Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Slovní úlohy pro základní školy řešitelné pomocí diofantovských rovnic

Word problems for lower secondary level solvable with the use of Diophantine equations

Kateřina Fejfarová

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Slovní úlohy pro základní školy řešené pomocí diofantovských rovnic vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 12. 7. 2018 . . . .

podpis

Poděkování:

Ráda bych poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za její rychlý přístup ke kontrole mé práce, za její cenné rady a připomínky. Velmi si vážím času, který mi během psaní této práce věnovala.

Anotace

Cílem této práce je shromáždit a především vytvořit slovní úlohy pro základní školy řešitelné pomocí lineárních diofantovských rovnic se dvěma neznámými. V práci jsou shrnuty potřebné poznatky o přirozených a celých číslech a jejich dělitelnosti. Dále jsou uvedeny různé způsoby řešení lineárních diofantovských rovnic se dvěma neznámými: Euklidův algoritmus a Bezoutova rovnost, největší společný dělitel, redukční metoda, kongruence a metoda pokus a omyl.

V praktické části je nejdříve řešena jedna úloha všemi postupy, které jsou uvedeny v teoretické části. Následně jsou vyhledané a vytvořené úlohy řešené pomocí tří vybraných metod. Na konci práce jsou uvedeny další úlohy k procvičení s výsledky.

Klíčová slova: diofantovská rovnice, celá čísla, Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost, největší společný dělitel, redukční metoda, kongruence, pokus a omyl.

Annotation

The aim of this bachelor paper is to assemble and primarily to create word problems for elementary schools that are solvable with the help of linear Diophantine equations with two unknowns. The paper sums all the necessary findings about natural and whole numbers and their divisibility. Different solution methods of linear Diophantine equations with two unknowns follow: Euclidean algorithm and Bézout’s identity, highest common factor, reduction method, congruence and the trial and error method.

In the practical part there is firstly one word problem solved with all the above-mentioned methods. Secondly, the assembled and created problems are solved using three chosen methods. The last part of the thesis contains further problems aimed to practising the solving procedures; results are included.

Key words: Diophantine equation, whole numbers, Euclidean algorithm, Bézout’s identity, highest common factor, reduction method, congruence, trial and error.

Obsah

Úvod

V matematice jsou rozsáhlým tématem rovnice různého typu. Žáci se s nimi během studia seznamují a učí se je správným způsobem vyřešit. V této práci se zabývám slovními úlohami, které vedou na lineární diofantovské rovnice se dvěma neznámými, ostatním typům diofantovských rovnic se v práci nevěnuji.

Lineární diofantovské rovnice jsem si vybrala z toho důvodu, že se s nimi žáci občas setkávají již na základní škole, přestože se neučí žádné metody, jak rovnici správně vyřešit. Rovnice tohoto typu mohou žáci vyřešit pouze s poznatky, které mají z různých matematických oblastí, či řeší úlohy úsudkem.

Když jsem se snažila hledat, na internetu a v učebnicích pro základní školy, slovní úlohy, které se řeší jednou rovnicí se dvěma neznámými, nepodařilo se mi jich příliš mnoho najít, proto mým cílem je shromáždit nalezené úlohy a především další slovní úlohy tohoto typu vytvořit.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část je rozdělena do dvou kapitol a v praktické části je kapitola jedna. V úvodu každé kapitoly jsem uvedla zdroje, ze kterých jsem pro její zpracování čerpala. V první kapitole jsou uvedeny potřebné poznatky, týkající se diofantovských rovnic se dvěma neznámými. Ve druhé kapitole popisuji různé způsoby řešení diofantovských rovnic se dvěma neznámými obecně a následně i na konkrétních příkladech. V praktické části jsem nejdříve uvedla jednu slovní úlohu, kterou jsem vyřešila všemi způsoby, které jsou uvedeny v teoretické části. Následně jsem zvolila tři metody k vyřešení takovýchto úloh a shromážděné a vytvořené slovní úlohy jsem vždy jednou z metod vyřešila. V poslední podkapitole jsou také mnou vytvořené slovní úlohy k procvičení, uvedla jsem i zkrácené řešitelské postupy s výsledky.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Přirozená a celá čísla, dělitelnost

Než se začneme zabývat konkrétními diofantovskými rovnicemi, sepíšeme poznatky, které budou v této práci používány. Informace obsažené v této kapitole jsou zpracovány podle zdrojů [1], [3], [8], [9].

Definice 1. *Číselné těleso* je uspořádaná trojice *(T, +, ·)*, kde T je neprázdná množina čísel obsahující aspoň dva různé prvky 0, 1, *(T, +)* je Abelova grupa s neutrálním prvkem 0, (T - $\{0\}$, $\cdot$) je Abelova grupa s neutrálním prvkem 1 a operace · je distributivní vzhledem k operaci $+$. Prvek 0 nazýváme *nulovým*, prvek 1 *jednotkovým prvkem* tělesa *(T, +, ·)*.

1.1 Přirozená čísla

Definice 2. *Peanova množina P* je každá neprázdná množina, ve které existuje zobrazení $f : P \to P$ přiřazující libovolnému prvku m prvek $f(m) = m^{'}$ takový, že

$$\exists 0 \in P \, \forall m \in P; m^{'} \neq 0; \tag{1.1}$$

$$\forall k, m \in P; (k^{'} = m^{'} \Rightarrow k = m); \tag{1.2}$$

$$\forall A \subset P; \{[0 \in A \wedge \forall x (x \in A \Rightarrow x^{'} \in A)] \Rightarrow A = P\}. \tag{1.3}$$

Prvek $m^{'}$ nazýváme *následníkem prvku* m, prvek m (pokud existuje) *předchůdcem prvku* $m^{'}$.

Definice 3. *Oborem přirozených čísel* s operacemi $+$ a $\cdot$ (označení $\mathbb{N}$) rozumíme každou Peanovu množinu, kde kromě (1.1) až (1.3) platí navíc podmínky

$$\forall n \in \mathbb{N}; n + 0 = n; \tag{1.4}$$

$$\forall k, m \in \mathbb{N}; k + m^{'} = (k + m)^{'}; \tag{1.5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; n \cdot 0 = 0; \tag{1.6}$$

$$\forall k, m \in \mathbb{N}; km^{'} = km + k. \tag{1.7}$$

1.1.1 Dělitelnost přirozených čísel

Definice 4. Buďte $a, b \in \mathbb{N}$. Říkáme, že *číslo a dělí číslo b*, jestliže existuje číslo $x \in \mathbb{N}$ takové, že *ax* = *b*. Číslo a nazýváme *dělitelem* čísla b, číslo *b násobkem* čísla a. Píšeme $a|b$. Tuto relaci nazýváme *dělitelností*.

