

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁRSKA PRÁCA**

Janka Porvichová

# **Dotykové grafy kružnic a Möbiove transformácie**

Katedra aplikované matematiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Peter Zeman

Študijný program: Informatika

Študijný obor: Obecná informatika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Ďakujem vedúcemu práce Mgr. Petrovi Zemanovi za jeho obetavý prístup, odbornú pomoc, ochotu pri konzultáciách a venovaný čas. Poďakovanie patrí aj mojej rodine za podporu a pochopenie.

Název práce: Dotykové grafy kružnic a Möbiovy transformace

Autor: Janka Porvichová

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Peter Zeman, Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: Graf lze reprezentovat různými geometrickými reprezentacemi. V této práci se věnujeme reprezentaci grafů pomocí circle packingu (dotykových kružnic). Rozebereme důležité koncepty potřebné pro dokázání klíčových výsledků ohledně této reprezentace. Představíme konkrétní známý důkaz existence circle packingu pro rovinné grafy a existence primal-dual circle packingu pro 3-souvislé grafy. Dále se budeme zabývat složitostí problému rozšíření reprezentace při zadaném částečném circle packingu. Rozebereme důkaz věty, která říká, že rozhodnout, zda lze nalézt takové rozšíření, je NP-těžký problém. Představíme vlastní teoretický algoritmus pro konstrukci rozšíření založený na real RAM stroji.

Klíčová slova: geometrické reprezentace grafů, circle packing, primal-dual circle packing, složitost, Möbiovy transformace

Title: Circle packing and Möbius transformations

Author: Janka Porvichová

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: Mgr. Peter Zeman, Department of Applied Mathematics

Abstract: A graph can be represented by various geometric representations. In this work we focus on the circle packing representation. We state various concepts important for proving results regarding this kind of representation. We introduce a known proof of existence of a circle packing for planar graphs and a proof of existence of a primal-dual circle packing for 3-connected graphs. Next, we focus on computational complexity of extending the representation for a given partial circle packing. We examine the proof of the theorem stating that deciding whether such an extension exists is an NP-hard problem. We introduce our theoretical algorithm for extension construction based on real RAM machine.

Keywords: geometric representation of graphs, circle packing, primal-dual circle packing, computational complexity, Möbius transformations

Názov práce: Dotykové grafy kružníc a Möbiove transformácie

Autor: Janka Porvichová

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Peter Zeman, Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: Graf môžeme reprezentovať rôznymi geometrickými reprezentáciami. V tejto práci sa venujeme reprezentácii grafov pomocou circle packingu (dotykových kružníc). Rozoberieme dôležité koncepty potrebné pre dokázanie kľúčových výsledkov ohľadne tejto reprezentácie. Predstavíme konkrétny známy dôkaz existencie circle packingu pre rovinné grafy a existenciu primal-dual circle packingu pre 3-súvislé rovinné grafy. Ďalej sa budeme zaoberať zložitou problémom rozšírovania reprezentácie pri zadanom čiastočnom circle packingu. Rozoberieme dôkaz vety, ktorá hovorí, že rozhodnúť, či je možné nájsť také rozšírenie, je NP-ťažký problém. Predstavíme vlastný teoretický algoritmus pre konštrukciu rozšírenia založený na real RAM stroji.

Kľúčové slová: geometrické reprezentácie grafov, circle packing, primal-dual circle packing, zložitost', Möbiove transformácie

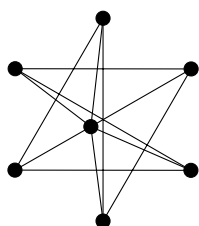
# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
1.1	Geometrické reprezentácie . . . . .	2
1.2	Rozširovanie . . . . .	5
1.3	Obsah tejto práce . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Základné pojmy</b>	<b>7</b>
2.1	Rovinné grafy a geometria . . . . .	7
2.2	Komplexné čísla . . . . .	9
2.3	Riemannova sféra . . . . .	11
2.4	Möbiove transformácie . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Circle packing veta</b>	<b>15</b>
3.1	Myšlienka dôkazu . . . . .	15
3.2	Existencia circle packingu . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Primal-dual circle packing</b>	<b>24</b>
4.1	Úvod . . . . .	24
4.2	Konštrukcia PDCP . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Rozširovanie čiastočného circle packingu</b>	<b>36</b>
5.1	NP-ťažkosť rozširovania . . . . .	36
5.2	Rovinné triangulácie . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>43</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>44</b>

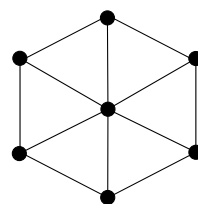
# 1. Úvod

## 1.1 Geometrické reprezentácie

Graf je matematická štruktúra, ktorá opisuje vzťahy medzi párami objektov určitej množiny. Graf značíme ako usporiadanú dvojicu  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je množina objektov, ktoré nazývame vrcholy. Množina  $E$  popisuje vzťahy medzi objektami. Tieto vzťahy nazývame hrany. Graf môžeme zapísať abstraktne ako na Obrázku 1.1 v strede, alebo reprezentovať vizuálne. Vizualizáciu grafu  $G$  nazývame reprezentácia, nakreslenie alebo graf. Najznámejšia je Petersonova reprezentácia (Obrázok 1.1 vľavo a vpravo).



$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, \dots, v_7\} \\ E(G) &= \{v_i v_{i+1} \mid \forall i : 1 \leq i \leq 5\} \cup \\ &\quad \{v_i v_7 \mid \forall i \in \{1, \dots, 6\}\} \cup \\ &\quad \{v_1 v_6\} \end{aligned}$$



Obr. 1.1: Jeden graf reprezentovaný tromi spôsobmi. Jedným z dôvodov skúmania rôznych reprezentácií je pochopenie štruktúry grafu. Reprezentácia vpravo nám o štruktúre grafu napovie viac ako reprezentácia vľavo.

**Geometrické prienikové grafy.** Vrcholom môžeme priradiť geometrické objekty a hrany môžeme vyjadriť prienikmi týchto geometrických objektov. Formálnejšie môžeme geometrický prienikový graf  $\mathcal{R}$  množiny  $X$  opísať ako súbor takých množín  $\{R_v \mid v \in V(G)\}$ , že  $|R_v \cap R_u| \neq \emptyset$  práve vtedy, ak  $uv \in E(G)$ . Najznámejšie geometrické triedy prienikových grafov sú intervalový graf, circle graf, string graf, circular-arc graf, funkčné grafy a permutačné grafy. V tejto sekcii vychádzame prevažne z [15, 37, 38].

Nech  $\mathcal{C}$  je trieda grafov a  $\mathcal{R}$  je trieda geometrických reprezentácií. Trieda grafov sú napríklad rovinné grafy, bipartitné grafy a trieda reprezentácií je napríklad circle packing. Potom je prirodzené sa pýtať, či  $G \in \mathcal{C}$  sa dá reprezentovať reprezentáciou  $R \in \mathcal{R}$ .

**Problém :** Recognition of  $\mathcal{C}$  -  $\text{RECOG}(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ .

**Input :** Graf  $G$ .

**Output :** Reprezentácia  $R \in \mathcal{R}$  grafu  $G$ , ak  $G$  patrí do  $\mathcal{C}$ , inak "false".

**Intervalové grafy.** Intervalový graf je prienikový graf tvorený intervalmi reálnych čísel. Intervalové grafy sú jedna z najstarších a najznámejších tried grafov. Prvý krát ich vo svojej práci predstavil Hajós [10]. Veľa ťažkých kombinatorických problémov ako farbenie vrcholov, maximálna nezávislá množina a maximálna klika sú pre intervalové grafy zvládnuteľné v polynomiálnom čase. V minulosti boli intervalové grafy používané v genetike, psychológii, architektúre (napríklad [2, 14, 31]). Príklad intervalového grafu môžeme vidieť na Obr. 1.2.



Obr. 1.2: Naľavo graf  $G$  a napravo jeho intervalový graf.

**Circle grafy.** Circle graf je prienikový graf, ktorý pozostáva z tetív kružnice. Circle grafy prvýkrát spomenuli Even a Itai [8]. Príklad circle grafu môžeme vidieť na Obr. 3.4.



Obr. 1.3: Naľavo graf  $G$  a napravo jeho circle graf.

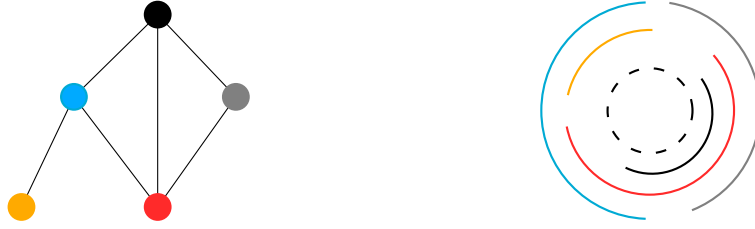
**String grafy.** String graf je prienikový graf, ktorý pozostáva z kriviek v rovine, tie sa nazývajú "strings". Pre každé tri krivky platí, že sa nepretínajú v jednom bode. Prvýkrát ich v roku 1976 predstavili Ehrlich, Even a Tarjan [7]. Až v roku 1991 dokázal Kratochvíl, že problém rozpoznávania string grafov je NP-ťažký [19]. To, že problém rozpoznávania string grafov je v NP triede dokázali až o viac ako desaťročie neskôr Schaefer, Sedgwick a Štefankovič [33]. Príklad string grafu je na Obr. 1.4.



Obr. 1.4: Naľavo graf  $G$  a napravo jeho string reprezentácia.

**Circular-arc graf.** Circular-arc graf je prienikový graf tvorený poloblúkmi kružnice. Problém rozpoznávania circle-arc grafov v lineárnom čase dokázal McConnell [13, 23]. Ak sa na kružnici circular-arc grafu (Obr. 1.5) nachádza bod, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnom poloblúku, potom môžeme kružnicu v tomto bode rozrezať a natiahnuť. Tým získame intervalový graf. Práca so circle-arc grafmi je náchylná na chyby. Zatiaľ čo maximálne kliky v intervalových grafoch sa správajú dobre, v circle-arc grafoch to neplatí.





Obr. 1.5: Naľavo graf  $G$  a napravo jeho circular-arc graf Kruh je naznačený prerušovanou čiarou.

**Kontaktné grafy.** Podmnožinou prienikových grafov sú *kontaktné grafy*. Vrcholy grafu sú tiež geometrické objekty ako krivky, úsečky alebo mnohoúhelníky. Hrany nie sú reprezentované pretínaním objektov, ale ich dotykom. Nie každý rovinný graf má reprezentáciu z nejakej triedy kontaktných reprezentácií. Napríklad všetky rovinné grafy majú circle packing reprezentáciu (Definícia 1.2) viz kapitolu 3, ale len bipartitné grafy majú grid reprezentáciu (Definícia 1.1) viz kapitolu 5.

**Grid graf.** Grid graf je kontaktný graf reprezentovaný vertikálnymi a horizontálnymi úsečkami (Obr. 1.6). De Fraysseix et al. dokázal [30], že každý bipartitný rovinný graf má takúto reprezentáciu. Grid reprezentácia môže byť skonstruovaná v polynomiálnom čase.

**Definícia 1.1.** *Nech  $G = (V \cup H, E)$  je rovinný bipartitný graf a  $n_1 = |V|$ ,  $n_2 = |H|$ . Kontaktná reprezentácia grafu  $G$  obsahuje vertikálne úsečky, ktoré reprezentujú množinu vrcholov  $|V|$  a horizontálne úsečky, ktoré reprezentujú množinu vrcholov  $|H|$ . Úsečky budeme značiť rovnakými symbolmi ako prislúchajúce vrcholy. Zároveň platí:*

1. Žiadne úsečky rovnakého smeru sa nepretínajú.
2. Žiadne dve úsečky sa nekrížia.
3. Úsečky  $u, v$  sa pretínajú práve vtedy, ak  $uv \in E$ .



Obr. 1.6: Naľavo bipartitný graf  $G$  a napravo jeho grid graf.

**Circle packing** Circle packing je kontaktný graf reprezentovaný kružnicami (Obr. 1.7). Circle packing spája spojitý svet s diskretným. V roku 1985 Thurston vyslovil domnienku, že pomocou circle packingu môžeme aproximovať konformné zobrazenia. Poznáme existenčné dôkazy circle packingu, ktoré využívajú bod v nekonečne [1, 36], ale aj konštrukčné dôkazy [5], ktoré využívajú konvergenciu.

**Definícia 1.2.** *Nech  $G$  je rovinný graf. Circle packing (skrátene CP) grafu  $G$  je množina kružníc  $\{C_v \mid v \in V(G)\}$  v rovine, taká že:*

1. *Kruhy obmedzené kružnicou  $C_v, v \in V(G)$  sú po dvoch disjunktné.*
2. *Kružnice  $C_u$  a  $C_v, u, v \in V(G)$  sa pretínajú práve vtedy, ak  $uv \in E(G)$ .*
3. *Ak vložíme vrcholy  $v \in V(G)$  do stredov prislúchajúcich kružníc  $C_v$  a hrany  $uv \in E(G)$  skonštruujeme tak, že stredy kružníc spojíme úsečkou prechádzajúcou cez priesečník  $C_u \cap C_v$ , získame rovinné nakreslenie  $H$  grafu  $G$ , ktoré je ekvivalentné  $G$  (teda existuje homeomorfizmus medzi  $H$  a  $G$ ).*

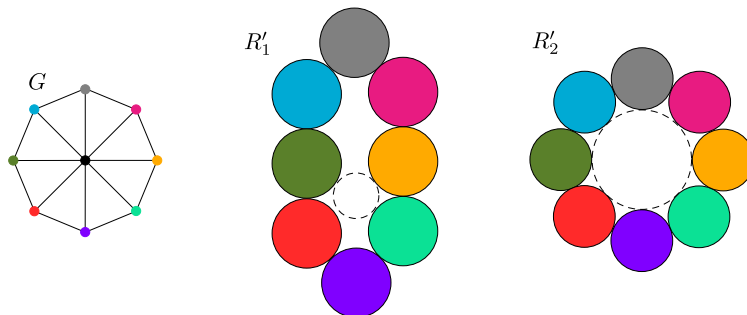
Prienikový intervalový graf môžeme upraviť tak, že každý interval bude ohraničený celými číslami a neporušíme tým štruktúru grafu. Pri circle packingu to nejde, pretože každá hrana je definovaná len bodom dotyku kružníc, ktorý môže byť iracionálne číslo. Pri výpočtoch na počítači, tak musíme body aproximovať.



Obr. 1.7: Nalavo graf  $G$  a napravo jeho circle packing.

## 1.2 Rozširovanie

Pri probléme rozširovania geometrickej reprezentácie grafu, na vstupe dostávame okrem grafu  $G$  aj jeho čiastočnú reprezentáciu  $R'$ . Tá je zároveň reprezentácia indukovaného podgrafu  $G'$  grafu  $G$ . Vrcholy  $V(G')$  a množinu  $R'$  označujeme ako predkreslené. Reprezentácia  $R$  je rozšírenie  $R'$  práve vtedy, ak vrcholom  $v \in V(G')$  priradí rovnaké hodnoty ako  $R'$ . Teda sa pýtame, či môžeme čiastočnú reprezentáciu  $R'$  rozšíriť na reprezentáciu  $R$  bez toho, aby sme pozmenili  $R'$ .



Obr. 1.8: Nalavo graf  $G$ , v strede čiastočná reprezentácia  $R'_1$ , vpravo  $R'_2$ . Čiastočnú reprezentáciu  $R'_1$  nie je možné rozšíriť, pretože nemôžeme pridať kružnicu pre čierny vrchol tak, aby sa dotýkala so všetkými vrcholmi na vonkajšom cykle (naznačené prerušovanou čiarou). Naproti tomu čiastočnú reprezentáciu  $R'_2$  môžeme rozšíriť.

**Problém :** Partial Representation Extension of  $\mathcal{C}$  - PRExt( $G$ ).

**Input :** Graf  $G$ , čiastočná reprezentácia  $R'$ .

**Output :** Čiastočná reprezentácia  $R$  grafu  $G$ , ak rozširuje  $R'$ , inak "false".

Zložitosť problému rozširovania reprezentácie intervalových grafov má časovú zložitosť  $\mathcal{O}(n + m)$  [16, 17]. Pre circle grafy je možné tento problém rozhodnúť v polynomiálnom čase [4]. Avšak pre string grafy [20] a circle packing je to NP-ťažký problém a pre grid grafy NP-úplný [3]. Problém rozširovania čiastočnej reprezentácie circle-arc grafu je otvorený problém.

### 1.3 Obsah tejto práce

V tejto práci sa zaoberáme rôznymi aspektami rozširovania geometrickej reprezentácie grafov – konkrétne grafmi reprezentovanými circle packingom. V kapitole 2 uvedieme a vysvetlíme základné pojmy a definície nutné pre budovanie ďalších kapitol. V kapitole 3 predstavíme jednu verziu dôkazu vety, že každý súvislý rovinný graf je možné reprezentovať pomocou circle packingu. V kapitole 4 predstavíme Moharov dôkaz vety, že každý 3-súvislý rovinný graf má primal-dual circle packing. V kapitole 5 sa pozeráme na rozširovanie kontaktných reprezentácií pohľadom výpočetnej zložitosti.

Hlavným prínosom tejto práce je ucelené zhrnutie a úvod do problematiky circle packingu a jeho rozširovania. V rade publikovaných dôkazov týkajúcich sa tejto problematiky, chýbajú niektoré detaily, ktoré sťažujú celkové pochopenie. V práci sa ich pokúsime doplniť.

Ďalej v kapitole 5 navrhujeme vlastný teoretický algoritmus na rozširovanie čiastočného circle packingu triangulácie grafu, založený na výpočetnom modeli real RAM.

## 2. Základné pojmy

V tejto kapitole definujeme základné pojmy a dokážeme pomocné vety, ktoré budeme využívať v ďalších kapitolách. Vychádzame pritom z [6, 12, 22, 28]

### 2.1 Rovinné grafy a geometria

Definujeme základné pojmy z oblasti rovinných grafov a geometrie.

**Definícia 2.1.** Graf  $G$  je usporiadaná dvojica  $(V, E)$ , kde  $V$  je nejaká neprázdna množina a  $E$  je množina dvojbodových podmnožín množiny  $V$ . Prvky množiny  $V$  sa nazývajú vrcholy grafu  $G$  a prvky množiny  $E$  hrany grafu  $G$ . Steny grafu  $G$  sa označujú  $F(G)$ .

**Definícia 2.2.** Graf  $H$  je podgrafom grafu  $G$ , ak  $V(H) \subseteq V(G)$  a  $E(H) \subseteq E(G)$ . Graf  $H$  je indukovaný podgraf grafu  $G$ , ak  $V(H) \subseteq V(G)$  a  $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$ .

**Definícia 2.3.** Nech  $G$  je graf s rovinným nakreslením, s množinou vrcholov  $V$ , množinou hrán  $E$  a množinou stien  $F$ . Definujme graf tvaru  $(F, E, \varepsilon)$ , kde  $\varepsilon$  sa definuje predpisom  $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$ , ak hrana  $e$  je spoločnou hranicou stien  $F_i$  a  $F_j$  (môže sa stať, že  $F_i = F_j$ , ak z oboch strán hrany  $e$  je rovnaká stena). Tento graf  $(F, E, \varepsilon)$  nazývame (geometrickým) duálom grafu  $G$  a značíme ho  $G^*$ .

