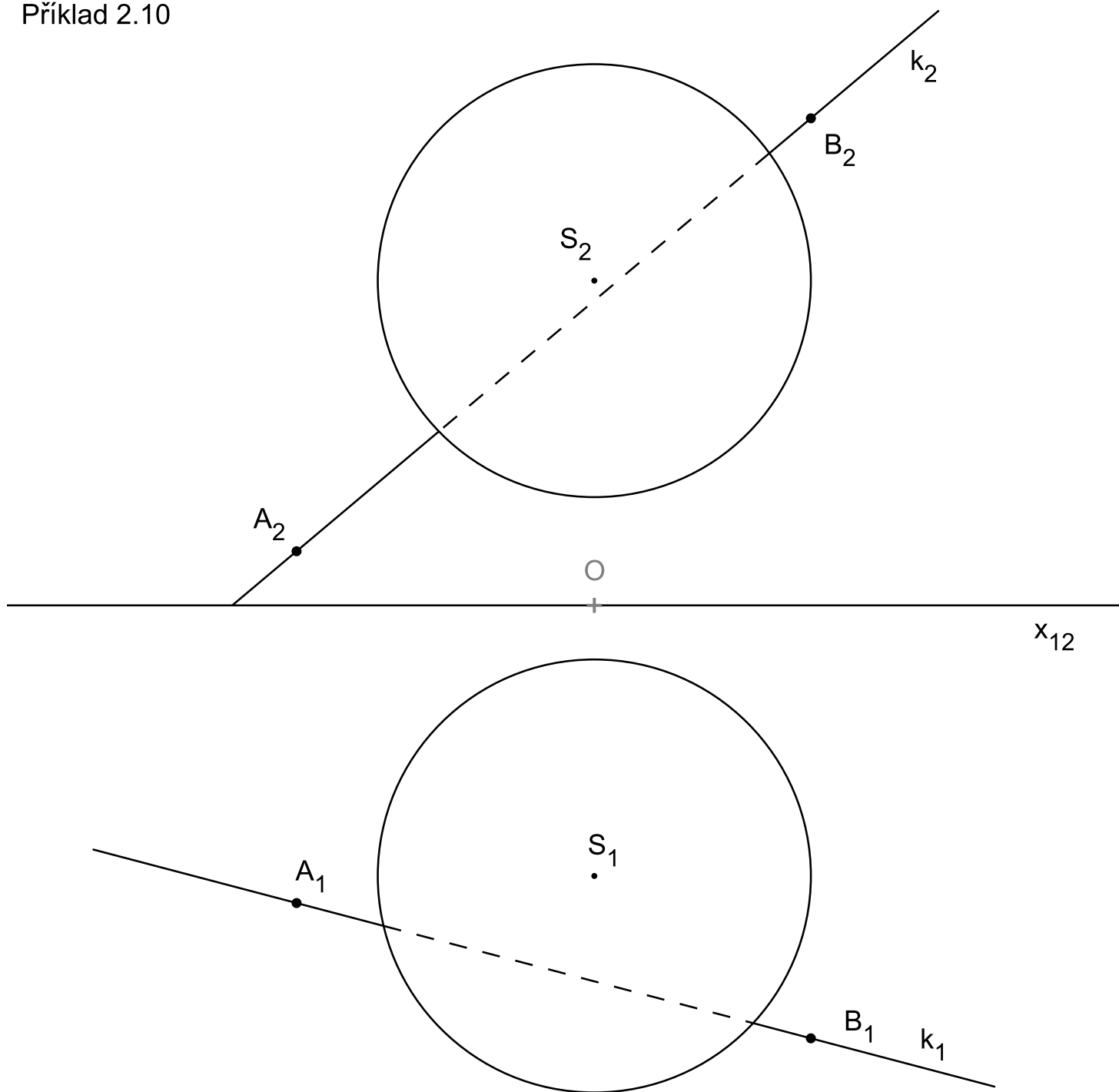
Příklad 2.8



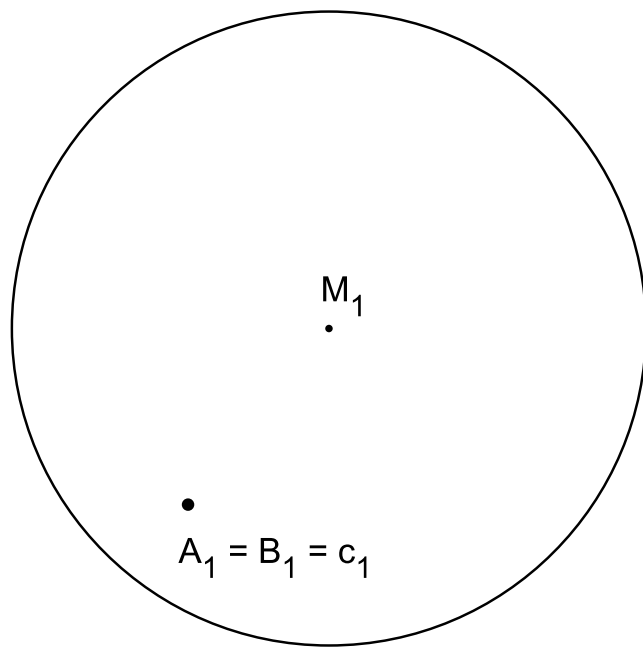
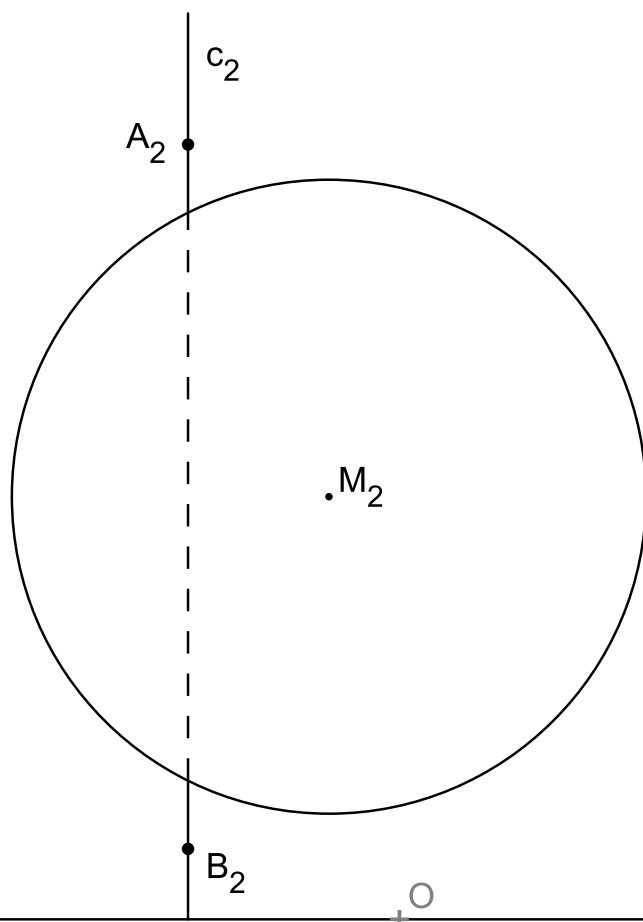
Příklad 2.9



