MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Konopka

Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce, prof. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D., DSc, za cenné rady a připomínky v průběhu psaní práce. Dále chci poděkovat svým spolužákům Martinu Horčičkovi a Jozefu Kimákovi za pomoc při psaní v latexu a Dalimilu Pešovi za připomínky a nápady.

Název práce: Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu

Autor: Filip Konopka

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc

Abstrakt: Obsahem této práce je hledání nutných a postačujících podmínek pro neabsolutní konvergenci Newtonova integrálu funkce tvaru $\frac{\sin \varphi(x)}{x}$. Zkoumáme především jak oscilace sinu ovlivňuje konvergenci integrálu. Zabýváme se tedy spojitými neklesajícími funkcemi takovými, že $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Dokázali jsme, že bilipschitzovskost φ není postačující podmínkou. Nicméně, dokázali jsme několik trvzení o postačujících podmínkách pro konvergenci daného integrálu.

Klíčová slova: Newtonův integrál, neabsolutní konvergence

Title: Non-absolute convergence of Newton integral

Author: Filip Konopka

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc

Abstract: In this thesis we search for sufficient and necessary conditions for non absolute convergence of Newton integral of function of the form $\frac{\sin \varphi(x)}{x}$. Importantly we analyse how the oscilation of the sine function influences the convergence of the integral. We are dealing with continous non-decreasing functions such that $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. We proved that bilipschitz of φ is not sufficient. Nevertheless, we proved several theorems about sufficient conditions for the convergence of the integral.

Keywords: Newton integral, non absolute convergence

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá neabsolutní konvergencí Newtonova integrálu funkcí tvaru $\frac{\sin\varphi(x)}{x}$, kde φ má být **spojitá neklesající funkce** definovaná na intervalu $[1,\infty)$ taková, že $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$. Zkoumáme nutné a postačující podmínky pro konvergenci integrálu těchto funkcí. Otázkou tedy je, jaké požadavky máme klást na funkci φ, aby tento integrál konvergoval. Zajímáme se o to, jak tato funkce změní oscilaci sinu a v důsledku toho ovlivní integrovatelnost zadaného integrandu. Zabýváme se tedy speciální třídou newtonovsky integrovatelných funkcí, které obecně nemusí být integrovatelné lebesgueovsky.

1. Motivace

1.1 Proč pracujeme s Newtonovým integrálem

Jednou z výhod Newtonova integrálu oproti Lebesgueovu je jeho vlastnost neabsolutní konvergence. **Newtonův integrál je neabsolutně konvergentní**, kdežto **Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní**. Tedy pro Lebesgueův integrál platí implikace:

$$\int_c^\infty f \text{ konverguje} \Rightarrow \int_c^\infty |f| \text{ konverguje.}$$

Známým příkladem, kdy je Newtonův integrál "lepší" než-li Lebesgueův je tzv. Dirichletův integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{1.1}$$

Platnost tohoto vztahu se dá dokázat více způsoby. Jedním ze způsobů je pohlížet na daný integrand jako na funkci komplexní proměnné a aplikovat reziduovu větu. Jiným ze způsobů je s využitím Fourierovy analýzy, kdy na integrand pohlížíme jako na tzv. Fourierovo jádro a v důsledku toho dostaneme, že pro všechna reálná kladná čísla α platí, že $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Jakožto Lebesgueův integrál je však divergentní. To se snadno ukáže nalezením divergentní minoranty:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\,.$$

Zde první nerovnost platí triviálně, neboť $0 \leq |\sin x| \leq 1, x \in \mathbb{R}$ a platí, že $y \geq y^2$, $y \in [0,1]$, a v druhé rovnosti jsme použili součtový vzorec pro poloviční úhel. Dále tvrdím, že:

- $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\, dx = \infty$.
- $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\, dx$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, neboť:
  - $\frac{1}{2x}$ jde monotónně k 0,
  - $\cos 2x$ má omezenou primitivní funkci,
  - funkce $\frac{1}{2x}$ i $\cos 2x$ jsou spojité na intervalu $[1,\infty)$.
- Tedy integrál pravé strany má smysl (jde o rozdíl konvergentního a divergentního integrálu, jehož hodnota je rovna $+\infty$) a je tedy divergentní minorantou pro $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx$. Daný integrál tedy absolutně diverguje.

Obecně nás tedy budou zajímat oscilující funkce, jejichž limita v nekonečnu je 0. Integrály takových funkcí mají šanci konvergovat neabsolutně.

Připomeňme ještě **Abel-Dirichletovo kritérium** pro neabsolutní konvergenci integrálů, které budeme potřebovat.

Věta 1 (**Dirichletovo a Abelovo kritérium**). *Nechť f a g jsou spojité funkce na $[a,b)$, g je navíc monotónní na $[a,b)$.*

(D) *Pokud f má omezenou primitivní funkci na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, potom $\int_a^b fg\,dx$ konverguje.*

(A) *Je-li $\int_a^b f\,dx$ konvergentní a g je omezená na $[a,b)$, potom $\int_a^b fg\,dx$ konverguje.*

Důkaz. [5, kapitola 4, 27 a 28, strany 39,40]

□

1.2 Motivační příklady

Uvažujme funkci ve tvaru $\frac{\sin\varphi(x)}{x}$. Jaké požadavky je třeba klást na vnitřní funkci φ, aby byla funkce $\frac{\sin\varphi(x)}{x}$ newtonovsky integrovatelná na intervalu $(1,\infty)$?

V celé kapitole budeme pro jednoduchost předpokládat, že φ je **spojitá** a **neklesající** funkce splňující

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty.$$

Jestliže φ je spojitá, tak je nutně i integrand spojitou funkcí na $[1,\infty)$ a tím pádem máme zaručenou existenci primitivní funkce.

Poznámka: Pokud limita funkce φ existuje a je konečná, pak v případě, kdy $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = c \neq k\pi$, pro $k \in \mathbb{Z}$, je $\sin(c)$ rovněž nenulová konstanta a z limitního srovnávacího kritéria dostáváme divergenci integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$. Použití limitního srovnávacího kritéria by zde bylo korektní, neboť v případě, že $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)$ existuje a má konečnou nenulovou hodnotu různou od celočíselných násobků π, nabývá integrand $\frac{\sin\varphi(x)}{x}$ od určitého bodu pouze kladných (resp. záporných) hodnot (v případě záporných hodnot bychom přešli k funkci $-\frac{\sin\varphi(x)}{x}$); a tedy srovnáním s divergentním integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ dostáváme, že:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin\varphi(x)}{x}}{\frac{1}{x}} = \sin c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

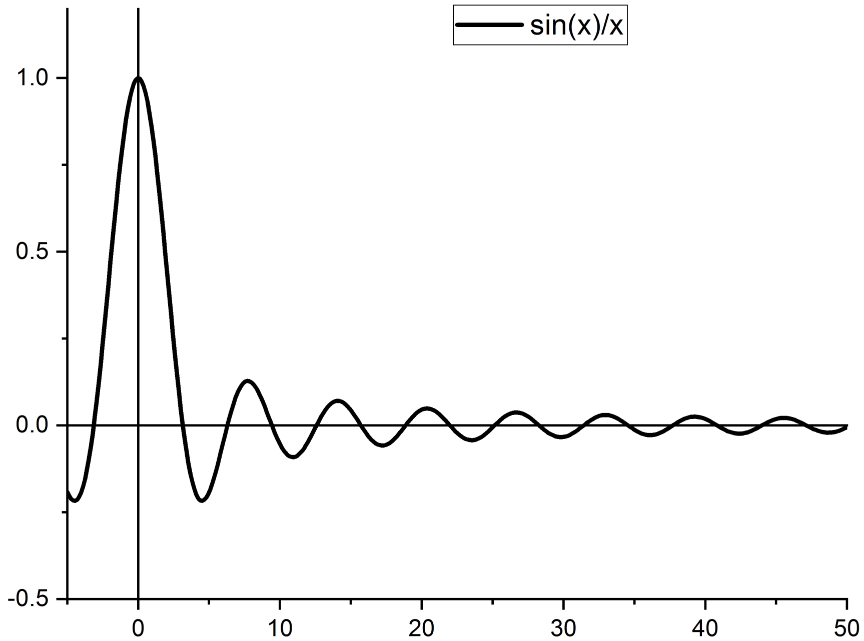
Podívejme se nyní na několik příkladů takové funkce φ splňující uvedené vlastnosti.

- Uvažujme nejprve lineární funkci, tedy $\varphi(x) = x$, což je funkce s požadovanými vlastnostmi - je spojitá, neklesající a $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.

  Podle Dirichletova kritéria $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ konverguje, neboť:

  - $\sin x$ má omezenou primitivní funkci na $(1, \infty)$,
  - $\frac{1}{x}$ jde monotónně k 0,
  - obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$.

  Graf funkce $\frac{\sin x}{x}$ vypadá takto:



Obrázek 1.1: Graf funkce φ

Stojí za to zmínit, že:

$$\forall\alpha \in (0,\infty) : \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Předpokládáme-li totiž platnost vztahu (1.1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, lze psát:

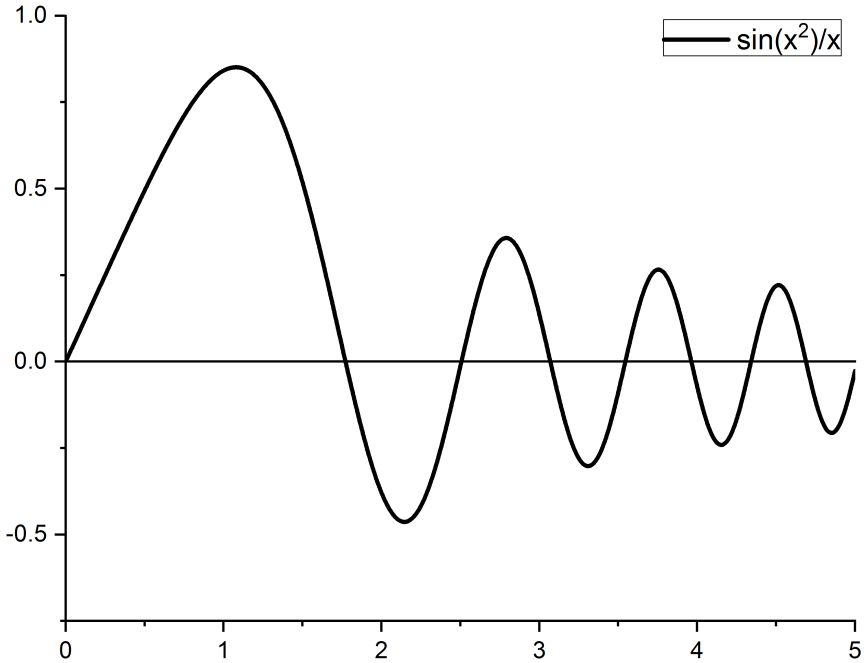
$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \left|\begin{matrix}\alpha x = t \\ \alpha\, dx = dt\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\frac{t}{\alpha}} \frac{dt}{\alpha} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

- Uvažujme kvadratickou funkci, tedy $\varphi(x) = x^2$. Taková funkce rovněž splňuje požadované vlastnosti a daný integrál je konvergentní, což opět plyne z Dirichletova kritéria. Lze totiž psát:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x^2}{x}\, dx = \int_1^\infty \sin\left(x^2\right) 2x\, \frac{1}{2x^2}\, dx.$$

  - $f(x) = \sin\left(x^2\right) 2x$ má omezenou primitivní funkci, $\int \sin\left(x^2\right) 2x\, dx = \cos x^2$
  - $g(x) = \frac{1}{2x^2}$ jde monotónně k nule
  - Obě funkce jsou navíc spojité na $(1, \infty)$

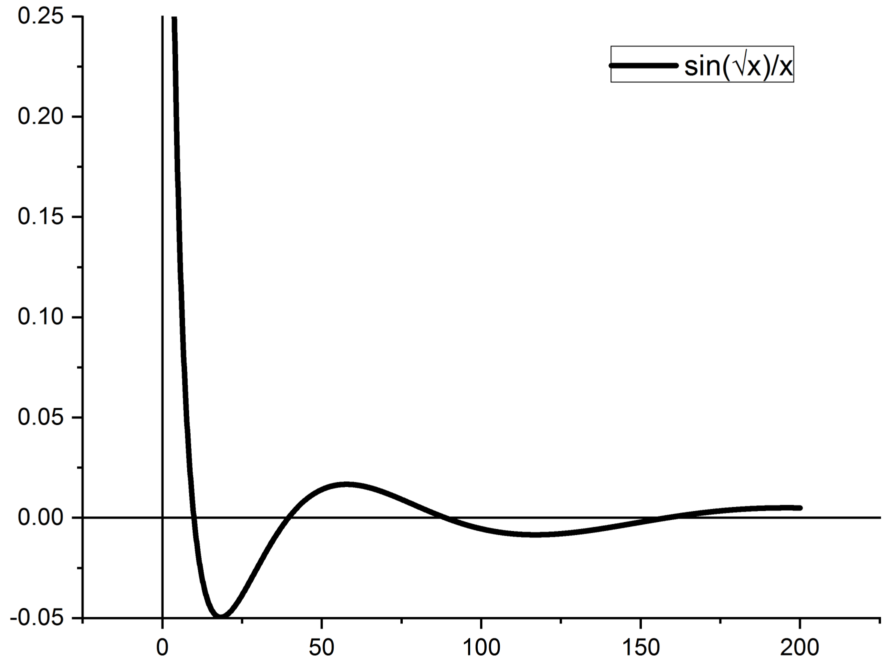
Graf funkce $\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$ vypadá takto:



Obrázek 1.2: Graf funkce φ

Zde vidíme, že oscilace se zrychluje.