Definice 5. Nechť a_1, a_2 $\ldots$, $a_n \in \mathbb{N}$. Číslo $u \in \mathbb{N}$ je *společný dělitel čísel* a_1, a_2 $\ldots$, a_n, jestliže $u|a_1$, $u|a_2$, $\ldots$, $u|a_n$. Číslo $d \in \mathbb{N}$ je *největší společný dělitel čísel* a_1, a_2, $\ldots$, a_n, jestliže je jejich společným dělitelem a současně je splněna podmínka

$$\forall d_1 \in \mathbb{N} : [d_1|a_1 \wedge d_1|a_2 \wedge \ldots \wedge d_1|a_n] \Rightarrow d_1|d.$$

Píšeme $d = NSD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, která nemají jiné společné dělitele kromě čísla 1, se nazývají *nesoudělná*. Mají-li tato čísla další společné dělitele, jsou *soudělná*.

1.2 Celá čísla

Celá čísla tvoří číselný obor $\mathbb{Z}$, který obsahuje všechna přirozená čísla jako svůj podobor a přitom v $\mathbb{Z}$ je pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ jednoznačně řešitelná rovnice $a + x = b$. Pro libovolné $b \in \mathbb{Z}$ nazýváme řešení rovnice $b + x = 0$ *číslem opačným* k číslu b a značíme je symbolem $-b$. Je zřejmé, že číslo opačné k $-b$ je b.

Každé celé y je tedy buď celé přirozené číslo, nula nebo číslo opačné k některému přirozenému číslu. Čísla z množiny přirozených čísel nazýváme *celými nezápornými čísly*. Čísla opačná k číslům přirozeným se nazývají čísla *záporná* a jejich množinu značíme $\mathbb{Z}^-$.

1.2.1 Dělitelnost celých čísel

Definice 6. Říkáme, že číslo $b \in \mathbb{Z}$ je dělitelem čísla $a \in \mathbb{Z}$ a označujeme $b|a$, právě když existuje takové číslo $q \in \mathbb{Z}$, že $a = bq$. Číslo q se nazývá podíl čísla a při dělení číslem b.

Definice 7. *Dělením se zbytkem* v množině $\mathbb{Z}$ nazýváme zobrazení, které každé uspořádané dvojici (a, b) celých čísel přiřazuje uspořádanou dvojici (q, r) celých čísel, přičemž platí

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Číslo q se nazývá částečný podíl a, b a číslo r je zbytkem dělení. Ve speciálním případě $r = 0$ mluvíme o dělení beze zbytku.

Definice 8. Společného dělitele celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, který je násobkem každého jiného jejich společného dělitele, nazýváme *největším společným dělitelem celých čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a značíme $NSD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Jestliže aspoň jedno číslo a_i pro $i = 1, \ldots, n$, je různé od 0, pak vždy existují dva největší společní dělitelé NSD_1, NSD_2, pro něž platí $NSD_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -NSD_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.3 Euklidův algoritmus

Označme a, b přirozená čísla, jejichž největší společný dělitel hledáme. Předpokládáme, že číslo a je větší než číslo b.

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \qquad 0 \le r_1 < b, \tag{1.8}$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < r_1, \tag{1.9}$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \qquad 0 \le r_3 < r_2, \tag{1.10}$$

$$\dots \tag{1.11}$$

$$r_k = r_{k+1} \cdot q_{k+2} + r_{k+2}, \qquad 0 \le r_{k+2} < r_{k+1}, \tag{1.12}$$

$$\dots \tag{1.13}$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + r_{n+1}, \qquad 0 \le r_{n+1} < r_n, \tag{1.14}$$

$$r_n = r_{n+1} \cdot q_{n+2} + r_{n+2}, \qquad 0 \le r_{n+2} < r_{n+1}, \tag{1.15}$$

$$r_{n+1} = r_{n+2} \cdot q_{n+3} + 0. \tag{1.16}$$

Tento postup končí vždy po konečném počtu kroků, jelikož se zbytky neustále zmenšují. Nyní ukážeme, že číslo r_{n+2} je největším společným dělitelem čísel a, b.

Abychom toto dokázali, musí číslo r_{n+2} dělit čísla a, b. Z rovnice (1.16) je jasné, že r_{n+2} dělí r_{n+1}. Z rovnice (1.15) se snažíme ukázat, že r_{n+2} dělí r_n.

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n+1} \cdot q_{n+2} + r_{n+2}, \\ r_{n+2} &= r_n - r_{n+1} \cdot q_{n+2}, \qquad | : r_{n+2} \\ 1 &= \frac{r_n}{r_{n+2}} - \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} \cdot q_{n+2}. \end{aligned}$$

Protože již víme, že r_{n+2} dělí r_{n+1}, je číslo $\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} \cdot q_{n+2}$ celé. Stejná podmínka proto platí i pro podíl $\frac{r_n}{r_{n+2}}$.
Totéž provedeme s rovnicí (1.14).

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + r_{n+1}, \qquad | : r_{n+2} \\ \frac{r_{n-1}}{r_{n+2}} &= \frac{r_n}{r_{n+2}} \cdot q_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}. \end{aligned}$$

Jelikož $\frac{r_n}{r_{n+2}} \cdot q_{n+1}$, $\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}$ jsou celá čísla, musí být i $\frac{r_{n-1}}{r_{n+2}}$ celé číslo. Tudíž platí, že r_{n+2} dělí r_{n-1}.

Tento postup opět budeme opakovat, dokud se nedostaneme k rovnici (1.9), ze které dostaneme že r_{n+2} dělí číslo b. Dle rovnice (1.8) dělí r_{n+2} i číslo a. Tedy r_{n+2} je společný dělitel čísel a, b.
Nechť d je společný dělitel čísel a, b. Pak d dělí také $r_1 = a - b \cdot q_1$ dle rovnice (1.8), z rovnice (1.9) také dělí $r_2 = b - r_1 \cdot q_2$, stejně až k $r_{n+2} = r_n - r_{n+1} \cdot q_{n+2}$. Proto je číslo r_{n+2} je největší společný dělitel čísel a, b.

Tento postup nazýváme Euklidovým algoritmem pro výpočet největšího společného dělitele dvou přirozených čísel.

Věta 1. ***Euklidův algoritmus.*** *Největším společným dělitelem dvou přirozených čísel je poslední nenulový zbytek v Euklidově algoritmu.*

1.4 Bezoutova rovnost

Věta 2. ***Bezoutova rovnost.*** *Nechť a, b jsou přirozená čísla. Pak existují celá čísla x, y taková, že $NSD(a, b) = xa + yb$.*

Důkaz. K důkazu této věty použijeme Euklidův algoritmus. Označme $r_{n+2} = z, z \in \mathbb{N}$.
Nyní použijeme rovnost (1.14) a (1.15) z Euklidova algoritmu:

$$r_n = r_{n+1} \cdot q_{n+2} + z,$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + r_{n+1}.$$

Vyjádříme zbytky z a r_{n+1}:

$$z = r_n - r_{n+1} \cdot q_{n+2},$$

$$r_{n+1} = r_{n-1} - r_n \cdot q_{n+1}.$$

Nyní dosadíme r_{n+1} do rovnice pro z.

$$z = r_n - (r_{n-1} - r_n \cdot q_{n+1}) \cdot q_{n+2},$$
$$z = r_n - r_{n-1} \cdot q_{n+2} + r_n \cdot q_{n+1} \cdot q_{n+2},$$
$$z = -r_{n-1} \cdot q_{n+2} + (1 + q_{n+1} \cdot q_{n+2}) \cdot r_n.$$

Tento postup opakujeme do té doby, než se dostaneme k rovnici ze zadání (1.8), ze které dostaneme rovnici $z = xa + yb$. □

Důsledek 1. Pokud největším společným dělitelem čísel a, b je číslo 1, potom platí
$1 = ax + by$.