Příklad 2.10

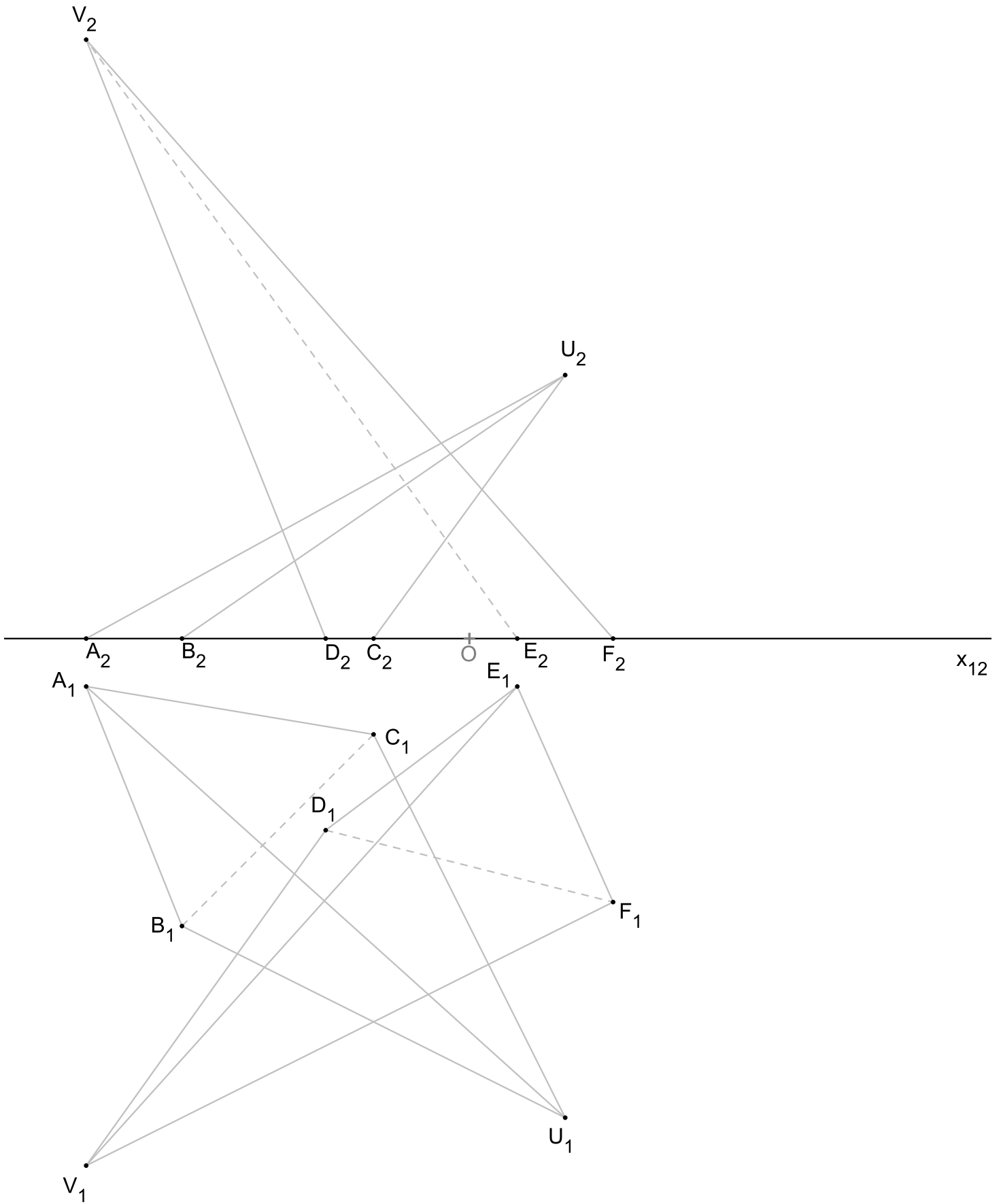


Příklad 2.11

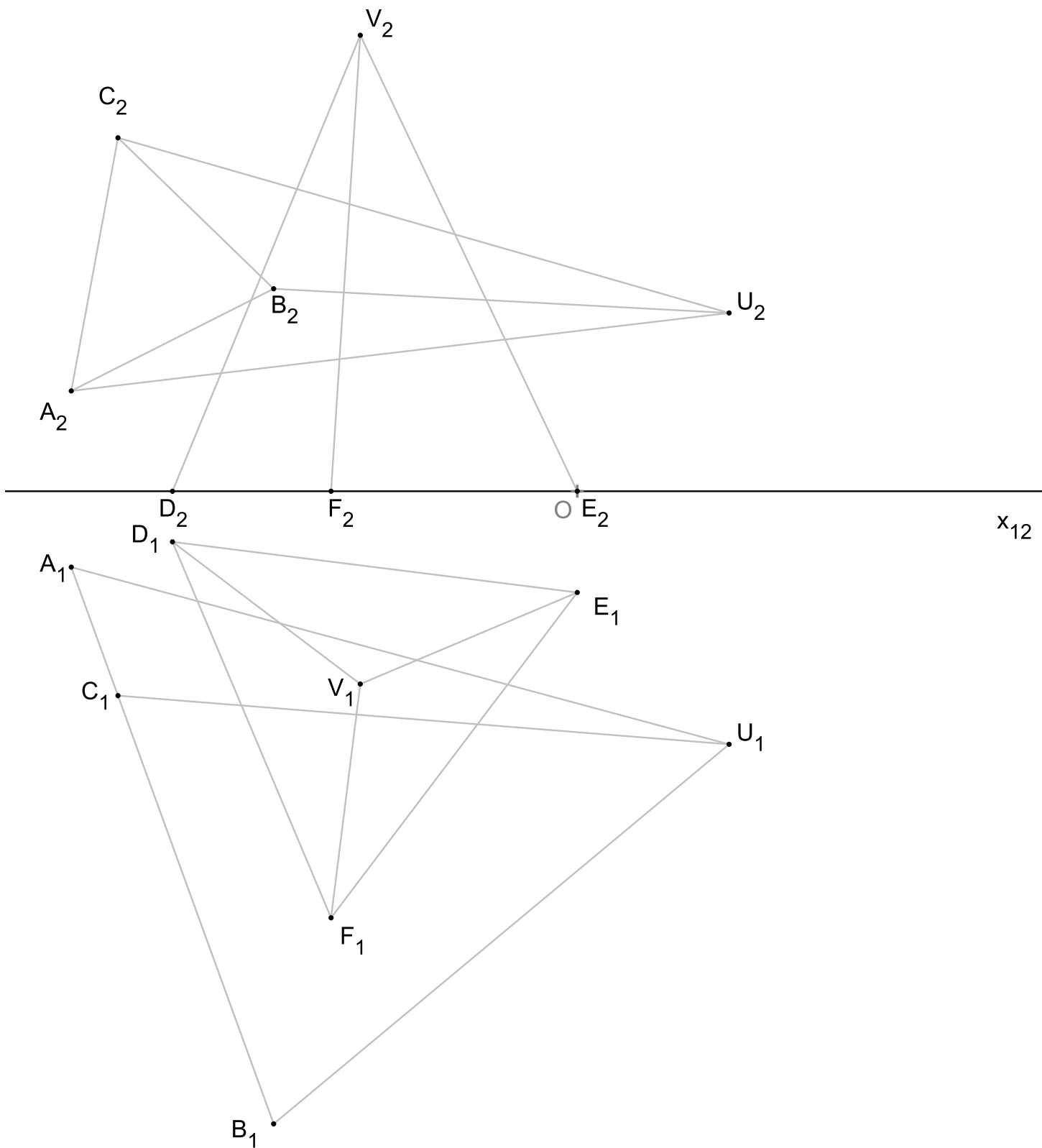