- Uvažujme nyní $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Taková funkce opět splňuje požadované vlastnosti a daný integrál konverguje podle Dirichletova kritéria. Lze totiž psát:
$$\int_1^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_1^\infty \sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$$
Stejně jako v minulém příkladě i zde $f(x)=\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$ má omezenou primitivní funkci, protože $\int \sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -\cos(\sqrt{x})$ a $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ jde monotónně k nule. Obě funkce jsou rovněž spojité na $[1,\infty)$. Graf této funkce vypadá takto:



Obrázek 1.3: Graf funkce φ

Vidíme, že pro volbu $\varphi(x) = \sqrt{x}$ se rychlost oscilace zmenšuje, zatímco pro $\varphi(x) = x^2$ naopak dostáváme rychlejší oscilaci.

Předpokládáme-li platnost rovnice (1.1), lze substitucí spočítat hodnotu tohoto integrálu:
$$\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx = \left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,2t\,dt = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$
Obdobně lze vypočítat hodnotu i předchozího integrálu:
$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \left|\begin{matrix}x^2=t\\ 2x dx=dt\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$
V obou případech používáme větu o substituci 2. druhu.

Tedy teď už víme, že:
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^\alpha)}{x}\,dx = \begin{cases}\pi, & \text{pro } \alpha = \frac{1}{2}\,,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } \alpha = 1\,,\\ \frac{\pi}{4}, & \text{pro } \alpha = 2\,.\end{cases}$$

V obecném případě pro $\varphi(x) = x^\alpha$ dostáváme pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vztah:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^\alpha\right)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2\alpha}. \tag{1.2}$$

I zde se provede substituce 2. druhu volbou $x^\alpha = t$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^\alpha}{x}\, dx = \left|\begin{smallmatrix} x^\alpha = t \\ \\ \alpha x^{\alpha-1}\, dx = dt \end{smallmatrix}\right| = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[\alpha]{t}} \frac{dt}{\alpha\,(\sqrt[\alpha]{t})^{\alpha-1}} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}.$$

Vidíme tedy, že čím rychleji roste vnitřní funkce φ, tím menší je hodnota integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin \varphi(x)}{x}$ a tím spíše tedy bude konvergovat. Z výše uvedených úvah dostáváme:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^\alpha}{x}\, dx \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 0$$

Poznámka: Zde není třeba se pozastavovat nad tím, zda jsou splněny předpoklady pro záměnu limity a integrálu, neboť rovnici (1.2) lze chápat přímo jako rovnost funkcí.

Na druhou stranu také dostáváme, že tento integrál jakožto funkce proměnné α má singularitu u nuly a čím pomaleji bude růst vnitřní funkce φ, tím větší bude hodnota daného integrálu:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^\alpha}{x}\, dx \xrightarrow[\alpha \to 0_+]{} \infty.$$

Dá se tedy říct, že funkce

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin\left(x^\alpha\right)}{x}\, dx \tag{1.3}$$

je ve skutečnosti lineární lomenou funkcí, není definovaná pouze v 0, kde má singularitu, je klesající na intervalu $(0,\infty)$ a platí pro ni, že $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 0$ a $\lim_{\alpha\to 0_+} F(\alpha) = \infty$.

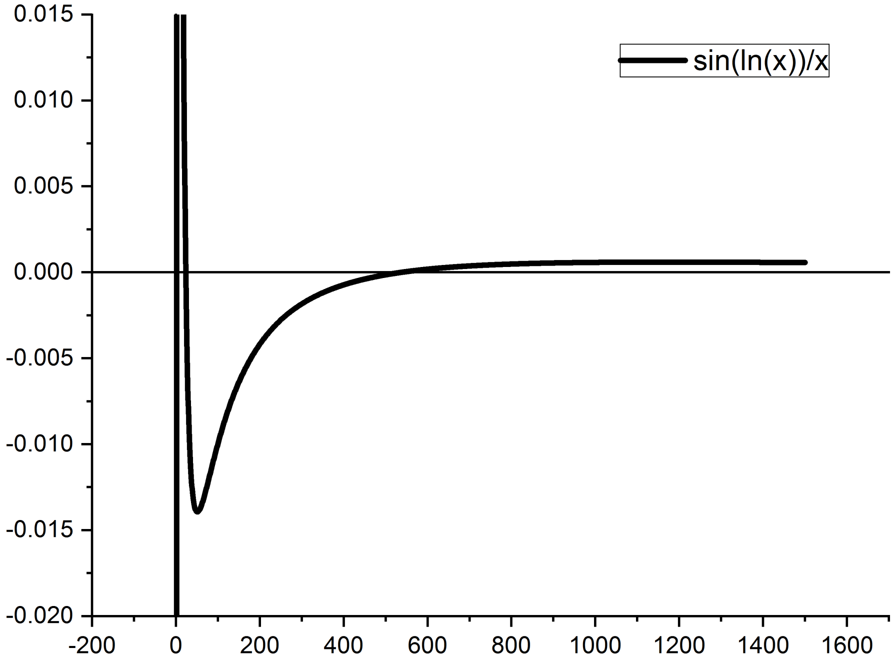
Nyní už víme, že pro mocninné funkce $\varphi(x) = x^\alpha$ o libovolném kladném reálném exponentu α bude daný integrál vždy konvergovat a že čím menší bude α, tj. čím pomaleji bude růst vnitřní funkce φ, tím větší bude hodnota daného integrálu.

Problém s konvergencí tohoto integrálu by tedy mohl nastat pro pomalu rostoucí funkce - pomaleji než-li libovolná mocnina - to může být například logaritmus.

- Nechť $\varphi(x) = \log(x)$. Pak dostáváme:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx = \left|\begin{smallmatrix}\log x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{smallmatrix}\right| = \int_0^\infty \sin t\,dt.$$

Volbou $\varphi(x) = \log(x)$ tedy dostáváme divergentní integrál - ne však ve smyslu, že by jeho hodnota byla rovna $+\infty$, ale ve smyslu, že hodnota integrálu neexistuje neboť primitivní funkce nemá limitu v $+\infty$. Graf této funkce vypadá takto:



Obrázek 1.4: Graf funkce φ

- Pokud ale volíme $\varphi(x) = \log^2(x)$, což je také pomaleji rostoucí funkce než libovolná mocninná funkce x^α, dostáváme:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\log^2 x)}{x}\,dx = \left|\begin{smallmatrix}\log x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{smallmatrix}\right| = \int_0^\infty \sin t^2\,dt$$

a to je konvergentní integrál. Platí totiž:

$$\int_0^\infty \sin t^2\,dt = \int_0^\infty \cos t^2\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{1.4}$$

Toto jsou tzv. **Fresnelovy integrály** a tato rovnost se nejsnáze ukáže pomocí Reziduovy věty pro funkce komplexní proměnné.

Poznámka: Stojí za to zde zmínit, že

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \textit{ konverguje, přestože } \lim_{x\to\infty} \sin x^2 \textit{ neexistuje.}$$

Lze ukázat, že:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\log^\alpha x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin t^\alpha\,dt \begin{cases}\text{konverguje pro } \alpha > 1,\\ \text{diverguje pro } 0 < \alpha \leq 1.\end{cases}$$

Důkaz.

$$\int_0^\infty \sin t^\alpha\,dt \;=\; \left|{}^{t^\alpha = x}_{\alpha\,t^{\alpha-1}\,dt\,=\,dx}\right| = \int_0^\infty \sin x\,\frac{1}{\alpha x}\,\sqrt[\alpha]{x}\,dx \;=\; \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dx$$

– Pro $\alpha \in (1,\infty)$ daný integrál u nekonečna konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť:
  - $\sin x$ má omezenou primitivní funkci na $[1,\infty)$
  - $\frac{1}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ jde monotónně k 0
  - obě funkce jsou spojité na $[1,\infty)$.

  Konvergenci integrálu u nuly dostaneme ze srovnávacího kritéria:

  $$\left|\frac{\sin x}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right| \leq \frac{1}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}},\ x \in (0,1)$$

  Tedy absolutní hodnotu integrandu dovedeme majorizovat absolutně integrovatelnou funkcí. Platí totiž, že pro všechna $\alpha \in (1,\infty)$ je $1 - \frac{1}{\alpha} \in (0,1)$ a zároveň:

  $$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \;<\; \infty \;\Leftrightarrow\; a \in (0,1)$$

  Z absolutní konvergence pak vyplývá konvergence.

– Pro $\alpha \in (0,1]$ označme $1 - \frac{1}{\alpha} =: -a$, pak $a \in [0,\infty)$ a platí:

  $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dx = \int_0^\infty x^a\,\sin x\,dx$$

  Pro $a = 0$ dostaneme integrál $\int_0^\infty \sin x\,dx$, o kterém víme, že je divergentní, neboť primitivní funkce k $\sin x$ je $-\cos x$ a ta nemá limitu v nekonečnu.
  Ukážeme, že také pro $a \in (0,\infty)$ daný integrál vždy diverguje. Ukážeme to sporem. Označme $F(x) := \int_0^x t^a\,\sin t\,dt$ jako jednu z primitivních funkcí. Pokud by $\int_0^\infty x^a\,\sin x\,dx$ konvergoval, pak by podle Heineho věty musela existovat i vlastní limita posloupnosti $\lim_{n\to\infty} F(n\pi)$. Pokud $\lim_{n\to\infty} F(n\pi) = A \in \mathbb{R}$, pak nutně i $\lim_{n\to\infty} F((n+1)\pi) = A$.

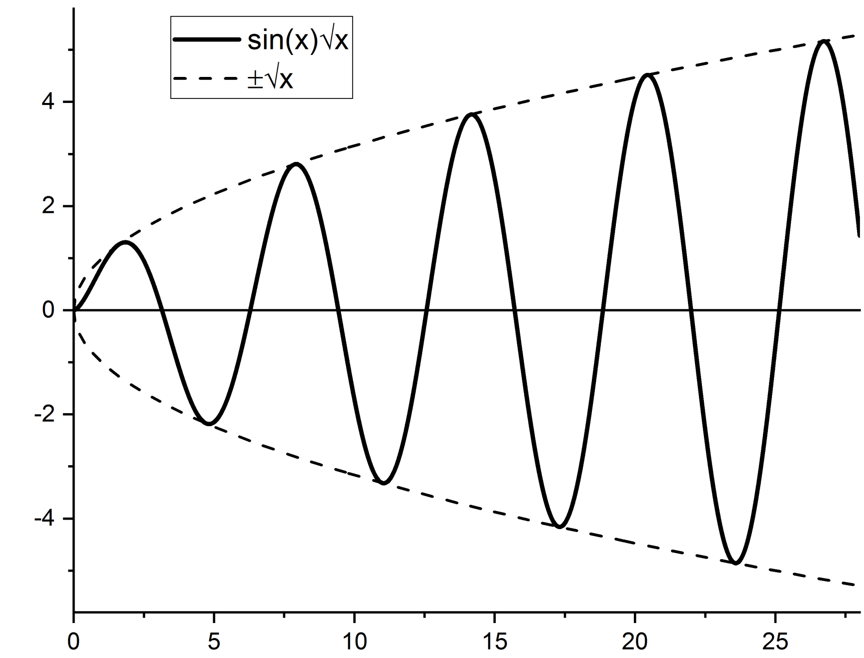
  $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^a\,\sin x\,dx = F((n+1)\pi) - F(n\pi),$$

  protože tato rovnost platí pro všechna přirozená n, limitním přechodem bychom dostali, že pravá strana se blíží k 0. To ale nemůže být splněno, neboť:

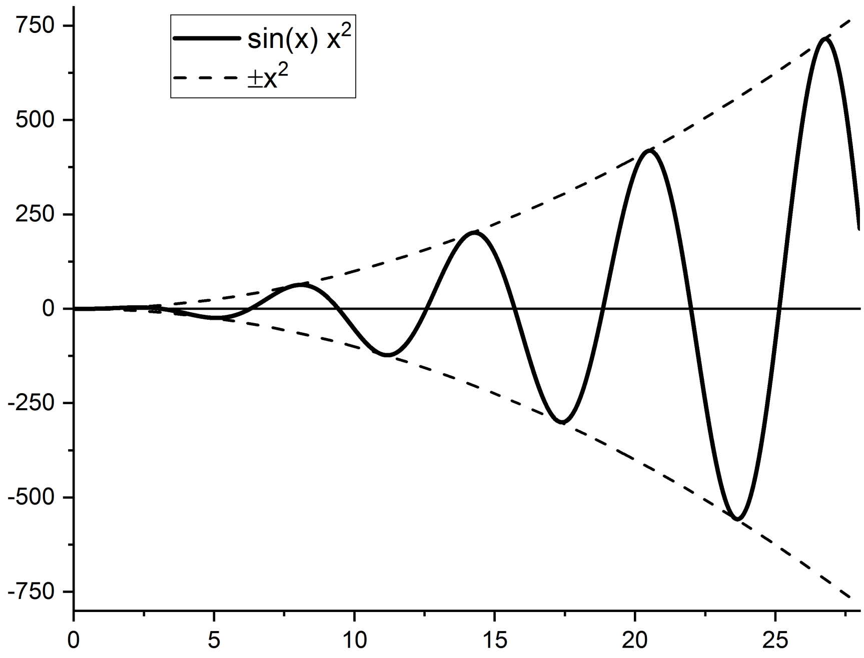
  $$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^a\,\sin x\,dx\right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^a\,|\sin x|\,dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = 2$$

(Hlavní myšlenka tohoto důkazu divergence $\int_0^\infty x^a \sin x \, dx$ pro a $\in \mathbb{R}^+$ je převzatá z [3] Úvod do inteligentního kalkulu, Ilja Černý 2002.)

