Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivana Šebestová

Klasifikace vektorových polí v rovině

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu své bakalářské práce Doc. RNDr. Vladimíru Janovskému, DrSc. za věnovaný čas a vstřícný přístup, dále pak také mým rodičům za všestrannou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10. května 2007 Ivana Šebestová

....

Obsah

Název práce: Klasifikace vektorových polí v rovině
Autor: Ivana Šebestová
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.
e-mail vedoucího: janovsky@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme autonomními lineárními systémy v rovině. Hlavním tématem je zkoumání jejich kvalitativních vlastností. Nejprve vyšetřujeme chování zjednodušených lineárních systémů, tzv. kanonických. Znalosti jejich řešení pak využíváme při studování obecnějších případů. V další části systémy klasifikujeme na základě jejich charakteristických vlastností. Hyperbolické a nehyperbolické systémy tvoří dvě hlavní třídy. Zaměřujeme se na strukturu fázových křivek, stacionární body a směr pohybu řešení. Teoretické výsledky jsou ilustrovány na řadě příkladů.

Klíčová slova: lineární systém, kanonický systém, topologická ekvivalence

Title: Classification of planar vector fields
Author: Ivana Šebestová
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.
Supervisor's e-mail address: janovsky@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with planar autonomous linear systems. The main aim is the analysis of qualitative properties of these systems. First, we are interested in behaviour of simplified linear systems called canonical systems. Next, we use our knowledge to study more general ones. Finally, the systems are classified introducing the notion of topological equivalence. Two main classes are the hyperbolic and the nonhyperbolic systems. We focus our attention on the structure of phase curves, equilibrium points and the direction of the evolution. Theoretical results are illustrated by many examples.

Keywords: linear system, canonical system, topological equivalence

Úvod

Tato práce je věnovaná studiu autonomních lineárních systémů v rovině. Seznámení se s lineárními soustavami je základním předpokladem pro studium nelineárních případů, protože v celé řadě situací lze k vyšetřování nelineárních systémů využít znalostí lineárních soustav.

V této práci studujeme lineární systémy z hlediska jejich kvalitativních vlastností. Zásadní vliv na jejich chování přitom mají vlastní čísla matice soustavy. Nejprve se zabýváme zjednodušenými lineárními modely v tzv. kanonickém tvaru, pro které snadno nalézáme fundamentální matici řešení. Chování obecnějších systémů pak odvozujeme od těch kanonických.

Hlavní část práce je věnovaná klasifikaci lineárních systémů. Zabýváme se otázkou jaké podmínky klást na ekvivalenci dvou systémů. Přirozené požadavky nás pak vedou k definování pojmu topologické ekvivalence a rozdělení systémů do několika tříd. U hyperbolických a nehyperbolických soustav, tvořících dvě hlavní třídy, je diskutována otázka jejich citlivosti vůči malému porušení.

Teoretické výsledky jsou v závěru práce ilustrovány na příkladech. Pro názornost jsem pak text doplnila řadou obrázků fázových portrétů.

Kapitola 1

Lineární systémy v rovině

1.1 Základní pojmy

Uvažujme soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{array} \tag{1.1}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$.

Pro zjednodušení budeme tento systém psát v maticovém tvaru

$$x' = Ax, \tag{1.2}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nechť $x(t)$ je řešení soustavy (1.2) splňující počáteční podmínku $x(0) = x^0$. Definujme $x(t) = \varphi(t, x^0)$, $t \in \mathbb{R}$. Operátor $t \in \mathbb{R},\ x^0 \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(t, x^0)$ se nazývá tok vektorového pole.

Vyslovme nejprve několik základních definic.

Definice 1.1 *Bod $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme stacionárním bodem systému $x' = Ax$, jestliže $A\tilde{x} = 0$.*

Definice 1.2 *Řekneme, že řešení* $x^1(t)$ *a* $x^2(t)$ *rovnice* (1.2) *jsou lineárně nezávislá, jestliže pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *platí implikace:*

$$c^1x^1(t) + c^2x^2(t) = 0 \Rightarrow c^1 = 0,\ c^2 = 0.$$

Definice 1.3 *Matici* $X(t) \equiv (x^1(t)|x^2(t))$ *typu* 2×2*, jejíž sloupce* $x^1(t)$ *a* $x^2(t)$ *tvoří řešení rovnice* (1.2) *nazýváme maticí řešení. Pokud navíc pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *platí* $detX(t) \neq 0$*, nazýváme matici* $X(t)$ *fundamentální maticí řešení rovnice* (1.2)*.*

Poznámka 1.4 *Tedy* $X(t) \equiv (x^1(t)|x^2(t))$ *je fundamentální maticí právě tehdy, když* $x^1(t)$ *a* $x^2(t)$ *jsou lineárně nezávislá řešení rovnice* (1.2)*.*

Ve skutečnosti nám stačí ověřit nenulovost determinantu jen v jednom bodě, o čemž hovoří následující lemma.

Lemma 1.5 *Jestliže matice řešení* $X(t) \equiv (x^1(t)|x^2(t))$ *rovnice* (1.2) *splňuje* $detX(0) \neq 0$*, pak je* $detX(t) \neq 0$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$*.*

Důkaz: Počáteční podmínka $x(0) = 0$ odpovídá triviálnímu řešení soustavy (1.2): $\varphi(t, 0) := 0$. Nechť existují $c_1, c_2, s \in \mathbb{R}$ tak, že $c_1x^1(s) + c_2x^2(s) = 0$. Protože $c_1x^1(t + s) + c_2x^2(t + s)$ je také řešením systému (1.2) a v bodě $t = 0$ je rovno 0, platí: $\varphi(t, 0) = c_1x^1(t + s) + c_2x^2(t + s)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Pro $t = -s$ je $c_1x^1(0) + c_2x^2(0) = 0$, a tedy z lineární nezávislosti $x^1(0)$ a $x^2(0)$ dostáváme $c_1 = c_2 = 0$. □

1.2 Maticová fce e^{tA}

Při studiu chování řešení lineárních autonomních systémů se využívá exponenciální maticové funkce definované takto:

Definice 1.6 *Maticovou funkci* e^{tA} *definujeme předpisem*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n, \tag{1.3}$$

kde A *je konstantní matice typu* 2×2 *a* $t \in \mathbb{R}$*.*

Z odhadu

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n |t|^n = e^{|t|\|A\|}$$

dostáváme absolutní konvergenci řady (1.3) na $\mathbb{R}$. Navíc řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}(\frac{1}{n!}A^n t^n)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$, a tedy z věty o derivaci řady plyne, že řadu (1.3) můžeme na $\mathbb{R}$ derivovat člen po členu, tj.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

Protože zřejmě $e^{0A} = I$, z uvedených faktů a lemmatu 1.5 dostáváme, že e^{tA} je fundamentální matice soustavy (1.2).

Zformulujme další užitečné vlastnosti e^{tA}.