x_{12}

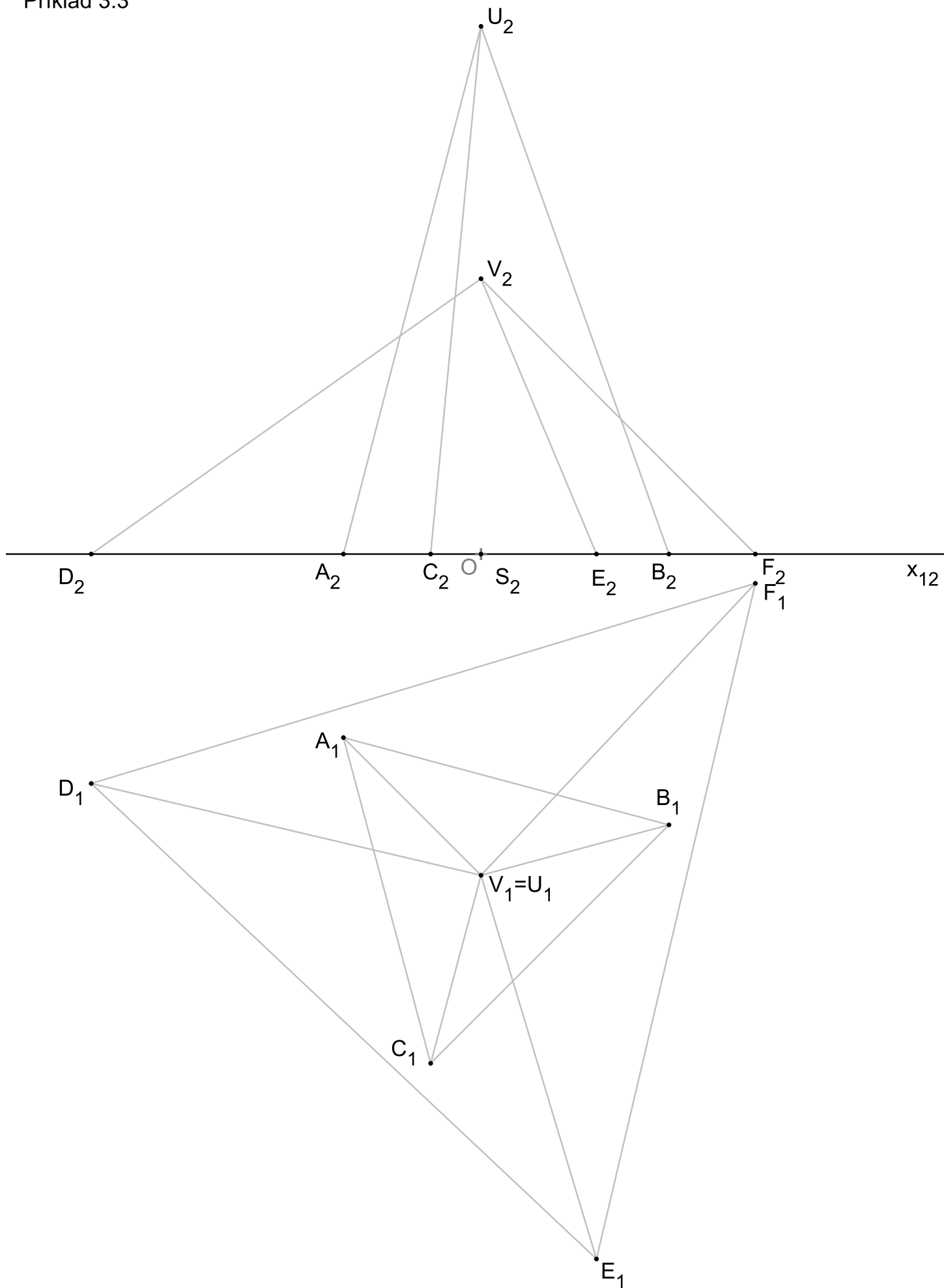
Příklad 3.1



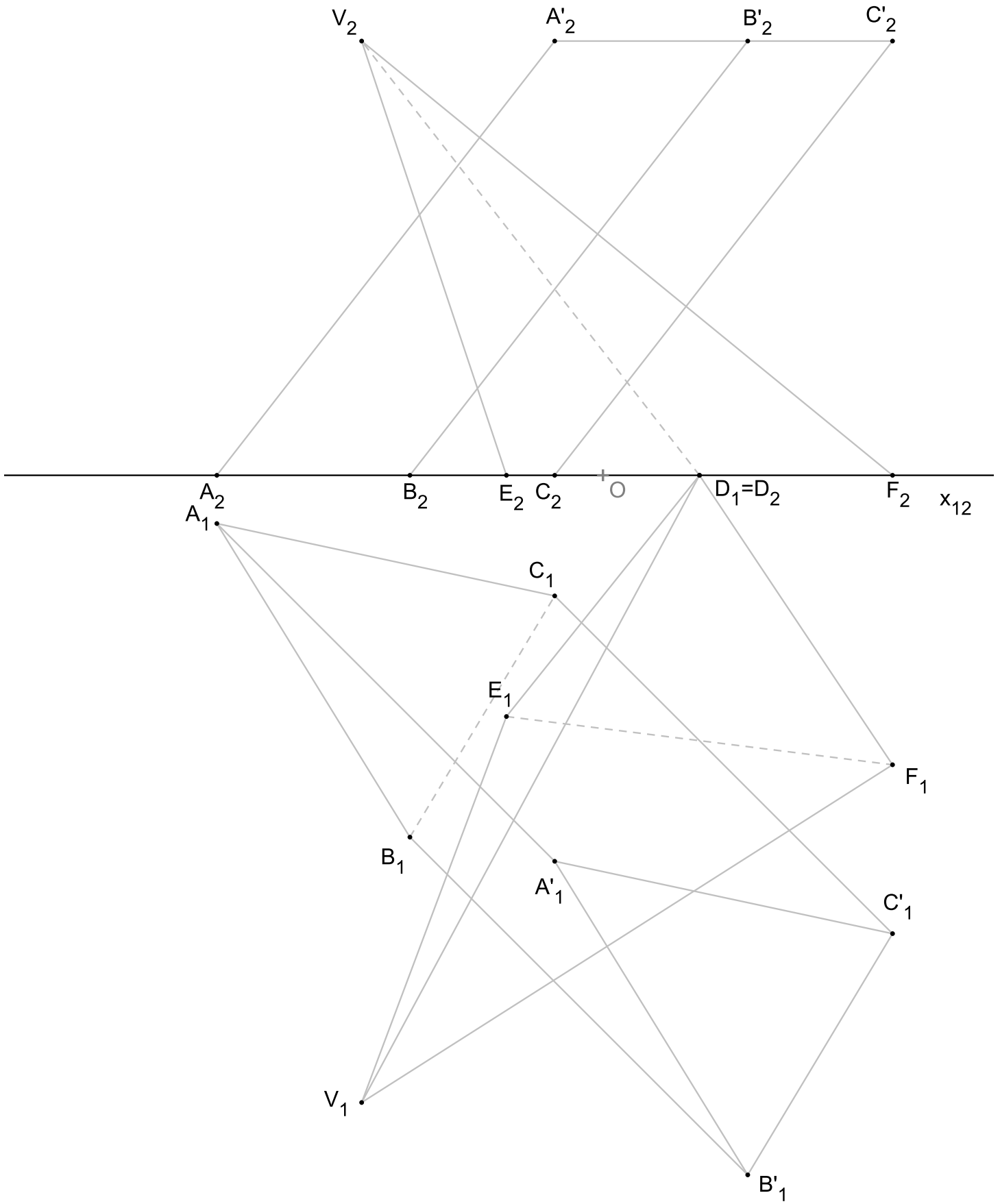