$\square$



Obrázek 1.5: Graf funkce $\sqrt{x}\,\sin x$



Obrázek 1.6: Graf funkce $x^2 \sin x$

- Uvažujme nyní exponenciální funkci $\varphi(x) = e^x$. Taková funkce rovněž splňuje požadované vlastnosti a daný integrál konverguje podle Dirichletova kritéria. Lze psát:

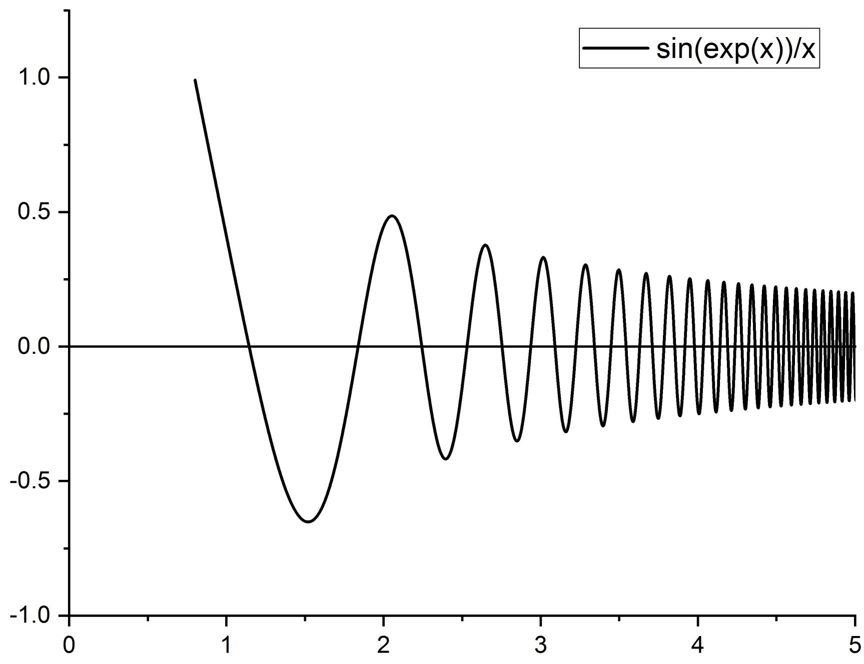
$$\int_1^\infty \frac{\sin e^x}{x}\,dx = \int_1^\infty \sin\left(e^x\right) e^x \,\frac{1}{x\,e^x}\,dx.$$

Zde $\sin\left(e^x\right) e^x$ má omezenou primitivní funkci a $\frac{1}{x\,e^x}$ jde monotónně k nule, neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,e^x} = 0$ a její derivace je na intervalu $(1,\infty)$ pořád záporná:

$$(\frac{1}{x\,e^x})' = -\frac{e^x + xe^x}{(x\,e^x)^2} = -\frac{1+x}{x^2\,e^x} < 0,\ \ x \in (1,\infty).$$

Obě funkce jsou navíc spojité na $[1,\infty)$.

Graf funkce $\frac{\sin e^x}{x}$ vypadá takto:



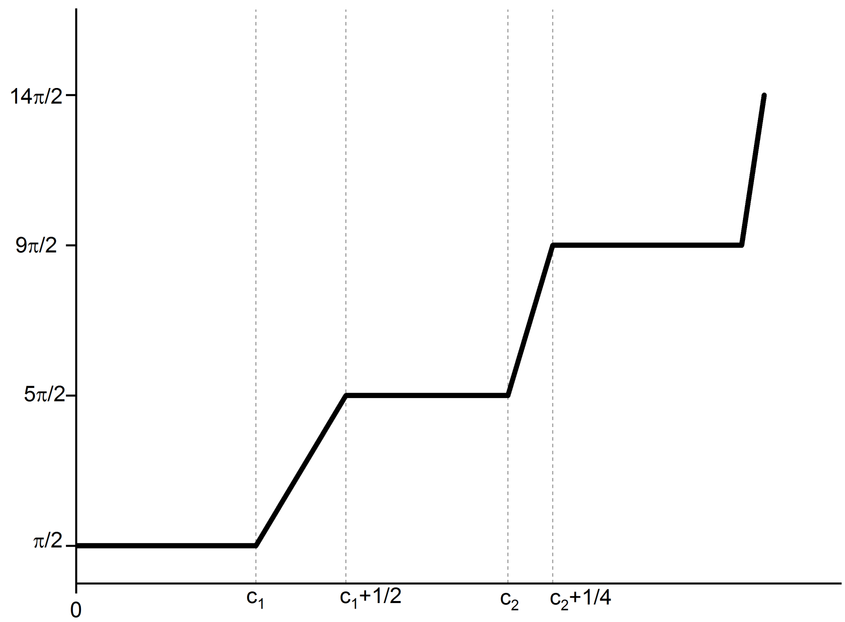
Obrázek 1.7: Graf funkce φ

1.3 Konstrukce protipříkladu

Ukážeme, že požadavky, které jsme dosud kladli na funkci φ nejsou obecně dostačující pro konvergenci daného integrálu.
Definujme funkci $\varphi(x)$ následujícím předpisem:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0 & x \in < c_k + \frac{\text{sign}(k)}{2^k}, c_{k+1} >, c_0 = 0, \\ \text{lineární funkce} & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde c_k je nějaká rostoucí posloupnost jdoucí do nekonečna - pro jednoduchost si můžeme představovat třeba přirozená čísla. Graf této funkce vypadá takto:



Obrázek 1.8: Graf funkce φ

Taková funkce bude po částech lineární. Na intervalech $< c_k + \frac{\text{sign}(k)}{2^k}, c_{k+1} >$ bude vždy konstantní a bude zde nabývat hodnot $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$ - tedy pro tyto hodnoty bude $\sin(\varphi(x))$=1.

Interval, kde funkce $\varphi(x)$ vzroste z hodnoty $\frac{\pi}{2}$ na hodnotu $\frac{5\pi}{2}$ má délku $\frac{1}{2}$. Interval, kde funkce $\varphi(x)$ vzroste z hodnoty $\frac{5\pi}{2}$ na hodnotu $\frac{9\pi}{2}$ má délku $\frac{1}{4}$.

Obecný k-tý interval bude mít délku $\frac{1}{2^k}$.

Délky intervalů $(c_i, c_i + \frac{1}{2^i})$ tvoří geometrickou posloupnost, jejíž součet je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Máme tedy zaručeno, že takto definovaná funkce φ je neklesající a přestože $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, tak tato funkce stejně bude "převážně konstantní"- neboť součet délek intervalů, na kterých je rostoucí má konečnou hodnotu.

Naopak intervaly na kterých nabývá funkce φ hodnot $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$, se pořád zvětšují. Chceme ukázat, že pro takto definovanou funkci φ platí, že

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\, dx \quad \text{diverguje.}$$

Lze psát:

$$\frac{\sin(\varphi(x))}{x} = \frac{\sin(\varphi(x)) - 1}{x} + \frac{1}{x}$$

Jelikož $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ je divergentní, stačí nám dokázat absolutní konvergenci integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))-1}{x}\, dx$.

Pak pravá strana rovnice $\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))-1}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ má smysl, neboť je součtem divergentního a absolutně konvergentního integrálu, z čehož dostáváme divergenci integrálu na levé straně.

Ukážeme tedy, že $\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))-1}{x}\, dx$ je absolutně konvergentní.
Integrand je spojitou funkcí na intervalu $[1, \infty)$, tedy existuje-li Lebesgueův integrál $\int_1^\infty \mid \frac{\sin(\varphi(x))-1}{x} \mid\, dx$, pak už nutně existuje i Newtonův integrál a má stejnou hodnotu (integrand nemění znaménko).
Označme $M := \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, c_i + \frac{1}{2^i})$ jako intervaly linearity funkce φ (tam kde vzroste z hodnoty $\frac{\pi}{2} + 2(i-1)\pi$ na hodnotu $\frac{\pi}{2} + 2i\pi$). To je měřitelná množina (neboť je spočetným sjednocením otevřených intervalů, což je borelovská množina).

Mimo množinu M bude hodnota integrandu 0, neboť

$$\forall x \in (0,\infty) \setminus M : \sin(\varphi(x)) = 1.$$

Pak lze psát:

$$\int_1^\infty \frac{\mid \sin(\varphi(x)) - 1 \mid}{x}\, dx = \int_M \frac{\mid \sin(\varphi(x)) - 1 \mid}{x}\, dx \leq \int_M \frac{2}{1}\, dx = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2.$$

Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\mid \sin(\varphi(x)) - 1 \mid}{x}\, dx < \infty.$$

Předpokládali jsme, že φ je **spojitá neklesající funkce na intervalu** $(1,\infty)$ splňující navíc, že $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Vidíme, že to nestačí. Abychom měli zaručenou konvergenci zadaného integrálu, je třeba klást na funkci φ silnější požadavky.

1.4 Bilipschitzovské funkce

Po předchozích úvahách by se mohlo zdát, že konvergence daného integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$ úzce souvisí s rychlostí růstu uvažované funkce φ. Chtěli bychom vyslovit postačující kritérium pro konvergenci zadaného integrálu pro co možná nejširší třídu funkcí. Zatím jsme se omezili na takové spojité funkce, které rostou do nekonečna - a viděli jsme, že to nestačí. Chtěli bychom zaručit, aby byl jejich růst nějak „rozumně"korigován.
Jak si lze představovat bilipschitzovské funkce?
Jsou to takové **spojité funkce**, které **nerostou a ani neklesají ani příliš rychle a ani příliš pomalu**. Jejich růst je nějak rozumně omezen.

Definice 1 (Bilipschitzovské funkce)**.** *Řekneme, že funkce φ definovaná na nějakém intervalu I je bilipschitzovská, pokud existují kladné konstanty c_1, $c_2 > 0$, že pro všechna čísla x, $y \in I$ platí:*

$$c_1\,|\,x-y\,| \leq |\,\varphi(x)-\varphi(y)\,| \leq\; c_2\,|\,x-y\,|.$$

Formulujme nyní pomocné lemma o vztahu bilipschitzovskosti a omezenosti derivace, které budeme potřebovat.

Lemma 2 (Charakterizace bilipschitzovských funkcí I)**.** *Nechť φ je **spojitá** funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$, která je **diferencovatelná** na otevřeném intervalu (a,b). Pak platí, že φ je **bilipschitzovská** na (a,b) právě tehdy, existují-li konstanty c_1, $c_2 > 0$, že **pro všechna** $x \in (a,b)$ platí:*

$$c_1 \;\leq |\,\varphi'(x)| \leq\; c_2.$$

Důkaz. "$\Leftarrow$" Označme $I := (a,b)$. Předpokládáme, že

$$\exists\, c_1,\, c_2 > 0\ \forall t \in I:\ c_1 \;\leq |\,\varphi'(t)| \leq c_2.$$

Vezměme x,$y \in I$, $y < x$. Tedy $(y,x) \subset (a,b)$. Z předpokladu víme, že funkce φ je diferencovatelná na (y,x) a zároveň spojitá na $[y,x]$. Předpokládáme tedy omezenost absolutní hodnoty derivace shora i zdola a chceme ukázat bilipschitzovskost. Protože φ je diferencovatelná funkce na intervalu (y,x), tak z Lagrangeovy věty o střední hodnotě nutně musí existovat takové číslo $\xi \in (y,x)$, že

$$\varphi'(\xi) \;=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}.$$

Jelikož tento odhad pro derivaci funkce φ platí pro všechna $t \in I$, platí i pro číslo $\xi \in (y,x) \subset I$, tedy

$$c_1 \;\leq |\,\varphi'(\xi)| \leq\; c_2,$$

$$c_1 \;\leq \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right| \leq c_2,$$

$$c_1\,(x-y) \leq |\,\varphi(x)-\varphi(y)\,| \leq\; c_2\,(x-y).$$

Protože x,y mohla být libovolná čísla splňující $a < y < x < b$, uvedená nerovnost platí pro všechna x,$y \in I$, $y < x$, a tedy funkce φ je bilipschitzovská na $(a$,$b)$.

