Errata k bakalářské práci

Název práce: Geometrické vlastnosti komplexních čísel
Autor: František Kouba

V rámci celé práce by měla být **imaginární jednotka i** napsána normální fontem a ne kurzívou, jak je použito!
str. 29

- Špatně: **Definice 12.** *Gaussovo celé číslo p je nazýváno prvočíslem, pouze pokud je toto číslo p dělitelné 1, -1, i, -i, p, -p, pi a -pi.* [10, s. 5]
- Správně: **Definice 12.** *Gaussovo celé číslo p je nazýváno prvočíslem pouze, pokud je toto číslo p dělitelné 1, -1,* i, -i, *p, -p,* pi *a* -p*i*. [10, s. 5]

str. 33 - Upřesnění termínu celé prvočíslo, které je použito **ve větě 25**.

Definice 1. *(Celé prvočíslo) Celé číslo p nazýváme (celým) prvočíslem, pokud $p \neq 0, \pm 1$ a jedinými děliteli celého čísla p jsou ± 1 a $\pm p$.*(Hungerford, 2012, s. 17)

str. 33

- Špatně: **Věta 27.** *(Reálná Gaussova prvočísla) Běžné prvočíslo $p \in \mathbb{N}$ je Gaussovo prvočíslo $\Leftrightarrow$ p není součtem dvou čtverců. (A samozřejmě $p < 0$ je Gaussovo prvočíslo $\Leftrightarrow$ $-p \in \mathbb{N}$ je Gaussovo prvočíslo.)* [28, s. 105]

  Důkaz.
  ($\Leftarrow$) Předpokládáme, že máme běžné prvočíslo p, které není Gaussovým prvočíslem, a proto jej můžeme rozložit v $\mathbb{Z}[i]$:

  $$p = (a + bi)q, \tag{1}$$

  kde $a + bi$ a q jsou Gaussova celá čísla s normou menší než norma p^2 čísla p (a tedy i norma větší než 1). Vezmeme-li komplexně sdružená čísla obou stran, dostaneme

  $$p = (a - bi)\overline{q}, \tag{2}$$

  poněvadž p je reálné, proto $p = \overline{p}$. Vynásobením výrazů (3) a (4) jako p získáme

  $$\begin{aligned} p^2 &= (a - bi)(a + bi)q\overline{q} \\ &= (a^2 + b^2)|q|^2, \end{aligned}$$

kde obojí $a^2 + b^2$, $|q|^2 > 1$. Ale jediný takový rozklad p^2 je pp, proto $p = a^2 + b^2$.
($\Rightarrow$) Naopak, pokud běžné prvočíslo p je rovno $a^2 + b^2$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, pak p není Gaussovo prvočíslo, protože lze prvočíselně rozložit v $\mathbb{Z}[i]$ jako

$$p = (a - bi)(a + bi)$$

na činitele o normě $a^2 + b^2 = p$, která je menší než norma $N(p) = p^2$. [28, s. 105]

❑

- Správně: **Věta 27.** *(Reálná Gaussova prvočísla) Prvočíslo $p \in \mathbb{N}$ je Gaussovo prvočíslo $\Leftrightarrow$ p není součtem dvou čtverců. (A samozřejmě $p < 0$ je Gaussovo prvočíslo $\Leftrightarrow$ $-p \in \mathbb{N}$ je Gaussovo prvočíslo.)* [28, s. 105]

  Důkaz.
  ($\Leftarrow$) Předpokládáme, že máme přirozené prvočíslo p, které není Gaussovým prvočíslem, a proto jej můžeme rozložit v $\mathbb{Z}[i]$:

  $$p = (a + bi)q, \tag{3}$$

  kde $a + bi$ a q jsou Gaussova celá čísla s normou menší než norma p^2 čísla p (a tedy i norma větší než 1). Vezmeme-li komplexně sdružená čísla obou stran, dostaneme

  $$p = (a - bi)\overline{q}, \tag{4}$$

  poněvadž p je reálné, proto $p = \overline{p}$. Vynásobením výrazů (3) a (4) jako p získáme

  $$\begin{aligned} p^2 &= (a - bi)(a + bi)q\overline{q} \\ &= (a^2 + b^2)|q|^2, \end{aligned}$$

  kde obojí $a^2 + b^2$, $|q|^2 > 1$. Ale jediný takový rozklad p^2 je pp, proto $p = a^2 + b^2$.
  ($\Rightarrow$) Naopak, pokud přirozené prvočíslo p je rovno $a^2 + b^2$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, pak p není Gaussovo prvočíslo, protože lze prvočíselně rozložit v $\mathbb{Z}[i]$ jako

  $$p = (a - bi)(a + bi)$$

  na činitele o normě $a^2 + b^2 = p$, která je menší než norma $N(p) = p^2$. [28, s. 105]