Lemma 1.7 *Buď $t, s \in \mathbb{R}$ a e^{tA} z definice 1.6. Pak platí:*

(i) $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$,

(ii) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$,

(iii) Je-li $AB = BA$, pak $Be^{tA} = e^{tA}B$,

(iv) Je-li $AB = BA$, pak $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

Důkaz: (i) Zřejmě pro každé pevné $s \in \mathbb{R}$ je $g(t) := e^{tA}e^{sA}$ také fundamentální matice soustavy (1.1). Ukažme, že to samé platí i pro $e^{(t+s)A}$. Označme $u(t) := e^{tA}$ a $v(t) := u(t+s)$. Potom

$$v'(t) = u'(t+s) = Au(t+s) = Av(t).$$

Protože platí $g(0) = v(0)$, z věty o jednoznačnosti řešení lineárních soustav dostáváme tvrzení.
(ii) Plyne z (i) dosazením $s := -t$.
(iii) Označme $\Phi(t) = Be^{tA}$ a $\Psi(t) = e^{tA}B$. Pak

$$\Phi'(t) = BAe^{tA} = ABe^{tA} = A\Phi(t),$$
$$\Psi'(t) = Ae^{tA}B = A\Psi(t),$$

tedy $\Phi(t)$ i $\Psi(t)$ řeší soustavu $x' = Ax$. Dále $\Phi(0) = \Psi(0)$. Z věty o jednoznačnosti řešení lineárních systémů pak dostáváme tvrzení.
(iv) Označme $\Phi(t) = e^{t(A+B)}$ a $\Psi(t) = e^{tA}e^{tB}$. Podobně jako v (iii) je

$$\Phi'(t) = (A+B)e^{t(A+B)} = (A+B)\Phi(t),$$
$$\Psi'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}Be^{tB} = (A+B)\Psi(t).$$

Opět $\Phi(0) = \Psi(0)$, a tedy stejně jako ve (iii) dostáváme tvrzení. □

Kapitola 2

Klasifikace lineárních systémů v rovině

V této kapitole bude naším cílem charakterizovat různá chování našeho dvourozměrného lineárního systému. Ukážeme jak pro libovolnou konstantní matici A najít fundamentální matici řešení (1.1). Uvidíme, že řešení je určeno pouze vlastními čísly matice A a že pro nás bude výhodné místo obecné matice A uvažovat matici v Jordanově kanonickém tvaru. Charakter řešení totiž v tomto případě bude průhlednější. Konečně zavedeme pojem kvalitativní ekvivalence lineárních systémů, který nám rozdělí lineární systémy do několika tříd, z nichž každá bude mít nějaký svůj specifický rys.

2.1 Kanonické lineární systémy

Podívejme se nyní na chování lineárních systémů s maticemi speciálního tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

kde λ_1, λ_2, λ, α, $\beta \neq 0$ jsou reálná čísla.

Definice 2.1 *Lineární systém $x' = Ax$ s maticí tvaru (2.1), (2.2) nebo (2.3) nazýváme kanonickým lineárním systémem nebo také systémem v Jordanově normálním tvaru.*

Tyto systémy hrají v teorii lineárních autonomních systémů stěžejní roli, neboť, jak později uvidíme, každý lineární systém $x' = Ax$ lze jednoduchou lineární transformací převést na systém kanonický.

Snadno spočteme fundamentální matici e^{tA} všech tří kanonických systémů. V prvním případě dostaneme

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

ve druhém případě

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

konečně ve třetím případě máme

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Předtím než se podíváme podrobněji na chování řešení jednotlivých kanonických systémů, připomeňme některé pojmy, které budeme v souvislosti s grafickým znázorněním řešení používat.

Množina $\{(t, x_1(t), x_2(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ je grafem řešení soustavy (1.1). Křivka $(t, x_1(t), x_2(t)), t \in \mathbb{R}$, nazývaná trajektorie, má zřejmě v každém bodě $(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0)), t_0 \in \mathbb{R}$ tečný vektor $(1, Ax(t_0))$. Množinu všech takovýchto vektorů nazýváme směrovým polem. Pro vizualizaci řešení budeme uvažovat projekci grafu řešení do (x_1, x_2) roviny nazývané fázový prostor. Jinak řečeno řešení soustavy (1.1) budeme zakreslovat do souřadného systému určeného osami x_1 a x_2.

Definice 2.2 *Kladnou fázovou křivku $\gamma^+(\tilde{x})$, zápornou fázovou křivku $\gamma^-(\tilde{x})$ a fázovou křivku $\gamma(\tilde{x})$ bodu $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ definujeme následovně:*

$$\begin{aligned} \gamma^+(\tilde{x}) &= \bigcup_{t \in [0, +\infty)} \varphi(t, \tilde{x}), \\ \gamma^-(\tilde{x}) &= \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \varphi(t, \tilde{x}), \\ \gamma(\tilde{x}) &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, \tilde{x}). \end{aligned}$$

Poznámka 2.3 *Místo fázová křivka se často setkáme s názvem orbita.*

Definice 2.4 *Fázovým portrétem soustavy* (1.1) *nazýváme množinu všech fázových křivek opatřených šipkou ve směru pohybu řešení* $\varphi(t, x^0)$ *s rostoucím* t.

V každém bodě $x \in \mathbb{R}^2$ také můžeme uvažovat orientovanou úsečku s počátečním bodem x a koncovým bodem $x + Ax$. Množinu takovýchto orientovaných úseček pak nazýváme vektorové pole.

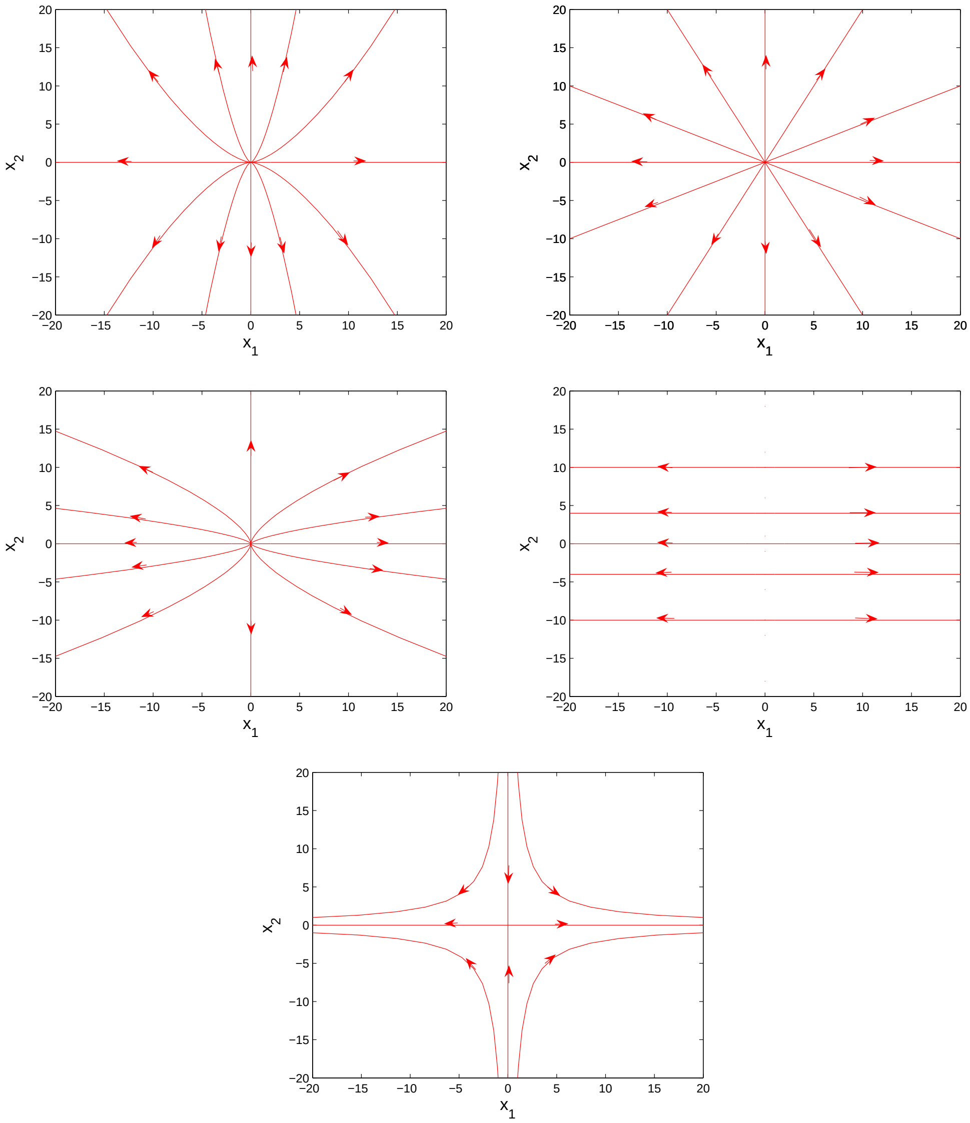
Kanonický systém 1:

Tento systém je spojen s maticí (2.1). Jak víme, řešení dané soustavy můžeme psát ve tvaru

$$\varphi(t, x^0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x^0.$$

Nechť $\lambda_1 > 0$. Budeme diskutovat různé hodnoty λ_2. Pro $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$ a $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ máme $\varphi(t, x^0) \to +\infty$ pro $t \to +\infty$. Počátek se v těchto případech nazývá nestabilní uzel. Pro $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ a $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ mají fázové křivky odpovídající počáteční podmínce s nenulovými složkami tvar paraboly, viz obrázek 2.1 vlevo nahoře. Pro $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$ jsou fázovými křivkami polopřímky vycházející z počátku. Jediným stacionárním bodem je počátek. Pro $\lambda_1 > 0 = \lambda_2$ jsou stacionárními body body přímky $x_1 = 0$. Orbity jsou pak přímky rovnoběžné s osou x_1. Pokud $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, je jediným stacionárním bodem počátek, který se nazývá sedlo. Orbity mají tentokrát tvar hyperboly, viz obrázek 2.1 dole.

Analýza případu $\lambda_1 < 0$ se provede analogicky. Fázové křivky pro $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ dostaneme podobné jako u $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, řešení jen změní směr pohybu. Podobně případy $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$, $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ dostaneme z $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$, $\lambda_1 > 0 = \lambda_2$ a $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ transformací $t \longrightarrow -t$. Nakonec uveďme speciální případ, kdy je matice nulová a všechny fázové křivky jsou stacionární body.



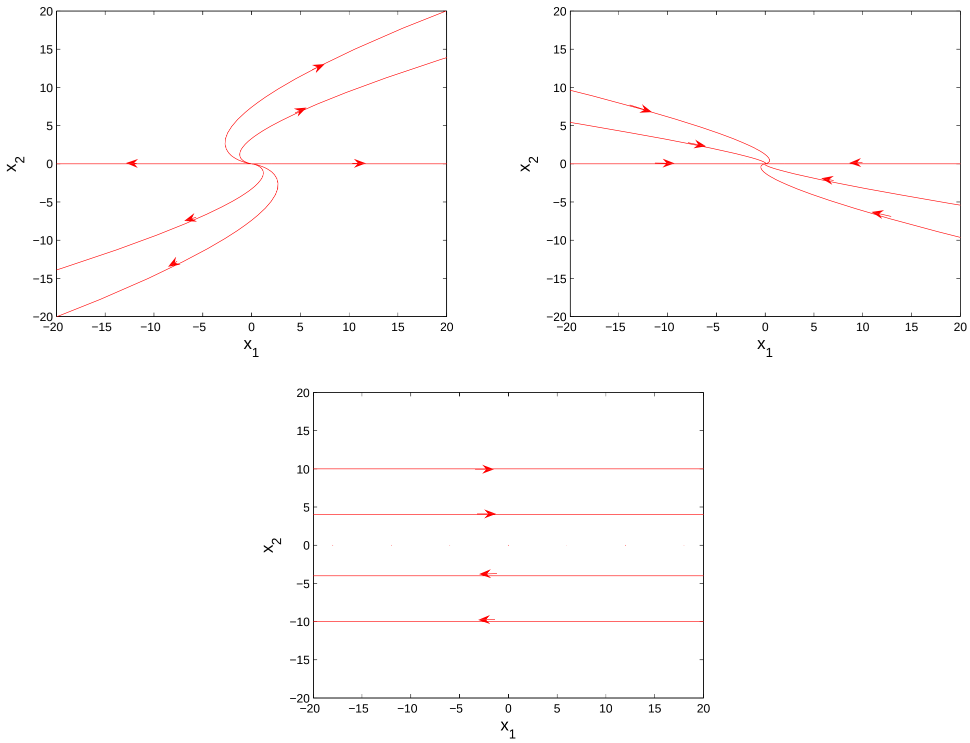
Obrázek 2.1: Fázový portrét systému (2.1) pro $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ (vlevo nahoře), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ (vpravo nahoře), $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ (vlevo uprostřed), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ (vpravo uprostřed) a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ (dole)

Kanonický systém 2:

Tento systém je spojen s maticí (2.2). Řešení soustavy dostáváme tvaru

$$\varphi(t, x^0) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^0.$$

Pro $\lambda > 0$ má soustava jediný stacionární bod počátek a řešení $\varphi(t, x^0)$ pro $t \to +\infty$ roste nade všechny meze. Pro $\lambda < 0$ je opět jediným stacionárním bodem počátek a řešení $\varphi(t, x^0)$ pro $t \to +\infty$ nám konverguje do 0. Značně odlišné chování má systém pro $\lambda = 0$. Stacionárními body jsou tentokrát body přímky $x_2 = 0$. Fázové křivky jsou přímky rovnoběžné s osou x_1, viz obrázek 2.2 dole.