Příklad 3.2



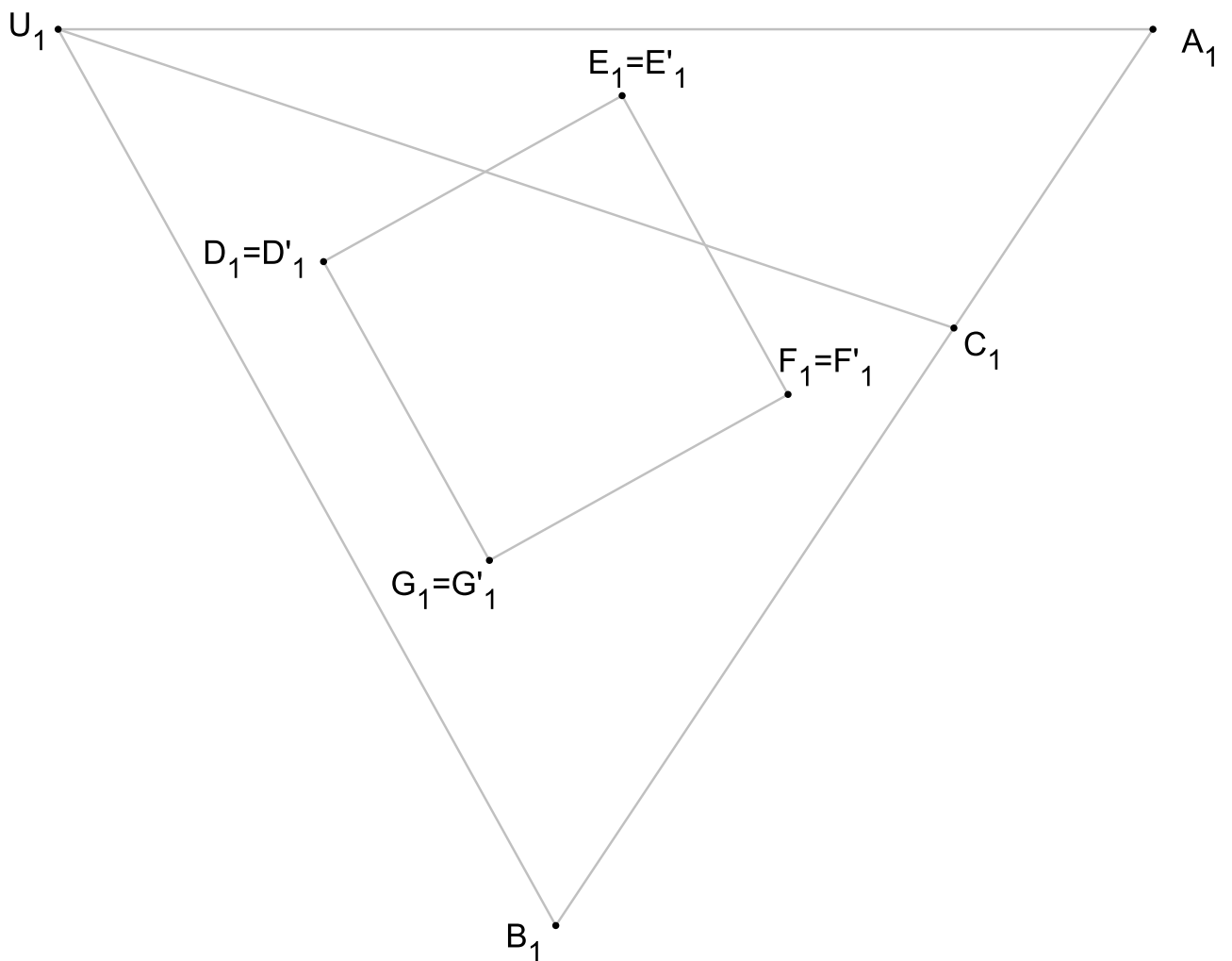
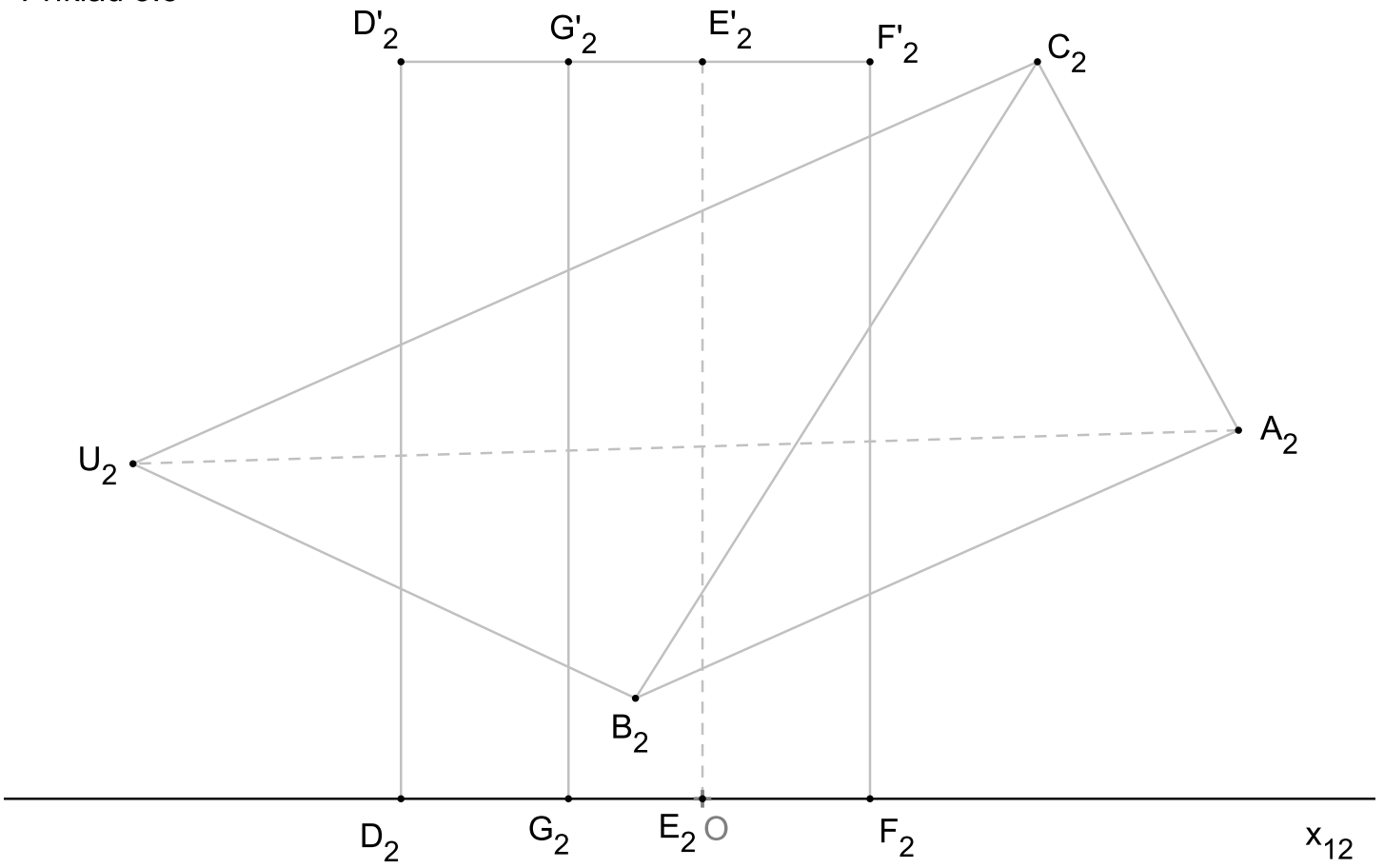
Příklad 3.3