"$\Rightarrow$"Nyní předpokládáme, že funkce φ je bilipschitzovská na intervalu (a,b), tedy:

$$\exists\, c_1,\, c_2 > 0\ \forall x,y \in (a,b): \quad c_1\,|\,x-y\,| \le |\,\varphi(x)-\varphi(y)\,| \le\ c_2\,|\,x-y\,|.$$

Pro $x \neq y$ dostáváme vydělením nerovnice výrazem $|\,x-y\,|$:

$$c_1 \le \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right| \le\ c_2.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna x,y, $x \neq y$, z intervalu (a,b), limitním přechodem dostáváme pro $x, y \in (a,b)$:

$$c_1 \le \lim_{y\to x}\left|\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\right| \le\ c_2,$$

$$c_1 \le \left|\lim_{y\to x}\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\right| \le\ c_2,$$

$$c_1 \le |\,\varphi'(x)\,| \le\ c_2.$$

$\square$

1.4.1 Příklady bilipschitzovských funkcí

Jak tedy vypadají bilipschitzovské funkce? V prvé řadě si můžeme uvědomit, že každá lineární funkce je vždy bilipschitzovská, protože její derivace je konstantní a je tedy omezená shora směrnicí největšího růstu, resp. poklesu, a naopak zdola je vždy omezená směrnicí nejnižšího růstu, resp. poklesu.
Uveďme jiný netriviální příklad bilipschitzovské funkce:

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$$

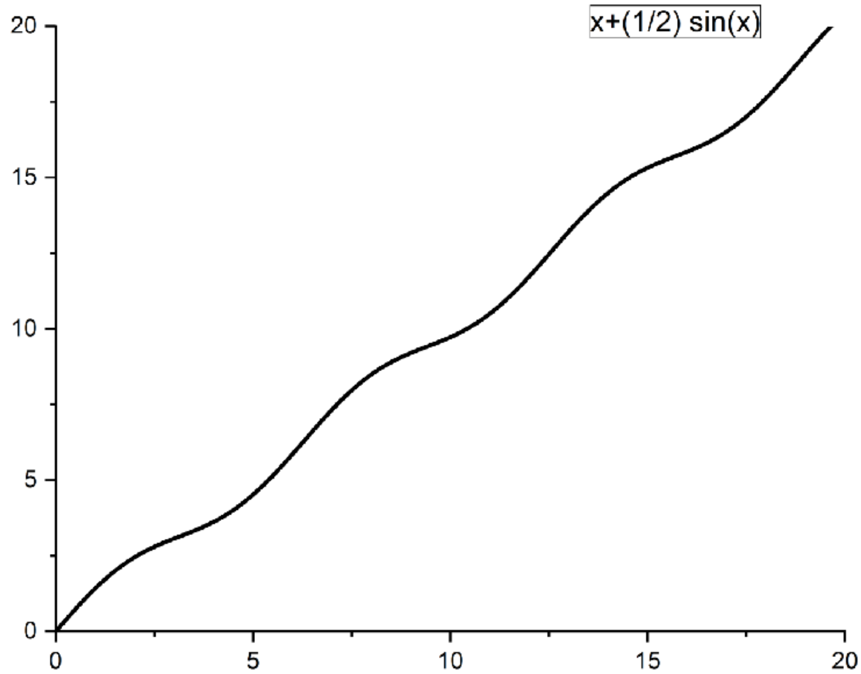
Její derivace je

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x.$$

Dovedeme najít takové kladné konstanty $c_1,\, c_2$, aby platilo, že $c_1 \leq |\,\varphi'(x)| \leq c_2$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq \left| 1 + \frac{1}{2}\cos x \right| \leq \frac{3}{2}$$

Graf této funkce vypadá takto:

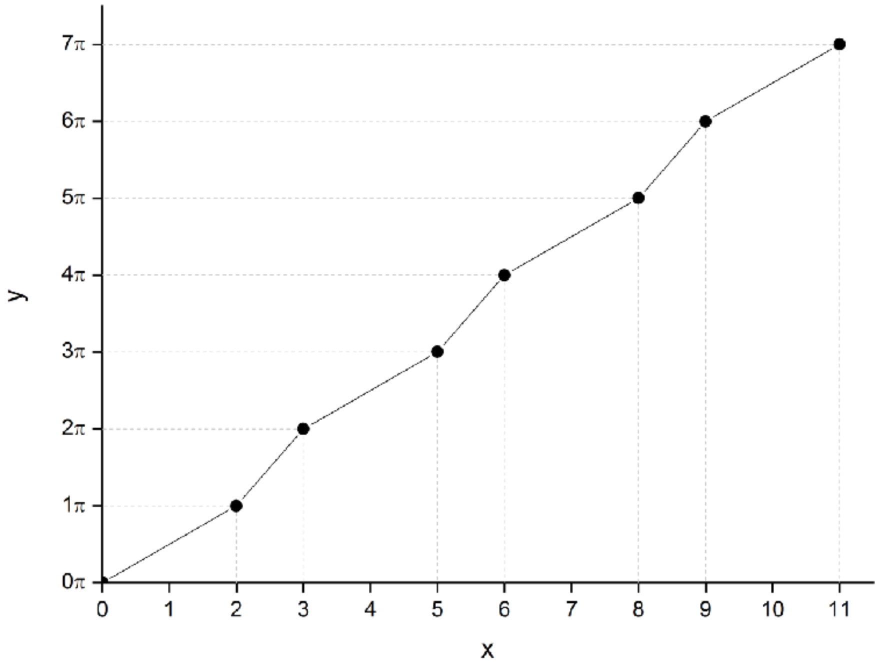


Obrázek 1.9: Graf bilipschitzovské funkce

K této funkci se ještě později vrátíme a budeme zkoumat konvergenci daného integrálu.

Uvažujme rostoucí spojitou bilipschitzovskou funkci φ jdoucí do nekonečna. Jsou to už postačující podmínky pro konvergenci integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin \varphi(x)}{x}$?

Uvažujme následující funkci φ jako na obrázku.



Obrázek 1.10: Graf bilipschitzovské funkce 2

Explicitní předpis této funkce je:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x-n) + \pi\, n, & x \in < 3n, 3n+2 > \\ \pi x - \pi n - \pi, & x \in < 3n+2, 3n+3 >,\ n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Taková funkce je tedy po částech lineární a proto by mohla být i bilipschitzovská, neboť pro ni platí:

$$\frac{\pi}{2} \leq |\, \varphi'(x)| \leq \pi, \quad x \in (0,\infty) \setminus M,$$

kde M je podmnožina přirozených čísel, kde se mění předpis funkce a dochází ke zlomům. Tato funkce tedy není diferencovatelná všude, ale je diferencovatelná jen skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře. Proto se zde tedy nedá přímo použít Lemma 2 o charakterizaci bilipschitzovských funkcí.

Lemma 2 říkalo, že pro spojitou diferencovatelnou funkci je bilipschitzovskost ekvivalentní s tím, že její derivace je v absolutní hodnotě omezená shora i zdola nějakými kladnými konstantami. Předpoklad diferencovatelnosti na celém intervalu je zde nutný. Kdybychom místo toho předpokládali, že

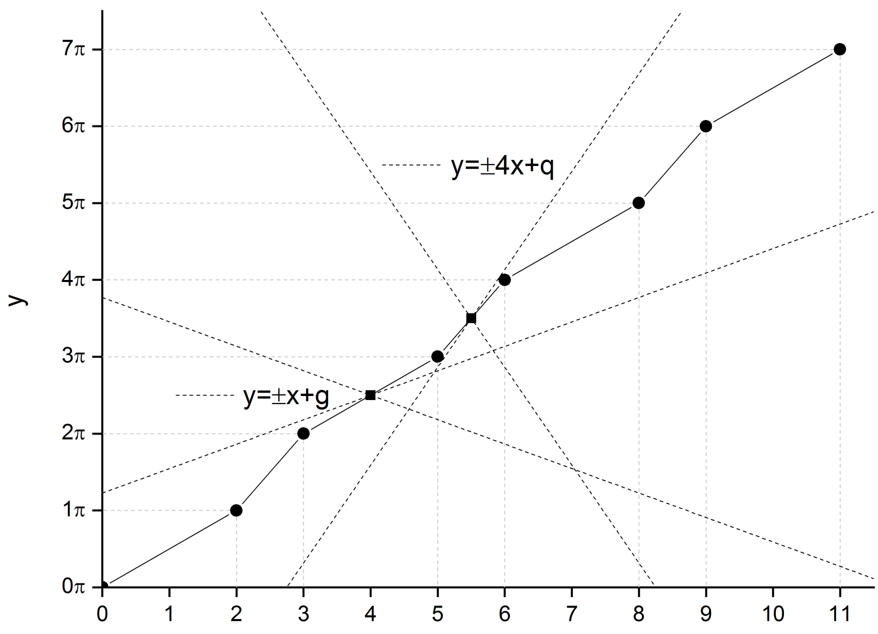
$$\varphi'(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in I \setminus M,$$

kde M je nějaká množina nulové míry; tvrzení nebude platit. Jako protipříklad lze třeba vzít funkci tvaru "identita + Cantorovy schody"- ta je diferencovatelná skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře a její derivace je rovna 1 s.v., tedy jistě existují nějaké kladné konstanty, které derivaci omezují shora i zdola s.v. - ale tato funkce není absolutně spojitá (jak je známo o Cantorově funkci, viz např. [4, kapitola 5, Věta 5.2, str. 19], kde je uvedena i definice) a tím pádem ani bilipschitzovská, neboť bilipschitzovské funkce jsou podtřídou absolutně spojitých.

Pokud bychom ale tuto funkci φ v bodech zlomu "zhladili"- například tak, že bychom pro každý bod zlomu $m_i \in M$ předefinovali danou funkci φ na nějakém prstencovém okolí bodu m_i, např. na intervalu $(m_i - 0{,}001, m_i + 0{,}001)$, tak, aby na tomto intervalu nebyla lineární, ale kubická (tj. nějaký polynom 3. stupně) a navíc splňovala podmínku, že funkční hodnoty i první derivace v těchto krajních bodech se budou shodovat s původní funkcí; tak potom by tato předefinovaná funkce podle lemmatu 2 už byla bilipschitzovská, neboť pro ni platí, že $\frac{\pi}{2} \leq |\,\varphi'(x)| \leq \pi$ pro všechna x z intervalu $(0,\infty)$. (Její směrnice se bude na intervalech $(\ m_i - 0{,}001,\ m_i + 0{,}001)$ spojitě měnit z hodnoty $\frac{\pi}{2}$ na hodnotu π a zpět - ale nikdy nepřesáhne pod hodnotu $\frac{\pi}{2}$ ani nad hodnotu π). Nebudeme se ale snažit najít explicitní předpis takto "zhlazené"funkce; místo toho ukážeme, že i tato funkce je skutečně bilipschitzovská. Lze totiž snadno nahlédnout, že pro takto definovanou funkci φ platí:

$$1\,|\,x - y\,| \leq |\,\varphi(x) - \varphi(y)\,| \leq\ 4\,|\,x - y\,|, \quad x,y \in \mathbb{R}^+$$

Tedy dolní konstantu bilipschitzovskosti lze volit 1, horní konstantu bilipschitzovskosti lze volit 4. Jinými slovy, funkce φ je určitě lipschitzovská s konstantou 4 a zároveň funkce φ^{-1} je určitě lipschitzovská s konstantou 1. To lze snadno nahlédnout tím, že směrnice největšího růstu funkce φ je π a tedy tato funkce nebude růst rychleji než přímka se směrnicí 4; a na druhou stranu směrnice nejmenšího růstu funkce φ je $\frac{\pi}{2}$ a tedy určitě nebude růst pomaleji než přímka se směrnicí 1.