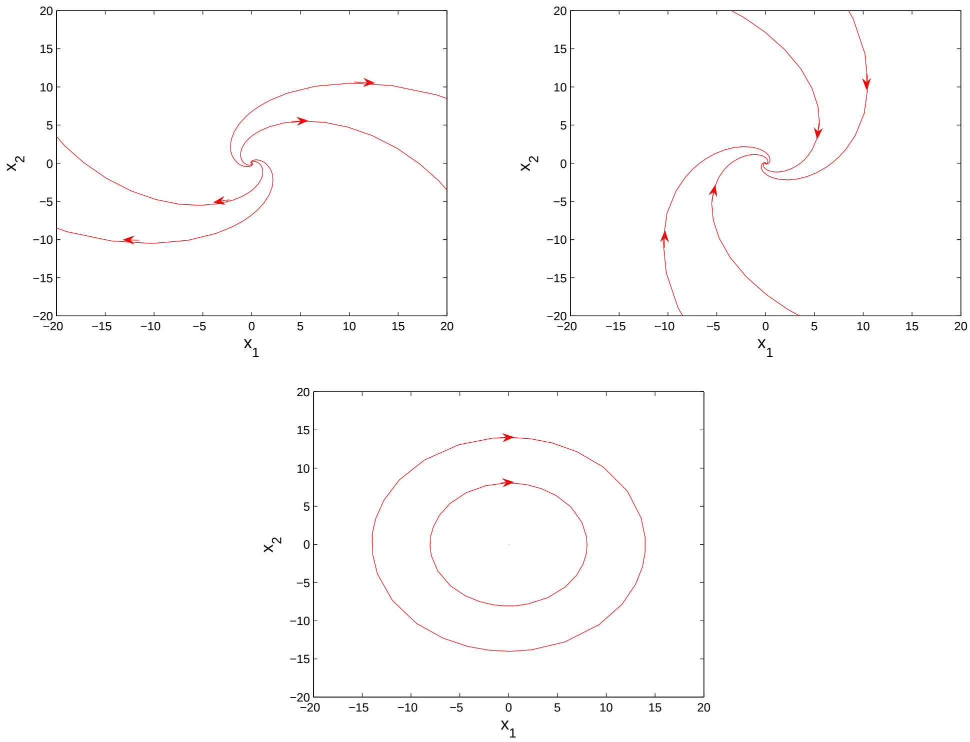
Obrázek 2.2: Fázový portrét systému (2.2) pro $\lambda = 1$ (vlevo nahoře), $\lambda = -1$ (vpravo nahoře) a $\lambda = 0$ (dole)

Kanonický systém 3:

Tento systém je spojen s maticí (2.3). Řešení soustavy dostáváme tvaru

$$\varphi(t, x^0) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} x^0.$$

Snadno vidíme, že jediným stacionárním bodem soustavy je počátek. Uvažujme nejprve $\beta > 0$. Pro $\alpha < 0$ se řešení $\varphi(t, x^0)$ pro $t \to +\infty$ blíží k počátku. Naopak pro $\alpha > 0$ nám řešení $\varphi(t, x^0)$ pro $t \to +\infty$ roste nade všechny meze. V obou případech se počátek nazývá ohnisko. Řešení se pohybuje po spirálách. Konečně pro $\alpha = 0$ v řešení vymizí člen s exponenciálou a dostáváme periodické řešení s periodou $\frac{2\pi}{\beta}$, tj. $(\varphi(t, x^0) = \varphi(t + \frac{2\pi}{\beta}, x^0))$. Snadno nahlédneme, že orbitami jsou kružnice s poloměrem $\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}$. Počátek se v tomto případě nazývá střed.



Obrázek 2.3: Fázový portrét systému (2.3) pro $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (vlevo nahoře); $\alpha = -1$, $\beta = 1$ (vpravo nahoře) a $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (dole)

Případy $\beta, \alpha < 0$, $\beta < 0 < \alpha$ a $\beta < 0 = \alpha$ dostaneme z případů $\beta, \alpha > 0$, $\beta > 0 > \alpha$ a $\beta > 0 = \alpha$ transformací $t \longrightarrow -t$. Řešení jen změní směr pohybu.

2.2 Lineární transformace systémů na kanonické systémy

Viděli jsme, že fundamentální matici, resp. řešení lineárního systému s maticemi (2.1), (2.2) nebo (2.3) dostaneme celkem snadno. Naším cílem proto bude libovolnou reálnou konstantní matici typu 2×2 převést na tvar (2.1), (2.2) nebo (2.3). Definujme nejprve pojmy, se kterými budeme pracovat.

Definice 2.5 *Komplexní číslo λ nazveme vlastním číslem matice A, jestliže existuje nenulový vektor v tak, že platí*

$$Av = \lambda v.$$

Vektor v pak nazveme vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ.

Poznámka 2.6 *Při hledání vlastních čísel λ tedy chceme nalézt netriviální řešení homogenní soustavy rovnic $(A-\lambda I)v = 0$. To je ekvivalentní podmínce $\det(A - \lambda I) = 0$. Kvadratický polynom $\det(A - \lambda I)$ v neurčité λ nazýváme charakteristickým polynomem matice A.*

Úmluva 2.7 *V dalším někdy budeme lineární závislost zkracovat LZ a lineární nezávislost LN.*

Věta 2.8 *Nechť $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Pak existuje reálná invertibilní matice P typu 2×2 tak, že platí*

$$P^{-1}AP = J,$$

kde J je matice tvaru (2.1), (2.2) nebo (2.3).

Důkaz: Předpokládejme nejdříve, že matice A má dvě reálná navzájem různá vlastní čísla λ_1, λ_2. Označme v^1, v^2 příslušné vlastní vektory. Tedy vektory v^1, v^2 jsou lineárně nezávislé. Definujme transformační matici P takto:

$$P = (v^1|v^2).$$

Pak dostáváme

$$AP = (Av^1|Av^2) = (\lambda_1 v^1|\lambda_2 v^2) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Přenásobením rovnosti maticí P^{-1} zleva dostáváme tvrzení. Uvažujme dále případ, kdy λ je dvojnásobným vlastním číslem matice A. Jestliže příslušné vlastní vektory v^1, v^2 jsou lineárně nezávislé, volba transformační matice $P = (v^1|v^2)$ vede k rovnosti

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Nechť tedy existuje jen jeden LN vlastní vektor v^1. Ukážeme, že pak existuje vektor v^2 LN na v^1 splňující

$$(A - \lambda I)v^2 = v^1.$$

Nechť pro spor takový vektor v^2 neexistuje. Pak v oboru hodnot $A - \lambda I$ existuje nějaký vektor u lineárně nezávislý na v^1. Označme w vektor, pro který $(A - \lambda I)w = u$ a vyjádřeme ho jako lineární kombinaci v^1 a u. Úpravou rovnosti $(A - \lambda I)(c_1 * v^1 + c_2 * u) = u$ dostaneme $c_2(A - \lambda I)u = u$. Protože je c_2 nenulové, rovnici jím podělíme: $(A - (\lambda + \frac{1}{c_2})I) * u = 0$ a dostáváme spor s tím, že λ bylo jediné vlastní číslo matice A. Tedy vektor v^2 splňující $(A - \lambda I)v^2 = v^1$ existuje. Zároveň je LN na v^1, protože jinak by vektor v^1 byl nulový. Konečně uvažujme případ, kdy matice A má komplexní vlastní číslo $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\beta \neq 0$. Nechť $v^1 + iv^2$ je příslušný komplexní vlastní vektor (v^1 a v^2 jsou nenulové reálné vektory). Platí, že v^1 a v^2 jsou LN. Kdyby nebyly, existovala by reálná čísla $c_1, c_2 \neq 0$ tak, že $c_1 v^1 + c_2 v^2 = 0$. Dosazením za v^1 do rovnice

$$A(v^1 + iv^2) = (\alpha + i\beta)(v^1 + iv^2) \tag{2.4}$$

dostaneme $Av^2 = (\alpha + i\beta)v^2$. Na levé straně rovnice máme reálný vektor zatímco na pravé komplexní vektor, což je spor. Definujme transformační matici P takto:

$$P = (v^1|v^2).$$

Pak dostaneme

$$AP = (Av^1|Av^2) = (\alpha v^1 - \beta v^2|\beta v^1 + \alpha v^2) = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Druhá rovnost plyne z toho, že rovnici (2.4) můžeme ekvivalentně zapsat zvlášť pro reálné části rovnice a zvlášť pro imaginární části. Tedy věta je dokázána. □

Přistupme nyní k samotné transformaci souřadnic soustavy

$$x' = Ax. \tag{2.5}$$

Položme $x = Py$, kde P je regulární konstantní matice typu 2×2. Pak nová fce $y(t)$ řeší transformovanou soustavu

$$y' = P^{-1}APy. \tag{2.6}$$

Z předchozí věty víme, že matici P lze volit tak, aby soustava (2.6) byla kanonická. Zbývá vyjádřit řešení původní soustavy (2.5):

$$x(t) = Py(t) = Pe^{tP^{-1}AP}y^0 = Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}x^0.$$

Fundamentální matice soustavy (2.5) má tedy tvar $Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}$.