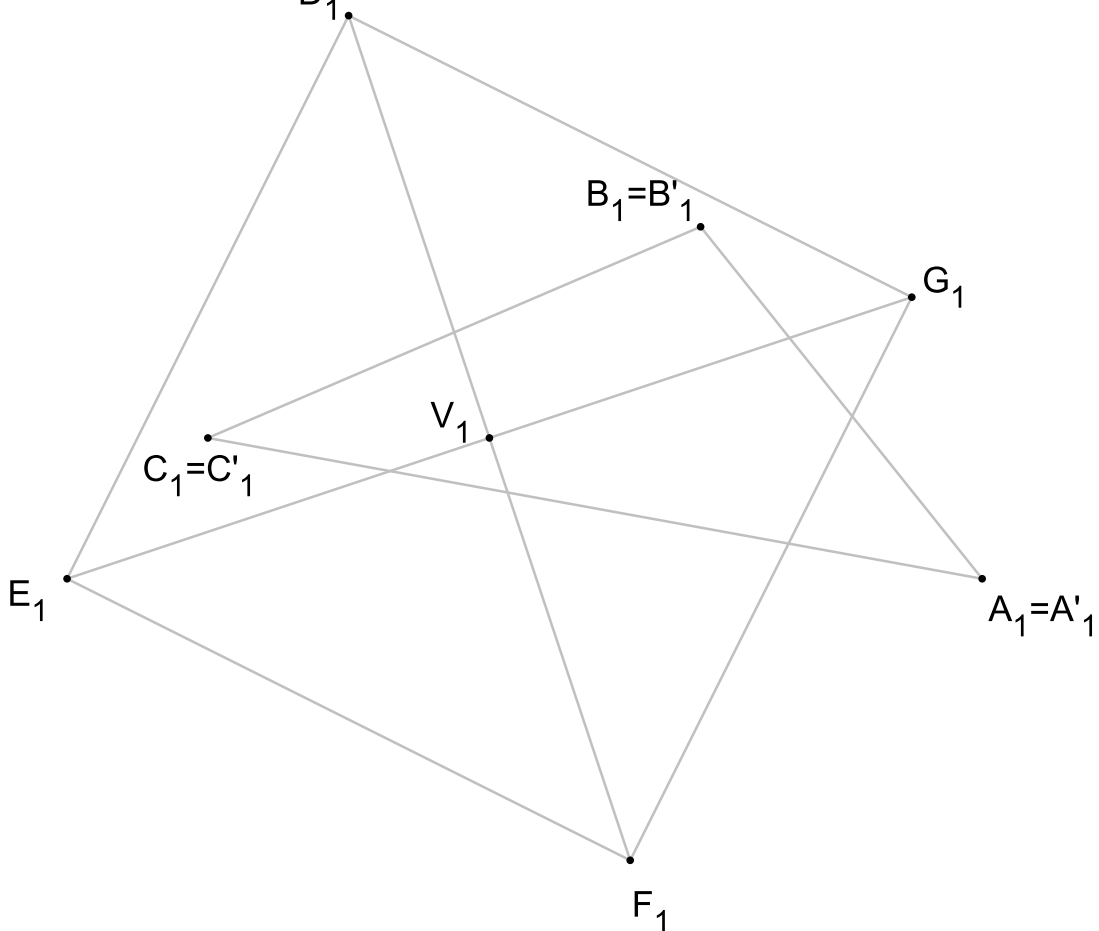
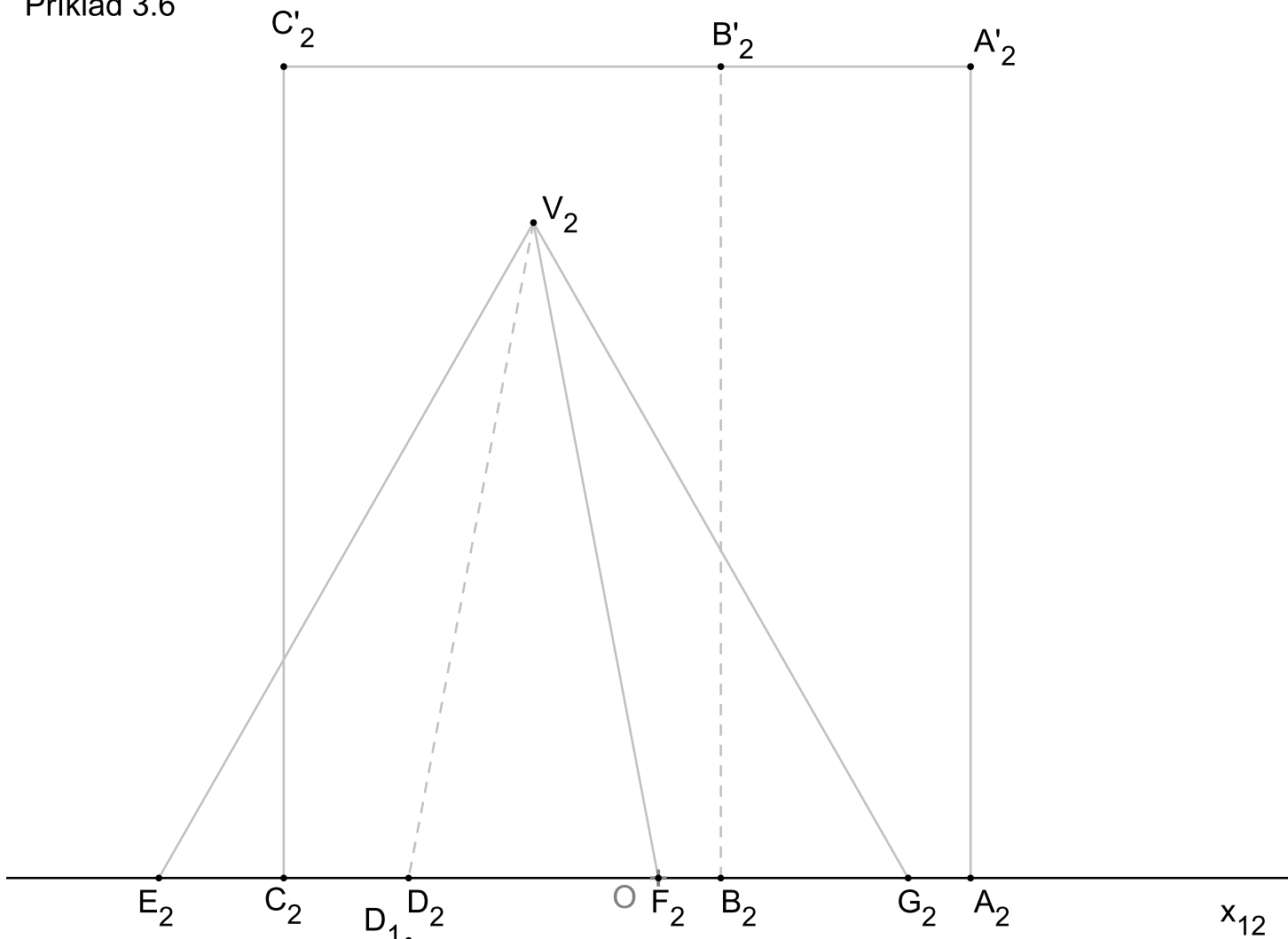
Příklad 3.4