Obrázek 1.11: Graf bilipschitzovské funkce

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pro takto definovanou funkci φ platí:

$$\int_0^{3N+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_{3n}^{3n+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$$

$$\int_{3n}^{3n+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx = \int_{3n}^{3n+2} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx + \int_{3n+2}^{3n+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$$

$$\overset{(*)}{\geq} \int_{3n}^{3n+2} \frac{\sin(\varphi(x))}{3n+2}\,dx + \int_{3n+2}^{3n+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{3n+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3n+2} \int_{3n}^{3n+2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-n) + \pi\, n\right) dx + \frac{1}{3n+2} \int_{3n+2}^{3n+3} \sin(\pi x - \pi n - \pi)\,dx$$

$$= \frac{1}{3n+2} \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-n) + \pi\, n\right)}{\frac{\pi}{2}} \right]_{3n}^{3n+2} + \frac{1}{3n+2} \left[-\frac{\cos(\pi x - \pi n - \pi)}{\pi} \right]_{3n+2}^{3n+3}$$

$$= \frac{1}{3n+2}\frac{2}{\pi}\left(-\cos(2\pi n + \pi) + \cos(2\pi n)\right)$$

$$+ \frac{1}{3n+2}\frac{1}{\pi}\left(-\cos(2\pi n + 2\pi) + \cos(2\pi n + \pi)\right)$$

$$= \frac{1}{3n+2}\frac{2}{\pi}(-(-1)+1) + \frac{1}{3n+2}\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{3n+2} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{3n+2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{3n+2}$$

Nerovnost $(\star)$ platí z toho důvodu, že:

- Funkce $\sin(\varphi(x))$ nabývá na intervalu $(3n, 3n+2)$ kladných hodnot a zlomek $\frac{1}{x}$ na tomto intervalu nabývá minimální hodnoty $\frac{1}{3n+2}$ (celý zlomek zmenším, pokud jmenovatele zvětším).

- Funkce $\sin(\varphi(x))$ nabývá na intervalu $(3n+2, 3n+3)$ záporných hodnot a zlomek $\frac{1}{x}$ na tomto intervalu nabývá maximální hodnoty $\frac{1}{3n+2}$ (odčítáme co nejvíce).

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^{3N+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi}\frac{1}{3n+2}.$$

Protože uvedená nerovnost platí pro všechna přirozená čísla N, limitním přechodem dostáváme

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{3N+3} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi}\frac{1}{3n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{3n+2}.$$

Tato řada na pravé straně nerovnosti je divergentní a má součet $+\infty$, tím pádem integrál $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$ diverguje.

Vidíme tedy, že **bilipschitzovskost** φ **není postačující podmínkou** pro konvergenci integrálu $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx$.

Vraťme se ještě jednou k funkci φ (obrázek 1.8) definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,(x-n) + \pi\, n, & x \in < 3n, 3n+2 > \\ \pi x - \pi n - \pi, & x \in < 3n+2, 3n+3 >,\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

a ukažme, že je skutečně bilipschitzovská i jiným způsobem než jenom graficky. Můžeme vyslovit následující lemma, které svým způsobem zobecňuje lemma 2:

Lemma 3 (Charakterizace bilipschitzovských funkcí II)**.** *Nechť J je interval, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ je **ryze monotónní** funkce, která je **absolutně spojitá** na každém omezeném uzavřeném intervalu $I \subset J$. Pak platí, že φ je **bilipschitzovská** na J právě tehdy, existují-li konstanty c_1, $c_2 > 0$ tak, že pro **skoro všechna** $x \in J$ platí*

$$c_1 \le |\,\varphi'(x)| \le \; c_2.$$

Oproti lemmatu 2 zde uvažujeme absolutně spojitou funkci namísto diferencovatelné funkce a omezení derivace kladnými konstantami skoro všude namísto všude. Připomeňme ještě definici absolutně spojité funkce:

Definice 2. *Funkce φ je absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny možné intervaly $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]$ takové, že*

$$a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le ... \le a_n \le b_n \le b \quad \textit{a zároveň} \quad \sum_{i=0}^{n} (b_i - a_i) \; < \; \delta,$$

platí

$$\sum_{i=0}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \; < \; \varepsilon.$$

O funkci φ tedy víme, že je nekonstantní a platí pro ni, že

$$\frac{\pi}{2} \le |\,\varphi'(x)| \le \pi, \quad x \in (0,\infty) \setminus M,$$

kde M je nějaká spočetná množina, kde φ není diferencovatelná. Rádi bychom s využitím předchozího lemmatu dokázali, že je bilipschitzovská. Stačí tedy ukázat absolutní spojitost.

Snadno si ověříme, že funkce φ skutečně splňuje definici absolutní spojitosti. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme $\delta := \frac{\varepsilon}{\pi}$, protože směrnice největšího růstu je π.

Důkaz. K důkazu lemmatu 3 si stačí uvědomit, že pro absolutně spojité funkce platí obdoba Newton-Leibnizovy formule v následujícím smyslu:

Je-li φ **absolutně spojitá** funkce na intervalu $[a,b]$, potom platí:

$$\int_a^b \varphi'(x)\, dx \; = \; \varphi(b) - \varphi(a).$$

(Rudin, Analýza v reálném a komplexním oboru, str. 166). Absolutně spojité funkce jsou diferencovatelné skoro všude. Funkce φ je podle předpokladu absolutně spojitá na každém omezeném uzavřeném intervalu $I \subset J$, přičemž interval

J může být i neomezený. Neomezený interval ale dovedeme zapsat jako spočetné sjednocení omezených uzavřených intervalů. Na každém z těchto intervalů má množina bodů, kde φ' neexistuje nulovou míru, proto φ' existuje na $J \setminus M$, kde M je spočetným sjednocením množin nulové míry, tedy má míru 0. Funkce φ je tedy diferencovatelná skoro všude na intervalu J.
"$\Leftarrow$" Předpokládejme nejprve, že existují nějaké kladné konstanty c_1, $c_2 > 0$ tak, že pro skoro všechna $t \in J$ platí

$$c_1 \le |\varphi'(t)| \le c_2$$

a ukažme, že je funkce φ bilipschitzovská. Připomeňme větu z teorie míry a integrálu, která říká:

$$\text{Je-li } f \le g \text{ skoro všude vzhledem k míře } \mu \text{, pak } \int f \, d\mu \le \int g \, d\mu.$$

Vezměme $x,y \in J$ splňující $y < x$. Integrací tedy dostaneme

$$\int_y^x c_1 \, dt \le \int_y^x |\varphi'(t)| \, dt \le \int_y^x c_2 \, dt,$$

$$c_1(x-y) \le \int_y^x |\varphi'(t)| \, dt \le c_2(x-y).$$

Je-li funkce φ rostoucí, tak $\int_y^x |\varphi'(t)| \, dt = \int_y^x \varphi'(t) \, dt$, je-li naopak klesající, tak $\int_y^x |\varphi'(t)| \, dt = -\int_y^x \varphi'(t) \, dt$. Díky tomu dostáváme s použitím Newton-Leibnizovy formule

$$\int_y^x |\varphi'(t)| \, dt = |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Dostáváme tedy, že pro všechna $x,y \in J, y < x$, platí:

$$c_1(x-y) \le |\varphi(x) - \varphi(y)| \le c_2(x-y).$$

"$\Rightarrow$" Předpokládáme, že

$$\exists c_1, c_2 > 0 \; \forall x,y \in J: \quad c_1 |x-y| \le |\varphi(x) - \varphi(y)| \le c_2 |x-y|.$$

Vezměme $x,y \in J$ splňující $y < x$, vydělením nerovnice výrazem $|x-y|$ dostáváme:

$$c_1 \le \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y} \right| \le c_2.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna x,y, $x \neq y$, z intervalu J, limitním přechodem dostáváme:

$$c_1 \le \lim_{y \to x} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y} \right| \le c_2,$$

$$c_1 \le \left| \lim_{y \to x} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y} \right| \le c_2,$$

$$c_1 \le |\varphi'(x)| \le c_2.$$

Funkce $\varphi(x)$ je podle předpokladu absolutně spojitá, proto $\varphi'(x)$ existuje skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

□

1.5 Důsledky Abel-Dirichletova kritéria

Jaké požadavky máme tedy klást na funkci φ, abychom měli zaručenou konvergenci daného integrálu? Můžeme vyslovit obecné kritérium:

Věta 4 (1. kritérium konvergence). *Je-li $\varphi \in C^2(1,\infty)$ **konvexní funkce** taková, že $\varphi' > 0$ na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ potom:*

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx \; konverguje.$$

Důkaz. Použijeme Abel-Dirichletovo kritérium stejným způsobem jako v předchozích příkladech. Lze psát:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx = \int_1^\infty \sin(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\frac{1}{x\,\varphi'(x)}\,dx$$

Potom $f(x) := \sin\varphi(x)\,\varphi'(x)$ má vždy omezenou primitivní funkci, jelikož $\int \sin(\varphi(x))\,\varphi'(x) = -\cos\varphi(x)$.
Zbývá dokázat, že funkce $g(x) := \frac{1}{x\,\varphi'(x)}$ jde monotónně k nule. Tvrdím, že:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} x\,\varphi'(x) = \infty$$

a zároveň funkce $g(x)$ je klesající právě tehdy, když $x\,\varphi'(x)$ je rostoucí. Chceme tedy ukázat, že její derivace bude od jistého bodu pořád kladná. Tedy dostáváme podmínku:

$$(x\,\varphi'(x))' = \varphi'(x) + x\,\varphi''(x) > 0 \;\forall x \in (1,\infty)$$

Podle předpokladu je $\varphi'(x) > 0$ a protože funkce φ je konvexní a C^2 hladká, musí být $\varphi''(x) \geq 0$. Tato podmínka je tedy splněna. Zbývá ukázat, že funkce $g(x)$ má skutečně limitu 0. Protože funkce $\varphi \in C^2$ je konvexní, musí být φ' rostoucí funkce. Tím pádem dostáváme, že pro nějaké $x_0 \in (1,\infty)$ platí:

$$\frac{1}{x\,\varphi'(x)} \leq \frac{1}{x\,\varphi'(x_0)}, \quad x \in (x_0,\infty).$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,\varphi'(x_0)} = 0, \text{ dostáváme, že } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,\varphi'(x)} = 0.$$

□

Věta 5 (2. kritérium konvergence). *Je-li funkce $\varphi \in C^1(1,\infty)$ funkce, pro níž existuje kladná konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna $x \in (1,\infty)$ platí: $c < \varphi'(x)$ a φ' je monotónní potom:*

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx \text{ konverguje.}$$

Důkaz: Opět rozšíříme integrand derivací funkce φ jako v předchozím případě. Lze psát:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\varphi(x))}{x}\,dx = \int_1^\infty \sin(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,dx$$

.

Tvrdím, že integrál $\int_1^\infty \sin(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\frac{1}{x}\,dx$ konverguje podle Dirichletova kritéria, protože:

- $\sin(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ má omezenou primitivní funkci na $[1,\infty)$,
- $\frac{1}{x}$ jde monotónně k 0,
- obě funkce jsou spojité na $[1,\infty)$.

Je-li navíc $\frac{1}{\varphi'(x)}$ omezená monotónní funkce, dostáváme konvergenci celého integrálu z Abelova kritéria.

1.6 Vztah periodicity a konvergence Newtonova integrálu

Zkoumejme konvergenci následujícího integrálu:

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)}{x}\, dx.$$

Zkusíme-li aplikovat Abel-Dirichletovo kritérium a stejně jako v předchozích případech integrand rozšíříme derivací funkce $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$, dostaneme:

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)}{x}\, dx = \int_1^\infty \sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)\left(1 + \frac{1}{2}\cos x\right) \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{2}\cos x\right)} dx$$

Máme sice, že $\sin(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ má omezenou primitivní funkci, ale funkce $\frac{1}{x\,(1+\frac{1}{2}\cos x)}$ nejde monotónně k nule. Zde nám nepomůže ani Dirichletovo a ani Abelovo kritérium.

Můžeme vyslovit obecnější tvrzení, které nám pomůže rozhodnout o konvergenci podobných integrálů:

Věta 6 (**Vztah periodicity a konvergence Newtonova integrálu**). *Je-li funkce ψ 2π-periodická spojitá funkce s lokálně konečnou variací na $\mathbb{R}$, tj. $\psi \in BV_{loc}(\mathbb{R})$, potom*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\, dx \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, dx = 0.$$

Důkaz.

Připomeňme, že Fourierova řada funkce $\psi \in L^1(-\pi, \pi)$ je řada tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (\, a_n \cos nx \, + b_n \sin nx\,),$$

přičemž pro Fourierovy koeficienty a_n, b_n platí vztahy:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx\, dx\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx\, dx.$$

Absolutní člen Fourierovy řady $\frac{a_0}{2}$ je roven integrálu uvažované funkce $\psi(x)$ přes interval $(-\pi, \pi)$. Tedy:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, dx.$$

Připomeňme ještě definici konečné variace.