**Definícia 2.4.** Rovinný graf  $G$  sa nazýva maximálny rovinný graf (triangulácia), ak pridaním hrany medzi dva neincidentné vrcholy  $u$  a  $v$ , vznikne graf, ktorý nie je rovinný.

**Definícia 2.5.** Kvadrangulácia je graf  $G$ , v ktorom každá stena  $f \in F(G)$  je štvorciklus.

**Definícia 2.6.** Súvislý graf  $G$  je  $k$ -súvislý, ak  $|V(G)| > k$  a zostane súvislý, aj po odobratí menej ako  $k$  vrcholov.

**Definícia 2.7.** Nech  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  sú afinné nezávislé, potom simplex definovaný týmito bodmi je množina bodov

$$S = \left\{ \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \text{ a } \alpha_i \geq 0 \text{ pre každé } i \right\}.$$

**Definícia 2.8.** Polytop je prienik konečne mnoho uzavrených polopriestorov v  $\mathbb{R}^n$ .

Ďalej uvedieme a dokážeme lemy, ktoré využijeme v nasledujúcich kapitolách.

**Lemma 2.1.** Rovinný graf  $G$  s  $n$  vrcholmi bez násobných hrán a slučiek má najviac  $2n - 4$  stien. Triangulácia má práve  $2n - 4$  stien.

*Dôkaz.* Ak graf  $G$  nie je maximálny rovinný graf, pridáme hrany až kým ne- vznikne triangulácia. Podľa Eulerovej formule platí rovnosť

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Keďže graf je triangulácia každá stena obsahuje 3 hrany a zároveň sa každá hrana nachádza na dvoch stenách, to nám dáva počet hrán

$$\frac{3|F|}{2} = |E|.$$

Po dosadení do Eulerovej formuly získame

$$|V| - |E| + |F| = 2,$$

$$n - \frac{3|F|}{2} + |F| = 2,$$

$$2n - 3|F| + 2|F| = 4,$$

$$|F| = 2n - 4.$$

□

**Lemma 2.2.** *Nech graf  $G$  je triangulácia s množinou vrcholov  $V(G) = v_1, \dots, v_n$  pro  $n > 3$ . Pre ľubovoľnú množinu  $U \subseteq V(G)$ , nech  $F(U)$  označuje množinu všetkých takých stien (včetně vonkajšej) grafu  $G$ , ktoré majú aspoň jeden vrchol patriaci do množiny  $U$ . Potom platí, že*

$$|F(U)| > 2|U|,$$

pre ľubovoľné  $U$  také, že platí  $1 \leq |U| \leq n - 3$ .

*Dôkaz.* Vezmime si množinu  $\bar{U} = V(G) \setminus U$  a množinu všetkých stien  $F(\bar{U})$  obsahujúcu aspoň jeden vrchol z  $\bar{U}$ . Keďže tieto vrcholy neindukujú kompletnú trianguláciu, z Lemmy 2.1 platí  $|F(\bar{U})| < 2|\bar{U}| - 4$ . Z tejto nerovnosti po dosadení  $|F(\bar{U})| = \text{počet stien v } G - |F(U)|$  a  $|\bar{U}| = |V(G)| - |U|$  odvodíme

$$2n - 4 - |F(U)| < 2(n - |U|) - 4,$$

$$2n - 4 - |F(U)| < 2n - 2|U| - 4,$$

$$2|U| < |F(U)|.$$

□

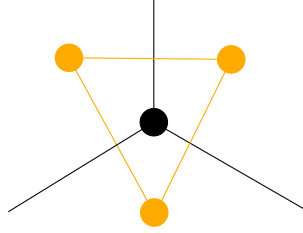
**Lemma 2.3.** *Nech  $G$  je 3-súvislý rovinný graf. Potom  $G$  alebo  $G^*$  obsahuje trojcyklus.*

*Dôkaz.* Ak graf  $G$  obsahuje trojcyklus, tak sme hotoví. Predpokladajme teda, že  $G$  obsahuje len steny, ktoré sú minimálne štvorciky. Teda platí

$$e \leq 2n - 4. \tag{2.1}$$

Ak graf  $G$  obsahuje vrchol s  $\deg(v) = 3$ . Potom duálny graf  $G^*$  bude obsahovať trojcyklus, ktorý prechádza cez hrany, ktoré vychádzajú z vrcholu  $v \in G$  (Obr. 2.1). Pre spor predpokladajme, že obsahuje len vrcholy s  $\deg(v) \geq 4$ . Súčet stupňov cez všetky vrcholy môžeme zdola a zhora odhadnúť na

$$4n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e, \tag{2.2}$$



Obr. 2.1: Trojcyklus v duálnom grafe  $G^*$ .

pretože každý vrchol príspeje aspoň hodnotou 4 a každá hrana je do súčtu započítaná práve dvakrát. Z (2.1) a (2.2) dostaneme

$$2n \leq e,$$

$$2n - 4 \geq e.$$

Dostali sme dve nerovnice, ktoré si odporujú. Potom máme spor s tým, že graf  $G$  neobsahuje vrchol s  $\deg(v) = 3$ . A teda vždy nájdeme trojcyklus v  $G$  alebo v  $G^*$ .  $\square$

**Lemma 2.4.** *Nech  $G$  je súvislý graf s  $n \geq 3$  vrcholov a s  $m$  hranami. Ak  $G$  neobsahuje trojuholníkové steny, potom platí  $m \leq 2n - 4$ . Platí s rovnosťou, ak  $G$  je kvadrangulácia.*

*Dôkaz.* Ak budeme prechádzať cez všetky steny, každú hranu prejdeme dvakrát (každá hrana je na dvoch stenách). Nech  $f_k$  značí počet stien veľkosti  $k$ . Potom  $\sum_{i=4}^k k f_k = 2m$ . Keďže graf  $G$  obsahuje len štvoruholníkové a väčšie steny, potom

$$4f = 4 \sum_{i=4}^k f_k \leq \sum_{i=4}^k k f_k = 2m.$$

Z toho získame  $f \leq \frac{m}{2}$ . Keď dosadíme do Eulerovej formule  $n - m + k = 2$ . Získame

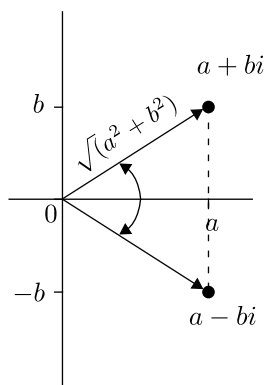
$$m \leq 2n - 4.$$

$\square$

## 2.2 Komplexné čísla

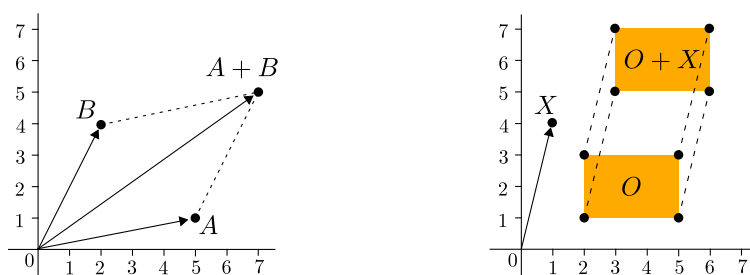
Výraz  $z = a + bi$  nazývame komplexné číslo. Koefficienty  $a$  a  $b$  sú reálne čísla. Číslo  $i$  má na rozdiel od reálnych čísel zaujímavú vlastnosť  $i^2 = -1$ . Táto vlastnosť nám umožňuje riešiť všetky polynomiálne rovnice. Časť  $a$  sa nazýva reálna a časť  $b$  sa nazýva imaginárna. Pochopenie týchto mystických komplexných čísel sa objavilo, keď nezávisle na sebe matematici Wessel, Argand a Gauss prišli na to, že komplexné čísla môžeme interpretovať geometricky. Na každé komplexné číslo sa môžeme pozeráť ako na bod  $(x, y)$  v rovine, alebo analogicky ako na vektor spájajúci počiatok s týmto bodom.

Výrazom  $\bar{z}$  značíme komplexné združenie  $z$ . Ak  $z = a + bi$ , potom  $\bar{z} = a - bi$ . Komplexné združenie zrkadlí  $z$  cez reálnu osu. Táto operácia zachováva veľkosť čísla a veľkosť uhla, ale mení orientáciu uhla (Obr. 2.2).



Obr. 2.2: Komplexné združenie čísla  $a + bi$ . Veľkosť čísla  $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Aj sčítanie komplexných čísel môžeme interpretovať geometricky. Ak k vektoru  $A$  pričítame vektor  $B$ , posunieme  $A$  o veľkosť vektoru  $B$  v smere vektoru  $B$  a získame rovnobežník s uhlopriečkou  $A + B$  (Obr. 2.3). Pričítanie komplexného čísla k rovine teda posunie rovinu o veľkosť komplexného čísla v smere vektoru tohto komplexného čísla.



Obr. 2.3: Naľavo sčítanie dvoch komplexných čísel (vektorov). Napravo pričítanie vektoru  $X$  k objektu  $O$ .

Aby sme získali nadhľad na to, ako funguje násobenie komplexných čísel, vyjadríme si ho pomocou Eulerovej formuly

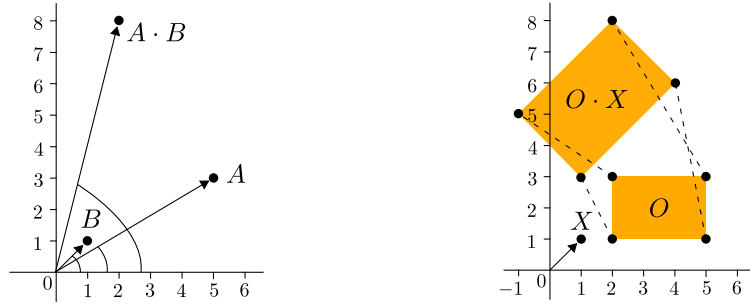
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Dôkaz tohoto vzťahu vyplýva z Taylorovej vety a dôkaz môžeme nájsť v knihe *Visual Complex Analysis*, Needham [28].

Výraz  $e^{i\theta}$  určuje bod na jednotkovej kružnici pod uhlom  $\theta$ . Body na jednotkovej kružnici majú veľkosť jedna. Ak  $r$  je veľkosť vektoru  $z$ , potom  $z$  môžeme vyjadriť vo forme  $z = re^{i\theta}$ . Vďaka tejto formuli je násobenie komplexných čísel prirodzené:

$$r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\sigma} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\sigma)}.$$

Môžeme vidieť, že vynásobenie komplexného čísla iným komplexným číslom vynásobí ich veľkosti a sčíta ich uhly. Násobenie roviny komplexným číslom teda expanduje a rotuje komplexnú rovinu  $\mathbb{C}$  (Obr. 2.4).



Obr. 2.4: Naľavo vynasobenie dvoch komplexných čísel (vektorov). Napravo vynásobenie objektu  $O$  vektorom  $X$ .

## 2.3 Riemannova sféra

Pozrime sa na komplexné číslo  $z$  a jeho inverziu  $\frac{1}{z}$ . Ak je  $z$  veľmi veľké číslo, jeho inverz bude veľmi malé číslo, ktoré sa blíži k 0. Naopak, ak je  $z$  veľmi malé číslo blízke k 0, jeho inverz bude veľmi veľké číslo. Výraz  $\frac{1}{0}$  nebude definovaný. Preto si komplexnú rovinu rozšírime o bod v nekonečne. Vďaka tomu môžeme definovať, že

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Komplexnú rovinu rozšírenú o bod v nekonečne nazývame *rozšírená komplexná rovina* a značíme  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \infty$ . Ukážeme, že na  $\mathbb{C}^*$  sa dá pozerat topologicky ako na sféru. Niekedy sa rozšírenej komplexnej rovine hovorí *Riemannova sféra*.

Prechod medzi jednotkovou sférou

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

a rozšírenou komplexnou rovinou  $\mathbb{C}^*$  sa nazýva *stereografická projekcia*. Stereografickú projekciu budeme značiť  $\pi$ .

Neformálne môžeme stereografickú projekciu popísať nasledovne. Rozšírenú komplexnú rovinu  $\mathbb{C}$  umiestnime tak, že prechádza cez rovník  $\mathbb{S}$  (komplexnú rovinu identifikujeme s  $xy$ -rovinou v  $\mathbb{R}^3$ ), a bod 0 je stred  $\mathbb{S}^2$  a body  $1, -1, i, -i$  ležia na rovníku. Ak  $N = (0, 0, 1)$  je severný pól  $\mathbb{S}^2$  a  $P$  ľubovoľný bod, potom priamka definovaná úsečkou  $NP$  jednoznačne pretne rovinu  $\mathbb{C}$ . Každý bod na južnej pologuli sa zobrazí do vnútra jednotkovej kružnice, rovník sa zobrazí na jednotkovú kružnicu a severná pologula okrem  $N$  sa zobrazí na zvyšok komplexnej roviny. Tým pádom môžeme identifikovať severný pól  $N$  s  $\infty$  (Obr. 2.5).

Jednoduchým výpočtom je možné odvodiť, že zobrazenie  $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \mapsto \mathbb{C}$  je definované nasledujúcim vzorcom

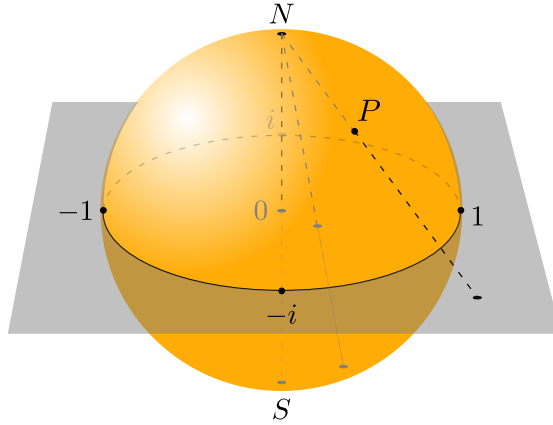
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto z = x + yi = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (2.3)$$

Z tohoto je vidieť, že  $\pi$  je spojitú bijektívne zobrazenie ( $x_3 \neq 1$ ). Podobne odvodíme, že  $\pi^{-1}: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  je definované nasledovne

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Je zrejmé, že  $\pi^{-1}$  je bijektívne spojitú zobrazenie a tým pádom  $\pi$  je homeomorfizmus. Rozšírime  $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \mapsto \mathbb{C}$  na bijekciu  $\pi: \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{C}^*$  tak, že definujeme





Obr. 2.5: Riemannova sféra

$\pi(N) = \infty$ . Bijekcia z  $\mathbb{S}^2$  do  $\mathbb{C}^*$  nám umožňuje hovoriť o algebraických a topologických vlastnostiach  $\mathbb{S}^2$  ako o vlastnostiach  $\mathbb{C}^*$ . Napríklad je zřejmé, že  $\mathbb{C}^*$  je kompaktná množina, keďže aj sféra  $\mathbb{S}^2$  je kompaktná množina.

**Kružnice v rozšírenej komplexnej rovine.** Pomocou stereografickej projekcie  $\pi$  môžeme definovať kružnice v  $\mathbb{C}^*$ . Kružnica na sfére  $\mathbb{S}^2$  sa definuje ako prienik  $\mathbb{S}^2 \cap H$ , kde  $H$  je rovina v  $\mathbb{R}^3$  taká, že  $|\mathbb{S}^2 \cap H| > 1$ .

Nech  $H$  je rovina definovaná rovnicou

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta,$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Použitím (2.3) dostaneme

$$ax^2 + ay^2 + 2\alpha x + 2\beta y + c = 0, \quad (2.4)$$

kde  $z = x + iy$ ,  $a = \gamma - \delta$  a  $c = -(\gamma + \delta)$ . Ak  $a \neq 0$ , tak rovnica (2.4) definuje kružnicu v  $\mathbb{R}^2$ , ktorá odpovedá kružnici v  $\mathbb{C}$ . Ak  $a = 0$ , potom táto rovnica definuje priamku v rovine  $\mathbb{C}$ . Toto odpovedá kružniciam v  $\mathbb{C}^*$ , ktoré obsahujú  $\infty$ , alebo ekvivalentne kružniciam v  $\mathbb{S}^2$ , ktoré obsahujú severný pól  $N$ .

**Definícia 2.9.** *Kružnica v  $\mathbb{C}^*$  je  $\pi(\mathbb{S}^2 \cap H)$ , kde  $H$  je rovina taká, že  $|\mathbb{S}^2 \cap H| > 1$ .*

## 2.4 Möbiove transformácie

**Definícia 2.10.** *Möbiova transformácia je zobrazenie  $M(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definované*

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.5)$$

kde koeficienty  $a, b, c$  a  $d$  sú komplexné čísla splňujúci  $ad - bc \neq 0$ .

Möbiove transformácie tvoria grupu, teda zloženie Möbiových transformácií je Möbiova transformácia a každá Möbiova transformácia má inverz. Poznamenajme, že ak platí  $ad = bc$ , po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{acz + bc}{ccz + dc} = \frac{acz + bc - ad + ad}{ccz + dc} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \\ &= \frac{a(cz + d) - (ad - bc)}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - 0}{c(cz + d)} = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Získali sme nezaujímavú konštantnú funkciu  $a/c$ . Preto je v Defínícii 2.10 podmienka  $ad - bc \neq 0$ .

Möbiova transformácia je konformné zobrazenie, to znamená, že zachováva veľkosť a orientáciu uhlov. Poznamenajme, že nemusí zachovávať vzdialenosti medzi bodmi. Aby sme porozumeli Möbiovej transformácii, vyjadríme ju ako zobrazenie štyroch základných zobrazení

$$\begin{aligned} M_1(z) &= z + \frac{d}{c}, \\ M_2(z) &= \frac{1}{z}, \\ M_3(z) &= \frac{(bc - ad)}{c^2}z, \\ M_4(z) &= z + \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

kde  $\frac{d}{c}$ ,  $\frac{a}{c}$  a  $-\frac{(ad-bc)}{c^2}$  sú komplexné čísla. Prvé a posledné zobrazenia sú posunutia, tretie zobrazenie je expanzia a rotácia komplexnej roviny. Je zjavné, že tieto tri zobrazenia sú konformné. Ukázať, že komplexná inverzia  $\frac{1}{z}$  je konformné zobrazenie, je zložitejšie a preto to budeme považovať za fakt. Ak tieto štyri funkcie zložíme  $M_4 \circ M_3 \circ M_2 \circ M_1(z)$ , získame Möbiovu transformáciu v tvare (2.5). Z toho dostávame nasledujúcu lemmu.

**Lemma 2.5.** *Každá Möbiova transformácia je zloženie konečného počtu transformácií typu  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  a  $M_4$ .*

Aplikovaním konformného zobrazenia na objekt alebo rovinu sa zachovávajú uhly. Ak potom aplikujeme ďalšie konformné zobrazenie, opäť sa zachovávajú uhly. Čiže ak zložíme dve konformné zobrazenia, získame konformné zobrazenie. Möbiova transformácia je zloženie konformných zobrazení a teda podľa Lemma 2.5 každá Möbiova transformácia je konformné zobrazenie, ktoré posúva, invertuje, expanduje alebo rotuje, ale zachováva uhly.

Möbiova transformácia má štyri koeficienty  $a, b, c$  a  $d$ . Ak každý z koeficientov vynásobíme ľubovoľným nenulovým komplexným číslom  $k$ , získame

$$\frac{az + b}{cz + d} = M(z) = \frac{kaz + kb}{kcz + kd}.$$

Po vynásobení koeficientov číslom  $k$ , získame rovnaké zobrazenie ako predtým. To znamená, že Möbiovu transformáciu neurčujú koeficienty, ale ich pomery. Pomery medzi štyrmi koeficientami sú napríklad  $a/b$ ,  $b/c$  a  $c/d$ . Z toho vyplýva dôležitá vlastnosť Möbiových transformácií, ktorú budeme potrebovať. A to, že Möbiova transformácia je jednoznačne určená trojicou bodov.