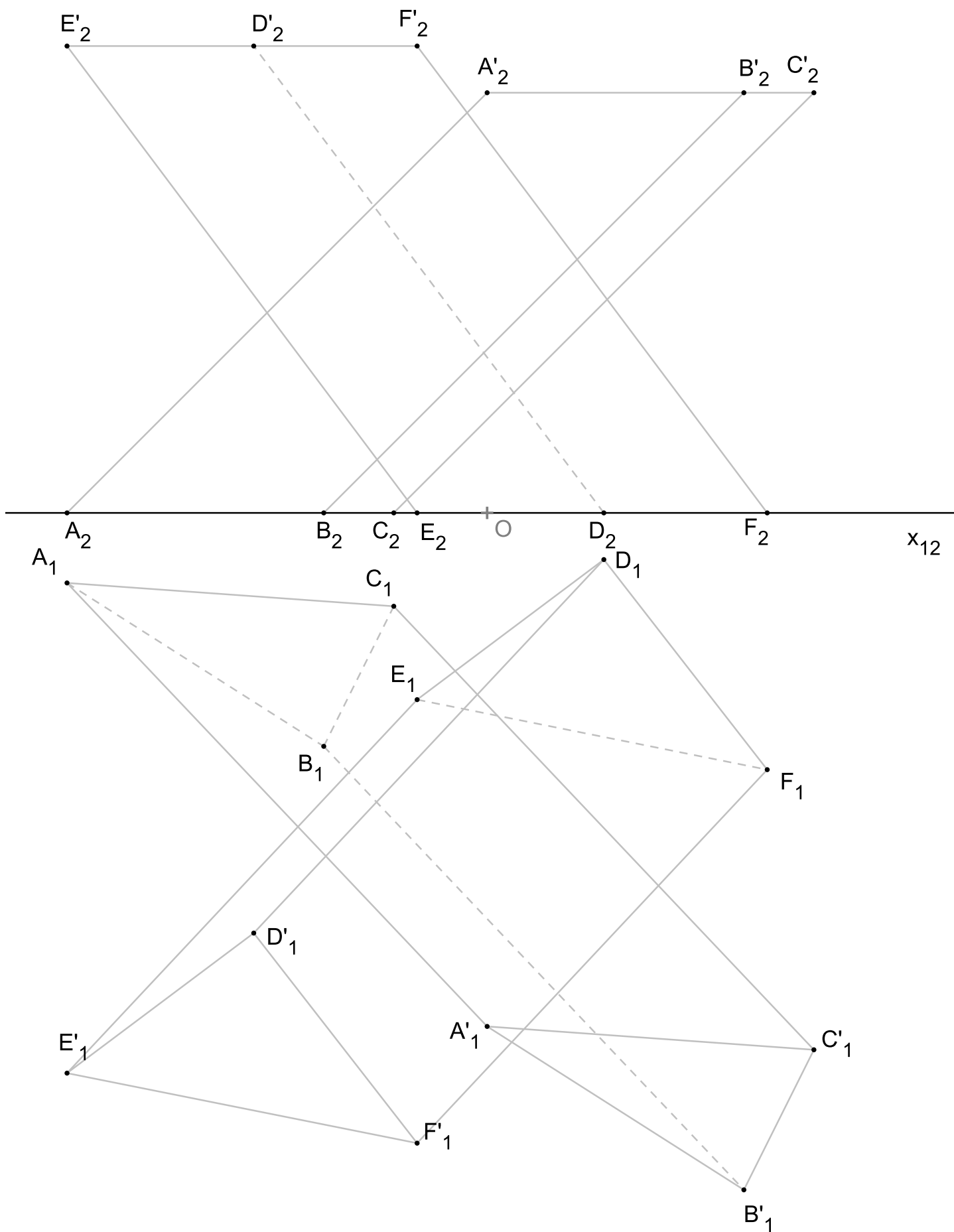
Příklad 3.5



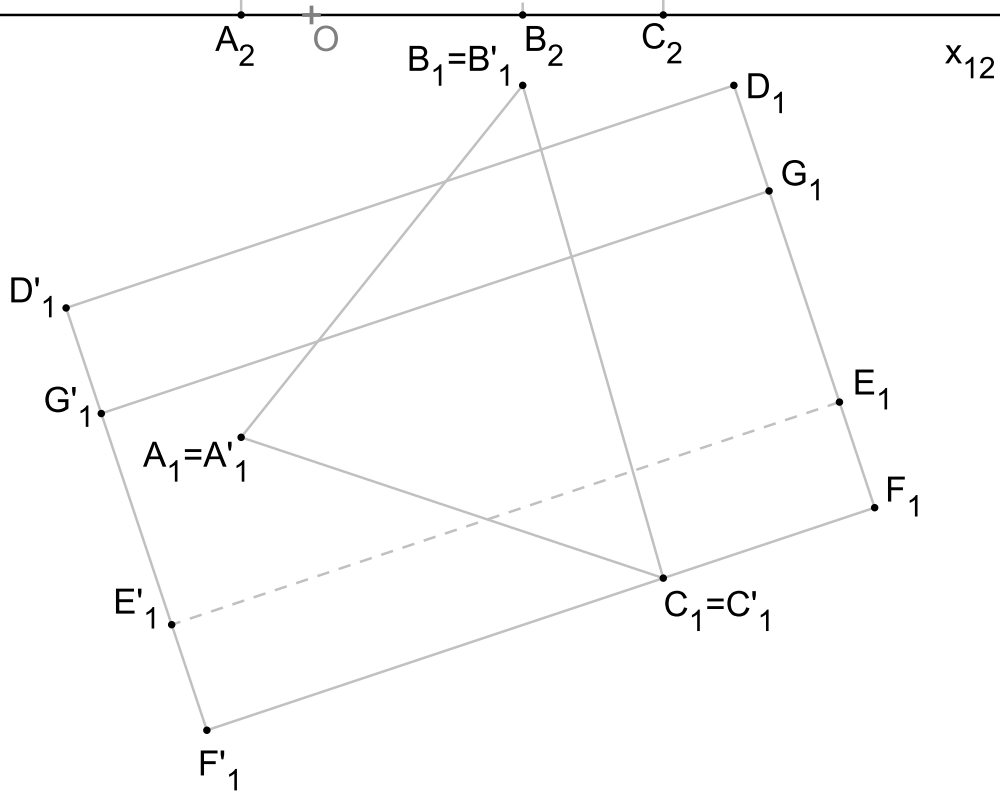
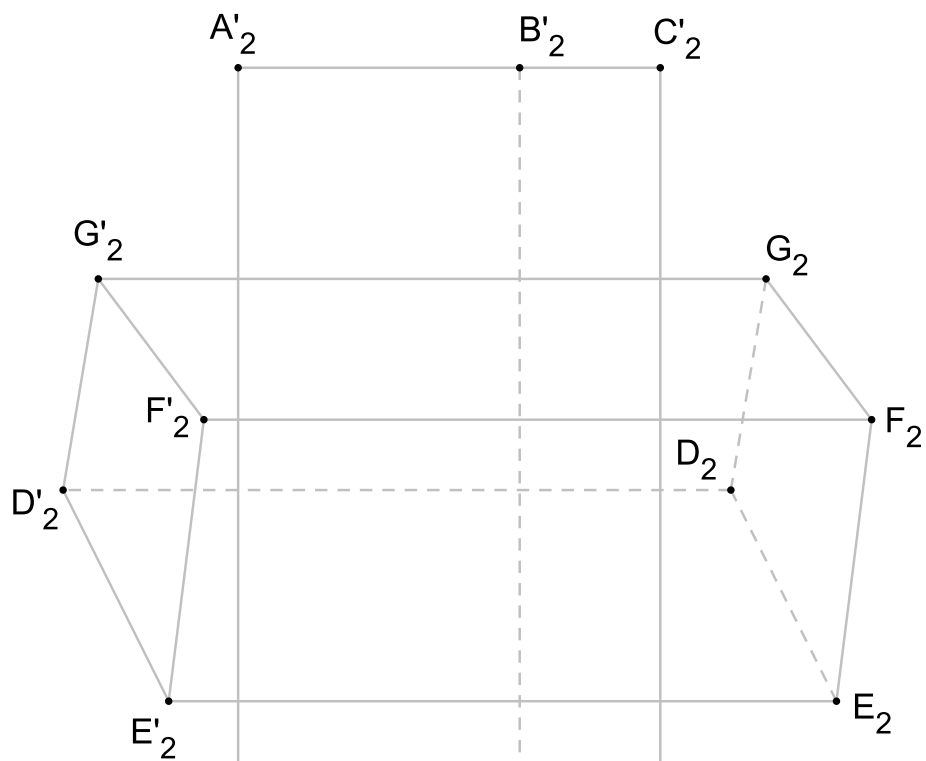
Příklad 3.6