Definice 3. *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$ a D je nějaké dělení intervalu $[a,b]$, tedy $D = \{x_0, ..., x_n, n \in \mathbb{N}; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Řekneme, že reálná funkce f má* ***konečnou variaci*** *na $[a,b]$, píšeme $f \in BV_([a,b])$, pokud*

$$\sup_{D \in \zeta} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,\, D = \{x_0, ..., x_n\} \right\} < \infty,$$

kde ζ jsou všechna možná dělení intervalu $[a,b]$.

Definice 4. *Nechť J je interval. Řekneme, že funkce f má* ***lokálně konečnou variaci*** *na J, píšeme $f \in BV_{loc}(J)$, má-li konečnou variaci na každém omezeném uzavřeném intervalu $[a,b] \subset J$.*

Spojitá 2π-periodická funkce s lokálně konečnou variací se podle Jordan-Dirichletova kritéria nutně rovná součtu svojí Fourierovy řady. Proto lze psát pro $x \in (1,\infty)$:

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (\, a_n \cos nx \, + b_n \sin nx \,).$$

Označme jednu její primitivní funkci

$$\phi(x) := \int_0^x \psi(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Pak použitím per-partes dostáváme:

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t}\, dt \, = \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(1)}{1} + \int_1^x \frac{\phi(t)}{t^2}\, dt. \tag{1.5}$$

Fourierova řada spojité funkce s lokálně konečnou variací konverguje podle Jordan-Dirichletova kritéria lokálně stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$ a tedy stejnoměrně na každém intervalu $(1,\, x),\ x \in (1, \infty)$; a proto lze v důsledku Moore-Osgoodovy věty zaměnit pořadí integrace a sumace - tedy integrovat Fourierovu řadu "člen po členu". Lze tedy psát:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2}\, x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, \frac{\sin nx}{n} \, - b_n \, \frac{\cos nx - 1}{n} \right)$$

Označme na chvíli $\tau(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\, a_n \, \frac{\sin nx}{n} \, - b_n \, \frac{\cos nx - 1}{n})$.
Ukážeme, že tato řada je vždy konvergentní a tedy funkce $\tau(x)$ je dobře definovaná:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, \frac{\sin nx}{n} \, - b_n \, \frac{\cos nx - 1}{n} \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\frac{a_n}{n}| + 2\, |\frac{b_n}{n}| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{n}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{b_n}{n}|$$

Nyní použijeme na obě sumy Hölderovu nerovnost (Rudin, Analýza v reálném a komplexním oboru) následujícím způsobem: $||u\,v||_{l_1} \leq ||u||_{l_2}\,||v||_{l_2}$, tedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{n}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}\,\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{b_n}{n}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}\,\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní. Zbývá nám tedy ukázat, že $a_n, b_n \in l_2$.

Stačí si uvědomit, že a_n, b_n jsou koeficienty Fourierovy řady funkce ψ. Protože $\psi \in L_2[0, 2\pi]$, tím pádem je rovna součtu své Fourierovy řady v L_2 a tedy její koeficienty budou prvky prostoru l_2. Tím pádem dostáváme, že

$$\tau(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{a_n}{n}| + 2\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{b_n}{n}| < \infty.$$

Funkce $\tau(x)$ je tedy omezená. Je zřejmé, že $\tau(x)$ je 2π-periodická funkce - díky periodicitě funkcí $\sin x$, $\cos x$ a s použitím součtových vzorců dostáváme

$$\sin(n(x+2\pi)) = \sin(nx + 2\pi n) = \sin nx \cos 2\pi n + \cos nx \sin 2\pi n = \sin nx,$$

$$\cos(n(x+2\pi)) = \cos(nx + 2\pi n) = \cos nx \cos 2\pi n - \sin nx \sin 2\pi n = \cos nx.$$

Proto pro funkci τ platí: $\tau(x+2\pi) = \tau(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tedy je 2π-periodická.

Označme $c := \frac{a_0}{2}$ jako absolutní člen Fourierovy řady. Dosazením do rovnice (1.5) za $\phi(x)$ pak dostáváme:

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t}\,dt = c + \frac{1}{x}\,\tau(x) - \frac{\phi(1)}{1} + \int_1^x (\frac{c}{t} + \frac{\tau(t)}{t^2})dt$$

Protože tato rovnost platí pro všechna $x \in (1, \infty)$, limitním přechodem dostáváme:

$$\lim_{x\to\infty} (\int_1^x \frac{\psi(t)}{t}\,dt) = \lim_{x\to\infty} (c + \frac{1}{x}\,\tau(x) - \frac{\phi(1)}{1} + \int_1^x (\frac{c}{t} + \frac{\tau(t)}{t^2})dt)$$

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt = c - \frac{\phi(1)}{1} + \int_1^\infty (\frac{c}{t} + \frac{\tau(t)}{t^2})dt \tag{1.6}$$

Pro integrál na pravé straně rovnosti pak platí, že

$$\int_1^\infty (\frac{c}{t} + \frac{\tau(t)}{t^2})dt = \int_1^\infty \frac{c}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{\tau(t)}{t^2}\,dt$$

Integrál $\int_1^\infty \frac{\tau(t)}{t^2}\,dt$ je totiž absolutně konvergentní (víme totiž, že τ je omezená funkce), proto pravá strana rovnosti má vždy smysl. Z rovnice (1.6) tedy vidíme, že výraz na pravé straně bude mít vždy smysl a pro jakékoliv nenulové reálné číslo c bude nabývat hodnoty $+\infty$ nebo $-\infty$. Pouze pro c=0 bude mít pravá strana konečnou hodnotu.

Dokázali jsme tedy, že $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx$ konverguje právě tehdy, když absolutní člen Fourierovy řady funkce $\psi(x)$ je nulový, tedy $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 0$.

$\square$

Poznámka: Připomeňme, že platí následující sekvence implikací:

f je lipschitzovsky spojitá $\Rightarrow$ f je absolutně spojitá $\Rightarrow$ f má konečnou variaci

Tedy místo toho, abychom pracně ověřovali zda má funkce konečnou variaci nám postačí ověřit, že je lipschitzovsky spojitá, což je v určitých situacích jednodušší.

Lipschitzovskost budeme nejsnáze dokazovat tak, že ukážeme omezenost derivace. Pro nekonstantní diferencovatelnou funkci φ platí:

$\exists\, K > 0\, \forall\, x \in I : |\,\varphi'(x)| \leq K$, potom φ je lipschitzovská na I.

Důkaz. Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě musí existovat takové $\xi \in (x,y)$, že $|\varphi'(\xi)| = |\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}|$. Obdobně jako v důkazu lemmatu 2 lze psát:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|}|x - y| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq K \cdot |x - y|.$$

Konstanta omezenosti derivace je tedy zároveň i konstantou lipschitzovkosti.

$\square$

1.6.1 Užití věty 6 v početních příkladech

Vraťme se nyní k našemu příkladu. Zkoumáme tedy konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)}{x}\, dx.$$

Označme nyní $\psi(x) := \sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)$. Nahlédneme, že tato funkce splňuje předpoklady naší věty:

- ψ je spojitá funkce na intervalu $(1,\infty)$ (lineární kombinace a složení spojitých funkcí je opět spojitá funkce)

- ψ je 2π-periodická funkce, tj. $\forall x \in (1,\ \infty)$: $\psi(x) = \psi(x + 2\pi)$.
  To lze snadno ukázat: $\psi(x + 2\pi) = \sin\left(x + 2\pi + \frac{1}{2}\sin\left(x + 2\pi\right)\right) =$ $\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x + 2\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)\,\cos 2\pi + \cos\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)\,\sin 2\pi =$ $\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right) = \psi(x)$.
  Ve druhé rovnosti jsme využili periodicity sinu, ve třetí rovnosti součtového vzorce $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ a nakonec ve čtvrté rovnosti toho, že $\sin 2\pi = 0$ a $\cos 2\pi = 1$.

- Ukážeme, že $\psi \in BV_{loc}(1,\infty)$.
  Stačí si uvědomit, že z lipschitzovskosti plyne konečná variace. Ověříme tedy, že funkce ψ je lipschitzovsky spojitá. Stačí tedy ověřit, že funkce ψ má omezenou derivaci a to je ekvivalentní s lipschitzovskostí.
  Pro derivaci funkce ψ platí:

  $$\forall x \in (1,\infty) : |\psi'(x)| = \left|\left(1 + \frac{1}{2}\cos x\right)\,\cos\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)\right| \le \frac{3}{2}.$$

  Z omezenosti derivace funkce ψ tedy dostáváme, že ψ je lipschitzovsky spojitá na $(1,\infty)$ a má tedy konečnou variaci.

Funkce ψ tedy splňuje předpoklady Věty 6 a proto k vyšetření konvergence daného integrálu stačí ověřit, zda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, dx\ = 0$$

Snadno nahlédneme, že funkce ψ je lichá:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \psi(-x) = \sin\left(-x + \frac{1}{2}\sin(-x)\right) = -\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right) = -\,\psi(x).$$

Integrál liché funkce přes symetrický interval $(-\pi,\pi)$ je nulový. Dostáváme tedy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right) dx\ = 0 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\sin x\right)}{x}\, dx \quad \text{konverguje.}$$

Zkoumejme nyní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx.$$

Zkusme opět aplikovat předchozí větu. Označme $\psi(x) := \sin(\sin x)$ a podívejme se, zda tato funkce splňuje předpoklady Věty 6.

- ψ je kompozicí dvou spojitých funkcí, tedy spojitá funkce.
- ψ je 2π-periodická funkce, neboť: $\psi(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi) = \sin(\sin x) = \psi(x)$.
- $\psi \in BV_{loc}(1,\infty)$, neboť $|\psi'(x)| = |\cos(x)\cos(\sin(x))| \leq 1,\ x \in (1,\infty)$. Tedy funkce ψ má omezenou derivaci na intervalu $(1,\infty)$ a tedy je lipschitzovsky spojitá. Tím pádem musí mít i lokálně konečnou variaci.

Funkce ψ tedy splňuje předpoklady Věty 6 a proto k vyšetření konvergence zadaného integrálu stačí ověřit, zda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin x)\,dx = 0.$$

Funkce $\sin(\sin x)$ je lichá, neboť

$$\forall x \in \mathbb{R} : \psi(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -\,\psi(x).$$

Integrál liché funkce přes symetrický interval je nulový. Z toho dostáváme, že $\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}\,dx$ konverguje.

Vyšetřeme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin^2 x)}{x}\, dx.$$

Označme $\psi(x) := \sin(\sin^2 x)$ a podívejme se, zda tato funkce splňuje předpoklady Věty 6.

- ψ je složením dvou spojitých funkcí, tedy spojitá funkce.
- ψ je 2π-periodická funkce, neboť:
  $\psi(x+2\pi) = \sin(\sin^2(x+2\pi)) = \sin(\sin^2(x)) = \psi(x), x \in \mathbb{R}$,
  Ve druhé rovnosti jsme využili periodicity sinu.
- $\psi \in BV_{loc}(1,\infty)$, neboť $|\psi'(x)| = |2\sin x \cos x \cos(\sin^2 x)| \leq 2,\ x \in (1,\infty)$. Funkce ψ má tedy omezenou derivaci na intervalu $(1,\infty)$ a proto je lipschitzovsky spojitá. Tím pádem musí mít i lokálně konečnou variaci.

Ačkoliv nedovedeme najít primitivní funkce k funkci $\sin(\sin^2 x)$, snadno nahlédneme, že funkce $\psi(x)$ je sudá:

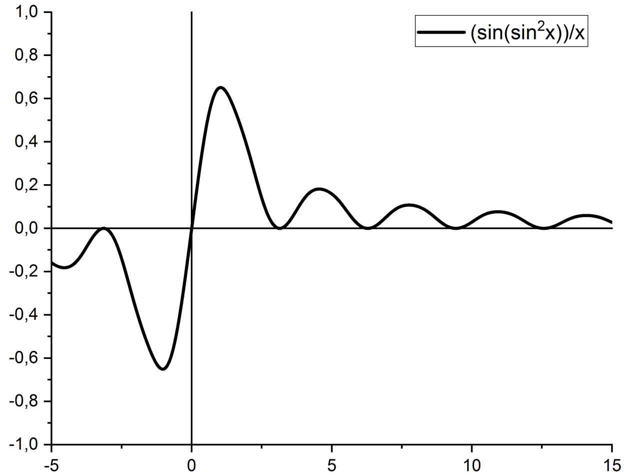
$$\forall x \in \mathbb{R} : \psi(-x) \ = \ \sin(\sin^2(-x)) \ = \ \sin(\sin^2 x) \ = \ \psi(x)$$

Jelikož funkce sinus je rostoucí na intervalu (0,1), platí odhad

$$\forall x \in (\,0,\pi\,) : \ 0 < \ \sin(\sin^2 x) \ < \ \sin 1,$$

tedy funkce $\psi(x)$ nabývá díky sudosti na $(\,-\pi,\pi\,) \setminus 0$ pouze kladných hodnot. Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin^2 x)\, dx \ > \ 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{\sin(\sin^2 x)}{x}\, dx \quad \textit{diverguje.}$$



Obrázek 1.12: Graf funkce $\frac{\sin(\sin^2 x)}{x}$

Vyšetřeme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(e^{\sin x}\right)}{x}\,dx$$

Označme $\psi(x) := \sin\left(e^{\sin x}\right)$ a podívejme se, zda tato funkce splňuje předpoklady věty:

- ψ je složením spojitých funkcí (sinu a exponenciály), tedy je to také spojitá funkce.
- ψ je 2π-periodická funkce, neboť:
  $\forall x \in (1,\infty) : \psi(x+2\pi) = \sin\left(e^{\sin(x+2\pi)}\right) = \sin\left(e^{\sin x\cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi}\right) = \sin\left(e^{\sin x}\right) = \psi(x)$.
- $\psi \in BV_{loc}(1,\infty)$, neboť $|\psi'(x)| = |e^{\sin x}\cos x\,\cos\left(e^{\sin x}\right)| \le e$, $x \in (1,\infty)$. Tedy ψ má omezenou derivaci na intervalu $(1,\infty)$ a tím pádem je lipschitzovsky spojitá. Proto musí mít i lokálně konečnou variaci.