**Lemma 2.6.** *Ak  $z_1, z_2$  a  $z_3$  a  $w_1, w_2$  a  $w_3$  sú trojice rôznych bodov, potom existuje jednoznačná Möbiova transformácia  $M(z)$ , ktorá zobrazí  $M(z_1) = w_1$ ,  $M(z_2) = w_2$  a  $M(z_3) = w_3$ .*

Ďalšia dôležitá vlastnosť, ktorú budeme potrebovať, je že každá Möbiova transformácia zobrazí kružnicu v  $\mathbb{C}^*$ , na nejakú inú kružnicu v  $\mathbb{C}^*$ .

**Lemma 2.7.** *Ak  $C$  je kružnica v  $\mathbb{C}^*$  a  $M$  je Möbiova transformácia, potom  $M(C)$  je kružnica v  $\mathbb{C}^*$ .*

Ak má kružnica  $C$  na sfére bod v  $\infty$ , potom kružnice, ktoré sa nachádzajú na vonkajšej strane kružnice  $C$  vyzerajú ako na Obr. 5.11 v strede a vpravo.

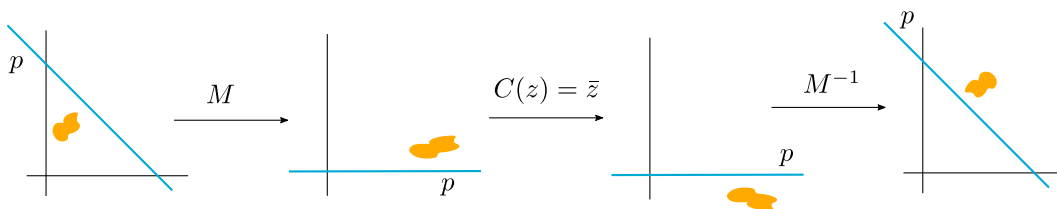
Möbiove transformácie na sfére sa dajú interpretovať ako rotácia a posun sféry. Ak spravíme projekciu rozšírenej komplexnej roviny na sféru, sféru rotujeme a presunieme, a potom projektujeme sféru späť na rozšírenú komplexnú rovinu, získame transformovanú komplexnú rovinu. Táto transformácia sa dá vyjadriť Möbiovou transformáciou.

**Anti-Möbiové transformácie.** Reflexia v rovine podľa nejakej priamky má tu vlastnosť, že zachováva veľkosť uhlu a prehadzuje jeho orientáciu. Príkladom reflexie je napríklad funkcia  $C(z) = \bar{z}$ , ktorá reprezentuje reflexiu podľa reálnej osi v  $\mathbb{C}$  (Obr. 2.2). Ľubovlnú reflexiu  $R(z)$  podľa priamky  $p$  môžeme vyjadriť pomocou  $C(z)$  a nejakej Möbiovej transformácie  $M$  (Obr. 2.6). Transformácia  $M$  zobrazí priamku  $p$  na reálnu os. V tomto prípade je transformácia  $M$  rotácia a posunutie. Potom platí  $R(z) = M^{-1} \circ C \circ M(z)$ .

Nech  $T(z)$  je transformácia, ktorá je konečné zloženie Möbiových transformácií a reflexií. Nie je zložité odvodiť, že

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{alebo} \quad T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

v závislosti na tom, či je počet reflexií párny alebo nepárny. Transformácie typu  $T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  sa nazývajú anti-Möbiove a to preto, že síce zachovávajú veľkosť uhlu, ale menia jeho orientáciu. Každá anti-Möbiova transformácia je zloženie komplexného združenia a Möbiovej transformácie. Anti-Möbiove transformácie sa zvyknú označovať  $\bar{M}$ .



Obr. 2.6: Zloženie reflexie použitím Möbiovej transformácie  $M$  a komplexného združenia.

## 3. Circle packing veta

V tejto kapitole dokážeme vetu, ktorá hovorí, že pre každý rovinný graf existuje circle packing. Túto vetu ako prvý dokázal v roku 1936 nemecký matematik Paul Koebe [18]. V roku 1985 ju znovu dokázal americký matematik William Thurston [36]. Thurston sa zaoberal circle packingami v rámci štúdia vety Riemann mapping theorem, ktorá hovorí, že ľubovoľná kontrahovateľná oblasť v rovine sa dá bijektívne a holomorfne zobrazit na otvorený jednotkový disk [32, 35]. Veta o circle packingu plynie aj z práce E. M. Andreeva [1]. Preto sa táto veta označuje niekedy aj ako Koebe–Andreev–Thurston teorém.

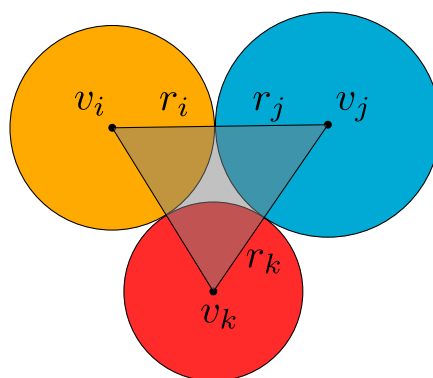
**Veta 3.1** (Koebe-Andreev-Thurston). *Pre každý súvislý rovinný graf  $G$  existuje circle packing.*

My ukážeme dôkaz formulovaný v roku 1989 francúzskym matematikom Colin de Verdiere [5] a o rok neskôr dvojicou matematikov Marden and Rodin [21]. Je to konkrétnejšia adaptácia argumentu, ktorý vyslovil Thurston. Pri formulácii dôkazu vychádzame z [11, 29].

Môžeme predpokladať, že graf  $G$  je triangulácia. Ak graf  $G$  nie je triangulácia, potom vytvoríme trianguláciu  $G'$  tak, že do každej steny, ktorá nie je trojuholník, doplníme vrchol a spojíme ho s ostatnými vrcholmi príslušnej steny. Circle packing pôvodného grafu  $G$  získame vymazaním kružníc, ktoré odpovedajú pridaným vrcholom.

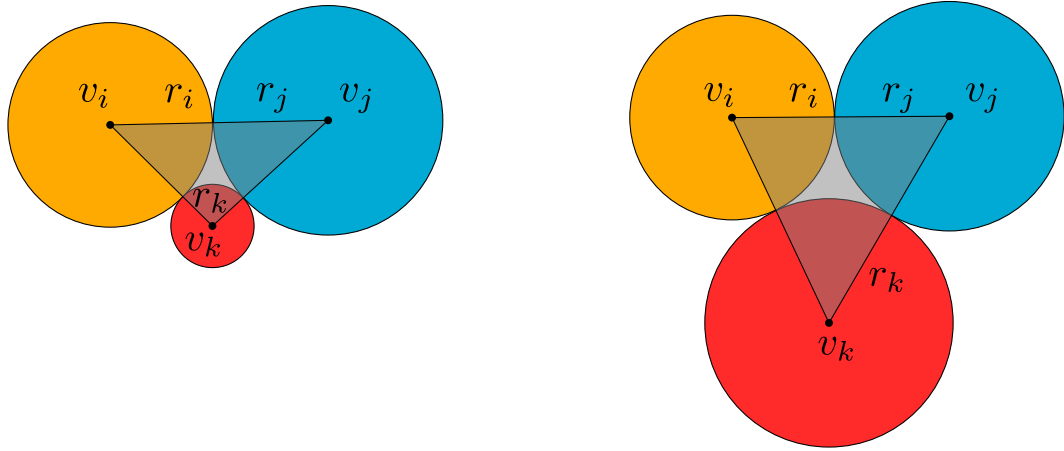
### 3.1 Myšlienka dôkazu

Uvážme jednu stenu grafu  $G$  a jeho vrcholom  $v_i$ ,  $v_j$  a  $v_k$  priradme polomery  $r_i$ ,  $r_j$  a  $r_k$ . Ak sa budú kružnice príslušných vrcholov dotýkať, znamená to, že trojuholník  $v_i v_j v_k$  má hrany s veľkosťou  $r_i + r_j$ ,  $r_i + r_k$  a  $r_j + r_k$  (Obr. 3.1).



Obr. 3.1: Trojuholník  $v_i v_j v_k$  s hranami s veľkosťou  $r_i + r_j$ ,  $r_i + r_k$  a  $r_j + r_k$ .

Všimnime si, ako sa menia uhly pri vrcholoch, keď zmeníme polomer jednej z kružníc. Ak polomer zmenšíme, uhol sa pri príslušnom vrchole zväčší. A naopak, ak polomer zväčšíme, uhol sa zmenší.



Obr. 3.2: So zmenou polomeru  $r_k$  sa mení uhol pri vrchole  $v_k$

Celkový uhol vrcholu  $v$  je súčet veľkostí uhlov vo všetkých trojuholníkoch, do ktorých vrchol  $v$  patrí a budeme ho značiť  $\psi(v)$ . Celkový uhol vrcholu  $v$  indukovaný vektorom polomerov  $r$  značíme  $\psi_r(v)$ . Uhol pri vrchole  $v$  v trojuholníku  $t$  značíme  $\psi^t(v)$ .

Uvážme circle packing s vektorom polomerov  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Poznamenajme, že stačí uvažovať len vektory polomerov, ktoré splňujú  $\|r\|_1 = \sum_{i=1}^n r_i = 1$ . Odvodíme podmienky, ktoré musí spĺňať  $\psi(v)$  pre každé  $v \in V(G)$ .

1. Keď sa pozrieme na veľkosti uhlov a ich súčet, musí platiť rovnosť

$$\sum_{i=1}^n \psi(v_i) = \sum_{j=1}^{2n-4} \pi = (2n-4)\pi, \quad (3.1)$$

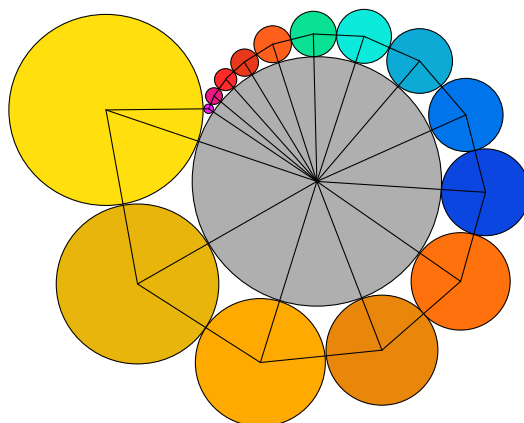
pretože podľa vety o počte stien v triangulácii (Lemma 2.1) má triangulácia  $2n-4$  stien a keďže každá stena triangulácie je trojuholník, každá z nich prispieje uhlom  $\pi$ .

2. Pre každý vnútorný uhol  $v$  platí  $\psi(v) = 2\pi$ . Keď sa  $\psi(v)$  bude rovnat  $2\pi$ , prilahlé kružnice môžu byť nakreslené bez medzery alebo bez prekrytia (Obr. 3.3).

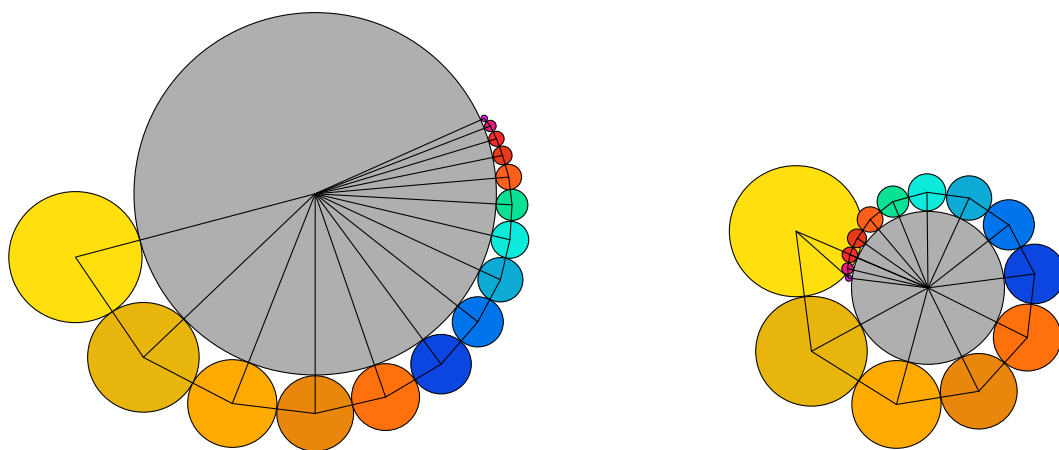
Ak je  $\psi(v)$  menší než  $2\pi$ , tak medzi kružnicami, ktoré sa dotýkajú kružnice  $C_v$ , vznikne medzera (Obr. 3.4 vľavo). Ak  $\psi(v)$  bude väčší ako  $2\pi$ , prilahlé kružnice sa budú pretínať (Obr. 3.4 vpravo).

3. Pre vonkajšie vrcholy  $u, v$  a  $w$  platí  $\psi(u) + \psi(v) + \psi(w) = 2\pi$ . Vonkajší cyklus aj vonkajšia stena grafu  $G$  je trojuholník, potom súčet uhlov pri vonkajších vrcholoch  $v$  cez vnútorné steny je  $\pi$ , aj súčet uhlov na vonkajšej stene je  $\pi$ .

Každý korektný circle packing splňuje podmienky 1-3. Môžeme predpokladať, že  $v_1, v_2$  a  $v_3$  sú vonkajšie vrcholy a vonkajší cyklus je rovnostranný trojuholník.



Obr. 3.3: Farebné susedné kružnice sa pekne poskladali okolo kružnice v strede so sivou výplňou. Nevznikla žiadna medzera ani prekrytie. Ak sa nám to podarí pre všetky vnútorné vrcholy, získame circle packing triangulácie.



Obr. 3.4: Meníme polomer kružnice v strede so sivou výplňou, polomery susedných kružníc ostávajú fixné.

Potom uhol cez všetky vnútorné steny pri vonkajšom vrchole je  $\frac{\pi}{3}$ . A aj uhol pri vrchole na vonkajšej stene je  $\frac{\pi}{3}$ . Získame  $\psi(v_i) = \frac{2\pi}{3}$ , pre  $i = 1, 2, 3$  (Obr. 3.5). Z toho vyplýva, že chceme nájsť vektor polomerov  $r'$ , ktorý sa zobrazí na bod

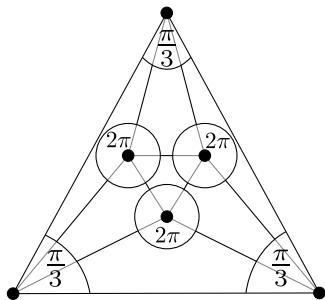
$$\psi' = \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi \right).$$

Vektor  $\psi'$  splňuje všetky tri podmienky. Dokážeme, že zobrazenie z množiny vektorov polomerov do množiny vektorov uhlov je bijektívne. A ukážeme, že na vektor  $\psi'$  sa zobrazí vektor polomerov, ktorý leží v množine riešení. Definujeme vzor zobrazenia.

**Definícia 3.1.** *Množina prípustných vektorov polomerov je otvorený simplex*

$$\mathcal{R} = \left\{ (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_1 > 0, r_2 > 0, \dots, r_n > 0, \text{ a } \|\mathbf{r}\|_1 = 1 \right\}.$$

Otvorený simplex je simplex, ktorý neobsahuje svoju hranicu. A nakoniec si definujeme obraz zobrazenia.



Obr. 3.5: Vnútorne vrcholy majú celkový uhol  $2\pi$ . Vonkajší cyklus triangulácie je rovnostranný trojuholník, preto je súčet uhlov cez vnútorné steny vonkajšieho vrchola rovný  $\pi/3$ . Jeden z pohľadov na vonkajšiu stenu je, že je to zadná strana zjednotenia triangulácie a teda veľkosť vonkajšieho uhla na vonkajšej stene triangulácie je  $\pi/3$ .

**Definícia 3.2.** *Množina prípustných vektorov uhlov je otvorený simplex*

$$\mathcal{A} = \left\{ (\psi(v_1), \psi(v_2), \dots, \psi(v_n)) \in \mathbb{R}^n \mid \psi(v_i) > 0 \text{ a } \sum_{i=1}^n \psi(v_i) = (2n - 4)\pi \right\}.$$

Teraz si môžeme definovať zobrazenie zo simplexu  $\mathcal{R}$  do simplexu  $\mathcal{A}$ .

**Definícia 3.3.** *Nech  $\sigma: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{A}$  je také zobrazenie, že*

$$\sigma(r) = (\psi_r(v_1), \dots, \psi_r(v_n)).$$

## 3.2 Existencia circle packingu

Ukážeme, že existuje taká podmnožina množiny  $\mathcal{A}$ , že zobrazenie  $\sigma$  z množiny  $\mathcal{R}$  do tejto podmnožiny je bijekcia. Najskôr ukážeme, že zobrazenie  $\sigma$  je injektívne.

**Lemma 3.1.** *Zobrazenie  $\sigma: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{A}$  je injektívne.*

*Dôkaz.* Uvažujme dva rôzne vektory  $r, \bar{r} \in \mathcal{R}$  a množinu  $I = \{i \mid \bar{r}_i < r_i\}$ . Označme  $S(r) = \sum_{i \in I} \psi_r(v_i)$ . Ukážeme, že  $S(\bar{r}) > S(r)$ . Každá stena grafu  $G$  prispieva do množiny  $I$  maximálne tromi indexami.

- Ak má trojuholník  $t$  v množine  $I$  jeden vrchol, a ak sa polomer kružnice prislúchajúcej tomuto vrcholu zmenší, veľkosť uhlu pri tomto vrchole sa zvýši (Obr. 3.6). Trojuholník preto prispieje do súčtu  $S(\bar{r})$  vyššou hodnotou ako do  $S(r)$ .
- Ak má trojuholník  $t$  v množine  $I$  dva vrcholy, a ak sa ich polomery znížia, ich uhly sa zvýšia, potom sa zvýši aj súčet  $\psi^t(v_i) + \psi^t(v_j)$  a trojuholník prispieje do  $S(\bar{r})$  vyššou hodnotou ako do  $S(r)$  (Obr. 3.7).
- Trojuholník so všetkými vrcholmi v množine  $I$ , prispieje rovnakou veľkosťou do súčtu uhlov v oboch vektoroch, pretože každý trojuholník prispieje do sumy hodnotou  $\pi$

Z toho, že  $\|r\| = \|\bar{r}\| = 1$  plynie, že existuje trojuholník, ktorý má v množine  $I$  menej ako 3 indexy. Získame

$$S(\bar{r}) = \sum_{i \in I} \psi_{\bar{r}}(v_i) > S(r) = \sum_{i \in I} \psi_r(v_i). \quad (3.2)$$

Z toho, ako je skonštruované zobrazenie  $\sigma$  (Definícia 3.3), a z toho, že  $S(\bar{r}) = \sum_{i \in I} \sigma_i(\bar{r})$  a  $S(r) = \sum_{i \in I} \sigma_i(r)$ , vyplýva  $\sigma(r) \neq \sigma(\bar{r})$ .  $\square$

Uvážme vektor  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \partial\mathcal{R}$ , kde  $\mathcal{R}$  je simplex definovaný v Definícii 3.1 a  $\partial\mathcal{R}$  je hranica tohto *simplexu*. Keďže v simplexe  $\mathcal{R}$  sú z definície iba polomery  $r_i > 0$ , na hranici tohto simplexu sa budú nachádzať aj body s nulovými súradnicami.