1.5 Modulo

Definice 9. Nechť m je přirozené číslo. Na množině $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ definujme dvě binární operace, *sčítání a násobení modulo* m. *Součtem modulo* m, resp. *součinem modulo* m prvků $a, b \in \mathbb{Z}_m$ je nejmenší nezáporný zbytek při dělení obyčejného součtu, resp. obyčejného součinu celých čísel a, b číslem m. ([1], str. 20)

Například:

$$5 + 4 = 2 \pmod 7, \quad \text{protože} \quad 5 + 4 = 1 \cdot 7 + 2,$$
$$5 \cdot 4 = 6 \pmod 7, \quad \text{protože} \quad 5 \cdot 4 = 2 \cdot 7 + 6,$$
$$3 + 6 = 1 \pmod 8, \quad \text{protože} \quad 3 + 6 = 1 \cdot 8 + 1,$$
$$3 \cdot 6 = 2 \pmod 8, \quad \text{protože} \quad 3 \cdot 6 = 2 \cdot 8 + 2.$$

Uvedeme tabulky pro sčítání a odčítání modulo 5, to znamená tabulky binárních operací $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{Z}_5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Pro ostatní $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ lze tabulky sestavit stejným způsobem.

1.5.1 Kongruence na celých číslech

Definice 10. Jestliže rozdíl $a - b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ je dělitelný číslem $m \in \mathbb{N}$, říkáme, že *číslo* a *je kongruentní s číslem* b *podle modulu* m [stručně *kongruentní s* b *modulo* m] a píšeme $a \equiv b \mod m$.

Každá množina těch celých čísel, která při dělení číslem $m \in \mathbb{N}$ mají týž nejmenší nezáporný zbytek, se nazývá *zbytková třída podle modulu* m *[modulo* m*]* nebo *zbytková třída* mod m.

Kapitola 2

Diofantovské rovnice se dvěma neznámými a postupy řešení

Tato kapitola je zpracována na základě zdrojů [2], [5], [6], [10], [11].
V této části práce uvedeme diofantovské rovnice a ukážeme různé způsoby řešení diofantovských rovnic se dvěma neznámými. Úlohy jsou řešené nejprve obecně, následně jsou ilustrovány na konkrétních příkladech.

2.1 Diofantovské rovnice a jejich řešitelnost

Diofantovským rovnicím se podle Caldy ([2], str. 42) věnoval, již ve 3. století před Kristem, řecký matematik Diofantos.

Definice 11. *Algebraickou rovnicí* s n neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ rozumíme rovnici

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

jejíž levá strana $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a pravá strana $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou polynomy v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Řešením rovnice nazýváme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takovou, že po jejím dosazení do rovnice získáme pravdivý výrok.

Definice 12. *Diofantovskou rovnicí* o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ rozumíme algebraickou rovnici s celočíselnými koeficienty. Za její řešení považujeme pouze celočíselná řešení této algebraické rovnice.

Jelikož se v této práci zabýváme pouze diofantovskými rovnicemi se dvěma neznámými, uvedeme ještě následující definici.

Definice 13. *Lineární diofantovskou rovnicí se dvěma neznámými* x, y rozumíme algebraickou rovnici ve tvaru $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$. Řešením této rovnice je uspořádaná dvojice (x_0, y_0), pro kterou platí $ax_0 + by_0 = c$.

Definice 14. Diofantovskou rovnici nazýváme *homogenní*, pokud je její absolutní člen c roven nule. V opačném případě ji nazýváme *nehomogenní*.

Věta 3. *Diofantovská rovnice* $ax + by = c$ *je řešitelná právě tehdy, když NSD*$(a; b)|c$.

Důkaz. Věta má tvar ekvivalence, musíme tedy ověřit, zda platí obě implikace.
$NSD(a; b)$ označíme D.

a) Nejprve dokážeme, že pokud D dělí c, potom má rovnice řešení.
Čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ jsou nesoudělná, proto jejich největší společný dělitel je 1. Podle (Důsledek 1) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ takové, že:

$$1 = \alpha \cdot \frac{a}{D} + \beta \cdot \frac{b}{D}, \qquad | \cdot c \in \mathbb{Z}$$
$$c = a \cdot \frac{\alpha \cdot c}{D} + b \cdot \frac{\beta \cdot c}{D}.$$

Označíme $x_0 = \frac{\alpha \cdot c}{D}$ a $y_0 = \frac{\beta \cdot c}{D}$. Čísla x_0 a y_0 jsou celá, protože $D|c$. Přitom (x_0, y_0) je řešením rovnice $c = ax + by$.

b) Nyní dokážeme druhou implikaci. Pokud má rovnice řešení, pak D dělí c.
Řešení rovnice označíme (x_0, y_0), tj. platí $c = ax_0 + by_0$. Jestliže $D|a$ a $D|b$, potom i $D|(a \cdot x_0 + b \cdot y_0)$, z čehož dostáváme, že D dělí i c. □

2.1.1 Tvar řešení diofantovských rovnic

Uvažujme diofantovskou rovnici $ax + by = c$ a nechť největší společný dělitel čísel a, b je dělitelem čísla c. Předpokládejme, že uspořádaná dvojice (x_0, y_0) je řešením této rovnice. Pak každé celočíselné řešení rovnice $ax + by = c$ lze podle Caldy ([2], str. $45 - 46$) zapsat ve tvaru

$$x = x_0 - \frac{b}{\text{NSD}(a, b)} \cdot t \quad \wedge \quad y = y_0 + \frac{a}{\text{NSD}(a, b)} \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Proto je každá uspořádaná dvojice

$$(x_0 - \frac{b}{\text{NSD}(a, b)} \cdot t;\; y_0 + \frac{a}{\text{NSD}(a, b)} \cdot t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

řešením diofantovské rovnice $ax + by = c$.

2.2 Řešení diofantovské rovnice se dvěma neznámými pomocí Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnosti

V některých úlohách může nastat takový případ, že levá strana Bezoutovy rovnosti se nebude rovnat absolutnímu členu zadané diofantovské rovnice. Hledáme řešení rovnice se zadaným absolutním členem. To získáme tak, že obě strany Bezoutovy rovnosti vynásobíme vhodným číslem, aby se její levá strana rovnala absolutnímu členu zadané diofantovské rovnice.

