Posudek školitele

na dizertační práci

Metric and analytic methods

od

Mgr. Vojtěcha Kaluži

Předložená dizertační práce je rozdělena do dvou hlavních témat. V první části práce se autor zabývá řešením tzv. Feigeho otázky z oblasti metrické geometrie. Tato část vychází z jeho společného článku s Michaelem Dymondem a Evou Kopeckou. Druhá část práce se týká vlastností grafů na plochách, konkrétně je věnována důkazu silné Hanani-Tutteovy věty na projektivní rovině bez využití charakterizace přes zakázané minory. Tato část vychází z jeho společného článku s É. Colinem de Verdière, P. Patákem, Z. Patákovou a se mnou. Z pohledu školitele mohu potvrdit, že ačkoliv se jedná o články se spoluautory, tak v obou případech na těchto článcích V. Kaluža udělal výrazný díl práce a jejich použití v dizertační práci je zcela adekvátní.

Co se první části práce týče. Uriel Feige v roce 2002 položil otázku, zda existuje konstanta $L > 1$ taková, že pro každé n přirozené a pro každou množinu S čítající n^2 bodů s celočíselnými souřadnicemi v rovině lze najít L-lipschitzovskou bijekci, která množinu S zobrazí na standardní mřížku $\{1, 2, ..., n\}^2$. Tato otázka je motivována problémem tzv. "graph bandwidth problem" a pozitivní odpověď na tuto otázku by poskytovala randomizovaný aproximační algoritmus pro analogii tohoto problému na mřížce.

V. Kaluža, společně se svými spoluautory ukazují, že odpověď na Feigeho otázku je negativní, žádná taková konstanta L neexistuje. Důkaz částečně staví na myšlenkách Buraga a Kleinera a nezávisle McMullena ohledně neexistence bilipschitzovských bijekcí mezi separovanými sítěmi. Ti převádějí diskrétní problém výše na spojitý problém, jestli každá omezená, od nuly odražená, měřitelná funkce z $[0, 1]^2$ do kladných reálných čísel je realizovatelná jako Jakobián bilipschitzovského zobrazení. Následně ukazují existenci funkce, která je protipříkladem.

Podobně M. Dymond, V. Kaluža a E. Kopecká převádějí Feigeho otázku na spojitý problém, nicméně tento převod vyžaduje výrazné rozšíření myšlenek Buraga, Kleinera a McMullena. Skutečnost, že ve Feigeho problému je slabší podmínka na zvažovanou bijekci (L-lipschitzovskost namísto bilipschitzovskosti) vede k podstatným rozdílům při převodu na spojitý problém, například už jen kvůli tomu, že není a priori jasné, jak by měl spojitý problém znít. Tento zádrhel autoři elegantně rozřeší využitím relativně málo známých lipschitzovsky regulárních zobrazení, která jsou někde mezi lipschitzovskými a bilipschitzovskými zobrazeními.

Jako druhý krok je potřeba ukázat, že odpověď na spojitý problém je negativní, což vede k negativnímu vyřešení Feigeho otázky. K tomu je potřeba sestrojit omezenou, od nuly odraženou měřitelnou funkci z $[0, 1]^2$ do kladných reálných čísel, kterou nelze v jistém smyslu realizovat pomocí lipschitzovsky regulárního zobrazení. Autoři ve skutečnosti ukazují mnohem silnější výsledek: množina funkcí, které realizovat lze je σ-porózní, tedy v jistém smyslu velmi malá.

Dle mého názoru se celkově jedná o výjimečný výsledek, který kombinuje postupy z několika oblastí matematiky. Unikátnost tohoto výsledku potvrzuje i fakt, že byl přijat do jednoho z nejprestižnějších matematických časopisů Geometric and Functional Analysis.

Nyní se zaměřme na druhou část práce. Silná Hanani-Tutteova věta v rovině říka, že kdykoliv lze graf v rovině nakreslit tak, že libovolná dvojice nesousedních hran má sudý počet průsečíků, potom je graf rovinný. Přirozenou otázkou je, zda lze toto tvrzení zobecnit na jiné plochy. Pelsmajer, Schaefer a Stasi dokázali, pomocí charakterizace přes zakázané minory, že toto zobecnění je možné na projektivní rovině.

Smyslem druhé části práce je dokázat toto tvrzení bez využití charakterizace přes zakázané minory. Motivací je, že pro plochy vyššího řádů není znám seznam zakázaných minorů, a tudíž jiný důkaz může poskytnout obecnější vhled vedoucí k porozumění otázce pro další plochy. (Pro úplnost, v momentě dokončení tohoto článku byla silná Hanani-Tutteova věta otevřená pro jakoukoliv jinou plochu; nicméně o něco později Fulek a Kynčl našli protipříklady pro orientovatelné plochy řádu alespoň 4.)

Samotný důkaz využívá analýzu mostů v grafu vzhledem k nějakému vhodnému cyklu a na základě této analýzy zjednoduší nakreslení, což umožňuje následně dokázat větu pomocí indukce. Technická část důkazu je netriviální. Článek (rozšířený abstrakt) byl přijat na konferenci Graph Drawing v roce 2016 a následně se objevil v časopise Journal of Graph Algorithms and Applications.

Krom práce na tématech uvedených v dizertační práci se V. Kaluža podílel na několika dalších projektech. Při takové práci byl vždy ochotný výrazně prohlubovat své matematické znalosti a také prokazoval tvůrčí přístup. Myšlenky z riemannovské geometrie si osvojil při práci na článku o kreslení grafů na plochy pomocí nejkratších cest (společně s A. Hubardem, A. de Mesmayem a mnou). Jedním z dalších projektů (jehož konečný výsledek je zatím neznámý) byla práce na vlastnostech Colin de Verdièrova grafového parametru, při níž se mj. V. Kaluža nadšeně naučil základy teorie obstrukce (algebraická topologie), pokročilé vlastnosti vlastních čísel, souvislost parametru se semidefinitním programováním i s diferenciální geometrií.

Také je potřeba říci, že V. Kaluža přistupuje velmi aktivně k navazování mezinárodních vědeckých kontaktů velmi důležitých pro jeho další vědeckou práci. Tyto kontakty získával například při návštěvách Univerzity v Innsbrucku, IST Austria, UPEM a École Normale Supérieure v Paříži nebo na workshopech v Berkeley.

Celkově mohu zhodnotit, že V. Kaluža prokázal schopnost samostatně vědecky uvažovat. Splnil všechna kritéria kladená na dizertační práci a vzhledem k významu výsledku v první části bych tuto práci hodnotil jako opravdu vynikající. **Zcela jistě si zaslouží udělení vědeckého titulu „doktor“**.

V Praze dne 23. 8. 2018

doc. RNDr. Martin Tancer Ph.D.