  ❑

str. 34

- Špatně: **Věta 28.** *(Imaginární Gaussova prvočísla) Gaussova prvočísla $a + bi$, kde a a b jsou nenulové, jsou součinem běžných prvočísel p ve tvaru $a^2 + b^2$.* [28, s. 108]

  Důkaz.
  Z věty 24 víme, že pokud $a + bi$ je Gaussovo prvočíslo, potom i $a - bi$ je

Gaussovo prvočíslo. Dále podle věty 25 $(a-bi)(a+bi)$ je (nutně jedinečný) prvočíselný rozklad v $\mathbb{Z}[i]$ jako

$$p = (a-bi)(a+bi)$$

Ale p potom musí být běžné (celé) prvočíslo. Pokud ano

$$p = r \cdot s$$

s $1 < r$, $s < p$ a $r, s \in \mathbb{Z}$, pak Gaussovi prvočíselní činitelé r a s vyjadřují Gaussův prvočíselný rozklad čísla p různý od $(a-bi)(a+bi)$ (buď dva reálné činitele r a s, nebo $\geq$ čtyři komplexní činitele). [28, s. 108]

❑

- Správně: **Věta 28.** *(Imaginární Gaussova prvočísla) Gaussova prvočísla $a+$bi, kde a i b jsou nenulové a jejichž součet druhých mocnin reálné části a a imaginární části b je přirozené prvočíslo p, neboli $a^2+b^2=p$.* [28, s. 108]

  Důkaz.
  Z věty 24 víme, že pokud $a+bi$ je Gaussovo prvočíslo, potom i $a-bi$ je Gaussovo prvočíslo. Dále podle věty 25 $(a-bi)(a+bi)$ je (nutně jedinečný) prvočíselný rozklad v $\mathbb{Z}[i]$ jako

  $$p = (a-bi)(a+bi)$$

  Ale p potom musí být celé prvočíslo. Pokud ano

  $$p = r \cdot s$$

  s $1 < r$, $s < p$ a $r, s \in \mathbb{Z}$, pak Gaussovi prvočíselní činitelé r a s vyjadřují Gaussův prvočíselný rozklad čísla p různý od $(a-bi)(a+bi)$ (buď dva reálné činitele r a s, nebo $\geq$ čtyři komplexní činitele). [28, s. 108]

  ❑

str. 67

- Špatně: $z_2 = -4$
- Správně: $z_2 = -5$i

str. 88-90 Doplněné bibliografické údaje u některé citované literatury.
Původní:

[8] EARL, Richard. Mathematical Institute, Oxford, OX1 2LB, August 2003.
[10] Lee A. Butler. A classification of gaussian primes. Dostupné z: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.568.1607.
[25] Jakub Opršel. Gaussovská prvočísla, 2006.
[26] TT Moh. Algebra, series on university mathematics vol. 5, 1992. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=v9Xt77TaeMAC.

Doplněné:

[8] EARL, Richard. Complex Number - Mathematical Institute, Oxford, OX1 2LB, August 2003. Dostupné z: https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/complex_1.pdf.

[10] Lee A. Butler. A classification of Gaussian primes, Esej. Dostupné z: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.568.1607.

[25] Jakub Opršal. Gaussovská prvočísla. Závěrečná maturitní práce z matematiky, Gymnázium Brno, 2006. Dostupné z: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/ snek/pub/matika/gaussovska_prvocisla.pdf

[26] T. T. Moh. Algebra, series on university mathematics vol. 5, World Scientific, 1992. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=v9Xt77TaeMAC.

Literatura

HUNGERFORD, T. W. (2012). *Abstract algebra: An Introduction, 3rd edition.* Cengage Learning.