Ukážeme obecně, že tento krok můžeme opravdu provést. Označme z největší společný dělitel čísel a, b. Pak existují $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ taková, že platí $z = a\alpha + b\beta$. Pokud platí Věta 3, pak z dělí c. Můžeme dále upravit:

$$z = a\alpha + b\beta, \qquad | \cdot \frac{c}{z} \tag{2.1}$$

$$c = a\frac{\alpha c}{z} + b\frac{\beta c}{z}. \tag{2.2}$$

Jelikož z dělí c a α, β jsou celá čísla, jsou oba zlomky v rovnici (2.2) celými čísly. Zlomek $\frac{\alpha c}{z}$ označíme x_0 a zlomek $\frac{\beta c}{z}$ označíme y_0. Řešením rovnice $ax+by = c$ je každá uspořádaná dvojice ve tvaru $(b - x_0 n; a + y_0 n), n \in \mathbb{Z}$.

Pokud tedy vyřešíme diofantovskou rovnici pomocí Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnosti a číslo z bude různé od absolutního členu diofantovské rovnice, vynásobíme celou Bezoutovu rovnost podílem čísel c a z.

Ukážeme použití Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnosti na konkrétním příkladu.

Příklad 1. Vyřešte diofantovskou rovnici $5x + 7y = 8$.

Řešení: Nejdříve ověříme podmínku řešitelnosti. NSD$(5; 7) = 1$ a 1 dělí číslo 8, proto je tato rovnice řešitelná. Dále postupujeme podle Euklidova algoritmu, jehož zápis potřebujeme pro výpočet Bezoutovy rovnosti:

$$7 = 5 \cdot 1 + 2, \qquad 1 = 5 - 2 \cdot 2, \tag{2.3}$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1, \qquad 1 = 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5), \tag{2.4}$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0, \qquad 1 = (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 5. \tag{2.5}$$

Jelikož absolutní člen diofantovské rovnice $5x + 7y = 8$ je 8, vynásobíme rovnici (2.5) číslem 8:

$$8 = -16 \cdot 7 + 24 \cdot 5.$$

Řešením diofantovské rovnice $5x + 7y = 8$ je tedy libovolná uspořádaná dvojice $(24 - 7n; -16 + 5n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.3 Řešení diofantovské rovnice se dvěma neznámými pomocí největšího společného dělitele

Algoritmus pro řešení největším společným dělitelem ukážeme nejprve pro homogenní rovnici $ax + by = 0$.

Předpokládáme, že čísla a, b jsou celá čísla a D je největší společný dělitel a, b.

$$ax + by = 0, \qquad | \cdot \frac{1}{D} \tag{2.6}$$

$$\frac{a}{D} \cdot x + \frac{b}{D} \cdot y = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{b}{D} \cdot y = -\frac{a}{D} \cdot x, \tag{2.8}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{b}{D}}{-\frac{a}{D}}. \tag{2.9}$$

Z rovnosti (2.9) dostáváme řešení v závislosti na libovolném celém parametru t ve tvaru:

$$x = \frac{b}{D} \cdot t \ \wedge \ y = -\frac{a}{D} \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 2. Vyřešte diofantovskou rovnici $5x + 7y = 0$.

Řešení: Pokud porovnáme obecnou diofantovskou rovnici $ax + by = 0$ se zadanou rovnicí, zjistíme, že $a = 5$, $b = 7$. NSD$(5, 7) = 1$. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice pro x, y.

$$x = \frac{b}{NSD} \cdot t, \qquad y = -\frac{a}{NSD} \cdot t,$$

$$x = \frac{7}{1} \cdot t, \qquad y = -\frac{5}{1} \cdot t,$$

$$x = 7t, \qquad y = -5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Řešením diofantovské rovnice $5x + 7y = 0$ je každá uspořádaná dvojice $(7t; -5t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Nyní ukážeme stejný postup pro rovnici $ax + by = c, c \neq 0$, která není homogenní. Opět předpokládáme, že čísla a, b, c jsou celá čísla. Největší společný dělitel čísel a, b označíme D. Rovnice $ax + by = c$ je řešitelná, právě když $D|c$.

Označme $x_0^{'}, y_0^{'}$ koeficienty v Bezoutově rovnosti (Věta 2). Platí:

$$D = ax_0^{'} + by_0^{'}, \qquad | \cdot (\frac{c}{D}) \tag{2.10}$$

$$D \cdot \frac{c}{D} = ax_0^{'} \cdot \frac{c}{D} + by_0^{'} \cdot \frac{c}{D}, \tag{2.11}$$

$$c = ax_0 + by_0, \tag{2.12}$$

kde $x_0 = x_0^{'} \cdot \frac{c}{D}$ a $y_0 = y_0^{'} \cdot \frac{c}{D}$. Jedním řešením diofantovské rovnice $ax + by = c$ je uspořádaná dvojice $(x_0; y_0)$.

(2.12) můžeme dále upravovat:

$$c = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{D} \cdot t - \frac{ab}{D} \cdot t, \qquad t \in \mathbb{Z},$$
$$c = a(x_0 + \frac{b}{D} \cdot t) + b(y_0 - \frac{a}{D} \cdot t).$$

x označme $x_0 + \frac{b}{D} \cdot t$ a y označme $y_0 - \frac{a}{D} \cdot t$. Pak všechna řešení nehomogenní diofantovské rovnice $ax + by = c$ jsou

$$x = x_0 + \frac{b}{D} \cdot t \quad \wedge \quad y = y_0 - \frac{a}{D} \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 3. Vyřešte diofantovskou rovnici $10x + 4y = 16$.

Řešení: $a = 10, b = 4, D(10, 4) = 2, \quad 2|16$, proto je rovnice řešitelná:

$$D = 10x_0^{'} + 4y_0^{'}, \qquad x_0^{'}, y_0^{'} \in \mathbb{Z}, \tag{2.13}$$
$$2 = 10 \cdot 1 + 4 \cdot (-2), \tag{2.14}$$

Jelikož je v zadané rovnici na pravé straně číslo 16, musíme rovnost (2.14) vynásobit číslem 8, čímž dostaneme rovnici:

$$16 = 10 \cdot 8 + 4 \cdot (-16) \Rightarrow x_0 = 8, y_0 = -16,$$

Pomocí x_0 a y_0 můžeme nyní vypočítat x, y.

$$x = x_0 + \frac{b}{D} \cdot t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{D} \cdot t,$$
$$x = 8 + 2t, \qquad y = -16 - 5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Řešením diofantovské rovnice $10x + 4y = 16$ je libovolná uspořádaná dvojice $(8 + 2t; -16 - 5t), t \in \mathbb{Z}$.