Vidíme, že funkce ψ splňuje předpoklady Věty 6 a proto

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 0.$$

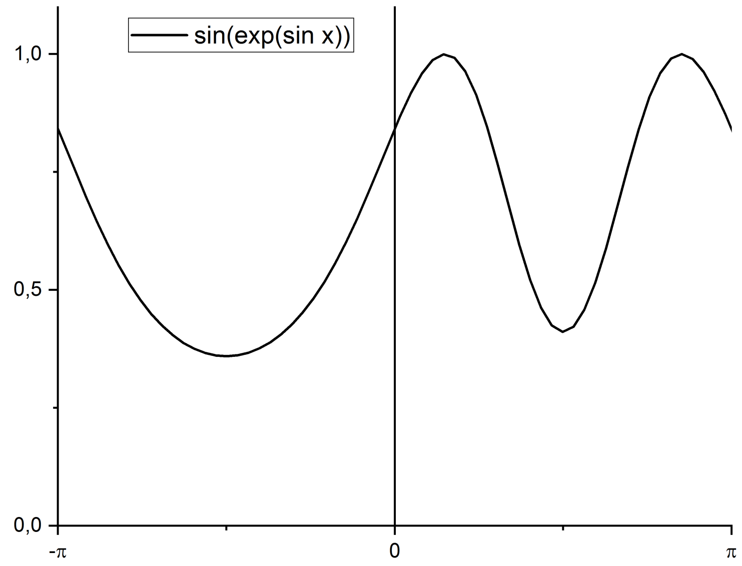
V tomto případě však funkce ψ není ani lichá ani sudá a primitivní funkci k ní nalézt neumíme. Lze však nahlédnout, že funkce $\sin\left(e^{\sin x}\right)$ nabývá pouze kladných hodnot, jelikož platí

$$0 < e^{\sin x} < \pi,\ x \in (-\pi,\pi).$$

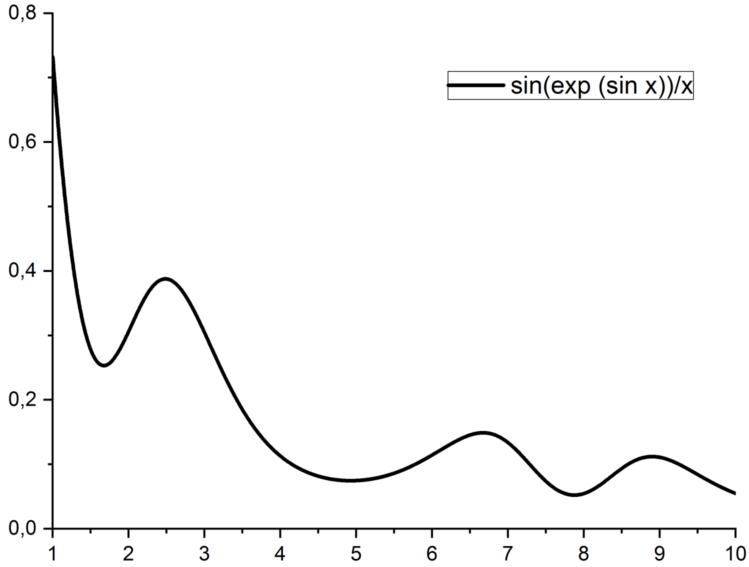
Exponenciála totiž vždy nabývá pouze kladných hodnot a druhá nerovnost plyne z toho, že $e^y < \pi$, kdykoliv $y \in [-1,1]$. Argument sinu tedy nabývá pouze hodnot z intervalu $(0,\pi)$ a proto

$$\forall x \in (-\pi,\pi) : \sin\left(e^{\sin x}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(e^{\sin x}\right) dx > 0.$$

Tedy $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx \neq 0$ a proto integrál $\int_1^\infty \frac{\sin\left(e^{\sin x}\right)}{x}\,dx$ diverguje.



Obrázek 1.13: Graf funkce $\sin\left(e^{\sin x}\right)$



Obrázek 1.14: Graf funkce $\frac{\sin\left(e^{\sin x}\right)}{x}$

Poznámka: Vidíme, že integrand nabývá pouze kladných hodnot a tedy vyšetřování neabsolutní konvergence je v tomto případě ekvivalentní s vyšetřováním absolutní konvergence. Nemělo by nás proto překvapit, že $\int_1^\infty \frac{\sin\left(e^{\sin x}\right)}{x}\,dx$ *diverguje - díky odhadu* $0 < \frac{1}{e} \leq e^{\sin x} \leq e < \pi$, $x \in [-\pi, \pi]$, *dovedeme jistě najít dostatečně malé* $\delta > 0$ *splňující, že* $\sin \delta = \sin(\pi - \delta)$ *a zároveň* $\sin \delta < \sin\left(e^{\sin x}\right)$, *kdykoliv* $x \in [-\pi, \pi]$ *a tedy platí odhad* $0 < \frac{\sin \delta}{x} \leq \frac{\sin\left(e^{\sin x}\right)}{x}$, $x \in (1,\infty)$ *a tím pádem funkce* $\frac{\sin \delta}{x}$ *je divergentní minorantou.*

1.6.2 Zobecnění věty o vztahu periodicity a konvergence Newtonova integrálu

Předpoklad konečné variace ve Větě 6 není nutný. Věta lze vyslovit v obecnější podobě a je tedy použitelná pro širší třídu funkcí.

Věta 7 (Vztah periodicity a konvergence Newtonova integrálu II). *Je-li funkce ψ <u>2p-periodická</u> <u>spojitá</u> funkce na $\mathbb{R}$, potom*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_{-p}^{p} \psi(x)\,dx = 0.$$

Připomeňme bez důkazu 2. větu o střední hodnotě integrálního počtu, kterou budeme potřebovat k důkazu Věty 7.

Věta 8 (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f \in L^1[a,b]$, g je <u>monotónní</u> na $[a,b]$, potom $\exists\, \xi \in [a,b]$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. [1, X, Věta 74, str. 199]

□

Přistupme nyní k důkazu věty 7.

Důkaz. "$\Leftarrow$" Předpokládáme, že ψ je spojitá $2p$-periodická funkce na celém $\mathbb{R}$ splňující, že $\int_{-p}^{p} \psi(x)\,dx = 0$ a chceme ukázat, že $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx$ konverguje. Připomeňme, že Newtonův integrál $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx$ je konvergentní právě tehdy, splňuje-li **Bolzano-Cauchyovu podmínku**:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, c \in (1,\infty)\, \forall a,\, b \in (c,\infty), a < b : \left| \int_a^b \frac{\psi(x)}{x}\,dx \right| < \varepsilon \tag{1.7}$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ tedy chceme najít takové číslo $c \in (1,\infty)$, aby platila tato podmínka. Protože funkce ψ je podle předpokladu spojitá a $2p$-periodická na $\mathbb{R}$, musí být nutně omezená nějakou kladnou konstantou, tj.

$$\exists K > 0\ \forall x \in (1,\infty) : |\psi(x)| < K$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ zvolme $c = \frac{4Kp}{\varepsilon}$ a ukažme splnění podmínky (1.7). Vezměme $a,b \in (c,\infty), a < b$. Jelikož

- $g(x) := \frac{1}{x}$ je **monotónní** funkce na $(1,\infty)$,
- $f(x) := \psi(x) \in L^1[a,b]$ (neboť spojitá funkce na kompaktním intervalu je vždy absolutně integrovatelná),

dostáváme z 2. věty o střední hodnotě (Věta 8), že nutně musí existovat takové číslo $\xi \in [a,b]$ tak, že :

$$\int_a^b \frac{\psi(x)}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \psi(x)\,dx + \frac{1}{b}\int_\xi^b \psi(x)\,dx. \tag{1.8}$$

Intervaly $[a,\xi]$, $[\xi,b]$ lze zapsat jako sjednocení intervalů délek $2p$, vyjma posledního intervalu, jehož délka bude menší nebo rovna než $2p$. Tedy

$$[a,\xi] = \bigcup_{i=0}^{k} [\xi_i, \xi_{i+1}], \text{ kde } \xi_0 = a,\ \xi_{k+1} = \xi,$$

$$\text{přičemž } |\xi_i - \xi_{i+1}| = 2p, \text{ kdykoliv } i = 1, ..., k-1 \text{ a } |\xi_k - \xi_{k+1}| \leq 2p.$$

$$[\xi,b] = \bigcup_{i=k+1}^{n-1} [\xi_i, \xi_{i+1}] \cup b, \text{ kde } \xi_{k+1} = \xi,\ \xi_n = b,$$

$$\text{přičemž } |\xi_i - \xi_{i+1}| = 2p, \text{ kdykoliv } i = k+1, ..., n-2 \text{ a } |\xi_{n-1} - \xi_n| \leq 2p.$$

Z aditivity integrálu potom dostáváme:

$$\int_a^{\xi} \psi(x)\,dx = \int_a^{\xi_1} \psi(x)\,dx + \cdots + \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \psi(x)\,dx + \int_{\xi_k}^{\xi} \psi(x)\,dx,$$

$$\int_{\xi}^{b} \psi(x)\,dx = \int_{\xi}^{\xi_{k+2}} \psi(x)\,dx + \cdots + \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} \psi(x)\,dx + \int_{\xi_{n-1}}^{b} \psi(x)\,dx.$$

Integrál z $2p$-periodické funkce přes jakýkoliv interval délky $2p$ bude mít vždy stejnou hodnotu. Proto

$$\int_{-p}^{p} \psi(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \psi(x)\,dx = 0 \text{ kdykoliv } |\xi_i - \xi_{i+1}| = 2p.$$

Tím pádem dostáváme, že všechny integrály přes interval délky $2p$ budou rovny nule a tedy:

$$\int_a^{\xi} \psi(x)\,dx = \int_{\xi_k}^{\xi} \psi(x)\,dx \quad a \quad \int_{\xi}^{b} \psi(x)\,dx = \int_{\xi_{n-1}}^{b} \psi(x)\,dx.$$

$$\left| \int_a^b \frac{\psi(x)}{x}\,dx \right| = \left| \frac{1}{a}\int_a^{\xi} \psi(x)\,dx + \frac{1}{b}\int_{\xi}^{b} \psi(x)\,dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{a}\left| \int_a^{\xi} \psi(x)\,dx \right| + \frac{1}{b}\left| \int_{\xi}^{b} \psi(x)\,dx \right| = \frac{1}{a}\left| \int_{\xi_k}^{\xi} \psi(x)\,dx \right| + \frac{1}{b}\left| \int_{\xi_{n-1}}^{b} \psi(x)\,dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{a}2pK + \frac{1}{b}2pK \leq \frac{1}{c}2pK + \frac{1}{c}2pK = \frac{4pK}{c}.$$

Ve druhé nerovnosti jsme využili toho, že funkce $\psi(x)$ je omezená konstantou K a interval, přes který integrujeme má délku nanejvýš $2p$. Dostáváme tedy, že

$$\left| \int_a^b \frac{\psi(x)}{x}\,dx \right| = \frac{4pK}{c} \leq \varepsilon \Leftrightarrow c \geq \frac{4Kp}{\varepsilon}.$$

K zadanému ε jsme tedy nalezli takové c, že platí podmínka (1.7), tedy integrál konverguje.