2.3 Kvalitativní ekvivalence lineárních systémů

V tomto oddíle navážeme na výsledky z předchozích částí a budeme se podrobněji zabývat klasifikací rovinných lineárních systémů. K tomu zavedeme pojem topologické ekvivalence lineárních systémů, který nám umožní rozlišit konečný počet tříd ekvivalence lineárních systémů. Budeme ještě uvažovat zvlášť tzv. hyperbolické a nehyperbolické soustavy.

Definice 2.9 *Řekneme, že dva lineární systémy v rovině $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou topologicky ekvivalentní, jestliže existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který zobrazuje fázové křivky systému $x' = Ax$ na fázové křivky systému $x' = Bx$ a zachovává směr toku času.*

Definice 2.10 *Řekneme, že dva lineární systémy v rovině $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou diferencovatelně ekvivalentní, jestliže existuje difeomorfismus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^2$ splňuje $h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$.*

Definice 2.11 *Řekneme, že dva lineární systémy v rovině $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou lineárně ekvivalentní, jestliže jsou topologicky ekvivalentní a příslušný homeomorfismus h je lineární.*

Definice 2.12 *Stacionární bod $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme hyperbolickým stacionárním bodem systému $x' = f(x)$, jestliže $\sigma(Df(\tilde{x})) \bigcap i\mathbb{R} = \emptyset$, kde $\sigma(Df(\tilde{x}))$ je spektrum Jacobiho matice vektorového pole f.*

Poznámka 2.13 *Speciálně v lineárním případě dostáváme podmínku $\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \emptyset$.*

Definice 2.14 *Řekneme, že lineární systém $x' = Ax$ je hyperbolický, jestliže má hyperbolický stacionární bod. V opačném případě mluvíme o nehyperbolickém lineárním systému.*

Při převodu lineárních systémů na kanonické jsme se tedy dle zavedené terminologie setkali s lineární ekvivalencí, přičemž příslušný homeomorfismus zde byl realizován invertibilní maticí P. Podobnost matic nám již zaručovala lineární ekvivalenci. Podobnost je však zároveň i nutnou podmínkou lineární ekvivalence, o čemž hovoří následující lemma:

Lemma 2.15 *Matice A a B jsou podobné právě tehdy, když lineární systémy $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou lineárně ekvivalentní.*

Důkaz: Implikaci zleva doprava již známe, dokažme proto opačnou implikaci. Vyjdeme ze vztahu $Pe^{tA} = e^{tB}P$. Derivací podle t v bodě 0 pak dostaneme $PA = BP$. □

Proto není vhodné klasifikovat systémy na základě lineární ekvivalence. Bohužel ani s diferencovatelnou ekvivalencí si nepomůžeme, neboť platí následující lemma:

Lemma 2.16 *Hyperbolické lineární systémy $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou diferencovatelně ekvivalentní právě tehdy, když jsou lineárně ekvivalentní.*

Důkaz: Implikace zprava doleva je zřejmá. Dokažme tedy opačnou implikaci. Nechť $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je difeomorfismus splňující $s(e^{tA}x) = e^{tB}s(x)$. Označme $c := s(0)$. Předně máme

$$c = s(0) = s(e^{tA}0) = e^{tB}s(0) = e^{tB}c.$$

Derivováním rovnosti podle t dostáváme

$$0 = Be^{tB}c.$$

Tedy $Bc = 0$ a difeomorfismus s převádí stacionární bod 0 systému $x' = Ax$ na stacionární bod c systému $x' = Bx$. Definujme difeomorfismus g předpisem $g : x \to x - c$. Ukážeme, že difeomorfismus $h := g \circ s$ zobrazuje fázové křivky systému $x' = Ax$ na fázové křivky systému $x' = Bx$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^2$ a $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(g \circ s)(e^{tA}x) = s(e^{tA}x) - c = e^{tB}s(x) - c = e^{tB}s(x) - e^{tB}c = e^{tB}(g \circ s)(x).$$

Dále $(g \circ s)(0) = 0$. Po derivaci rovnosti $h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$ podle x v bodě 0 dostaneme

$$D_x h(0)e^{tA} = e^{tB} D_x h(0).$$

Konečně derivací podle t v bodě 0 máme

$$D_x h(0)A = BD_x h(0).$$

Protože h je difeomorfismus, tedy regulární zobrazení, je $D_x h(0)$ invertovatelný. Proto

$$A = (D_x h(0))^{-1} B D_x h(0)$$

a z lemmatu 2.15 dostáváme lineární ekvivalenci systémů $x' = Ax$ a $x' = Bx$. □

Proto budeme kvalitativní vlastnosti sytémů porovnávat podle definice 2.9. Požadavek existence homeomorfismu se ukazuje jako rozumný. Nyní se dostáváme ke stěžejním větám o klasifikaci hyperbolických a nehyperbolických lineárních systémů.

Věta 2.17 *Dva hyperbolické lineární systémy $x' = Ax$ a $x' = Bx$ jsou topologicky ekvivalentní právě tehdy, když matice A a B mají stejný počet vlastních čísel se zápornými reálnými částmi.*

Věta 2.18 *Nechť existuje $\lambda \in \sigma(A)$ tak, že $Re(\lambda) = 0$. Pak systém $x' = Ax$ je topologicky ekvivalentní právě jednomu z následujících systémů:*

(i) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$

(ii) $x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$

(iii) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$

(iv) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$

(v) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$

Důkaz: Důkazy obou výše uvedených vět jsou dosti technické. Náznak důkazu lze nalézt v knize [1] na str. 243 a 246. □

2.4 Generický lineární systém

V předchozí části jsme klasifikovali hyperbolické a nehyperbolické lineární systémy. Nyní nás bude zajímat, jak velkou množinu hyperbolické, resp. nehyperbolické systémy v rámci všech lineárních systémů tvoří. Zajímavým výsledkem bude, že zatímco hyperbolické systémy při malé poruše svou topologii nezmění, nehyperbolické systémy ano.

Poznámka 2.19 *V tomto oddíle budeme matici A systému* (1.1) *chápat jako bod v* $\mathbb{R}^4$.

Následující věta ukazuje, že většina systémů je hyperbolická.