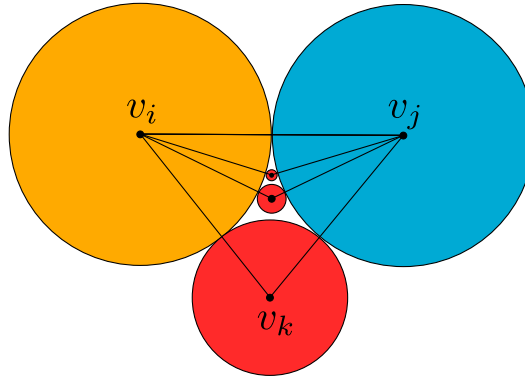
**Definícia 3.4.** *Nech  $X \subseteq V(G)$ . Potom  $F(X)$  značí množinu incidentných stien. Teda všetky steny, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol z množiny  $X$ .*

**Lemma 3.2.** *Pre vektor  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \partial\mathcal{R}$  a množinu  $I = \{i \mid s_i = 0\}$ , potom pre každé  $r \in \mathcal{R}$  platí*

$$\lim_{r \rightarrow s} \sum_{i \in I} \psi_r(v_i) = |F(I)|\pi.$$

*Dôkaz.* Ak všetky tri vrcholy z trojuholníka patria do množiny  $I$ , potom tento trojuholník vždy prispieje do sumy  $\sum_{i \in I} \psi_r(v_i)$  hodnotou  $\pi$ .

Uvážme trojuholník  $v_i v_j v_k$ , ktorý má v množine  $I$  práve jeden vrchol  $v_k$ . Polomer  $r_k$  sa blíži k 0 a polomery  $r_i$  a  $r_j$  zostávajú rovnaké. Z toho vyplýva, že uhol pri vrchole  $v_k$  v trojuholníku  $v_i v_j v_k$  sa blíži k  $\pi$  (Obr. 3.6).



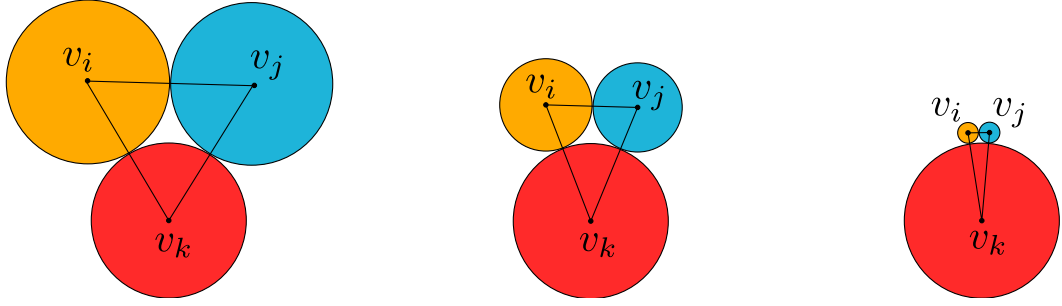
Obr. 3.6: Ak sa polomer  $r_k$  znižuje, uhol pri  $v_k$  sa zväčšuje.

Uvážme trojuholník  $v_i v_j v_k$ , ktorý má v množine  $I$  práve dva vrcholy  $v_i$  a  $v_j$ . Polomer  $r_k$  zostane rovnaký a polomery  $r_i$  a  $r_j$  sa blížia k 0 (Obr. 3.7). Z toho vyplýva, že uhol pri  $v_k$  sa blíži k 0 a súčet uhlov pri  $v_i$  a  $v_j$  sa blíži k  $\pi$ .

Súčet uhlov v trojuholníku sa preniesie do vrcholov z množiny  $I$ . Potom je súčet celkových uhlov pri vrcholoch z množiny  $I$  rovný  $|F(I)|\pi$ .  $\square$

Teraz ukážeme, ako zmenšiť obor hodnôt  $\mathcal{A}$ , tak aby  $\sigma$  bola bijekcia. Uvážme vektor  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathcal{R}$  a ľubovoľnú podmnožinu  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  takú, že  $\alpha = \sum_{i \notin I} r_i > 0$ . Teda aspoň jeden polomer, ktorý nemá index v množine  $I$ , je nenulový. Z tohto bodu sa budeme limitne blížiť k bodu  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,





Obr. 3.7: Ak sa polomery  $r_i$  a  $r_j$  znižujú, súčet uhlov pri vrcholoch  $v_i$  a  $v_j$  sa zväčšuje.

ktorý leží na hranici  $\partial\mathcal{R}$  a všetky polomery s indexami z  $I$  má nulové. Simplex je obmedzený podmienkou, že pre každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  platí, že  $r_i > 0$ , preto na hranici simplexu takýto bod s nulovými súradnicami nájdeme. Dostaneme bod  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , kde

$$s_i = \begin{cases} 0 & i \in I, \\ r_i/\alpha & i \notin I. \end{cases}$$

Všetky polomery s indexami z  $I$  prispievajú do sumy 0, ale  $\|s\|_1 = 1$ , preto  $\frac{\sum_{i \notin I} r_i}{\alpha} = 1$ .

Použitím nerovnosti (3.2) z dôkazu Lemmy 3.1 a použitím Lemmy 3.2 dostaneme, že pre každú  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , platí

$$\sum_{i \in I} \psi_r(v_i) < \sum_{i \in I} \psi_s(v_i) \leq |F(I)|\pi.$$

To nám umožňuje definovať polytop  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$

$$\mathcal{P} = \bigcap_{I \subseteq \{1..n\}} \left\{ (\psi(v_1), \psi(v_2), \dots, \psi(v_n)) \in \mathcal{A} \mid \sum_{i \in I} \psi(v_i) < |F(I)|\pi \right\}.$$

Teraz ukážeme, že zobrazenie  $\sigma: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{P}$  je surjektívne. V nasledujúcej Lemme 3.3 dokazujeme, že zobrazenie medzi otvorenými guľami je surjektívne, ale keďže simplex  $\mathcal{R}$  a polytop  $\mathcal{P}$  sú otvorené konvexné množiny, platí to aj pre ne. Najskôr si definujeme nové pojmy, ktoré budeme v dôkaze používať.

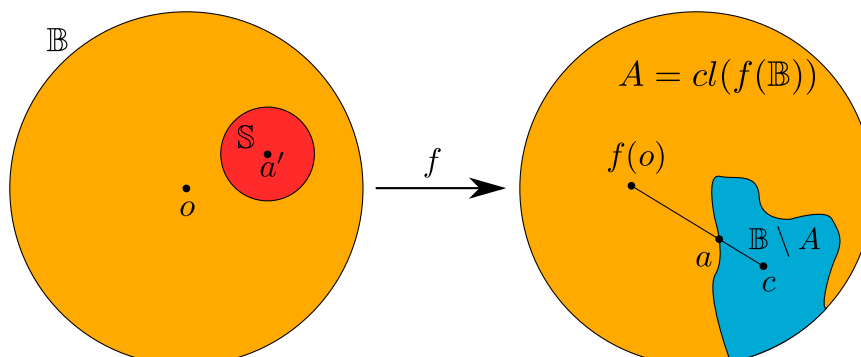
**Definícia 3.5.** *Uzáver množiny  $X \subseteq \mathbb{R}$  značený  $cl(X)$ , je množina  $X$  spoločne so všetkými jej limitnými bodmi. Množina  $cl(X)$  je uzavrená.*

**Definícia 3.6.** *Nech  $c, r \in \mathbb{R}$ . Otvorená guľa  $\mathbb{B}$  so stredom  $c$  a polomerom  $r$  je množina  $\{x \in \mathbb{R}, |x - c| < r\}$ . Sféra  $\mathbb{S}$  so stredom  $c$  a polomerom  $r$  je množina  $\{x \in \mathbb{R}, |x - c| = r\}$ . Sféra je ohraničená a uzavretá.*

**Lemma 3.3.** *Nech  $\mathbb{B}$  je otvorená guľa a zobrazenie  $f: \mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}$  je injektívne a spojité. Ak pre každé  $p \in \partial\mathbb{B}$  platí, že  $\lim_{q \rightarrow p, q \in \mathbb{B}} f(q) \in \partial\mathbb{B}$ , potom  $f$  je surjektívne zobrazenie. Teda ak  $f$  zobrazí hranicu  $\mathbb{B}$  na hranicu  $\mathbb{B}$ , potom je surjektívne.*

*Dôkaz.* Nech  $A = cl(f(\mathbb{B}))$  je obraz zobrazenia  $f$ . Pre dôkaz sporom predpokladajme, že existuje taký bod  $c$ , ktorý síce patrí do  $\mathbb{B}$ , ale zobrazenie  $f$  sa naň nezobrazí. Teda  $\exists c \in \mathbb{B} \setminus A$ . Vezmeme si bod  $a$ , ktorý je prvý bod prieniku úsečky  $cf(o)$  s množinou  $A$ , kde  $o$  je počiatok (Obr. 3.8). Vieme, že  $c \in \mathbb{B}$ ,  $f(o) \in \mathbb{B}$  a

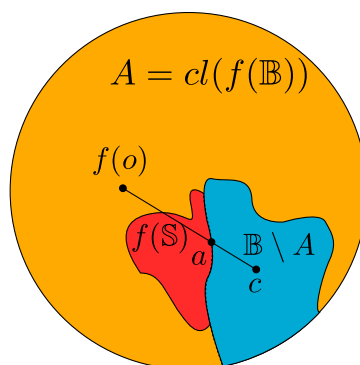
teda platí, že  $a \in cf(o) \subseteq \mathbb{B}$ . Keďže  $a \in A$  a zobrazenie  $f$  je prosté, potom existuje  $a' = f^{-1}(a) \in cl(\mathbb{B})$ . Ak by tento bod  $a'$  ležal na hranici  $\mathbb{B}$ , teda  $a' \in \partial\mathbb{B}$ , potom by podľa predpokladu musel na hranici ležať aj bod  $a$ , teda by platilo  $a \in \partial\mathbb{B}$ . To nám dáva spor s tým, že  $a$  leží na hranici medzi  $A$  a  $\mathbb{B} \setminus A$  a teda bod  $a' \in \mathbb{B}$ .



Obr. 3.8:

Teraz opäť použijeme spor a ukážeme, že bod  $a$  nemôže ležať na hranici  $A$ , čím dokážeme, že  $f$  je surjektívne. Máme teda bod  $a$ , ktorý leží na hranici  $A$ . Použijeme trik a vezmeme si sféru  $\mathbb{S}$  s polomerom  $\varepsilon > 0$  a stredom  $a'$ , ktorá leží v  $\mathbb{B}$ . Využijeme fakt, že sféra je narozdiel od otvorenej gule uzavretá a ohraničená, čiže je kompaktná.

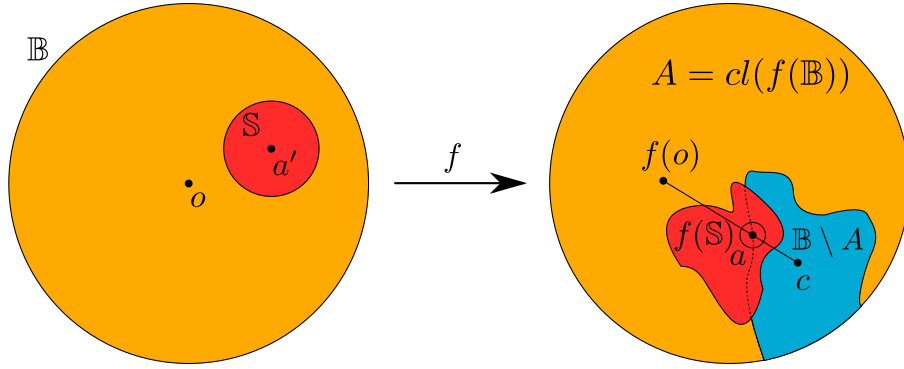
Chceme ukázať, že bod  $a \notin cl(f(\mathbb{S}))$ . Čiže nemôže nastať podobná situácia ako na Obr. 3.9. Opäť využijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že  $a \in cl(f(\mathbb{S}))$ ,



Obr. 3.9:

potom existuje postupnosť bodov taká, že  $d_1, d_2, \dots \in f(\mathbb{S})$ , ktoré konvergujú k  $a$ , a postupnosť  $f^{-1}(d_1), f^{-1}(d_2), \dots \in \mathbb{S}$ . Množina  $\mathbb{S}$  je kompaktná, a teda predchádzajúca postupnosť má podpostupnosť  $f^{-1}(d_{i_1}), f^{-1}(d_{i_2}), \dots \in \mathbb{S}$ , ktorá konverguje k limitnému bodu  $d \in \mathbb{S}$ . Potom platí,  $f(d) = \lim_j f(f^{-1}(p_{i_j})) = a$  a  $f(a') = f(d)$  a zároveň  $a' \neq d$ . Čo je spor s tým, že zobrazenie  $f$  je prosté. Takže obraz sféry  $\mathbb{S}$  musí vyzeráť podobne ako na Obr. 3.10. Kde vidíme, že zasahuje aj do množiny  $\mathbb{B} \setminus A$  a teda bod  $a$  nemôže ležať na hranici  $A$ . Teraz to ešte dokážeme formálne.

Nech  $\delta$  je rovná minimálnej vzdialenosti  $a$  od  $cl(f(A))$ . Potom platí, že guľa s polomerom  $\delta/2$  a stredom  $a$  je celá obsiahnutá v obraze  $f(\mathbb{B})$  (Obr. 3.10). Týmto dostávame spor s tým, že  $a \in \partial A$ . Keďže sme ukázali, že neexistuje taký bod  $a$ ,



Obr. 3.10:

ktorý by ležal na hranici  $A$  s  $\mathbb{B} \setminus A$ , to znamená, že neexistujú body z  $\mathbb{B}$ , na ktoré by sa zobrazenie  $f$  nezobrazilo a teda zobrazenie  $f$  je surjektívne.  $\square$

Už sme dokázali, že zobrazenie  $\sigma$  je injektívne a surjektívne. Teraz zostáva ukázať, že hľadaný bod  $r' = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi)$  leží v polytope  $\mathcal{P}$ .

**Lemma 3.4.** *Bod  $\psi' = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi) \in \mathcal{P}$ .*

*Dôkaz.* Najskôr ukážeme, že  $\psi' \in \mathcal{A}$ . Graf  $G$  je triangulácia a má  $n-3$  vnútorných uhlov, ktoré majú súčet uhlov  $(n-3)2\pi$  a 3 vonkajšie uhly, ktorých spoločný súčet uhlov je  $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ . Dokopy dávajú súčet  $(n-3)2\pi + 2\pi = 2n\pi - 6\pi + 2\pi = (2n-4)\pi$ . Tým sme ukázali, že  $\psi' \in \mathcal{A}$ . Teraz dokážeme, že tento bod patrí aj do  $\mathcal{P}$ .

Ak je každý trojuholník incidentný vrcholu z množiny  $I$ , potom platí, že veľkosť  $|F(I)| = 2n - 4$  a teda bod  $\psi' = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi) \in \mathcal{P}$ .

Ak aspoň jeden trojuholník neobsahuje vrchol z množiny  $I$ , potom  $|I| \leq n-3$ . Vieme, že platí nerovnosť  $2|I| < |F(I)|$  (Lemma 2.2). Keď sa pozrieme na vrcholy z množiny  $I$  a ich celkové uhly (každý z nich je maximálne  $2\pi$ ), získame nerovnosť

$$\sum_{i \in I} \psi'_i \leq 2\pi|I| < |F(I)|\pi,$$

a teda platí, že  $\psi' \in \mathcal{P}$ .  $\square$

Zobrazenie  $\sigma$  je spojité. Pretože ak postupne zmeňujeme  $r_v$ , tak sa postupne zväčšuje  $\psi(v)$ . Dokázali sme, že hranica simplexu  $\mathcal{R}$  sa zobrazí na hranicu simplexu  $\mathcal{P}$  (Lemma 3.2). Z toho vyplýva, že žiadny z vektorov s nulovými polomermi sa neocitne v množine riešení. Ukázali sme, že zobrazenie  $\sigma$  je bijekcia (Lemma 3.1 a Lemma 3.3) a že bod  $\psi' = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi) \in \mathcal{P}$  (Lemma 3.4).

Z toho vyplýva, že zobrazenie  $\sigma$  má inverznú funkciu. Potom vektor polomerov circle packingu  $R$  grafu  $G$  je

$$r' = \sigma^{-1} \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \dots, 2\pi \right).$$

Nech  $v_i v_j v_k$  je stena v triangulácii  $G$ . Vieme nájsť takú inverziu, že jedna circle packing reprezentácia grafu  $G$  je zobrazená na druhú circle packing reprezentáciu grafu  $G$  tak, že kružnice  $C_i, C_j, C_k$  prislúchajúce vrcholom  $v_i, v_j, v_k$

sú zobrazené na kružnice rovnakej veľkosti a ostatné kružnice sú zobrazené do oblasti uzatvorenej kružnicami  $C_i, C_j, C_k$ .

Nech  $R$  je výsledný circle packing grafu  $G$ . Je zrejmé, že circle packing  $R$  grafu  $G$  je jednoznačne určený až na posun, rotáciu, reflexiu a inverziu.

# 4. Primal-dual circle packing

## 4.1 Úvod

Dokážeme, že pre každý 3-súvislý rovinný graf existuje *primal-dual circle packing* (budeme značiť PDCP). Primal-dual circle packing grafov  $G$  a  $G^*$  sú circle packingy  $G$  a  $G^*$  (Obr. 4.1) splňujúce:

- Pre každý duálny pár hrán  $e = uv \in E(G)$  a  $e^* = u^*v^* \in E(G^*)$  sa kružnice  $C_u, C_v, C_{u^*}$  a  $C_{v^*}$  dotýkajú v rovnakom bode.
- Priamka prechádzajúca stredmi kružníc  $C_u$  a  $C_v$  je kolmá na priamku prechádzajúcu stredmi kružníc  $C_{u^*}$  a  $C_{v^*}$ .

Rôzne verzie nasledujúceho dôkazu je možné nájsť v [24, 25, 26, 27].

**Veta 4.1.** *Pre každý 3-súvislý rovinný graf  $G$  existuje primal-dual circle packing.*



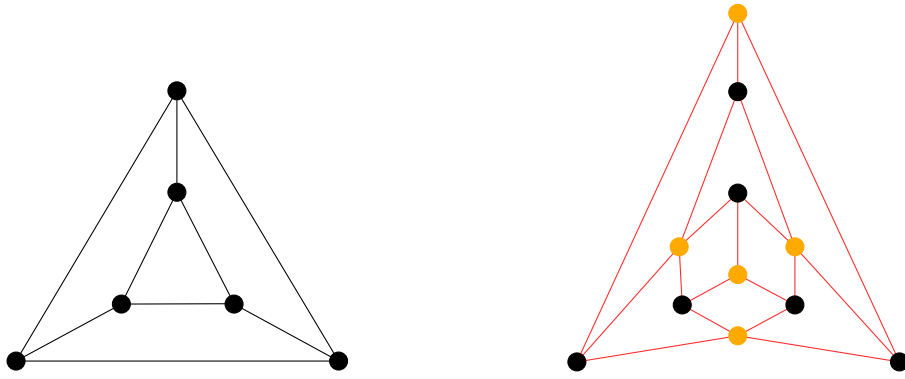
Obr. 4.1: Vľavo circle packing grafov  $G$  a  $G^*$ . Čierna reprezentácia patrí grafu  $G$  a žltá reprezentácia patrí grafu  $G^*$ . Vpravo reprezentácia hrany  $uv$ .