2.4 Řešení diofantovské rovnice se dvěma neznámými pomocí redukční metody

Tuto metodu opět nejdříve ukážeme obecně, následně uvedeme konkrétní příklad.
Chceme vyřešit diofantovskou rovnici $ax + by = c$. Protože rovnice je diofantovská, platí:

$$a, b, c, x, y \in \mathbb{Z},$$
$$a \neq 0 \wedge b \neq 0.$$

Jelikož řešíme jednu rovnici se dvěma neznámými, vyjádříme neznámou, u které má absolutní hodnota koeficientu menší hodnotu, v závislosti na druhé neznámé. Předpokládáme-li, že $a < b$, vyjádříme z rovnice neznámou x:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Protože $a < b$, existuje k celé kladné takové, že $k = b - a$. Vyjádření neznámé x upravíme:

$$x = \frac{c - (a + k) \cdot y}{a},$$
$$x = \frac{c - ay - ky}{a},$$
$$x = \frac{c - ky}{a} - \frac{ay}{a},$$
$$x = \frac{c - ky}{a} - y.$$

Jelikož x a y jsou celá čísla, je i $\frac{c-ky}{a} \in \mathbb{Z}$. Tento zlomek označíme t a následně ze získané rovnosti vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{c - ky}{a},$$
$$y = \frac{c - at}{k}.$$

Protože $y \in \mathbb{Z}$, pak výraz $c - at$ je celočíselným násobkem čísla k. Postup opakujeme do té doby, dokud se ve vyjádření neznámé vyskytuje zlomek. Podle Riemela (2017, str. 17) se tato metoda opírá o princip Eukleidova algoritmu, jelikož stejně jako v Euklidově algoritmu se i v redukční metodě vyskytují neúplné podíly a zbytky při postupném dělení. Proto lze po konečně mnoha krocích nalézt řešení.

Příklad 4. Vyřešte diofantovskou rovnici $3x + 5y = 17$.

Řešení: Největším společným dělitelem čísel 3 a 5 je číslo 1. Jelikož 1 dělí absolutní člen rovnice, je tato diofantovská rovnice řešitelná. Z rovnice vyjádříme neznámou x, jelikož její koeficient je menší než koeficient u neznámé y:

$$x = \frac{17 - 5y}{3},$$
$$x = 5 - y + \frac{2 - 2y}{3}.$$

Řešíme diofantovskou rovnici, tedy x a y jsou celá čísla. Proto je i $\frac{2-2y}{3}$ celé číslo. Tento zlomek položíme roven t a ze získané rovnice vyjádříme y:

$$t = \frac{2 - 2y}{3},$$
$$y = \frac{2 - 3t}{2},$$
$$y = 1 - t - \frac{t}{2},$$

Ve vyjádření pro y se opět vyskytl zlomek, proto položíme $u = \frac{t}{2}$. Odtud

$$t = 2u, \quad u \in \mathbb{Z}.$$

Nyní můžeme za t dosadit do rovnic pro x a y:

$$y = 1 - 2u - u = 1 - 3u,$$
$$x = 5 - (1 - 3u) + 2u = 4 + 5u.$$

Řešením této diofantovské rovnice je tedy uspořádaná dvojice $(4 + 5u; 1 - 3u)$, $u \in \mathbb{Z}$.

2.5 Řešení diofantovské rovnice se dvěma neznámými pomocí kongruence

Chceme vyřešit diofantovskou rovnici $ax + by = c$ pomocí kongruence. Předpokládejme, že je řešitelná, tj. NSD(a, b) dělí číslo c. Podle definice kongruence (Definice 10) platí, že

$$ax + by \equiv c \pmod{b},$$

Označme d zbytek při dělení čísla a číslem b, e zbytek při dělení čísla c číslem b. Protože existují $k, l \in \mathbb{Z}$ takové, že:

$$a = kb + d \qquad \wedge \qquad c = lb + e.$$

Potom:

$$\begin{aligned}(kb + d)x + by &\equiv c \pmod{b},\\ dx + 0y &\equiv c \pmod{b}.\end{aligned}$$

Protože je $c \equiv e \pmod{b}$, je také:

$$\begin{aligned}dx &\equiv e \pmod{b},\\ x &\equiv \frac{e}{d} \pmod{b}.\end{aligned}$$

Jelikož víme, že v diofantovské rovnici jsou x i y celá čísla, je celým číslem i $\frac{e}{d}$. Protože rovnici řešíme v modulo b, je řešením i každý b-násobek čísla $\frac{e}{d}$. Řešením diofantovské rovnice $ax + by = c$ [1] je x, pro které platí:

$$x = \frac{e}{d} + b \cdot k, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Pro zjištění hodnoty y dosadíme hodnotu x z rovnice (2.15) do diofantovské rovnice $ax + by = c$:

$$\begin{aligned}a \cdot (\frac{e}{d} + bk) + by &= c,\\ \frac{ae}{d} + abk + by &= c,\\ y &= \frac{c}{b} - \frac{ae}{bd} - ak,\\ y &= \frac{cd - ae}{bd} - ak.\end{aligned}$$

Řešením diofantovské rovnice $ax + by = c$ je každá uspořádaná dvojice $(\frac{e}{d} + bk; \frac{cd-ae}{bd} - -ak), k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 5. Vyřešte diofantovskou rovnici $4x + 3y = 190$.

[1] Analogicky pro rovnici $ax + by \equiv c \pmod{a}$.

Řešení: Největším společným dělitelem čísel 4 a 3 je číslo 1. Číslo 1 dělí absolutní člen diofantovské rovnice, číslo 190, proto je tato rovnice řešitelná. Lze si vybrat, kterou z hodnot x, y řešit jako první, podle toho řešíme v modulo 3 nebo v modulo 4.
Zde řešíme kongruencí v modulo 3:

$$
\begin{aligned}
4x + 3y &\equiv 190 && \pmod 3,\\
x + 0y &\equiv 1 && \pmod 3,\\
x &\equiv 1 && \pmod 3,\\
x &= 1 + 3k, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Hodnotu x dosadíme do diofantovské rovnice $4x + 3y = 190$:

$$
\begin{aligned}
4(1 + 3k) + 3y &= 190,\\
3y &= 186 - 12k,\\
y &= 62 - 4k.
\end{aligned}
$$

Řešením diofantovské rovnice $4x + 3y = 190$ je libovolná uspořádaná dvojice $(1 + 3k; 62 - 4k), k \in \mathbb{Z}$.

2.6 Řešení diofantovské rovnice se dvěma neznámými pomocí metody pokus a omyl

Přestože tato metoda není další oficiální metodou, je velmi běžná. S diofantovskými rovnicemi se setkávají studenti až na vysokých školách, ale pokud zadáme žákům na základní škole jednu diofantovskou rovnici se dvěma neznámými, budou ji mnozí řešit právě metodou pokus a omyl, to znamená, že budou zkoušet různé kombinace čísel, které odpovídají či neodpovídají zadání úlohy.
Při použití metody pokus a omyl nebude žák diofantovskou rovnici nijak upravovat, ale bude náhodně volit čísla pro jednu neznámou a zkoumat, zda pro toto zvolené číslo je možné získat celočíselnou hodnotu druhé neznámé tak, aby bylo splněno zadání úlohy. Dále si zvolí jiné číslo a opět zkouší, zda je možným řešením či nikoliv. Stejným způsobem pokračuje do té doby, než dojde k závěru, že našel všechna možná řešení.