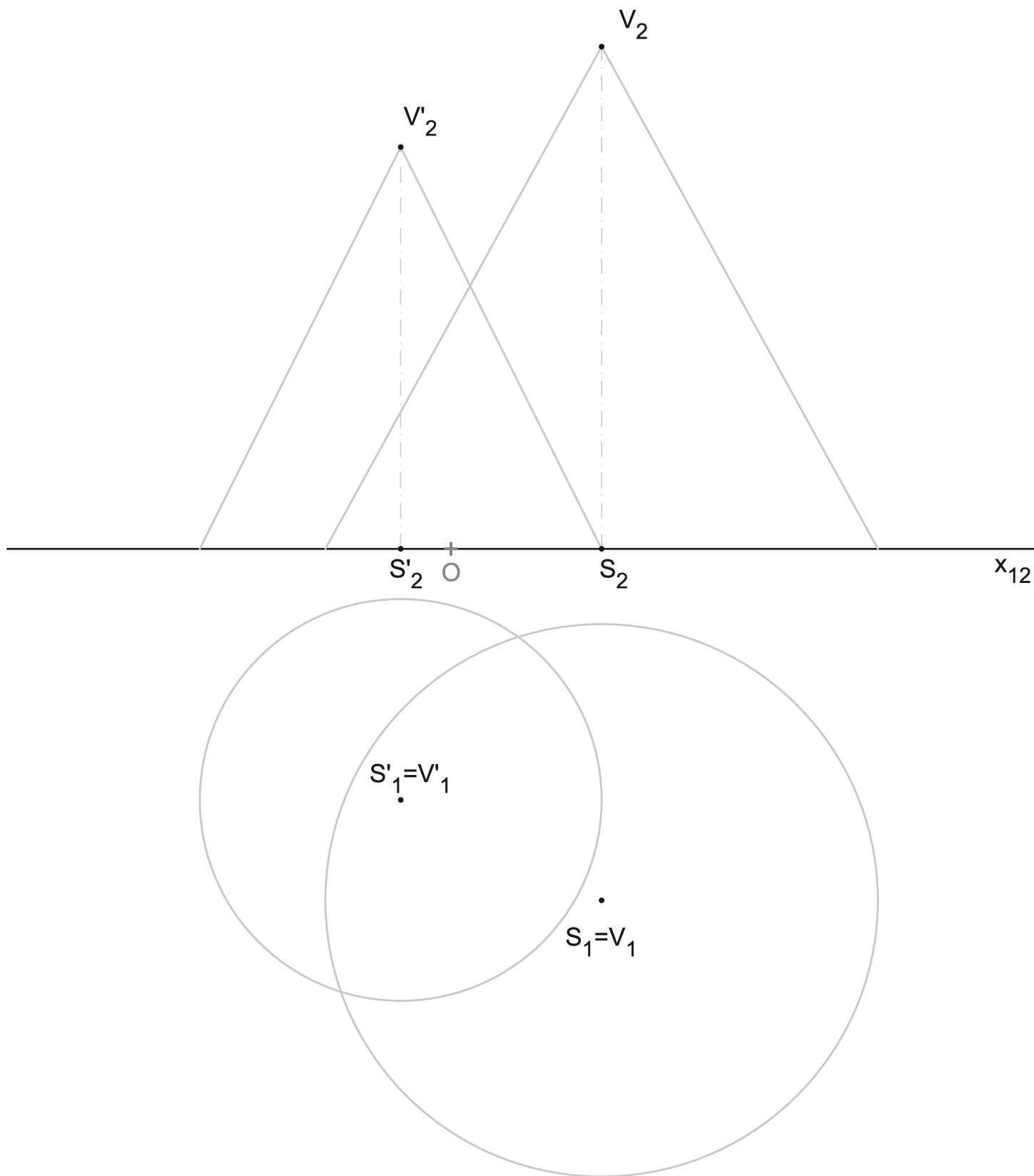
Příklad 3.7



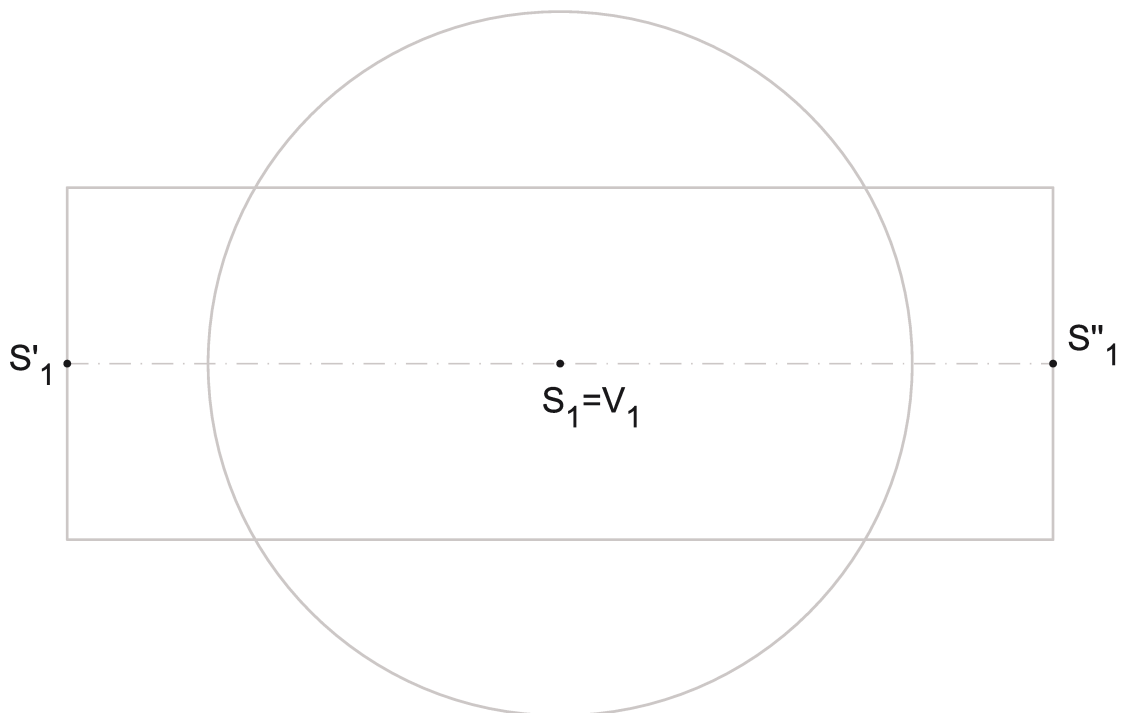