Budeme pracovať v rozšírenej komplexnej rovine  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Získaný circle packing môže obsahovať špeciálnu kružnicu  $C_\omega$ , pre  $\omega \in V(G^*)$  so stredom v  $\infty$ . Pre túto kružnicu požadujeme, aby žiadna z ostatných kružníc nepretínala vnútro kružnice  $C_\omega$ . Ekvivalentne v  $\mathbb{C}$  je možné kružnicu  $C_\omega$  reprezentovať so stredom v 0, a potom sa zvyšné kružnice musia dotýkať  $C_\omega$  zvnútra. Hranu  $uv$  reprezentujeme ako polpriamku zo stredu  $C_v$  do bodu  $C_v \cap C_\omega$  (Obr. 4.1 vpravo). Medzi týmito dvomi predstavami môžeme prechádzať pomocou stereografickej projekcie (Sekcia 2.3).

**Vertex-face graph.** Aby sme mohli pracovať so circle packingom  $G$  a  $G^*$  súčasne, budeme potrebovať použiť *vertex-face graf*, čo je graf popisujúci incidencie vrcholov a stien (Obr. 4.2).

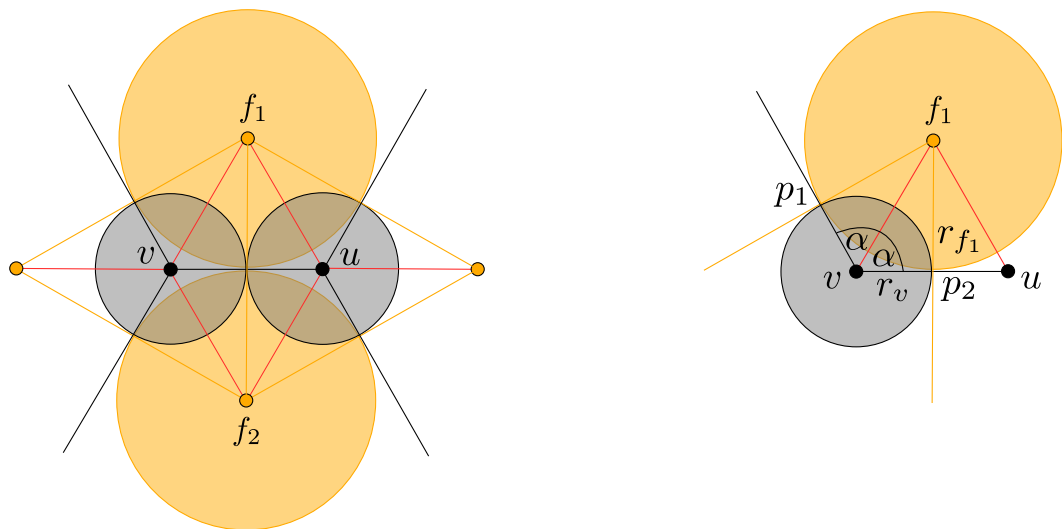
**Definícia 4.1.** *Nech  $G$  je rovinný graf a  $G^*$  jeho duál. Vertex-face graf je dvojica  $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ , kde  $V(\Gamma) = V(G) \cup V(G^*)$  a  $E(\Gamma) = \{vv^* \mid v \in G \text{ a } v^* \in G^*\}$ .*

Je zrejmé, že vertex-face graf je bipartitný. Jedna partita je množina pôvodných vrcholov grafu  $G$  a druhá partita je množina stien v grafe  $G$ . Každá hrana  $e = uv$  v grafe  $G$  delí dve steny. Z oboch vrcholov  $u$  a  $v$  vedú vo vertex-face grafe hrany do stien  $f_1$  a  $f_2$ , ktoré hrana  $e$  rozdeľuje. Takže, každá stena vo vertex-face grafe je štvorcýklus.



Obr. 4.2: Graf  $G$  vľavo, jeho vertex-face graf  $\Gamma$  vpravo. Čierne vrcholy sú vrcholy  $G$ , žlté vrcholy sú vrcholy  $G^*$  a červené úsečky odpovedajú hranám vertex-face grafu  $\Gamma$ .

**Neformálny popis konštrukcie.** Ukážeme, ako budeme tvoriť primal-dual circle packing pomocou vertex-face grafu. Pre každý vnútorný vrchol  $v \in \Gamma$  (neležiaci na vonkajšej stene) uvážime všetkých jeho susedov  $N_\Gamma(v)$  v  $\Gamma$ . To sú všetky jemu incidentné steny. Kružnicu  $C_v$  vpíšeme do mnohouholníka tvoreného susedmi  $v$  v  $\Gamma$ . Tento mnohouholník je stena v grafe  $G^*$ . Pripomeňme, že každá stena grafu  $\Gamma$  je štvoruholník. Diagonály každého štvoruholníka odpovedajú nejakému duálnemu páru hrán  $uv \in G$  a  $f_1f_2 \in G^*$ . Vo výslednom primal-dual circle packingu sa kružnice  $C_u$  a  $C_v$  budú dotýkať na pomyselnéj diagonále  $f_1f_2$ . Analogicky kružnice  $C_{f_1}$  a  $C_{f_2}$  sa budú dotýkať na diagonále  $uv$  (Obr. 4.3 vľavo).



Obr. 4.3: Nakreslenie je rozlíšené farbami čierna =  $G$ , žltá =  $G^*$ , červená =  $\Gamma$ . Vľavo je naznačená časť primal-dual circle packingu. Vpravo, uhol  $\alpha$  pri vrchole  $v$  na hrane  $vf_1$ .

## 4.2 Konštrukcia PDCP

Ukážeme nutné podmienky, ktoré musí v korektnom PDCP grafe  $G$ , spĺňať vektor polomerov  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , pre  $r_i \in \Gamma$  (Lemma 4.1). Vnútorné vrcholy grafu  $G$  budú mať iné podmienky ako vonkajšie vrcholy vo vonkajšom cykle

grafu  $G$ . Keď budeme v ďalšom texte hovoriť o vonkajších vrcholoch, ak nebude explicitne napísané inak, tak budeme vždy myslieť vrcholy, ktoré sú na vonkajšej kružnici grafu  $G$ . Tieto vrcholy budeme značiť  $v_1, \dots, v_k$ .

**Lemma 4.1.** *Nech  $r_v, v \in V(\Gamma)$  sú polomery vrcholov z PDCP grafu  $G$ . Ak  $v \in V(\Gamma)$  a  $v\omega \notin E(\Gamma)$ , potom*

$$\sum_{\tau, v\tau \in E(\Gamma)} \arctan \frac{r_\tau}{r_v} = \pi. \quad (4.1)$$

*Ak  $v_i\omega \in E(\Gamma)$  pre  $i = 1, \dots, k$ , a zároveň  $\alpha_i = 2 \sum_{\tau} \arctan \frac{r_\tau}{r_{v_i}}$  je súčet uhlov pri vrchole  $v_i$  cez všetkých jeho susedov v grafe  $\Gamma'$ . Potom*

$$\text{pre } 1 \leq i \leq k \text{ platí } 0 < \alpha_i < \pi \text{ a } \sum_{i=1}^k \alpha_i = (k-2)\pi. \quad (4.2)$$

*Dôkaz.* Uvažme vrchol  $v \in V(\Gamma)$ , ktorý je vrcholom v grafe  $G$ . Najskôr dokážeme výraz (4.1). Ak vrchol  $v$  nesusedí s vrcholom  $\omega$ , tak kružnicu  $C_v$  vpíšeme do mnohouholníka, tvoreného vrcholmi  $N_\Gamma(v)$ . Vieme, že hrany grafu  $G$  a jeho duálu  $G^*$  sa pretínajú v pravom uhle a trojuholníky  $vp_1f_1$  a  $up_2f_1$  sú zhodné (Obr. 4.3 vpravo). Uhol  $\alpha$  na hrane  $e = (v, f_1)$  v grafe  $\Gamma$  je rovný  $\arctan \frac{r_{f_1}}{r_v}$ . Keďže celkový uhol pri vrchole  $v$  je rovný  $2\pi$  a uhol  $\alpha$  je do súčtu započítaný dvakrát, potom platí

$$\sum_{\tau, v\tau \in E(\Gamma)} 2\alpha = 2\pi.$$

Z toho vyplýva

$$\sum_{\tau, v\tau \in E(\Gamma)} \alpha = \pi.$$

Tým sme dokázali (4.1).

Ak je vrchol  $v$  sused vrcholu  $\omega$ , potom sa musí nachádzať vo vonkajšom cykle grafu  $G$ . Kružnica  $C_\omega$  je opísaná mnohouholníku, ktorý je tvorený vonkajším cyklom, pretože susedia vrcholu  $\omega$  sú vrcholy vo vonkajšom cykle grafu  $G$ . Súčet vnútorných uhlov  $n$ -uholníka je  $(n-2)\pi$ , z toho vyplýva (4.2).  $\square$

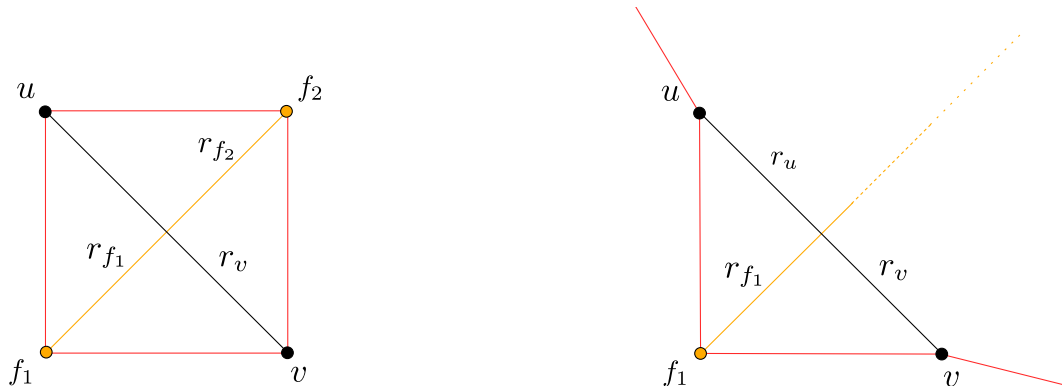
**Slabý PDCP.** Počítanie s vrcholom  $\omega$ , ktorý odpovedá vonkajšej stene grafu  $G$  je zložité. Preto najskôr ukážeme, že vieme nájsť PDCP pre graf  $G$  bez  $\omega$ . Takýto primal-dual circle packing budeme nazývať *slabý PDCP*. Namiesto vertex-face grafu  $\Gamma$  budeme pracovať s grafom  $\Gamma' = \Gamma - \{\omega\}$ . Potom slabý PDCP rozšírime na PDCP.

Predpokladajme, že existujú polomery  $r_v$  pre každé  $v \in \Gamma'$  splňujúce (4.1) a (4.2). Ak  $s$  je stena grafu, potom  $Q(s)$  značí štvoruholník indukovaný stenou  $s$ . Nech  $s = uf_1vf_2$  je stena v  $\Gamma'$  (Obr. 4.4 vľavo). Veľkosť a tvar štvoruholníka  $Q(s)$  je jednoznačne určený príslušnými polomermi. Ak  $u, f_1, f_2, \neq \omega$ , potom veľkosť uhla pri vrchole  $v$  v tomto štvoruholníku je

$$\alpha^s(v) = \arctan \frac{r_{f_1}}{r_v} + \arctan \frac{r_{f_2}}{r_v}$$

a veľkosti strán sú

$$vf_1 = \sqrt{r_v^2 + r_{f_1}^2} \quad a \quad vf_2 = \sqrt{r_v^2 + r_{f_2}^2}.$$



Obr. 4.4: Vľavo štvoruholník, v ktorom žiadny z vrcholov nie je  $\omega$ . Vpravo, jeden z vrcholov je  $\omega$ . Hrany vedúce do vrcholu  $\omega$  sú neohraničené. Nakreslenie je rozlíšené farbami čierna =  $G$ , žltá =  $G^*$ , červená =  $\Gamma$ .

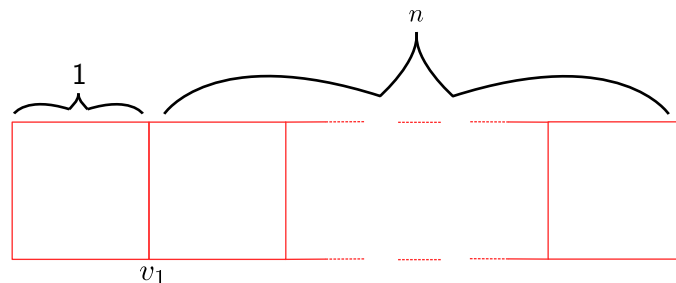
Ak jeden z vrcholov je v nekonečne, napríklad  $f_2 = \omega$ , potom má štvoruholník  $Q(s)$  dve neohraničené hrany, ale trojuholník  $uf_1v$  je jednoznačne určený (Obr. 4.4 vpravo).

V Lemme 4.2 ukážeme, že podmienky (4.1) a (4.2) postačujú na existenciu slabého PDCP grafu  $G$ .

**Lemma 4.2.** *Nech  $G$  je 3-súvislý rovinný graf a  $\Gamma$  jeho vertex-face graf. Ak máme kladné čísla  $r_v$ , pre  $v \in V(\Gamma')$ , ktoré splňujú (4.1) a (4.2), potom existuje slabý PDCP grafov  $G, G^*$  s polomerami  $r_v$ , pre  $v \in V(\Gamma')$ .*

*Dôkaz.* Aby sme získali slabý PDCP, potrebujeme pre každý vrchol  $v \in V(\Gamma')$  nájsť bod  $\bar{v} \in \mathbb{C}$ , ktorý bude stredom kružnice  $C_v$  s polomerom  $r_v$ .

Začneme tým, že nakreslíme ľubovoľný vrchol  $u_0 \in V(\Gamma')$  na nejaký bod v  $\mathbb{C}$ . Ďalej nakreslíme ľubovoľnú hranu  $u_0u_1$ , ktorej veľkosť je rovná  $\sqrt{r_{u_0}^2 + r_{u_1}^2}$ . Keďže sú splnené podmienky (4.1) a (4.2), potom pozícia každého suseda vrcholu  $u_0$  je jednoznačne určená. Uhly a veľkosti hrán dopočítame zo zadaných polomerov. Ak sa presunieme z vrcholu  $u_0$  do vrcholu  $u_1$ , potom je opäť pozícia každého jeho suseda určená. Z podmienok (4.1) a (4.2) vyplýva, že ak budeme viesť cestu z  $u_0$  do  $u_0$  cez štvorcýklus v  $\Gamma'$ , potom sa pozícia  $u_0$  sa nezmení. Z indukcie vyplýva, že sa pozícia  $u_0$  nezmení, ani vtedy keď budeme cestu viesť cez ľubovoľný cyklus v grafe  $\Gamma'$  (Obr. 4.5).



Obr. 4.5: Vieme, že platí pre jeden štvorcýklus. Predpokladáme, že platí pre  $n$  cyklov. Chceme dokázať, že platí pre  $(n+1)$  cyklov. Z predpokladu vieme, že platí pre  $n$ -cyklov. A zároveň vieme, že platí pre štvorcýklus. Keď tieto cykly spojíme bude platiť aj pre  $n+1$  cyklov.

Každá cesta z  $u_0$  do ľubovoľného bodu  $u$  nám dá vždy rovnaký bod  $\bar{u}$ . Výsledné nakreslenie grafu  $\Gamma'$  nezávisí na voľbe  $u_0$  a  $u_1$ . Z podmienok (4.1) a (4.2) vyplýva,



že nakreslenie grafu  $\Gamma'$  je rovinné nakreslenie. Výsledný slabý PDCP grafov  $G$  a  $G^*$  dostaneme tak, že nakreslíme kružnice do tohto nakreslenia  $\Gamma'$ .  $\square$

Dokážeme dve pomocné Lemmy 4.3 a 4.4, ktoré použijeme v dôkaze Lemmy 4.5. Ak  $S \subseteq V(\Gamma)$ , potom  $E(\Gamma(S))$  označuje množinu hrán podgrafu grafu  $\Gamma$  indukovaného množinou  $S$ .

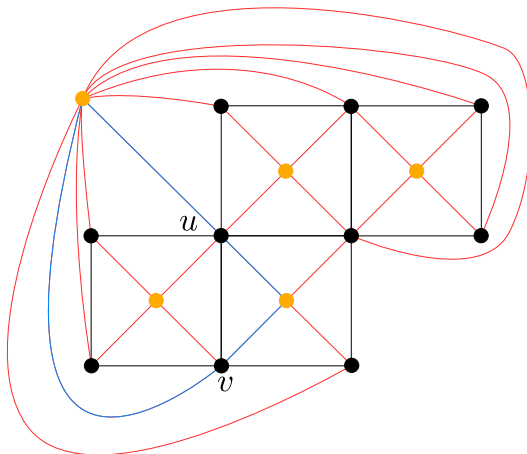
**Lemma 4.3.** *Nech  $G$  je 2-súvislý rovinný graf s  $|V(G)| \geq 4$  a  $\Gamma$  nech je jeho vertex-face graf. Potom sú nasledujúce tvrdenie ekvivalentné:*

1.  $G$  je 3-súvislý.
2. Každý štvorcýklus v grafe  $\Gamma$  je stena.
3. Pre každú podmnožinu  $S \subset V(\Gamma)$  takú, že  $|S| \geq 5$  platí

$$2|S| - |E(\Gamma(S))| \geq 5.$$

*Dôkaz.* Najskôr dokážeme ekvivalenciu  $1 \iff 2$ . Implikáciu  $1 \implies 2$  dokážeme obmenou. Teda predpokladáme, že neplatí 2 a chceme ukázať, že neplatí 1.

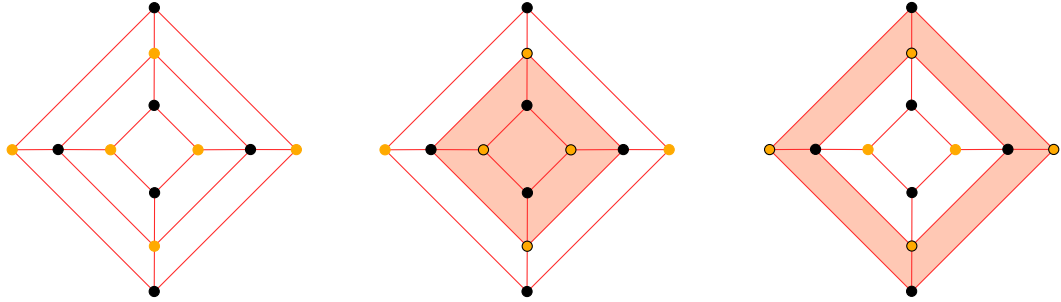
Ak nejaký štvorcýklus v  $\Gamma$  nie je stena, potom niektorá z protilahlých dvojíc je rez v  $G$  alebo  $G^*$  a separuje tie vrcholy, ktoré sa nachádzajú vnútri štvorcýklu od zvyšku grafu (Obr. 4.6). Teda platí  $1 \implies 2$ . Teraz dokážeme opačnú implikáciu, opäť obmenou. Graf  $G$  je 2-súvislý, teda má rez veľkosti 2. Tieto dva vrcholy v grafe  $\Gamma$  patria do štvorcýklu, ktorý nie je stena. Teda platí  $2 \implies 1$ .