Věta 2.20 *Hyperbolické lineární systémy tvoří hustou podmnožinu všech lineárních systémů.*

Důkaz: Nechť $x' = Ax$ je nehyperbolický systém v kanonickém tvaru a nechť je dáno $\epsilon > 0$. Z tvarů matice A, které přichází v úvahu vidíme, že systém $x' = (A + \epsilon I)x$ je hyperbolický. □

Tato skutečnost by nás mohla vést k domněnce, že si vystačíme jen s hyperbolickými systémy. Praxe ukazuje, že je třeba studovat i ty nehyperbolické. Věta vlastně říká, že malou změnou matice A můžeme z nehyperbolického systému získat hyperbolický. Ukažme, že hyperbolické systémy skutečně při malé změně parametru nemění svou topologii. Následující věta nás k tomu dovede.

Věta 2.21 *Nechť je dán hyperbolický systém $x' = Ax$. Pak existuje otevřené okolí $U \subset \mathbb{R}^4$ bodu A tak, že pro libovolné $B \in U$ je systém $x' = Bx$ topologicky ekvivalentní systému $x' = Ax$.*

Důkaz: Díky větě 2.17 stačí ukázat, že reálné části vlastních čísel matice A jsou spojitými funkcemi prvků matice A. Uvědomme si, jak vypadá charakteristický polynom matice A: $det(A-\lambda I) = \lambda^2 + (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, přičemž $a_{11}+a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ a $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \lambda_1\lambda_2$, kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny kvadratického polynomu. Tedy

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde D je diskriminant charakteristické rovnice. Spojitou závislost tak ihned dostáváme. $\square$

Hyperbolické systémy tedy tvoří otevřenou hustou množinu. Vlastnostem, které platí pro otevřené husté podmnožiny říkáme generické. Hyperboličnost je jednou z nich. Proto se při přechodu od hyperbolického systému k systému v dostatečně blízkém okolí nezmění topologie. Naopak malou poruchou nehyperbolického systému můžeme přejít od jedné třídy topologické ekvivalence k jiné.

Kapitola 3

Příklady

V dalším si budeme teorii ilustrovat řadou různých příkladů.

Příklad 1: Určeme řešení následujícího nehyperbolického systému

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} x \tag{3.1}$$

využitím řešení příslušného kanonického tvaru.

Systém má ryze imaginární vlastní čísla $\lambda = 4i$ a $\mu = -4i$. Těm odpovídají vlastní vektory $v = (1,0) + i(0,-2)$ a $u = (1,0) + i(0,2)$. Aplikujeme postup popsaný za větou 2.8. Definujeme-li transformační matici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

převedeme systém (3.1) na systém kanonický

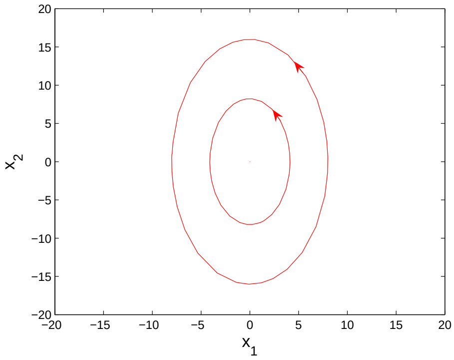
$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} y. \tag{3.2}$$

Jeho řešení snadno určíme:

$$\varphi(t, y^0) = e^{tJ} y^0 = \begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} y^0,$$

kde J značí matici transformované soustavy (3.2). Řešení původního systému pak dostáváme ve tvaru:

$$\psi(t,x^0) = Pe^{tJ}P^{-1}x^0 = \begin{pmatrix} \cos 4t & -\frac{1}{2}\sin 4t \\ 2\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} x^0.$$

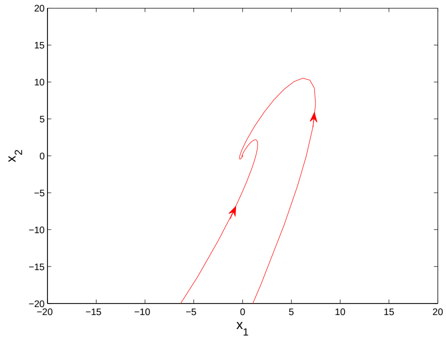


Obrázek 3.1: Fázový portrét systému (3.1)

Příklad 2: V tomto příkladě si ukážeme, jak ze znalostí vlastních čísel a odpovídajících vlastních vektorů nalézt dvě LN řešení soustavy:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x \tag{3.3}$$

Vlastními čísly matice soustavy jsou $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = -1 - i$ a $\mu = -1 + i$. Tedy jde o hyperbolický systém. Dle věty 2.17 patří do třídy ekvivalentních systémů reprezentovaných např. soustavou s maticí $-I$. Odpovídající vlastní vektory jsou $v = v_1 + iv_2 = (1, 2) + i(0, 1)$ a $u = (1, 2) + i(0, -1)$. Stacionární bod 0 se v tomto případě nazývá ohnisko. Definujeme-li $\varphi(t, x^0) = e^{\lambda_1 t}(v_1 \cos \lambda_2 t - v_2 \sin \lambda_2 t)$ a $\psi(t, x^0) = e^{\lambda_1 t}(v_1 \sin \lambda_2 t + v_2 \cos \lambda_2 t)$, pak to jsou řešení (3.3). Protože navíc platí $\det(\varphi(0, x^0)|\psi(0, x^0)) \neq 0$, dostáváme z lemmatu 1.5 a poznámky 1.4 lineární nezávislost těchto řešení.



Obrázek 3.2: Fázové křivky $\varphi(t, x^0)$ a $\psi(t, x^0)$ systému (3.3)

Příklad 3: Podívejme se na vztah systémů

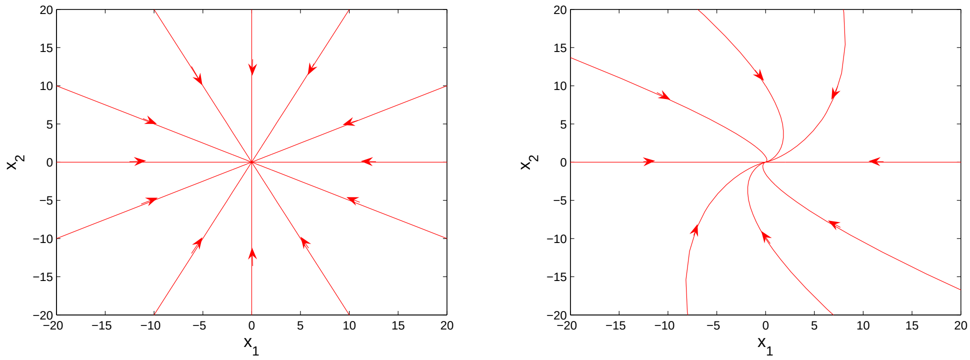
$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \tag{3.4}$$

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x. \tag{3.5}$$

Označme $\varphi(t, x^0) = (e^{-2t}x_1^0, e^{-2t}x_2^0)$ a $\psi(t, x^0) = (e^{-2t}x_1^0 + te^{-2t}x_2^0, e^{-2t}x_2^0)$ řešení těchto soustav. Z obrázku 3.3 vidíme, že fázové křivky $\psi(t, x^0)$ se u počátku přimykají k ose x_1 a fázové křivky $\varphi(t, x^0)$ jsou polopřímky vycházející z počátku. U obou systémů se počátku říká uzel. Jak vidíme, soustavy mají dvojnásobné vlastní číslo -2, proto jsou díky větě 2.17 topologicky ekvivalentní. Nejsou ale lineárně ekvivalentní. Podobné matice totiž musí mít stejný Jordanův kanonický tvar, což lze jednoduše ukázat:

Z definice podobnosti existuje regulární matice X tak, že $B = X^{-1}AX$. Nechť $A = Y^{-1}JY$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice A. Pak $B = X^{-1}Y^{-1}JYX = (YX)^{-1}JYX$. Proto J je zároveň Jordanův kanonický tvar matice B.