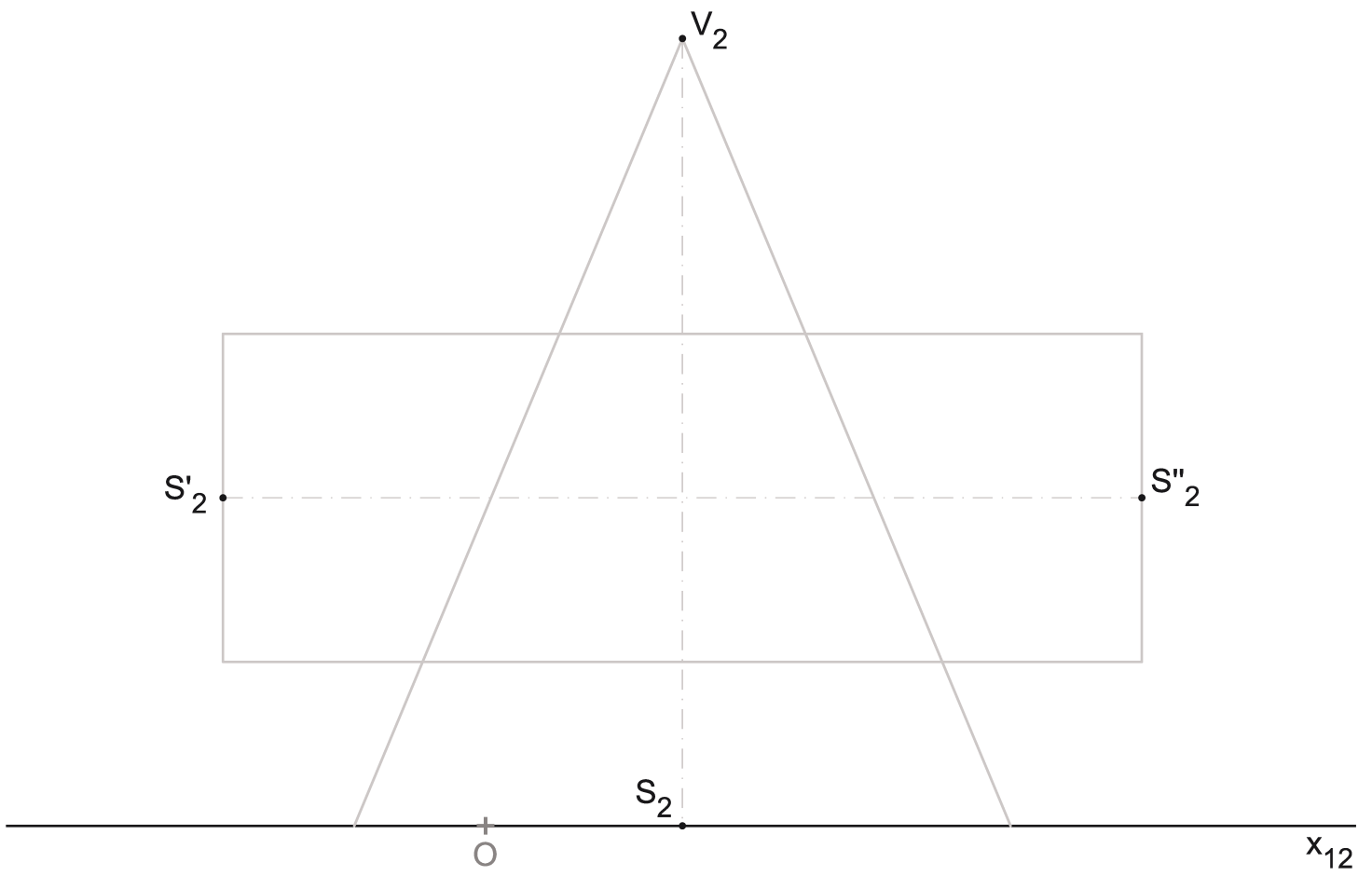
Příklad 3.8



Příklad 4.1



Příklad 4.2



Příklad 5.1