Poznámka 1. Žáci také mohou použít podobnou metodu systematické experimentování. V této metodě místo náhodné volby hodnoty jedné neznámé volí čísla pro jednu neznámou systematicky podle nějakého pravidla. Nejčastěji je tímto pravidlem zvětšování hodnoty jedné neznámé vždy o jedna a zkoumání, kdy odpovídající hodnota druhé neznámé je celočíselná. V této práci obě tyto metody společně nazývám metoda pokus a omyl.

Příklad 6. Vyřešte diofantovskou rovnici $x + y = 1$.

Řešení: Řešíme jednu rovnici se dvěma neznámými, proto řešením rovnice musí být uspořádaná dvojice (x, y). Zajímá nás, kolik takových dvojic tuto diofantovskou rovnici splňuje. Jelikož $x \in \mathbb{Z}$ a také $y \in \mathbb{Z}$, do rovnice postupně dosazujeme 0, záporná a kladná čísla. Snadno se ověří, že řešením jsou uspořádané dvojice $(0; 1), (1; 0)$. Dále dosazujeme kladná čísla za x a dopočítáváme y: $(2; -1), (3; -2), (4; -3), (5; -4), (6; -5), (7; -6), \cdots$. Můžeme si všimnout, že když se souřadnice x zvětší o 1, souřadnice y se vždy o 1 naopak zmenší. Jelikož $x \in \mathbb{Z}$, můžeme dosazovat i záporná čísla: $(-1; 2), (-2; 3), (-3; 4), (-4; 5), (-5; 6)$, $(-6; 7)$. Zde se naopak x zmenšuje vždy o 1 a y se vždy o 1 zvětší. Řešením jsou tedy uspořádané dvojice $\{\cdots, (-3; 4), (-2; 3), (-1; 2), (0; 1), (1, 0), (2, -1), (3; -2), (4; -3)$, $\cdots\}$. Další řešení neexistují, protože by neplatila rovnost ze zadání $x + y = 1$. Například kdybychom dosadili do rovnice dvojici čísel $(-1; 3)$, dostaneme $-1 + 3 = 2$, což nesplňuje zadanou rovnici.

Poznámka 2. Někteří žáci si nejdříve vyjádří z rovnice jednu neznámou, například x ($x = 1 - y$), následně volí čísla za y a dopočítávají hodnotu x. Poté naopak vyjádří druhou neznámou ($y = 1 - x$) a opět hledají přípustné dvojice, které splňují řešení zadané diofantovské rovnice. Tento způsob již nezařazujeme do metody pokus a omyl.

Část II

Praktická část

Kapitola 3

Řešení slovních úloh pomocí diofantovských rovnic

Ke zpracování této kapitoly byly příklady čerpány ze zdrojů [4], [7], [12]. Ostatní zadání slovních úloh jsem vytvořila sama. V této kapitole je nejprve jedna slovní úloha řešena všemi postupy z předchozí kapitoly. Následně jsem se rozhodla úlohy řešit pomocí redukční metody, která se objevuje ve sbírkách pro základní školy. Pouze úlohy, ve kterých se objevují větší čísla, jsem řešila pomocí Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnosti a naopak pro úlohy, které považuji ve výpočtu za příliš jednoduché, jsem zvolila metodu pokus a omyl.

3.1 Slovní úloha vedoucí na diofantovskou rovnici řešená různými metodami

Příklad 7. Fotbalového turnaje se zúčastnily buď sedmičlenné nebo šestičlenné týmy. Kolik kterých týmů mohlo být, pokud na turnaji bylo 46 fotbalistů?

Řešení: Označme x počet sedmičlenných týmů, y počet šestičlenných týmů. Pomocí neznámých x a y vytvoříme diofantovskou rovnici $7x + 6y = 46$. Z této rovnice zjistíme, že $a = 7, b = 6$. Největším společným dělitelem těchto dvou čísel je 1 a píšeme $\mathrm{NSD}(7; 6) = 1$. Než začneme rovnici řešit, ověříme ještě podmínku, zda je úloha řešitelná. Jelikož 1 dělí absolutní člen diofantovské rovnice 46, úloha řešitelná je.

3.1.1 Euklidův algoritmus a Bezoutova rovnost

Abychom získali Bezoutovu rovnost, ze které následně určujeme možná řešení diofantovské rovnice, použijeme nejdříve Euklidův algortimus:

$$\begin{aligned} 7 &= 6 \cdot 1 + 1, &\qquad 1 &= 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6. \\ 6 &= 1 \cdot 6 + 0. \end{aligned}$$

Jelikož absolutní člen diofantovské rovnice je různý od 1, musíme získanou Bezoutovu rovnost vynásobit absolutním členem, kterým je v této úloze číslo 46.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6, \qquad & | \cdot 46 \\ 46 &= 46 \cdot 7 - 46 \cdot 6. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostaneme řešení diofantovské rovnice $7x + 6y = 46$, kterým je každá uspořádaná dvojice $(46 - 6n; -46 + 7n), n \in \mathbb{Z}$.
Nyní ještě musíme ověřit podmínky dané kontextem úlohy. Víme, že turnaje se zúčastnil alespoň jeden tým o sedmi členech a také alespoň jeden tým o šesti členech. Z tohoto důvodu musí být $x > 0$ a $y > 0$. Proto:

$$\begin{aligned} 46 - 6n &> 0, &\qquad -46 + 7n &> 0, \\ n &< \frac{46}{6}, & n &> \frac{46}{7}, \\ n &< 7,6, & n &> 6,6. \end{aligned}$$

Tyto dvě podmínky pro n musí být splněny najednou, proto jediným číslem n, které vyhovuje této slovní úloze, je $n = 7$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnic pro x a y:

$$\begin{aligned} x &= 46 - 6 \cdot 7 = 4, \\ y &= -46 + 7 \cdot 7 = 3. \end{aligned}$$

3.1.2 Největší společný dělitel

K vyřešení úlohy touto metodou využijeme teorie z podkapitoly 2.3.

$$D = ax_0^{'} + by_0^{'}, \tag{3.1}$$

$$1 = 7x_0^{'} + 6y_0^{'}, \tag{3.2}$$

Čísla $x_0^{'}$ a $y_0^{'}$ zvolíme tak, aby platila rovnost v rovnici (3.2). Dosadíme-li například $x_0^{'} = 1$ a $y_0^{'} = -1$, bude rovnost splněna:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 \cdot 1 + 6 \cdot (-1), \quad | \cdot 46 \\ 46 &= 7 \cdot 46 + 6 \cdot (-46). \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti vidíme, že $x_0 = 46$ a $y_0 = -46$, které dosadíme do vzorců (viz. kapitola 2.3):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{D}t, & y &= y_0 - \frac{a}{D}t, \\ x &= 46 + 6t, & y &= -46 - 7t, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nyní určíme, z jakého intervalu můžeme hodnoty pro t dosazovat. Jelikož $x > 0$ a $y > 0$, musí platit tyto podmínky najednou:

$$\begin{aligned} 46 + 6t &> 0, & -46 - 7t &> 0, \\ t &> -\frac{46}{6}, & t &< -\frac{46}{7}, \\ t &> -7,7, & t &< -6,57. \end{aligned}$$