Výše uvedené přímo souvisí s rozdílnou strukturou matic A a B. Zatímco algebraická násobnost systémů (3.4) a (3.5) je stejná, geometrická nikoli. V případě (3.4) totiž máme dva LN vlastní vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$ příslušné vlastnímu číslu -2, kdežto v případě (3.5) máme pouze jeden $(1, 0)$.



Obrázek 3.3: Fázové portréty systémů: (3.4) (vlevo), (3.5) (vpravo)

Příklad 4: Uvažujme dva lineární systémy

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x \tag{3.6}$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \tag{3.7}$$

a zkonstruujme homeomorfismus h, který nám bude realizovat topologickou ekvivalenci těchto lineárních systémů.

Označme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ \ a \ \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Budeme postupovat tak, že nejprve systém (3.6) převedeme na kanonický, a tedy ukážeme, že je topologicky ekvivalentní s

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x. \tag{3.8}$$

Dále pak zkonstruujeme homeomorfismus, který převádí fázové křivky systému (3.8) na fázové křivky systému (3.7).

Vlastními čísly matice A jsou -1 a 1. Příslušné vlastní vektory pak $v^1 = (1,1)$ a $v^2 = (0,1)$. V věty 2.8 víme, že matice

$$P = (v^1 | v^2)$$

nám matici A transformuje do kanonického tvaru. Skutečně

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: J.$$

Zavedením nových souřadnic $x := Py$ dostaneme v souladu s dřívějšími výsledky vztah

$$P^{-1}e^{tA} = e^{tJ}P^{-1}.$$

Tedy systémy (3.6) a (3.8) jsou topologicky ekvivalentní a příslušný homeomorfismus je zobrazení $x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow P^{-1}x$. Sestrojme nyní homeomorfismus realizující topologickou ekvivalenci systémů (3.8) a (3.7). Stačí ukázat topologickou ekvivalenci zvlášť prvních a druhých složek soustav (3.8) a (3.7). U prvních složek bude homeomorfismem triviálně identické zobrazení, tj. $h_1(x_1) := x_1$ pro každé $x_1 \in \mathbb{R}$. Zbývá sestrojit homeomorfismus skalárních rovnic $x_2' = x_2$ a $x_2' = 2x_2$. Označme $\varphi(t, x^0) = e^t x^0$ a $\psi(t, x^0) = e^{2t}x^0$ řešení těchto rovnic. Obě rovnice mají jediný stacionární bod 0. Zvolme čísla α a β tak, aby $\alpha < 0 < \beta$, např. $\alpha = -1$ a $\beta = 1$. Dále najděme časy t_1 a t_2, aby $e^{t_1}x^0 = \alpha$ a $e^{t_2}x^0 = \beta$. Tedy máme $t_1 = -\ln(-x^0)$ a $t_2 = -\ln(x^0)$. Příslušný homeomorfismus definujme nyní takto:

$$h_2(x_2) = \begin{cases} \psi(-t_1, \alpha), & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \\ \psi(-t_2, \beta), & x_2 > 0. \end{cases}$$

Tedy

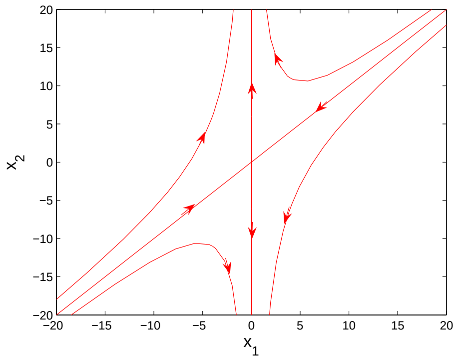
$$h_2(x_2) = \begin{cases} -x_2{}^2, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \\ x_2{}^2, & x_2 > 0. \end{cases}$$

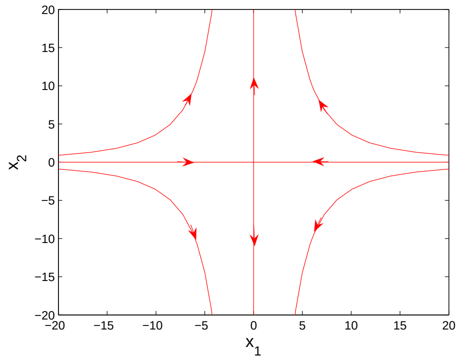
Pak homeomorfismus $g(x) := (x_1, h_2(x_2))$, kde $x = (x_1, x_2)$ převádí fázové křivky (3.8) na fázové křivky (3.7): Pro $x \in \mathbb{R}^2$ je

$$g(e^{tJ}x) = g((e^{-t}x_1, e^t x_2)^T) = (e^{-t}x_1, e^{2t}x_2{}^2)^T = e^{tB}g(x)$$

pro $x_2 > 0$. Podobně pro $x_2 < 0$ a $x_2 = 0$. Hledaný homeomorfismus h pak dostaneme takto: $h := g \circ P^{-1}$. Skutečně

$$h(e^{tA}x) = (g \circ P^{-1})(e^{tA}x) = g(e^{tJ}P^{-1}x) = e^{tB}g(P^{-1}x) = e^{tB}h(x).$$





Obrázek 3.4: Fázové portréty systémů: (3.6) (vlevo), (3.7) (vpravo)

Příklad 5: Uvažujme následující systémy:

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \tag{3.9}$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x. \tag{3.10}$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \tag{3.11}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x \tag{3.12}$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x. \tag{3.13}$$

Předně všechny systémy mají obě vlastní čísla záporná. Z věty 2.17 proto máme zaručenu topologickou ekvivalenci těchto systémů. V dalším naznačíme konstrukci homeomorfismu převádějícího fázové křivky (3.11) na fázové křivky (3.9). Využijeme přitom výsledku z teorie ljapunovské funkce. Ten nám říká, že pokud je derivace pozitivně definitní kvadratické funkce V podél řešení soustavy (1.1) mimo počátek záporná, protnou nestacionární fázové křivky systému (1.1) (uzavřenou) křivku

$\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = k,\ k > 0\}$ právě v jednom bodě. Označme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ a \ G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

V našem případě bude pozitivně definitní kvadratickou funkcí $x^T C_A x$ pro matici A, resp. $x^T C_G x$ pro matici G. Přitom C_A, resp. C_G je pozitivně definitní matice splňující

$$A^T C_A + C_A A = -I, \tag{3.14}$$

resp. $G^T C_G + C_G G = -I$. Snadno ověříme, že matice

$$C_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ a \ C_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

splňují požadované vlastnosti. Zvolme $k = 1$. Množina bodů $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_A x = 1\}$ je kružnice o poloměru $\sqrt{2}$ a $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_G x = 1\}$ je elipsa s délkami poloos 2 a $\sqrt{2}$. Definujme nejprve homeomorfismus $f : \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_G x = 1\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_A x = 1\}$ takto: $f(x) := \sqrt{2}\frac{x}{\|x\|}$, kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma. Dle výše řečeného pro zvolenou počáteční podmínku $x^0 \neq 0$ existuje právě jedno $t_{x^0} \in \mathbb{R}$ tak, že $e^{-t_{x^0}G}x^0$ leží na elipse $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_G x = 1\}$. Zobrazení

$$h(x^0) = \begin{cases} e^{t_{x^0}A} f(e^{-t_{x^0}G}x^0), & x^0 \neq 0 \\ 0, & x^0 = 0 \end{cases}$$

je hledaný homeomorfismus.