"⇒" Chceme ukázat, že

$$\int_{-p}^{p} \psi(x)\, dx \neq 0 \Rightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x}\, dx \text{ diverguje.}$$

Budeme tedy dokazovat, že $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\, dx$ nesplňuje **Bolzano-Cauchyovu podmínku,** tedy

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall c \in (1,\infty)\, \exists a,\, b \in (c,\infty), a < b : \left| \int_a^b \frac{\psi(x)}{x}\, dx \right| \geq \varepsilon \tag{1.9}$$

Označme $I := \int_{-p}^{p} \psi(x)\, dx \neq 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $I > 0$ (kdyby totiž $\int_{-p}^{p} \psi(x)\, dx < 0$, přešli bychom k funkci $-\psi(x)$ a vyšetřování konvergence integrálu $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\, dx$ by bylo ekvivalentní s vyšetřováním konvergence $\int_1^\infty (-\frac{\psi(x)}{x})\, dx.$). Vezměme ε splňující $0 < \varepsilon < \frac{I}{2p}$. K němu zvolíme $\eta > 0$ dostatečně malé splňující vztah

$$\varepsilon + \eta < \frac{I}{2p} - \eta. \tag{1.10}$$

K zadanému $c \in (1,\infty)$ pak zvolíme pevně $a \in (c,\infty)$ tak, aby

$$a > \frac{4Kp}{\eta}$$

K tomuto číslu a pak zvolíme číslo $b \in (c,\infty)$ ve tvaru

$$b_n = a + 2pn,\ n \in \mathbb{N}.$$

Z 2. věty o střední hodnotě existuje takové číslo $\xi_n \in (a,b_n)$, že platí rovnost (1.8). Označme $k_n \in \mathbb{N}$ jako maximální počet intervalů s disjunktními vnitřky délky $2p$, které jsou obsaženy v intervalu (a,ξ_n), tj. $k_n := |\xi_n - a|$ div $2p$ a $l_n \in \mathbb{N}$ jako maximální počet disjunktních intervalů délky $2p$, které jsou obsaženy v intervalu (ξ_n,b), tj. $l_n := |\xi_n - b_n|$ div $2p$. Větu o střední hodnotě tedy aplikujeme na posloupnost intervalů (a,b_n), přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme jiné číslo $\xi_n \in (a,b_n)$ a tím pádem i jiná k_n, l_n. Dostáváme:

$$\left| \int_a^{b_n} \frac{\psi(x)}{x}\, dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_a^{\xi} \psi(x)\, dx + \frac{1}{b_n} \int_{\xi}^{b_n} \psi(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a} \int_a^{a+k_n 2p} \psi(x)\, dx + \frac{1}{a} \int_{a+k_n 2p}^{\xi_n} \psi(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_n} \int_{\xi_n}^{b_n - l_n 2p} \psi(x)\, dx + \frac{1}{b_n} \int_{b_n - l_n 2p}^{b_n} \psi(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{a} k_n I + \frac{1}{a} \int_{a+k_n 2p}^{\xi} \psi(x)\, dx + \frac{1}{b_n} \int_{\xi}^{b_n - l_n 2p} \psi(x)\, dx + \frac{1}{b_n} l_n I \right|$$

$$\geq \left| \frac{1}{a} k_n I + \frac{1}{b_n} l_n I \right| - \left| \frac{1}{a} K 2p + \frac{1}{b_n} K 2p \right| \geq \frac{k_n I}{a} + \frac{l_n I}{b_n} - \frac{4Kp}{a} \geq \frac{k_n I}{a} + \frac{l_n I}{b_n} - \eta.$$

První nerovnost platí z toho důvodu, že funkce ψ je omezená konstantou K a intervaly $(a+k2p,\xi)$, $(\xi,b-l2p)$ mají délku nanejvýš $2p$. Oba dva integrály tedy nabudou nanejvýš hodnoty $K2p$, proto odečteme-li maximální hodnotu, celý výraz tím zmenšíme. Čísla a, b_n, k_n, l_n, I jsou kladná, proto můžeme vynechat absolutní hodnotu. Poslední nerovnost pak platí proto, že a jsme volili tak, aby $a > \frac{4Kp}{\eta}$ a tím pádem $\eta > \frac{4Kp}{a}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy máme odhad

$$\left| \int_a^{b_n} \frac{\psi(x)}{x}\, dx \right| \geq \frac{k_n I}{a} + \frac{l_n I}{b_n} - \eta, n \in \mathbb{N}.$$

S rostoucím n se intervaly (a, b_n) zvětšují a tedy mohou nastat dvě možnosti: Buďto $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} k_n = \infty$ - v takovém případě dovedeme udělat výraz $|\frac{1}{a}k_n I + \frac{1}{b_n} l_n I|$ libovolně velký pro vhodné n, jelikož a nezávisí na n. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{a} k_n I + \frac{1}{b_n} l_n I \right| \geq \frac{1}{a} k_n I.$$

Posloupnost k_n sice nemusí mít limitu, ale protože $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} k_n = \infty$, musí být nutně $\limsup k_n = \infty$ a tedy musí existovat vybraná podposloupnost, jejíž limita je rovna $+\infty$. Vhodnou volnou $n \in \mathbb{N}$ tedy umíme udělat výraz $\frac{1}{a} k_n I$ dostatečně velký.

Druhá možnost je, že $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} k_n < \infty$. V takovém případě je $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$. Mezi čísly n, k_n, l_n platí vztah:

$$n \leq k_n + l_n + 2,$$

z čehož dostáváme

$$\frac{l_n I}{b_n} = \frac{l_n I}{a + 2pn} \geq \frac{l_n I}{a + 2p(k_n + l_n + 2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n I}{a + 2p(k_n + l_n + 2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{I}{\frac{a}{l_n} + 2p(\frac{k_n}{l_n} + 1 + \frac{2}{l_n})} = \frac{I}{2p}.$$

Dostáváme, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : \frac{l_n I}{b_n} \geq \frac{I}{2p} - \eta.$$

Tím pádem dostáváme, že pro všechna $n > n_0$ platí:

$$\left| \int_a^{b_n} \frac{\psi(x)}{x}\, dx \right| \geq \frac{k_n I}{a} + \frac{l_n I}{b_n} - \eta \geq \frac{k_n I}{a} + \frac{I}{2p} - 2\eta \geq \frac{k_n I}{a} + \varepsilon > \varepsilon,$$

jelikož η bylo voleno tak, že platí vztah (1.10), neboli $\varepsilon < \frac{I}{2p} - 2\eta$.

$\square$

2. Závěrečná poznámka

V průběhu psaní práce jsem pochopil, že se nelze spoléhat na matematický software Wolfram Alpha, pokud jde konvergenci integrálů.

Jak jsem zjistil, wolfram často o divergentních integrálech tvrdí, že jsou konvergentní a naopak; a dokonce dává různé výsledky pro hodnotu jednoho a téhož divergentního integrálu při opakovaném zadávání. Uvedu zde na závěr jeden konkrétní příklad.

Zkoumejme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\, dx.$$

Zavedením substituce $\log x = t$ dostáváme:

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\, dx = \left| \begin{matrix} \log x = t \\ \frac{1}{x}\, dx = dt \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right).\, dt$$

Má-li pravá strana rovnosti smysl, lze psát

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt + \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Pravá strana určitě smysl má, protože $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ je konvergentní integrál. Přestože integrand má singularitu v 0 a není tam spojitě dodefinovatelný, neboť $\lim_{x\to 0_+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje; stačí si uvědomit, že integrand je omezená funkce na intervalu $(0, 1)$, tj.

$$\forall\, t \in (0,1): \quad |\sin\left(\frac{1}{t}\right)| \leq 1.$$

a že integrál z omezené funkce na omezeném intervalu je konvergentní.

Funkce sinus nabývá na pravém prstencovém okolí nuly pouze kladných hodnot, proto

$$\exists\, t_0 \in (0,\infty) \quad \forall\, t > t_0: \quad \sin\left(\frac{1}{t}\right) > 0.$$

Toto t_0 lze volit například $t_0 = 1$. Integrand tedy nabývá od určitého bodu nezáporných hodnot, proto lze použít limitní srovnávací kritérium. Srovnáme-li tento integrál s divergentním integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$, dostáváme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

(ve druhé rovnosti jsme zde použili Větu o limitě složené funkce)

Tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \in (0, \infty)$ a proto podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že oba integrály $\int_1^\infty f(x)$, $\int_1^\infty g(x)$ současně konvergují nebo současně divergují. Protože je ale $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ divergentní, musí být i $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ divergentní.

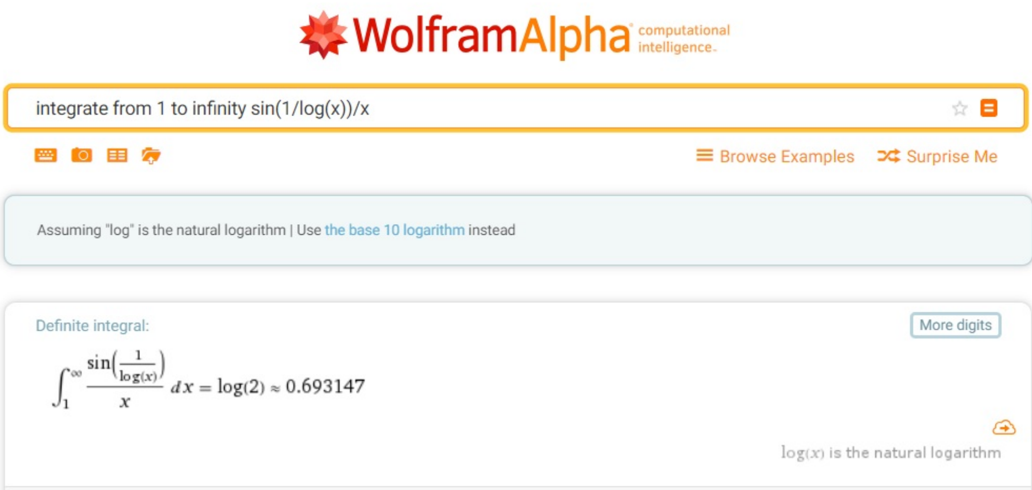
Podivuhodné je, že když zadáme Wolframu spočítat integrál $\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, Wolfram správně odpoví, že integrál diverguje. Když mu ale zadáme spočítat integrál $\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\, dx$, Wolfram integrál vyhodnotí jako konvergentní a navíc jednou řekne, že jeho hodnota je přirozený logaritmus 2 (tj. $\log 2 \approx 0{,}693$)

a podruhé zase řekne, že jeho hodnota je 1-γ, kde γ je tzv. Eulerova–Mascheroniho konstanta (tj. 1-$\gamma = 0{,}422$). To jsou dvě zcela odlišné hodnoty, které spolu ani na první pohled nijak nesouvisí.
Přitom se ale jedná o jeden a tentýž integrál, jak jsme viděli - jeden z druhého dostaneme substitucí, tj.

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Tedy integrál vpravo je podle Wolframu divergentní, kdežto integrál vlevo je podle něj konvergentní a jeho hodnotu spočítá pokaždé jinak.

Obrázek 2.1: Hodnota integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\,dx$ podle Wolframu, I



Obrázek 2.2: Hodnota integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}\,dx$ podle Wolframu, II

Wolfram Alpfa je užitečný nástroj pro výpočet konvergentních integrálů na omezených intervalech, pro hledání primitivních funkcí, apod.; ale nelze použít pro rozhodování o konvergenci integrálu - v tom se mu prostě nedá věřit.

Závěr

Abel-Dirichletovo kritérium hovoří pouze o neabsolutní konvergenci. O divergenci nic neříká. Dává nám jen jednostrannou implikaci - tj. jsou-li splněny určité předpoklady, pak daný integrál konverguje neabsolutně. Někdy použít lze, někdy ne.

V obecném případě, kdy máme rozhodnout o konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin \varphi(x)}{x}\, dx$$

pro nějakou **spojitou neklesající** funkci φ takovou, že $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ zatím ještě stále nedokážeme vyslovit žádné obecné kritérium, které by bylo univerzální a pomocí něhož bychom vždy dokázali rozhodnout, zda daný integrál konverguje či diverguje. Konstrukcí protipříkadu jsme však dokázali, že bilipschitzovskost není postačující podmínkou pro konvergenci daného integrálu.
Dovedeme alespoň za dodatečných předpokladů vyslovit určitá kritéria, např. jak rozhodnout o konvergenci integrálů tvaru $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}\, dx$ pro funkce ψ, které jsou 2π-periodické funkce a mají lokálně konečnou variaci, jak říkala Věta 6, resp. pro spojité 2π-periodické spojité funkce, jak říkala Věta 7.

Seznam použité literatury

[1] Jarník, Integrální počet I, Praha Academia 1984
[2] Rudin, Analýza v reálném a komplexním oboru, ACADEMIA, 2003
[3] Ilja Černý, Úvod do inteligentního kalkulu, ACADEMIA, 2002
[4] Martin Fiala, Vlastnosti Cantorovy funkce, bakalářská práce, vedoucí práce doc. Hencl, MFF UK, 2011
[5] Holický, Kalenda, Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. až 4. semestr, Matfyzpess 2002