Protože podmínky musí být splněny současně, je jediným možným řešením $t = -7$, které dosadíme do rovnic pro x a y:

$$\begin{aligned} x &= 46 + 6 \cdot (-7) = 4, \\ y &= -46 - 7 \cdot (-7) = 3. \end{aligned}$$

3.1.3 Redukční metoda

Z diofantovské rovnice $7x + 6y = 46$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$\begin{aligned} y &= \frac{46 - 7x}{6}, \\ y &= 7 - x + \frac{4 - x}{6}. \end{aligned}$$

Jelikož předpokládáme, že x je celé číslo, je celým číslem i zlomek $\frac{4-x}{6}$. Tento zlomek označíme t a následně ze získané rovnosti vyjádříme neznámou x:

$$t = \frac{4-x}{6},$$
$$x = 4 - 6t.$$

Hodnotu x dosadíme do rovnice pro y:

$$y = 7 - (4 - 6t) + \frac{4 - (4 - 6t)}{6},$$
$$y = 7 - 4 + 6t + t,$$
$$y = 3 + 7t.$$

Pokud by bylo $t < 0$, dostali bychom záporný počet šestičlenných týmů. Když bychom naopak použili $t > 0$ byl by záporný počet sedmičlenných týmů, což není dle podmínek ze zadání úlohy možné. Jedinou možností je $t = 0$, kterou dosadíme do rovnic pro x a y:

$$x = 4 - 6 \cdot 0 = 4,$$
$$y = 3 + 7 \cdot 0 = 3.$$

3.1.4 Kongruence

Z diofantovské rovnice $7x + 6y = 46$ zvolíme například modulo 7:

$$7x + 6y \equiv 46 \pmod{7}.$$

Nyní tuto diofantovskou rovnici upravíme. $7x$ je v modulo 7 kongruentní s 0, proto tento člen zmizí. $6y$ v modulo 7 je kongruentní s $-y$. Číslo $46 = 7 \cdot 6 + 4$, proto je kongruentní s číslem 4. Dostáváme tedy:

$$-y \equiv 4 \pmod{7}.$$

Jelikož úlohu řešíme v modulo 7, je řešením rovnice také každý sedminásobek výsledného čísla:

$$y \equiv -4 + 7k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nyní dosadíme výraz pro y do zadané diofantovské rovnice $7x + 6 = 46$:

$$\begin{aligned} 7x + 6(-4 + 7k) &= 46, \\ 7x - 24 + 42k &= 46, \\ x &= 10 - 6k. \end{aligned}$$

Řešením této diofantovské rovnice je libovolná uspořádaná dvojice $(10 - 6k; -4 + 7k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Omezíme-li se na zadání slovní úlohy, víme, že počet šestičlenných i sedmičlenných týmů musí být kladné číslo. Odkud:

$$\begin{aligned} x &> 0, & y &> 0, \\ 10 - 6k &> 0, & 7k - 4 &> 0, \\ k &< \frac{5}{3}, & k &> \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Těmto podmínkám vyhovuje pouze jedno $k = 1$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnic pro x, y:

$$\begin{aligned} x &= 10 - 6k = 10 - 6 = 4, \\ y &= -4 + 7k = -4 + 7 = 3. \end{aligned}$$

3.1.5 Pokus a omyl

Jelikož víme, že se turnaje zúčastnily sedmičlenné nebo šestičlenné týmy, nemůže být počet sedmičlenných ani šestičlenných týmů záporný, ani nula. Za neznámé x a y můžeme tedy dosazovat pouze kladná celá čísla.

Budeme zkoušet dosazovat jednotlivá celá kladná čísla a zjišťovat, zda jsou či nejsou řešení úlohy. Pokud by se turnaje účastnil pouze jeden sedmičlenný tým, zbylo by na počet šestičlenných týmu 39 fotbalistů. Číslo 39 však není dělitelné šesti, proto tato možnost není řešením úlohy. Pro další čísla postupujeme stejným způsobem. Pro přehlednost můžeme zapsat do tabulky, kde a je počet sedmičlenných týmů, b je počet zbylých účastníků a c je počet šestičlenných týmů:

a	b	c
1	$46 - 7 = 39$	$39 : 6 = 6,5$
2	$46 - 14 = 32$	$32 : 6 = 5,3$
3	$46 - 21 = 25$	$25 : 6 = 4,2$
4	$46 - 28 = 18$	$18 : 6 = 3$
5	$46 - 35 = 11$	$11 : 6 = 1,8$
6	$46 - 42 = 4$	$4 : 6 = 0,7$
7	$46 - 49 = -3$	$nelze$

Z tabulky vidíme, že zadání vyhovuje pouze jediné řešení, kde vychází celé kladné číslo pro sedmičlenné i šestičlenné týmy.

Odpověď: Fotbalového turnaje se zúčastnily čtyři sedmičlenné a tři šestičlenné týmy.

3.2 Slovní úlohy vedoucí na diofantovské rovnice řešené Euklidovým algoritmem a Bezoutovou rovností

Příklad 8. Zdeněk naložil hromadu dřeva, která byla připravena k odvozu do sběrného dvora, o hmotnosti $39\ 562$ gramů. Samostatné prkno váží 974 gramů. Prkno, na kterém jsou přidělané dva panty, váží $1\ 345$ gramů. Kolik bylo kterých prken?

Řešení: Označme x počet prken s panty, y počet prken bez pantů. Z kontextu úlohy určíme diofantovskou rovnici $1\ 345x + 974y = 39\ 562$, na jejím základě ověříme podmínku řešitelnosti. Z rovnice vidíme, že $a = 1\ 345$, $b = 974$. Největším společným dělitelem těchto dvou čísel je číslo 1. Jelikož jednička dělí i absolutní člen diofantovské rovnice, je tato úloha řešitelná. K vyřešení úlohy nejdříve použijeme Euklidův algoritmus a následně Bezoutovu rovnost:

$$\begin{aligned}
1\,345 &= 974 \cdot 1 + 371, & 1 &= 93 - 46 \cdot 2,\\
974 &= 371 \cdot 2 + 232, & 1 &= 93 - (139 - 93 \cdot 1) \cdot 2,\\
371 &= 232 \cdot 1 + 139, & 1 &= 3 \cdot 93 - 2 \cdot 139,\\
232 &= 139 \cdot 1 + 93, & 1 &= 3 \cdot (232 - 1 \cdot 139) - 2 \cdot 139,\\
139 &= 93 \cdot 1 + 46, & 1 &= 3 \cdot 232 - 5 \cdot 139,\\
93 &= 46 \cdot 2 + 1, & 1 &= 3 \cdot 232 - 5 \cdot (371 - 1 \cdot 232),\\
46 &= 1 \cdot 46 + 0. & 1 &= 8 \cdot 232 - 5 \cdot 371,\\
& & 1 &= 8 \cdot (974 - 2 \cdot 371) - 5 \cdot 371,\\
& & 1 &= 8 \cdot 974 - 21 \cdot 371,\\
& & 1 &= 8 \cdot 974 - 21 \cdot (1\,345 - 1 \cdot 974),\\
& & 1 &= 29 \cdot 974 - 21 \cdot 1\,345,\\
& & 1 &= -21 \cdot 1\,345 + 29 \cdot 974.
\end{aligned}$$