Nyní ukážeme, že systémy (3.12) a (3.13) jsou dokonce lineárně ekvivalentní se soustavou (3.11). Označíme

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \ a \ L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice H jsou -1 a -2. Příslušné vlastní vektory pak jsou $(2, -1)$ a $(1, -1)$. Transformační matice

$$P_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce tvoří vlastní vektory nám matici H převede na matici G:

$$P_H^{-1} H P_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice L jsou -1 a -2. Vlastní vektory vyjdou $(1,0)$ a $(1,-1)$. Matice L se nám tentokrát transformuje na matici G prostřednictvím matice

$$P_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá sestrojit homeomorfismus převádějící fázové křivky (3.10) na fázové křivky (3.9). Označme

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Postupujeme stejně jako u matice G. Pro matici B je však nalezení odpovídající matice C_B obtížné, proto se provede malý trik. Označme

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme změnu souřadnic $x \longrightarrow E^{\frac{1}{2}}x$ a dále budeme pracovat s transformovanou maticí

$$Bn = E^{\frac{1}{2}}BE^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{961}{1351} & \frac{2716}{2521} \\ -\frac{195}{2521} & -\frac{808}{627} \end{pmatrix}.$$

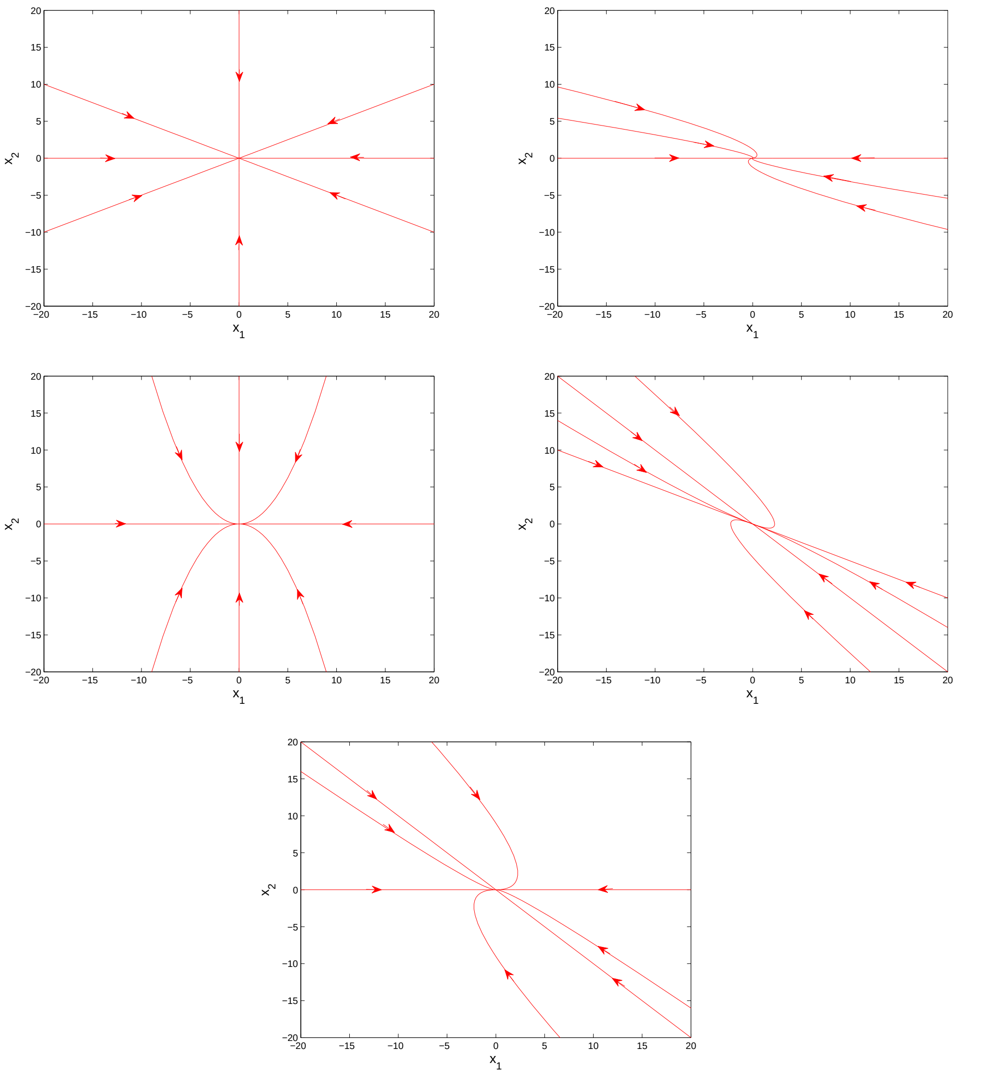
(Víme, že $x' = Bx$ a $x' = Bnx$ jsou dokonce lineárně ekvivalentní.) Požadavkům pak vyhovuje matice

$$C_{B_n} = \frac{1}{2}E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Množina bodů $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_{B_n} x = 1\}$ je elipsa. Definujme nejprve homeomorfismus $g : \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_{B_n} x = 1\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_A x = 1\}$ takto: $g(x) := \sqrt{2}\frac{x}{\|x\|}$, kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma. Dle výše řečeného pro zvolenou počáteční podmínku $x_0 \neq 0$ existuje právě jedno t_{x_0} tak, že $e^{-t_{x_0}B_n}x^0$ leží na elipse $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T C_{B_n} x = 1\}$. Homeomorfismus pak definujeme takto:

$$\tilde{h}(x^0) = \begin{cases} e^{t_{x^0}A} g(e^{-t_{x^0}B_n}x^0), & x^0 \neq 0 \\ 0, & x^0 = 0. \end{cases}$$

Poznámka 3.1 *Analýza klíčové rovnice* (3.14) *je v plné obecnosti uvedena v knize [3] na str. 96.*



Obrázek 3.5: Fázové portréty systémů: (3.9) (vlevo nahoře), (3.10) (vpravo nahoře), (3.11) (vlevo uprostřed), (3.12) (vpravo uprostřed), (3.13) (dole)

Literatura

[1] Hale J., Koçak H.: *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] Amann H.: *Ordinary Differential Equations*, Walter de Gruyter & Co., New York, 1990.

[3] Horn R. A., Johnson C. R.: *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.