Obr. 4.6: čierna =  $G$ , červená =  $\Gamma$ , modrá = štvorcýklus. Na obrázku je znázornený modrý štvorcýklus. Vrcholy  $u$  a  $v$  sú rez. Graf  $G$  má rez veľkosti 2, potom nemôže byť 3-súvislý.

Ešte nám ostáva dokázať ekvivalenciu  $2 \iff 3$ . Opäť na to pôjdeme obmenou. Predpokladáme, že existuje podmnožina  $S \subset V(\Gamma)$  taká, že  $2|S| - |E(\Gamma(S))| \leq 4$ , po úprave  $|E(\Gamma(S))| \geq 2|S| - 4$ . Zároveň z Lemma 2.4 vieme, že  $|E(\Gamma(S))| \leq 2|V(\Gamma(S))| - 4$ . Dokopy dostaneme rovnosť  $|E(\Gamma(S))| = 2|S| - 4$ . Teda máme podgraf  $\Gamma(S)$ , ktorý je kvadrangulácia,  $S \neq V(\Gamma)$  a  $|S| \geq 5$ . Ak sme vybrali len vnútorné vrcholy grafu  $\Gamma$ , potom sme museli vybrať také vrcholy, na ktorých má indukovaný podgraf vonkajšiu stenu štvoruholník. Tento štvoruholník je v grafe  $\Gamma$  štvorcýklus, ktorý nie je stena (Obr. 4.7 v strede). Ak sme vybrali aj vrcholy z vonkajšieho cyklu grafu  $\Gamma$  a dostali sme kvadranguláciu, potom tento

podgraf obsahuje nejaký vnútorný štvorcový cyklus, ktorý je stena ale v grafe  $\Gamma$  obsahuje nejaké iné vrcholy (Obr. 4.7 vpravo). Tým sme dokázali implikáciu  $2 \implies 3$ .



Obr. 4.7: Vľavo vertex-face graf  $\Gamma$ . V strede a vpravo vyberáme vnútornú a vonkajšiu kvadranguláciu.

Opačne, predpokladajme, že existuje štvorcový cyklus  $C$  v grafe  $\Gamma$ , ktorý nie je stena. Ak k tomuto štvorcovému cyklu pridáme vonkajšie alebo vnútorné vrcholy získame kvadranguláciu a teda rovnosť  $|E(\Gamma(S))| = 2|S| - 4$ . Tým sme dokázali implikáciu  $3 \implies 2$ .  $\square$

**Lemma 4.4.** *Nech  $S \subset V(\Gamma)$  a  $t = |S \cap \{v_1, \dots, v_k\}|$ . Ak  $|S| \geq 4$ , alebo  $|S| \in \{2, 3\}$  a zároveň  $t = 0$ , potom platí*

$$2|S| - |E(\Gamma(S))| \geq t + 3. \quad (4.3)$$

Ak  $|S| \in \{2, 3\}$  a  $t > 0$ , potom

$$2|S| - |E(\Gamma(S))| \geq t + 2. \quad (4.4)$$

*Dôkaz.* Najskôr ukážeme prípady, v ktorých stačí dosadiť. Nech  $|S| \in \{2, 3\}$  a  $t = 0$ . Potom pre  $|S| = 2$

$$4 - 0 \geq 3, \quad 4 - 1 = 3.$$

Pre  $|S| = 3$

$$6 - 0 \geq 3, \quad 6 - 1 \geq 3, \quad 6 - 2 \geq 3, \quad 6 - 3 = 3.$$

Nech  $|S| \in \{2, 3\}$  a  $t > 0$ . Teda  $t \in \{1, 2, 3\}$ . Potom pre  $|S| = 2$

$$4 - 0 \geq 1 + 2, \quad 4 - 0 = 1 + 2.$$

Medzi vonkajšími vrcholmi grafu  $G$  nemôže byť hrana vo vertex-face grafe  $\Gamma$ . Preto ak sú v množine  $S$  dva vrcholy z vonkajšieho cyklu, môže nastať len táto situácia

$$4 - 0 = 2 + 2.$$

Podobne sa dosadí aj pre  $|S| = 3$ . Dôležité je si uvedomiť, že medzi vonkajšími vrcholmi nie sú hrany a graf  $\Gamma$  je kvadrangulácia, teda na troch vrcholoch môže byť indukovaná maximálne cesta veľkosti 2.

Teraz dokážeme všeobecný prípad. Nech  $S' = S \cup \{\omega\}$ . Z Lemmy 4.3 vieme, že pre  $S' \subset V(\Gamma)$ ,  $|S'| \geq 5$  platí

$$2|S'| - |E(\Gamma(S'))| \geq 5.$$

Po dosadení dostaneme

$$2(|S| + 1) - (|E(\Gamma(S))| + t) \geq 5,$$

pretože po pridaní  $\omega$  sa veľkosť množiny vrcholov zvýši o jedna a do indukovaného podgrafu sa pridajú hrany z  $\omega$  do vrcholov na vonkajšom cykle, ktorých počet je  $t$ . Nerovnosť upravíme

$$2|S| + 2 - |E(\Gamma(S))| - t \geq 5,$$

$$2|S| - |E(\Gamma(S))| \geq t + 3.$$

A tým sme dokázali nerovnosť (4.3).  $\square$

Predtým sme dokázali, že ak máme PDCP, potom uhly pri vrchoch splňujú podmienky (4.1) a (4.2). Teraz si dokážeme, že keď máme 3-súvislý rovinný graf s konvexným vonkajším cyklom, potom nájdeme čísla splňujúce podmienky (4.1) a (4.2).

**Lemma 4.5.** *Nech  $G$  je 3-súvislý rovinný graf s vonkajším cyklom  $C = v_1v_2 \dots v_k$ . Nech súčet uhlov  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  pri vonkajších vrchoch je rovný  $(k - 2)\pi$  a nech  $0 < \alpha_i < \pi$ . Potom existujú kladné čísla  $r_v$ , pre  $v \in V(\Gamma')$ , že pre vnútorné vrcholy  $v \neq v_1, \dots, v_k$  platí*

$$\sum_{\tau, v\tau \in E(\Gamma')} \arctan \frac{r_\tau}{r_v} = \pi$$

a pre každé  $i = 1, \dots, k$  platí

$$\alpha_i = 2 \sum_{v_i\tau \in E(\Gamma')} \arctan \frac{r_\tau}{r_{v_i}}, \quad (4.5)$$

Čísla  $r_v$ , pre  $v \in V(\Gamma')$  sú jednoznačné až na multiplikatívnu konštantu.

*Dôkaz.* Uvažme vektor kladných čísel  $r = (r_v \mid v \in V(\Gamma'))$ . Pre každý vrchol  $v \in V(\Gamma') \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$  definujeme

$$\varphi_v = \varphi_v(r) = \sum_{v\tau \in E(\Gamma')} \arctan \frac{r_\tau}{r_v} - \pi,$$

kde  $\varphi_v$  meria ako ďaleko sme od potrebného súčtu veľkostí uhlov pri vrchole  $v$ . Pre vrcholy patriace do vonkajšieho cyklu  $\Gamma'$  definujeme

$$\varphi_{v_i} = \varphi_{v_i}(r) = \sum_{v_i\tau \in E(\Gamma')} \arctan \frac{r_\tau}{r_{v_i}} - \frac{1}{2}\alpha_i.$$

Tento rozdiel opäť meria ako ďaleko sme od potrebného súčtu veľkostí uhlov pri vrchole  $v_i$  a je odvodený z rovnice (4.5). Teraz zavedieme funkciu

$$\mu(r) = \sum_{v \in V(\Gamma')} \varphi_v^2,$$

ktorá hovorí ako ďaleko sme od riešenia. Prvky v sume umocňujeme na druhú, pretože  $\varphi$  môže byť aj negatívne číslo, a teda by sa mohli prvky odčítat. Potrebujeme ukázať, že existuje vektor  $r = (r_v \mid v \in V(\Gamma'))$  taký, že  $\mu(r) = 0$ .

Ak nejaký uhol zväčšíme, druhý sa zmenší. Inými slovami, musí platiť

$$\sum_{v \in V(\Gamma')} \varphi_v = 0. \quad (4.6)$$

Aby sme rovnosť (4.6) dokázali, expandujeme sumu

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(\Gamma')} \varphi_v &= \sum_{v \in V(\Gamma') \setminus \{v_1, \dots, v_k\}} \varphi_v + \sum_{i=1}^k \varphi_{v_i} = \\ &= \sum_{v \in E(\Gamma')} \left( \arctan \frac{r_\tau}{r_v} - \pi \right) + \sum_{i=1}^k \left( \arctan \frac{r_v}{r_\tau} - \frac{1}{2} \alpha_i \right) = \end{aligned}$$

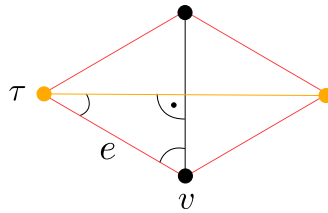
Sumu sčítavame postupne cez každý vnútorný a vonkajší vrchol. Keď budeme sumu namiesto cez vrcholy sčítavať cez hrany, musíme na hrane  $v\tau$  započítať uhol pri  $v$  aj pri  $\tau$ . Získame

$$= \sum_{v\tau \in E(\Gamma')} \left( \arctan \frac{r_\tau}{r_v} + \arctan \frac{r_v}{r_\tau} \right) - \pi(|V(\Gamma')| - k) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad (4.7)$$

kde uhol  $\pi$  odpočítame toľkokrát, koľko je vnútorných vrcholov. Za výraz

$$\sum_{v\tau \in E(\Gamma')} \left( \arctan \frac{r_\tau}{r_v} + \arctan \frac{r_v}{r_\tau} \right)$$

môžeme dosadiť  $\frac{\pi}{2}|E(\Gamma')|$ , pretože vrcholy  $v$  a  $\tau$  sa nachádzajú pri prepone pravouhlého trojuholníka, teda ich súčet bude  $\pi/2$  (Obr. 4.8). Tento uhol musíme započítať toľkokrát, koľko je v grafe  $\Gamma'$  hrán.



Obr. 4.8: Súčet vrcholov pri prepone pravouhlého trojuholníka je  $\pi/2$ .

Keďže v kvadrangulácii platí rovnosť  $|E| = 2|V| - 4$  (Lemma 2.4), získame

$$2|V(\Gamma)| = |E(\Gamma)| + 4.$$

Výraz  $|V(\Gamma)|$  môžeme vyjadriť ako počet vrcholov v grafe bez bodu z nekonečna plus bod v nekonečne. Výraz  $|E(\Gamma)|$  je rovný počtu hrán v grafe bez  $\omega$  plus hrany, ktoré vedú z vonkajších vrcholov do  $\omega$ . Teda platí

$$2(|V(\Gamma')| + 1) = |E(\Gamma')| + k + 4,$$

$$2|V(\Gamma')| + 2 = |E(\Gamma)| + k + 4,$$

$$|V(\Gamma')| = \frac{|E(\Gamma)|k + 2}{2}.$$

Z definície  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = (k-2)\pi$ . Po dosadení do výrazu (4.7), získame

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(\Gamma')} \varphi_v &= \frac{\pi}{2}|E(\Gamma')| - \pi \left( \frac{|E(\Gamma')| + k + 2}{2} - k \right) - \frac{1}{2}(k-2)\pi = \\ &= \frac{\pi}{2}|E(\Gamma')| - \frac{\pi}{2}|E(\Gamma')| + \frac{k}{2} - \pi - \frac{k}{2} + \pi = 0. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali rovnosť (4.6).

Teraz definujeme množinu kandidátov  $Q$  na hľadaný vektor polomerov. Vektory  $r = (r_v \mid v \in V(\Gamma'))$  si obmedzíme tak, že pre každé  $v \in V(\Gamma')$  platí  $0 < r_v \leq 1$  a ak  $\varphi_v > 0$ , potom požadujeme nech  $r_v = 1$  (táto podmienka je implikácia, teda aj vrchol s  $\varphi_v \leq 0$  môže mať polomer 1). Ďalej budeme chcieť, aby sa aspoň jeden polomer  $r_v$  rovnal 1. Je zrejmé, že množina  $Q$  je neprázdna, pretože napríklad vektor  $r = (1, 1, \dots, 1)$  splňuje všetky podmienky. Množina  $Q$  je tiež ohraničená a tým pádom existuje  $\inf\{\mu(r) \mid r \in Q\}$ .

Uvážme postupnosť  $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \dots$  takú, že  $\mu(r^{(i)}) \rightarrow m$  pre  $i \mapsto \infty$ . Z tejto postupnosti vyberieme podpostupnosť, ktorá konverguje pre polomer  $r_v$ , pre nejaký vrchol  $v$ . Z tejto podpostupnosti vyberieme ďalšiu podpostupnosť, ktorá konverguje pre polomer  $r_u$ , kde  $u \in V(\Gamma') \setminus \{v\}$ . Podobne budeme pokračovať aj pre zvyšné polomery. Získame podpostupnosť, že pre každé  $v \in V(\Gamma')$  polomer  $r_v^{(i)}$  konverguje. Toto je štandardný argument z matematickej analýzy. Môžeme predpokladať, že toto platí pre postupnosť  $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \dots$ .

Teraz ukážeme sporom, že žiadny z polomerov sa neblíži k 0. Uvážme množinu vrcholov  $S \subseteq V(\Gamma')$ , pre ktoré platí  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_v^{(i)} \neq 0$ . Predpokladajme, že  $S \neq V(\Gamma')$ , teda, že existuje aspoň jeden polomer, ktorý sa blíži k 0. Podobne ako pri dokazovaní (4.6), získame

$$\sum_{v \in S} \varphi_v(r^{(i)}) = \frac{\pi}{2}|E(\Gamma(S))| - \pi(|S| - t) - \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \alpha_j + \sum_{\substack{v\tau \in E(\Gamma'), \\ v \in S, \tau \notin S}} \arctan \frac{r_\tau^{(i)}}{r_v^{(i)}}. \quad (4.8)$$

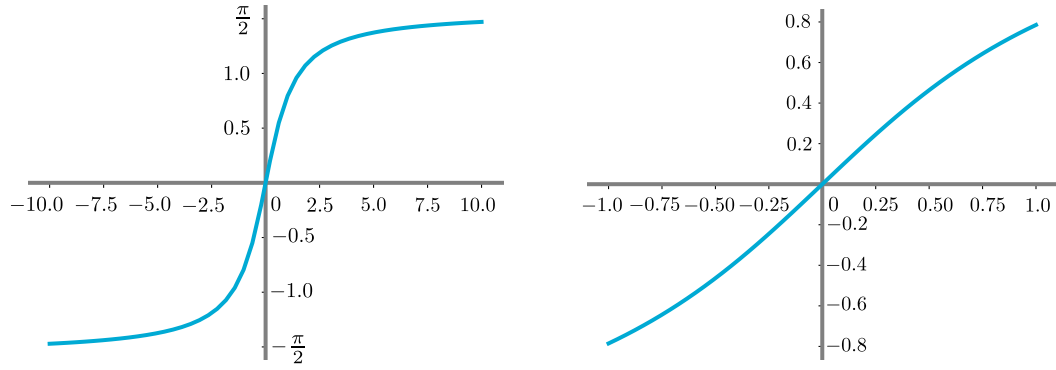
Každé  $\tau$  v poslednej sume nepatrí do  $S$ , tým pádom  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_\tau^{(i)} = 0$  a  $\arctan \frac{r_\tau^{(i)}}{r_v^{(i)}} \rightarrow 0$  (Obr. 4.9). Máme

$$\sum_{v \in S} \varphi_v(r^{(i)}) \rightarrow \frac{\pi}{2}|E(\Gamma(S))| - \pi(|S| - t) - \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \alpha_j, \quad \text{pre } i \rightarrow \infty.$$

Ďalej budeme upravovať pravú stranu. Pomôžeme si jednoduchým trikom. Do celého výrazu (4.8) a aj do sumy  $\frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \alpha_j$  pričítame  $\pi - \pi$ . Získame

$$\sum_{v \in S} \varphi_v(r^{(i)}) = \frac{\pi}{2}|E(\Gamma(S))|s - \pi(|S| - t) + \pi - \pi - \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\alpha_j + \pi - \pi).$$

Po roznásobení zátvoriek, prenásobení číslom  $\frac{2}{2}$  a rozložením poslednej sumy na  $\frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j)$  a  $\frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \pi = \frac{t\pi}{2}$ , kde  $t$  je počet vrcholov  $S$  z vonkajšieho cyklu,



Obr. 4.9: Funkcia  $\arctan(x)$  na intervale  $[-10, 10]$  (vľavo) a na intervale  $[-1, 1]$  (vpravo).

získame

$$\left( \frac{\pi}{2} |E(\Gamma(S))| - \frac{2\pi}{2} |S| + \frac{2\pi}{2} t + \frac{2\pi}{2} - \pi \right) - \left( \frac{t\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j) \right).$$

Vybraním  $-\frac{\pi}{2}$  pred zátvorku a preskupením členov získame výraz

$$-\frac{\pi}{2} (2|S| - E(\Gamma(S)) - t - 2) + \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j) - \pi. \quad (4.9)$$

Ukážeme, že výraz (4.9) bude vždy záporný. Z predpokladu vety  $0 < \alpha_i < \pi$  a  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = (k-2)\pi$ . Potom  $(\pi - \alpha_j) > 0$  a zároveň pre  $j = 1, \dots, k$  platí  $\sum_{j=1}^k (\pi - \alpha_i) = k\pi - (k-2)\pi = k\pi - k\pi + 2\pi = 2\pi$ . Z toho plynie

$$0 < \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j) \leq 2\pi,$$

a teda

$$\frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j) - \pi \leq 0.$$

Keď sa pozrieme na výraz

$$-\frac{\pi}{2} (2|S| - E(\Gamma(S)) - t - 2),$$

z Lemmy 4.4 vieme, že  $(2|S| - E(\Gamma(S)) - t - 3) \geq 0$  a potom  $(2|S| - E(\Gamma(S)) - t - 2) > 0$ . Teda celý výraz (4.9) je ostro menší ako 0. Ak platí (4.4), potom prvý člen výrazu (4.9) môže byť 0, ale keďže  $t < k$ , potom suma  $\frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} (\pi - \alpha_j) < 2\pi$  a teda druhý člen výrazu bude ostro menší ako 0. Z toho vyplýva, že suma  $\sum_{v \in S} \varphi_v(r^{(i)}) < 0$ . Dostávame

$$\sum_{v \notin S} \varphi_v(r^{(i)}) > 0,$$

ak  $i \rightarrow \infty$ . Ale potom musí nejaké  $\varphi_v(r^{(i)}) > 0$ , čo z definície množiny  $Q$  znamená, že  $r_v^{(i)} = 1$ . A toto je spor s definíciou množiny  $S$ . Z toho plynie, že  $S = V(\Gamma')$  a teda žiadny polomer sa neblíži k 0.

Teraz dokážeme, že  $\mu(r^*) = \inf\{\mu(r) \mid r \in Q\} = 0$ , pre nejaké  $r^* \in Q$ . Potom z Lemmy 4.2 vyplýva, že  $r^*$  definuje korektný slabý PDCP.

