Posudek na dizertační práci mgr. Martina Franců

Dizertační práce mgr. Martina Franců obsahuje čtyři kapitoly. První z nich je úvodní a obsahuje základní definice, vlastnosti a tvrzení potřebná k pochopení dalších kapitol. Jedná se o nerostoucí přerovnání, Banachovy prostory funkcí invariantní vůči nerostoucímu přerovnání, Sobolevovy věty o vnoření a jejich souvislost s izoperimetrickou nerovností. Dále je zde podána definice Carnot-Carathéodoryho prostorů. Jako poslední část úvodu je zmíněna nejmenší konkávní majoranta. Další tři kapitoly jsou tvořeny samostatnými články, z nichž dva již vyšly v odborných časopisech.

Druhá část je samostatný článek (viz [1]) již publikovaný v odborném časopisu a má název "Higher-order Sobolev-type embeddings on Carnot-Carathéodory spaces". Nechť jsou dány Banachovy prostory funkcí $\mathbf{X}(\Omega)$, $\mathbf{Y}(\Omega)$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega| = 1$. Buď ještě dáno pole diferenciálních operátorů $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$,

$$X_k(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(x)\partial_{x_j}.$$

Nechť dále Ω splňuje podmínku $I_{\Omega,X}(s) \geq cs$, kde $I_{\Omega,X}$ je izoperimetrická funkce oblasti Ω vzhledem k X. Ještě je pomocí horizontálních křivek definována metrika $d_X(x,y)$ na $\mathbb{R}^n$. Hlavním výsledkem této kapitoly je redukční věta, která převádí Sobolevovo vnoření $V_X^m(\mathbf{X}(\Omega)) \hookrightarrow \mathbf{Y}(\Omega)$ na omezenost jistého Hardyho operátoru na reprezentačních prostorech $\mathbf{X}(0,1)$, $\mathbf{Y}(0,1)$ pro Carnot-Carathéodoryho prostory. Jako aplikaci autor uvádí obecné v vety o vnoření pro Lebesgueovy, Lorentzovy a Orliczovy prostory na Heisenbergových grupách.

Třetí kapitola se jmenuje "Compact embeddings on Carnot-Carathéodory spaces". Zabývá se dalšími problémy vnoření uváděnými ve druhé části. Jen namísto spojitých vnoření jsou uvažována kompaktní vnoření. Opět je zde dokázána redukční věta pro kompaktnost vnoření na Hardyho operátor na reprezentačních prostorech za stejné podmínky na oblast Ω. Je uvedena aplikace na Lorentzovy prostory.

Čtvrtá část je opět již vyšlý článek (viz [2]) tří autorů, z nichž mgr. Martin Franců je jedním z nich. Má název "A new algorithm for approximating the last concave majorant". Je-li dána spojitá funkce F na intervalu $I = [a,b]$, označme $\widehat{F}$ nejmenší konkávní funkci s vlastností $F(x) \leq \widehat{F}(x)$, tj.

$$\widehat{F}(x) = \inf\{G(x); G \geq F, G \text{ konkávní}\}.$$

Je zde nalezena aproximace $\widehat{F}$ pomocí kubických splinů, které vylepšují známou metodu založenou na nalezení konvexního obalu konečně mnoha bodů v rovině. Je dokázán kvantitavní odhad následujícího typu: Buď dána $F \in \mathcal{C}^4(I)$ a buď G kubický spline příslušný k dělení ϱ intervalu I. Pak pro každé $x \in I$ platí

$$\left|\widehat{F}(x) - \widehat{G}(x)\right| \leq \frac{1}{24}\min\{x-a, b-x\}\|F^{(4)}\|_{L^\infty(I)}\|\varrho\|^3$$

V práci samotné jsem našel řadu překlepů, některé v dalším uvádím.

(1) str 4. Ve formuli pro $u_{k,f}$ chybí 1 v horní mezi třetího integrálu
(2) str 18. Má být $a(x,y,r,s)$ místo $a(x,t,r,s)$ a navíc má být $(x,y,r,s) \in \mathbb{R}^4)$ místo $(x,y,r,s) \in \mathbb{R}^n)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ místo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(3) str 2 dole (po straně 59) Má být $b_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ místo $b_ij \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
(4) str 19, definice 24. Nemělo by být $m \leq n$ v definici 24? Navíc ve formuli pro definici horizontální křivky je na levé straně vektor a na pravé straně je diferenciální operátor prvního řádu. Jak se to tedy myslí?
(5) str. 30. Funkce $f^o(x)$ je definována nějak divně. Jsou tam nějak popletena písmenka.

(6) str. 30. Opravdu je správně $F(x) = \int_0^x f(x)$? Jednak by se integrační proměnná měla značit jinak než horní mez a pak, nemá být náhodou $\widehat{F}(x) \int_0^x f^o(t)dt$?
(7) str. 30. Poslední řádek: místo $...(x)dx$ by mělo být $...(t)dt$
(8) str 2 (po straně 84). Dole jsou uvedeny symboly D, M, C. Ale co je M? To jsem nenašel.
(9) str 19. Je někdy $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ nenulový operátor? V běžných případech mi vždy vychází nula.

Úhrnem lze říci, že dizertační práce mgr. Martina Franců přináší řadu nových poznatků významných z hlediska jak teoretické matematiky tak i jejich aplikací v jiných matematických disciplínách. Metody důkazů otevírají nové přístupy, ze kterých mohou čerpat další matematici. Výsledky otevírají nové, slibné směry výzkumu.

Práce je sepsána srozumitelně a je přínosem pro jakýkoliv okruh čtenářů, neboť obsahuje na jedné straně přehledný úvod přístupný laikům a na straně druhé podrobné důkazy, které potěší odborníky v teorii prostorů funkcí.

Jsem přesvědčen, že práce splňuje požadavky kladené na dizertační práci a navrhuji tedy, aby byl mgr. Martinovi Franců udělen titul Ph.D.

31. 8.2018
Aleš Nekvinda

References

[1] M. Franců, Higher-order Sobolev-type embeddings on Carnot-Carathéodory spaces. *Math. Nachr.* **290** (2017), no. 7, 1033–1052.

[2] M. Franců,R. Kerman and G. Sinnamon, A new algorithm for approximating the last concave majorant. *Czechoslovak Math. J.* **67 (142)** (2007), no. 4, 1071–1093.