

Jonathan Verner: Topologically distinct ultrafilters

Roku 1937 dokázali E. Čech a M.H. Stone existenci kompaktních prostorů, jejichž vlastnosti byly naprosto neočekávané a do značné míry kontraintuitivní. Čechova-Stoneova kompaktifikace se stala intenzivně studovaným předmětem a její speciální případ, prostor $\beta\omega$, Čechova-Stoneova kompaktifikace diskretního prostoru přirozených čísel, byla vyšetřována ještě intenzivněji, než jiné. Roku 1956 dokázal Walter Rudin, že její podprostor $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ není homogenní za předpokladu Hypotézy Kontinua, o jedenáct let později dokázal totéž tvrzení Zdeněk Frolik bez dodatečných množinových předpokladů. V dalších letech následovaly práce mnoha dalších matematiků, ve kterých byly zavedeny topologické vlastnosti bodů v prostoru ω^* , a dány důkazy, že některé body tohoto prostoru příslušnou vlastnost mají, jiné nikoli. Paralelně s tímto směrem výzkumu se přirozeně otevřelo studium, jak je existence některých těchto bodů závislá na axiomatice teorie množin.

Diplomant vycházel z článku [vM82], kde Jan van Mill ukázal mj. existenci bodu v ω^* , který, ač je hromadným bodem nějaké spočetné množiny, není hromadným bodem žádné diskretní spočetné množiny. O tomto konkrétním příkladu lze navíc snadno dokázat, že je společným hromadným bodem dvou disjunktních spočetných množin. Pan Verner se pokusil najít bod s vlastnostmi, které pro svůj bod požadoval van Mill, avšak navíc požadoval, aby spočetné množiny, obsahující tento bod v uzávěru, tvořily centrováný systém. Tomuto problému je diplomní práce cele věnována.

Hlavním výsledkem práce je ekvivalence, která existenci takového bodu převádí na existenci spočetného extrémně nesouvislého prostoru, který má všechny neprázdné otevřené podmnožiny irresolvabilní a jehož Čechova-Stoneova kompaktifikace obsahuje slabý P-bod, který je současně remote (Věty 6.3 a 6.4), spolu s Větou 6.5, kde je dokázáno, že příslušný slabý P-bod nemůže vzniknout pomocí standardní Kunenovy konstrukce ω_1 -O.K. bodu. Práce tedy přináší velice podstatnou redukci původní otázky a ukazuje meze, které Kunenova metoda nemůže překonat. Uvážíme-li, že existují slabé P-body, které nejsou ω_1 -O.K., avšak žádný z dosud známých nebyl sestrojen bez dodatečných předpokladů o teorii množin, jsou hlavní tvrzení práce nesporně maximem možného pro pouhou diplomní práci. Není třeba podotýkat, že k práci v této oblasti je dnes již nezbytné zvládnout velice komplikované topologické a kombinatorické techniky, což se panu Vernerovi skutečně zdařilo a jejichž souhrn spolu s některými vlastními zesíleními je obsahem prvním pěti kapitol.

Závěr. Předložená diplomová práce svědčí o tom, že pan Jonathan Verner kvalitně zvládl zvolenou problematiku, prokázal jak schopnost samostatné práce s literaturou, tak schopnost řešit problémy. Doporučuji tuto diplomovou práci klasifikovat stupněm “výborně”.

V Praze, 25. června 2007

Prof. RNDr Petr Simon, DrSc.