Položme  $r = \lim_{i \rightarrow \infty} r^{(i)}$ . Funkcie  $\varphi_v$  sú spojité, pretože  $\arctan$  je spojitý a zároveň konečný súčet spojitých funkcií je spojitý, potom  $r \in Q$ . Predpokladajme, že neplatí  $\mu(r) = 0$ . Nech  $S' = \{v \mid \varphi_v(r) < 0\}$ . Teda súčet uhlov pri  $v$  je menší ako  $\pi$  alebo  $\frac{1}{2}\alpha_v$  (podľa toho či je  $v$  vonkajší alebo vnútorný). Podľa (4.6)  $S' \neq \emptyset$  a  $S \neq V(\Gamma')$ . Teraz budeme upravovať vektor  $r$ . Nech  $r'_v = r_v$ , ak  $v \notin S'$  a nech  $r'_v = \alpha r_v$  ak  $v \in S'$ , kde  $\alpha < 1$ . Ak by sme násobili číslom  $\alpha$  blízko k 0, polomer by mohol byť tak malý, že by  $\varphi_v(r) > 0$  (pretože z Obr. (4.9)  $\arctan \frac{r_\tau}{r_v} < \arctan \frac{r'_\tau}{r'_v}$ ). Ale ak  $r_v$  prenásobíme číslom  $\alpha$  blízky 1, potom  $r' \in Q$  a zároveň uhol zväčšíme, ale nie tak aby nastala situácia  $\varphi_v(r) > 0$ . Dostaneme  $\mu(r') < \mu(r)$ . Toto je spor s minimalitou  $\mu(r)$ . A teda  $\mu(r) = 0$ .

Ukážeme, že toto riešenie je jednoznačné. Predpokladajme, že máme dva rozdielne riešenia  $r^*$  a  $r'$  také, že  $\max\{r_v^* \mid v \in V(\Gamma')\} = \max\{r'_v \mid v \in V(\Gamma')\} = 1$ . Teda, že každý z vektorov obsahuje aspoň jednu 1. Už sme ukázali, že existuje aspoň jedno riešenie, ktoré splňuje  $\mu(r) = 0$ . Potom  $\varphi_v(r^*) = \varphi_v(r') = 0$  pre všetky  $v \in V(\Gamma')$ . Nech  $S = \{v \mid r_v^* > r'_v\}$  je neprázdna. Potom  $S \neq V(\Gamma')$ , pretože z definície vektorov  $r^*$  a  $r'$ , každý z nich obsahuje maximum 1. Z (4.8) aplikované na  $r^*$  a  $r'$  získame

$$0 = \sum_{v \in S} \varphi_v(r^*) - \sum_{v \in S} \varphi_v(r'),$$

kde platí

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \varphi_v(r^*) &= \frac{\pi}{2} |E(\Gamma(S))| - \pi(|S| - t) - \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \alpha_j + \sum_{v\tau} \arctan \frac{r_\tau^*}{r_v^{*(i)}}, \\ \sum_{v \in S} \varphi_v(r') &= \frac{\pi}{2} |E(\Gamma(S))| - \pi(|S| - t) - \frac{1}{2} \sum_{v_j \in S} \alpha_j + \sum_{v\tau} \arctan \frac{r_\tau^{(i)'}}{r_v^{(i)'}}. \end{aligned}$$

Predpokladajme, že vonkajší cyklus je pravidelný mnohoúhelník. Potom sa všetky členy až na posledný odčítajú a dostaneme

$$0 = \sum_{v \in S} \varphi_v(r^*) - \sum_{v \in S} \varphi_v(r') = \sum_{v\tau} \left( \arctan \frac{r_\tau^*}{r_v^*} - \arctan \frac{r'_\tau}{r'_v} \right),$$

kde posledná suma je cez všetky hrany  $v\tau \in E(\Gamma')$  také, že  $v \in S$  a  $\tau \notin S$ . Keďže  $r'_v < r_v^*$  a  $r_\tau^* \leq r'_\tau$ , potom  $\frac{r_\tau^*}{r_v^*} < \frac{r'_\tau}{r'_v}$  a teda  $\arctan \frac{r_\tau^*}{r_v^*} < \arctan \frac{r'_\tau}{r'_v}$ . Tým dostávame spor, teda riešenie je jednoznačné.  $\square$

**Konštrukcia PDCP.** Zhrnieme poznatky, ktoré sme doteraz dokázali.

- Ak existuje PDCP a  $r = (r_1, \dots, r_n)$  je vektor polomerov z tohto PDCP, potom vektor  $r$  splňuje podmienky (4.1) a (4.2) (Lemma 4.1).
- Ak existujú polomery  $r_v$ , pre  $v \in V(\Gamma')$  splňujúce podmienky (4.1) a (4.2), potom existuje slabý PDCP (Lemma 4.2).
- Ak  $G$  je 3-súvislý graf s konvexným cyklom, potom existuje vektor polomerov  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , ktorý splňuje podmienky (4.1) a (4.2) (Lemma 4.5).

Teraz dokážeme

- Ak  $G$  je 3-súvislý rovinný graf, potom existuje PDCP.

Ak  $G$  je 3-súvislý rovinný graf, potom platí bod 3. Ak platí bod 3, potom platí bod 2 a získame slabý PDCP. Dokážeme, že slabý PDCP vieme rozšíriť na PDCP.

**Lemma 4.6.** *Nech  $G$  je 3-súvislý rovinný graf. Potom existuje PDCP reprezentácia grafu, ktorá je jedinečná, až na Möbiove transformácie a reflexiu v rovine.*

*Dôkaz.* Môžeme predpokladať, že vonkajší cyklus  $G$  je rovnostranný trojuholník s uhlami  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}$ . Z Lemmy 4.5 vieme, že existujú polomery, ktoré splňujú (4.1) a (4.2). Ak sú splnené tieto dve podmienky, potom z Lemmy 4.2 vieme, že existuje slabý PDCP. Nech  $r_1 = r_2 = r_3$ , potom môžeme toto slabý PDCP rozšíriť na PDCP pridaním kružnice  $C_\omega$ . Z Lemmy 4.5 vieme, že slabý PDCP bolo jednoznačné a pridaním kružnice  $C_\omega$  to neporušíme.

Ak vonkajší cyklus nie je trojcyklus, potom z Lemmy 2.3,  $G$  alebo  $G^*$  obsahuje trojcyklus. Pomocou Möbiovej transformácie  $M$  prehodíme tento cyklus tak, aby bol vonkajší v grafe  $G$ . Teraz už môžeme postupovať ako v prvom odstavci a potom použiť inverznú funkciu k Möbiovej transformácii  $M$ . Tým získame jedinečný PDCP až na Möbiovu transformáciu a reflexiu.  $\square$



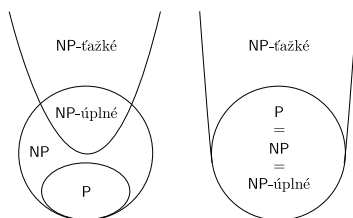
# 5. Rozširovanie čiastočného circle packingu

## 5.1 NP-ťažkosť rozširovania

V predchádzajúcich kapitolách sme predstavili dva rôzne dôkazy existencie circle packingu. Teraz ukážeme, že je NP-ťažké rozhodnúť, či je možné daný čiastočný circle packing rozšíriť. Pôjdeme na to tak, že najskôr ukážeme, že je NP-úplné rozšíriť čiastočnú reprezentáciu grid grafov, ktoré sme definovali v úvodnej kapitole. Dôkaz zložitosti je možné nájsť v [3].

**Lemma 5.1.** *Problém rozširovania čiastočnej reprezentácie bipartitných grid grafov je NP-úplný.*

*Dôkaz.* Aby sme dokázali, že problém je NP-úplný, musíme ukázať, že je NP-ťažký a zároveň, že patrí do NP (Obr. 5.1). NP-ťažkosť sa ukáže tak, že nájdeme polynomiálnu redukciu z nejakého známeho NP problému na náš problém.



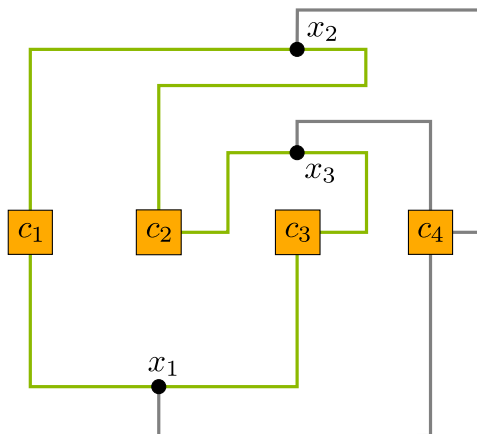
Obr. 5.1: vľavo  $P \neq NP$ , vpravo  $P = NP$

Keď chceme ukázať, že problém leží v triede NP, musíme byť schopný v polynomiálnom čase určiť, či nejaký certifikát je správne riešenie. Ak dostaneme bipartitný grid graf, nejakú jeho čiastočnú reprezentáciu a nejaké dokončenie tejto čiastočnej reprezentácie, vieme v lineárnom čase  $|V| + |H|$  reprezentáciu nakresliť a tak overiť správnosť.

Aby sme ukázali, že náš problém je NP-ťažký, popíšeme polynomiálnu redukciu z problému Planar-3-SAT.

Pre danú formulu  $\Phi$  v konjunktívnej normálnej forme (CNF) definujeme graf  $G_\Phi = (C \cup H, \{xc: (x \in c \in C) \vee (\neg x \in c \in C)\})$ , kde  $C$  sú klauzule formule  $\Phi$  a  $H$  sú premenné formule  $\Phi$ . Zjavne  $G_\Phi$  je bipartitný graf. Problém Planar-3-SAT má na vstupe formulu  $\Phi$  v tvare CNF takú, že každá klauzula obsahuje maximálne 3 literály a  $G_\Phi$  je rovinný graf. Úlohou je nájsť splňujúce ohodnotenie  $\Phi$ . Ďalej budeme predpokladať, že každá klauzula obsahuje 2 alebo 3 literály a každá premenná sa nachádza v práve troch klauzulách, a to 2-krát ako pozitívny literál a raz ako negatívny literál. Aj v takejto forme je Planar-3-SAT NP-úplný problém [9].

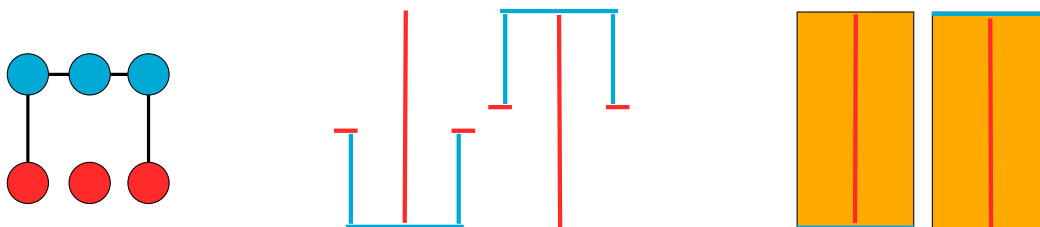
Skonštruujeme rektilineárnu reprezentáciu grafu  $G_\Phi$ . To je taká, v ktorej je každá hrana postupnosť úsečiek, ktoré medzi sebou zvierajú uhol  $\frac{\pi}{2}$ . Urobíme to tak, že pozitívne literály začínajú horizontálnymi úsečkami a negatívne literály začínajú vertikálnymi úsečkami. Na Obr. (5.2) je nakreslená rektilineárna reprezentácia grafu  $G_\Phi$ , kde  $\Phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ .



Obr. 5.2: Klauzule a premenné sú vrcholy grafu. Medzi premennou a klauzulou je hrana práve vtedy, ak pozitívna alebo negatívna premenná patrí do klauzule. Zelené hrany označujú pozitívny výskyt a sivé hrany označujú negatívny výskyt.

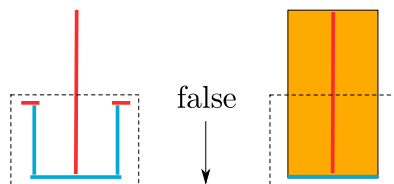
Otestovať rovinnosť grafu  $G_\Phi$  a skonštruovať jeho rektilineárnu reprezentáciu je možné v lineárnom čase. Pomocou nakreslenia grafu  $G_\Phi$  skonštruujeme graf  $H$  nasledovne. Potom graf  $H$  bude vstupom pre problém rozširovania čiastočnej reprezentácie grid grafov.

Každý vrchol v  $G_\Phi$  odpovedajúci premennej nahradíme gadgetom, ktorý sa skladá z obdĺžnikov. Každý obdĺžnik sa skladá z grafu zobrazeného na Obr. 5.3 vľavo. Aby sme definovali vstup problému rozširovania čiastočnej reprezentácie



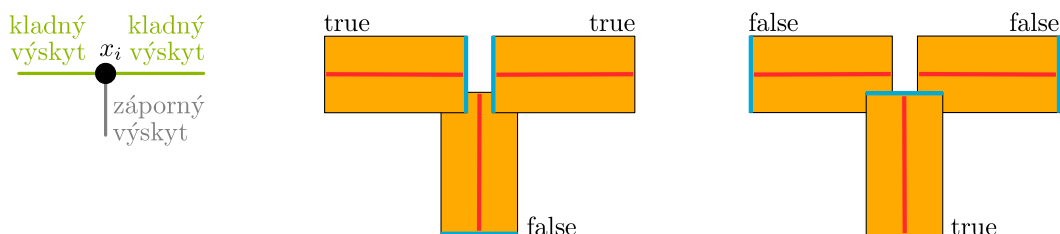
Obr. 5.3: Vľavo graf, v strede jeho dve možné grid reprezentácie a vpravo obdĺžniky znázorňujúce tieto reprezentácie.

grid grafov, definujeme, že červené vrcholy sú predreprezentované a teda fixné. Jeden fixný červený vrchol je izolovaný a tak modrú cestu medzi zvyšnými vrcholmi môžeme nakresliť len dvomi spôsobmi ako na Obr. 5.3 v strede. Stranu, kde sa náchadza modrá cesta označíme false (Obr. 5.4).



Obr. 5.4: Strana obdĺžnika s modrou hranou sa označuje false.

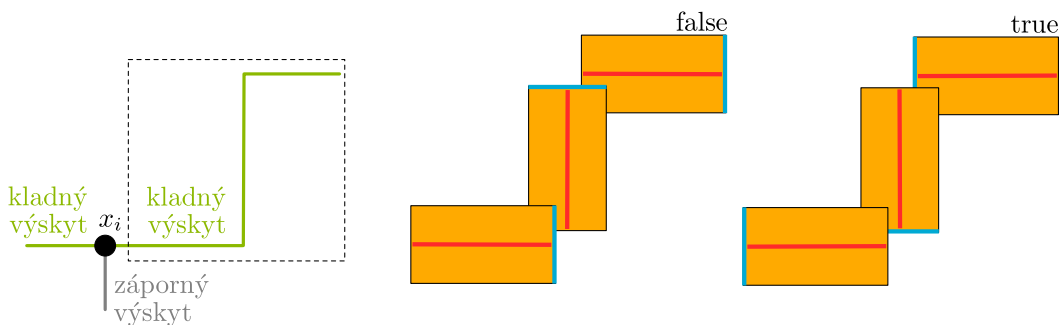
Takýto obdĺžnik môžeme rotovať o  $90^\circ$ , a teda strana false sa môže nachádzať hore, vpravo, dole alebo vľavo. Gadget pre každú premennú pozostáva z troch takýchto obdĺžnikov. Medzi grafmi, reprezentovanými obdĺžnikmi, v gadgete nie je hrana. Keďže sme si určili, že z pozitívnych výskytov premenných vedú horizontálne hrany a z negatívneho výskytu vedie vertikálna hrana, obdĺžniky môžeme poskladať do gadgetu ako na Obr. 5.5.



Obr. 5.5: Gadget v strede reprezentuje premennú  $x_i$  s hodnotou true a gadget vpravo reprezentuje premennú  $x_i$  s hodnotou false.

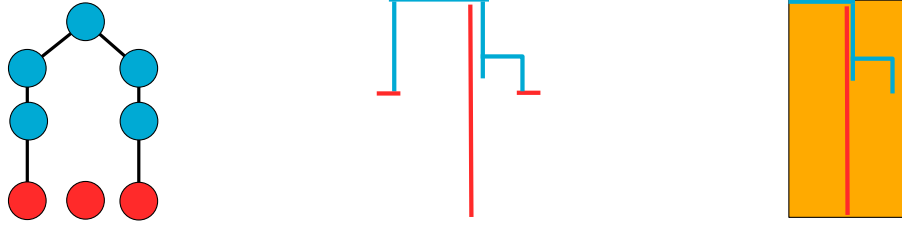
Ak je premenná ohodnotená true, potom musíme z vertikálneho obdĺžnika vyslať false a z horizontálnych obdĺžnikov vyslať true (Obr. 5.5 v strede). Ak je premenná ohodnotená false, potom musíme z vertikálneho obdĺžnika vyslať true a z horizontálnych obdĺžnikov vyslať false (Obr. 5.5 vpravo).

Každá hrana je nahradená postupnosťou obdĺžnikov, kde každá úsečka v rektilineárnej reprezentácii hrany je nahradená jedným obdĺžnikom. Na Obr.5.6 vľavo je znázornená premenná  $x_i$  s hranami, ktoré z nej vedú. Zelené hrany vedú do klauzúl s pozitívnym výskytom a sivá hrana vedie do klauzule s negatívnym výskytom. Na Obr. 5.6 v strede a vpravo je znázornené ako je nastavená hrana, ak premenná  $x_i$  je ohodnotená false a true.



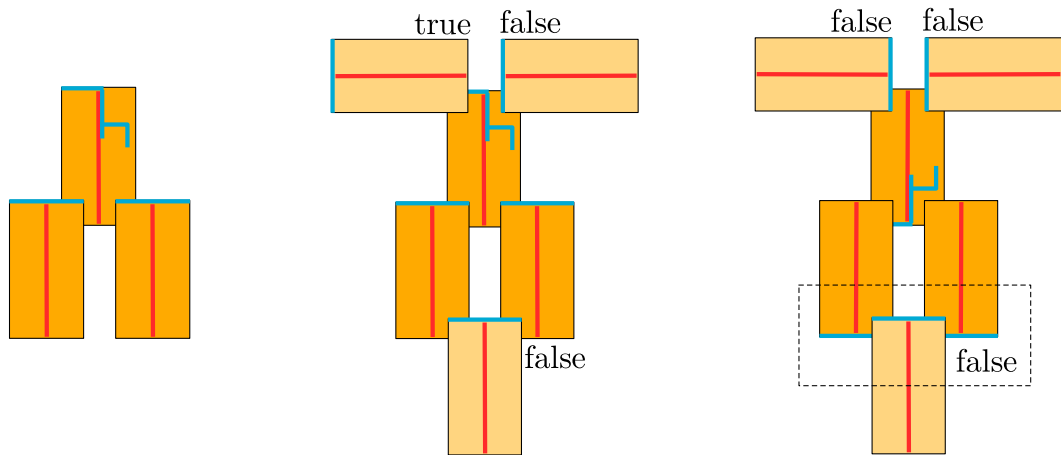
Obr. 5.6: Vľavo náčrt premennej  $x_i$  s hranami, ktoré z nej vedú. V strede hrana, ktorá vedie do klauzule s pozitívnym výskytom premennej  $x_i$  je nastavená na false, teda premenná je ohodnotená false. Vpravo hrana, ktorá vedie do klauzule s pozitívnym výskytom premennej  $x_i$  je nastavená na true, teda premenná je ohodnotená true.

Gadget klauzule je zložitejší. Skladá sa z dvoch druhov obdĺžnikov. Jeden z nich sme už ukázali vyššie a druhý vznikne z grafu na Obr. 5.7 vľavo. Gadget klauzule (Obr. 5.8 vľavo) sa skladá z dvoch obdĺžnikov prvého typu a jedného obdĺžnika druhého typu (Obr. 5.7 vpravo). Svetložlté obdĺžniky na Obr. 5.8 v strede



Obr. 5.7: Vľavo graf, v strede jeho grid reprezentácia a vpravo obdĺžnik znázorňujúci túto reprezentáciu.

a vpravo sú hrany, ktoré vedú z premenných do klauzule. Obdĺžnik druhého typu nám zaručí, že aspoň jedna premenná v klauzule musí byť nastavená na true. Ak by boli všetky premenné v klauzule nastavené na false, gadget sa zablokuje (Obr. 5.8 vpravo). Potom sa reprezentácia nedá rozšíriť.



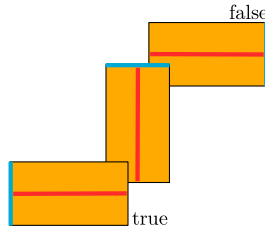
Obr. 5.8: Vľavo gadget klauzule. V strede splnená klauzula. Vpravo zablokovaná klauzula.

Môže nastať prípad, že premenná je nastavená na true a teda prvý obdĺžnik na hrane posielala true. Potom sa niektorý z ďalších obdĺžnikov nastaví na false a hrana namiesto true posielala false (Obr. 5.9). Splniteľnosť formuly  $\Phi$  to neovplyvní. Ak by nastal takýto prípad, máme dve možnosti:

- Hrana zablokuje klauzulu a nezískame prípustné rozšírenie reprezentácie.
- Niektorá z ďalších premenných v klauzule je ohodnotená true a obdĺžnik druhého typu je v takej pozícii, že zmenená hrana nezablokuje klauzulu. Potom máme splnenú klauzulu a prípustné rozšírenie podgrafu.

Graf  $G_\Phi$  formuly  $\Phi$  sme previedli na problém rozširovania čiastočnej reprezentácie grid grafov tak, že sme vrcholy v grafe  $G_\Phi$  nahradzovali grid grafmi, ktoré sa dali dokresliť dvomi spôsobmi. Dokážeme, že dokreslenie čiastočnej reprezentácie je prípustné práve vtedy, ak je splnená formula  $\Phi$ .

Ak takto skonštruovaný graf má reprezentáciu, potom aj každá klauzula musí byť splnená a teda aj formula  $\Phi$  je splnená. Opačne, ak je každá klauzula splnená, ak sa pozrieme na gadgety, tak vytvárajú prípustnú reprezentáciu. A teda sme dokázali, že problém **Planar-3-SAT** je redukovateľný na problém rozširovania čiastočnej reprezentácie bipartitných grid grafov.



Obr. 5.9: Najskôr sa po hrane posielala hodnota true. Prehodený obdĺžnik spôsobil, že nakoniec sa po hrana posielala hodnota false.

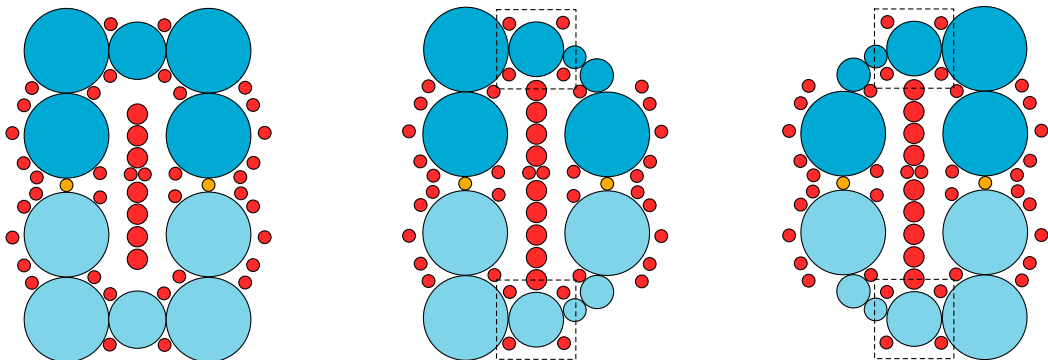
Tým sme dokázali, že problém rozširovania čiastočnej reprezentácie bipartitných grid grafov je NP-úplný.  $\square$

**Rozširovanie čiastočného circle packingu.** Teraz popíšeme ako predchádzajúcu redukciu modifikovať pre problém rozširovania čiastočného circle packingu.

**Veta 5.1.** *Problém rozširovania čiastočného circle packingu rovinných grafov je NP-ťažký.*

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety vyplýva z dôkazu Lemmy 5.1. Obdĺžniky modifikujeme tak, aby reprezentovali circle packing. Obdĺžnik typu jedna bude vyzeráť ako na Obr. 5.10 vľavo. Červené a žlté kružnice prislúchajú predreprezentovaným vrcholom. Červené kružnice sú izolované a sú nakreslené tak, aby bolo možné zväčšiť modré kružnice maximálne o  $\varepsilon$ . Žlté kružnice sú spojené modrou cestou. Modrú cestu môžeme opäť viesť len vrchnou alebo spodnou časťou obdĺžnika.

Na Obr. 5.10 vpravo a vľavo je znázornený obdĺžnik typu dva. Modrá cesta má oproti obdĺžniku prvého typu o jeden vrchol navyše. Vo vrchnej alebo spodnej časti medzi štyrmi červenými kružnicami sa môže nachádzať buď tretia alebo štvrtá kružnica zľava (ostatné sa tam kvôli červeným vrcholom nedostanú), podľa toho sa uvoľní pravý alebo ľavý roh.



Obr. 5.10: Vľavo obdĺžnik prvého typu. V strede a vpravo obdĺžniky druhého typu.

S takýmito obdĺžnikmi dokážeme vytvoriť gadgety, ktoré sa správajú rovnako ako gadgety v dôkaze Lemmy 5.1. Tým získame redukciu problému Planar-3-SAT na problém rozširitelnosti čiastočnej reprezentácie circle packingu.  $\square$

## 5.2 Rovinné triangulácie

Ukážeme algoritmus na rozširovanie čiastočného circle packingu triangulácie  $G$ . Budeme pracovať s výpočtovým modelom real RAM, ktorý bol prvý krát definovaný v práci Michaela Iana Shamose [34], ktorá sa venovala výpočtovej geometrii. V zásade nám stačí vedieť to, že môžeme predpokladať, že aritmetické operácie s reálnymi číslami zaberú konštantný čas.

V predchádzajúcich kapitolách sme dokázali, že circle packing triangulácie je jednoznačný až na Möbiove transformácie a reflexie. Náš algoritmus bude založený hlavne na tomto fakte.

Máme trianguláciu  $G$  s vrcholmi  $v_1, \dots, v_n$  a čiastočnú reprezentáciu  $\mathcal{R}' = \{C'_1, \dots, C'_k\}$  triangulácie  $G$ , kde  $C'_i$  je kružnica so stredom v bode  $w_i \in \mathbb{C}$  a polomerom  $s_i \in \mathbb{R}$ . Kružnica  $C'_i$  reprezentuje vrchol  $v_i$  triangulácie  $G$ .

Začneme tým, že pomocou nejakého algoritmu na konštrukciu circle packingu, napríklad Moharov algoritmus [26, 24, 25], skonštruujeme circle packing  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  triangulácie  $G$ , kde  $C_i$  je kružnica so stredom v bode  $z_i$  a polomerom  $r_i$ . Tento circle packing je jednoznačný až na aplikovanie Möbiovej alebo anti-Möbiovej transformácie. Ak  $T$  je Möbiova alebo anti-Möbiova transformácia, potom  $\{T(C_1), \dots, T(C_n)\}$  je tiež circle packing. Každý circle packing je možné získať takýmto spôsobom z  $\mathcal{C}$ .

Môže nastať niekoľko možností:

- Nech  $k \geq 3$ . Uvážme ľubovoľné dve trojice bodov  $z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}$  a  $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}$ , pre  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, k\}$ , reprezentujúce tie isté vrcholy. Uhol  $\angle z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3}$  musí mať rovnakú veľkosť ako uhol  $\angle w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3}$ . To vyplýva z toho, že každý možný circle packing triangulácie  $G$  je možné získať z  $\mathcal{C}$  transformáciami, ktoré zachovávajú veľkosti uhlov. V prípade, že veľkosť týchto uhlov nie je rovnaká, reprezentácia sa nedá rozšíriť. Môže sa ale stať, že uhly majú rovnakú veľkosť, ale sú orientované opačne.

Uvážime body  $z_1, z_2, z_3$  a  $w_1, w_2, w_3$ , ak majú uhly  $\angle z_1 z_2 z_3$  a  $\angle w_1 w_2 w_3$  opačnú orientáciu, upravíme circle packing  $\mathcal{C}$  tak, že aplikujeme komplexné združenie  $\bar{\cdot}$ , čo zmení orientáciu uhlu  $\angle z_1 z_2 z_3$ . Podľa Lemmy 2.6, existuje jednoznačná Möbiova transformácia  $M$ , ktorá zobrazí body  $z_1, z_2, z_3$  na body  $w_1, w_2, w_3$ . Čiastočná reprezentácia  $\mathcal{R}'$  sa dá rozšíriť práve vtedy, keď  $M(C_i) = C'_i$ , pre každé  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Výsledná reprezentácia  $\mathcal{R}$  bude  $\{M(C_1), \dots, M(C_n)\}$ .

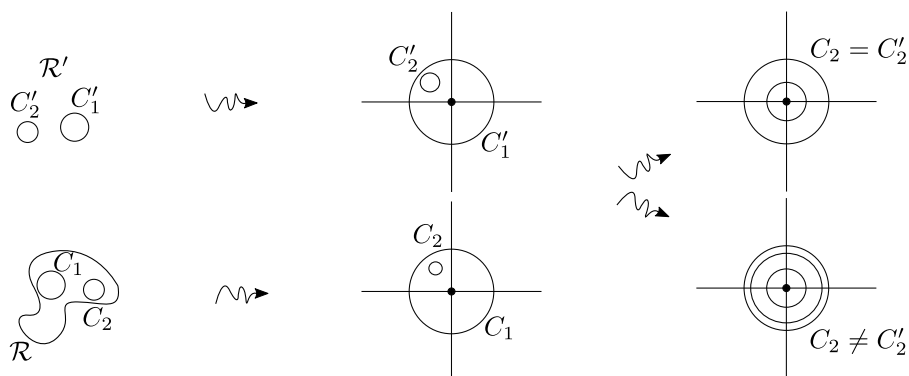
- Ak  $k = 2$  a kružnice  $C'_1, C'_2$  vrcholov  $w_1, w_2$  sa dotýkajú, potom ako priesečník kružníc  $C'_1$  a  $C'_2$  zvolíme  $w'$ . Priesečník kružníc  $C_1$  a  $C_2$  označíme  $z'$ . Potom môžeme postupovať ako v predchádzajúcom bode.

Predpokladajme, že  $C'_1$  a  $C'_2$  sa nedotýkajú. Poznamenaajme, že  $\mathcal{R}'$  je možné rozšíriť práve vtedy, keď je možné rozšíriť  $T(\mathcal{R}')$ , pre nejakú Möbiovu transformáciu  $T$ . Reprezentáciu  $\mathcal{R}'$  si upravíme pomocou Möbiovej transformácie tak, že  $C'_1$  je jednotková kružnica so stredom v  $\infty$  a  $C'_2$  je kružnica so stredom  $w'_2$  vo vnútri jednotkovej kružnice  $C'_1$ . Pomocou Möbiovej transformácie

$$\frac{z - w'_2}{w'_2 \bar{z} - 1} \tag{5.1}$$

transformujeme kružnicu  $C'_2$  na kružnicu so stredom v bode 0 vo vnútri jednotkovej kružnice  $C'_1$ . Transformácia (5.1) je automorfizmus disku bez rotácie. Rovnako postupujeme aj s kružnicami  $C_1$  a  $C_2$  zo circle packingu  $\mathcal{R}$  (Obr. 5.11). Ak sa polomery kružníc  $C'_2$  a  $C_2$  rovnajú, potom sa čiastočná reprezentácia  $\mathcal{R}'$  dá rozšíriť na circle packing  $\mathcal{R}$ .

- Ak  $k = 1$ , tak je predkreslená iba jedna kružnica. Môžeme predpokladať, že  $w_1 = 0$ . Je zrejmé, že existuje Mobiova transformácia taká, že  $T(C_1) = C'_1$ . Transformáciu  $T$  môžeme zvoliť napríklad tak, že  $T(z) = az + b$ , kde  $a \in \mathbb{R}$  a  $b \in \mathbb{C}$ . V tomto prípade je vždy možné reprezentáciu rozšíriť.



Obr. 5.11: Vľavo je čiastočná reprezentácia  $\mathcal{R}'$  a circle packing  $\mathcal{R}$ . V strede je výsledok prvej transformácie. Vpravo sú naznačené dve možné situácie, ktoré môžu nastať po druhom transformovaní, použitím transformácií v tvare (5.1).

## 6. Záver

Hlavnou témou práce bola geometrická reprezentácia grafov pomocou circle packingu. Predstavili sme základné koncepty nutné pre dokázanie výsledkov ohľadom tejto reprezentácie. V kapitole 3 sme rozobrali dôkaz existencie tejto reprezentácie pre rovinné grafy. V kapitole 4 sme predstavili dôkaz existencie primal-dual circle packingu pre 3-súvislé grafy. Obidva dôkazy sme doplnili o detaily, ktoré uľahčujú ich pochopenie. V kapitole 5 sme analyzovali dôkaz tvrdenia, že rozhodnúť, či je možné zadaný čiastočný circle packing rozšíriť na circle packing, je NP-ťažký problém. Ďalej sme skonštruovali vlastný algoritmus pre rozširovanie reprezentácie založený na real RAM stroji.

Oblasť rozširovania grafových reprezentácií ponúka radu ďalších výskumných otázok. Bolo by zaujímavé nájsť nové triedy grafov, u ktorých je možné rozhodnúť, či existuje rozšírenie daného circle packingu v polynomiálnom čase, prípadne také riešenie v polynomiálnom čase skonštruovať. Pre všeobecnú konštrukciu rozšírenia circle packingu je možné preskúmať využitie metód lokálneho prehľadávania. Keďže je treba konštruovaný circle packing reprezentovať na počítači, kde vznikajú zaokrúhľovacie chyby, môže sa stať, že budeme nútení pri konštrukcii circle packingu uvažovať určitú  $\varepsilon$  nepresnosť. Pre prácu s takým typom neurčitosti by bolo zaujímavé preskúmať využitie techník intervalovej analýzy.



# Literatúra

- [1] EM Andreev. On convex polyhedra of finite volume in lobachevsky space. *Sbornik: Mathematics*, 12(2):255–259, 1970.
- [2] Seymour Benzer. On the topology of the genetic fine structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 45(11):1607–1620, 1959.
- [3] Steven Chaplick, Paul Dorbec, Jan Kratochvíl, Mickael Montassier, and Juraj Stacho. Contact representations of planar graphs: Extending a partial representation is hard. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 139–151. Springer, 2014.
- [4] Steven Chaplick, Radoslav Fulek, and Pavel Klavík. Extending partial representations of circle graphs. In *International Symposium on Graph Drawing*, pages 131–142. Springer, 2013.
- [5] Yves Colin de Verdiere. Empilements de cercles: Convergence d’une méthode de point fixe. In *Forum Mathematicum*, volume 1, pages 395–402. Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1989.
- [6] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2018.
- [7] Gideon Ehrlich, Shimon Even, and Robert Endre Tarjan. Intersection graphs of curves in the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 21(1):8–20, 1976.
- [8] Shimon Even and Alon Itai. Queues, stacks and graphs. In *Theory of Machines and Computations*, pages 71–86. Elsevier, 1971.
- [9] Michael R Fellows, Jan Kratochvíl, Martin Middendorf, and Frank Pfeiffer. The complexity of induced minors and related problems. *Algorithmica*, 13(3):266–282, 1995.
- [10] G Hajos. Über eine art von graphen, internat. *Math. Nachr*, 11, 1957.
- [11] Sariel Har-Peled. Circle packing for planar graphs. *Online at [https://sarielhp.org/book/chapters/planar\\_circle\\_packing.pdf](https://sarielhp.org/book/chapters/planar_circle_packing.pdf)*, (Accessed 01/03/2019.), 2018.
- [12] Gareth A Jones and David Singerman. *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge university press, 1987.
- [13] Haim Kaplan and Yahav Nussbaum. A simpler linear-time recognition of circular-arc graphs. In *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, pages 41–52. Springer, 2006.
- [14] David Kendall. Incidence matrices, interval graphs and seriation in archeology. *Pacific Journal of mathematics*, 28(3):565–570, 1969.
- [15] Pavel Klavík. Extension properties of graphs and structures. *Dissertation thesis, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta*, 2017.

- [16] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, and Tomáš Vyskočil. Extending partial representations of interval graphs. In *International Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, pages 276–285. Springer, 2011.
- [17] Pavel Klavík and Maria Saumell. Minimal obstructions for partial representations of interval graphs. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 401–413. Springer, 2014.
- [18] Paul Koebe. *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*. Hirzel, 1936.
- [19] Jan Kratochvíl. String graphs. ii. recognizing string graphs is np-hard. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 52(1):67–78, 1991.
- [20] Stefan Kratsch and Pascal Schweitzer. Graph isomorphism for graph classes characterized by two forbidden induced subgraphs. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 34–45. Springer, 2012.
- [21] Al Marden and Burt Rodin. On thurston’s formulation and proof of andreev’s theorem. In *Computational methods and function theory*, pages 103–115. Springer, 1990.
- [22] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Karolinum, 2002.
- [23] Ross M McConnell. Linear-time recognition of circular-arc graphs. *Algorithmica*, 37(2):93–147, 2003.
- [24] Bojan Mohar. A polynomial time circle packing algorithm. *Discrete Mathematics*, 117(1-3):257–263, 1993.
- [25] Bojan Mohar. Circle packings of maps —the euclidean case. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 67(1):191–206, Dec 1997.
- [26] Bojan Mohar. Circle packings of maps in polynomial time. *European Journal of Combinatorics*, 18(7):785–805, 1997.
- [27] Bojan Mohar and Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*, volume 10. JHU Press, 2001.
- [28] Tristan Needham. *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1998.
- [29] János Pach and Pankaj K Agarwal. *Combinatorial geometry*, volume 37. John Wiley & Sons, 2011.
- [30] János Pach, H de Fraysseix, and P de Mendez. Representation of planar graphs by segments. Technical report, North-Holland, 1994.
- [31] Fred S Roberts. *Discrete mathematical models, with applications to social, biological, and environmental problems*. Prentice-Hall, 1976.
- [32] Burt Rodin, Dennis Sullivan, et al. The convergence of circle packings to the riemann mapping. *Journal of Differential Geometry*, 26(2):349–360, 1987.

- [33] Marcus Schaefer, Eric Sedgwick, and Daniel Štefankovič. Recognizing string graphs in np. *Journal of Computer and System Sciences*, 67(2):365–380, 2003.
- [34] Michael Ian Shamos. Computational geometry. *Dissertation thesis, Yale University*, 1978.
- [35] Kenneth Stephenson. The approximation of conformal structures via circle packing. *Series in Approximations and decompositions*, 11:551–582, 1999.
- [36] William P Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Princeton, NJ, 1979.
- [37] Peter Zeman. Automorphism groups of geometrically represented graphs. *Bachelor thesis, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta*, 2014.
- [38] Peter Zeman. Algebraic, structural, and complexity aspects of geometric representations of graphs. *Master thesis, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta*, 2016.