V diofantovské rovnici $1\,345x + 974y = 39\,562$ je absolutní člen různý od 1, proto musíme poslední vzniklou rovnici vynásobit tímto absolutním členem:

$$\begin{aligned}
1 &= -21 \cdot 1\,345 + 29 \cdot 974, \qquad | \cdot 39\,562\\
39\,562 &= -830\,802 \cdot 1\,345 + 1\,147\,298 \cdot 974.
\end{aligned}$$

Z této rovnice už můžeme určit řešení zadané diofantovské rovnice, kterým je každá uspořádaná dvojice $(-830\,802 - 974n; 1\,147\,298 + 1\,345n), n \in \mathbb{Z}$. Nyní se vrátíme k zadání úlohy a musíme tyto uspořádané dvojice omezit pouze na ty, které vyhovují kontextu slovní úlohy. Jelikož víme, že Zdeněk naložil jak prkna s panty, tak prkna bez pantů, musí obě hodnoty x a y být kladné. Proto:

$$\begin{aligned}
-830\,802 - 974n &> 0, & 1\,147\,298 + 1\,345n &> 0,\\
974n &< -830\,802, & 1\,345n &> -1\,147\,298,\\
n &< -852{,}98, & n &> -853{,}01.
\end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu vidíme, že úloha má řešení pro jediné n, a to $n = -853$. Tuto hodnotu dosadíme do řešení diofantovské rovnice:

$$x = -830\,802 - 974 \cdot (-853) = 20,$$
$$y = 1\,147\,298 + 1\,345 \cdot (-853) = 13.$$

Odpověď: Prken s panty, které Zdeněk naložil, bylo dvacet a prken bez pantů bylo 13.

Příklad 9. Ze špatně čitelné účtenky jsme zjistili, že byly kupovány dva druhy zboží: hydraulický zvedák stranový v ceně 2 590 Kč za kus a přídavná světla mlhová v ceně 670 Kč za kus. Celková cena nákupu byla 59 000 Kč. Kolik kusů kterého zboží bylo zakoupeno? (Upraveno z Hejný, 2000, str. 43)

Řešení: Označme x počet zvedáků, y počet světel. Díky těmto neznámým a kontextu slovní úlohy můžeme vytvořit diofantovskou rovnici $2\,590x + 670y = 59\,000$. V této rovnici $a = 2\,590, b = 670$. Jejich největší společný dělitel je 10. Tato úloha je řešitelná, protože 10 dělí absolutní člen rovnice 59 000. K nalezení řešení použijeme Euklidův algoritmus a následně Bezoutovu rovnost:

$$2\,590x + 670y = 59\,000, \qquad |:10$$
$$259x + 67y = 5\,900.$$

$$\begin{aligned}
259 &= 67 \cdot 3 + 58, & 1 &= 1 \cdot 9 - 4 \cdot 2,\\
67 &= 58 \cdot 1 + 9, & 1 &= 1 \cdot 9 - 2 \cdot (58 - 9 \cdot 6),\\
58 &= 9 \cdot 6 + 4, & 1 &= 13 \cdot 9 - 2 \cdot 58,\\
9 &= 4 \cdot 2 + 1, & 1 &= 13 \cdot (67 - 58 \cdot 1) - 2 \cdot 58,\\
4 &= 1 \cdot 4 + 0. & 1 &= 13 \cdot 67 - 15 \cdot 58,\\
 & & 1 &= 13 \cdot 67 - 15 \cdot (259 - 3 \cdot 67),\\
 & & 1 &= 58 \cdot 67 - 15 \cdot 259.
\end{aligned}$$

Jelikož je absolutní člen diofantovské rovnice různý od 1, musíme získanou rovnost vynásobit jejím absolutním členem, kterým je číslo $5\ 900$:

$$1 = 58 \cdot 67 - 15 \cdot 259, \qquad | \cdot 5\ 900$$
$$5\ 900 = -88\ 500 \cdot 259 + 342\ 200 \cdot 67.$$

Z poslední rovnice získáme řešení diofantovské rovnice, jímž je libovolná uspořádaná dvojice $(-88\ 500 - 67n; 342\ 200 + 259n), n \in \mathbb{Z}$.
Nyní použijeme omezení daná kontextem úlohy. Jelikož víme, že byl koupen alespoň jeden zvedák a alespoň jedna světla, nemůže být x ani y nulové (ani záporné). Platí tedy, že $x > 0$ a $y > 0$. Odtud:

$$-88\ 500 - 67n > 0, \qquad\qquad 342\ 200 + 259n > 0,$$
$$n < -1\ 320,9, \qquad\qquad n > -1\ 321,24.$$

Tyto dvě podmínky pro n musí být splněny zároveň, proto n může být pouze jediné číslo $n = -1\ 321$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnic pro x a y:

$$x = -88\ 500 - 67n = -88\ 500 + 67 \cdot (-1\ 321) = 7,$$
$$y = 342\ 200 + 259n = 342\ 200 + 259 \cdot (-1\ 321) = 61.$$

Odpověď: Koupeno bylo 7 hydraulických zvedaků stranových a 61 přídavných mlhových světel.

Příklad 10. Aneta dnes zkonzumovala jídlo s energetickou hodnotou $2\ 811$ kcal. Za půl hodiny cvičení spálí 233 kcal a za půl hodiny běhu 352 kcal. Jak dlouho by Aneta musela cvičit a běhat, aby spálila denní příjem kcal?

Řešení: Označme x počet půlhodin cvičení, y počet půlhodin běhu. Tuto slovní úlohu řeší diofantovská rovnice $233x + 352y = 2\ 811$. Z této rovnice víme, že $a = 233, b = 352$. Největší společný dělitel a, b je číslo jedna. Tato diofantovská rovnice je řešitelná, jelikož číslo jedna dělí i absolutní člen rovnice $2\ 811$. Abychom vyhledali řešení této rovnice, použijeme nejdříve Euklidův algoritmus a poté Bezoutovu rovnost:

$$\begin{aligned} 352 &= 233 \cdot 1 + 199, & 1 &= 5 - 4 \cdot 1, \\ 233 &= 119 \cdot 1 + 114, & 1 &= 5 - 1 \cdot (114 - 5 \cdot 22), \\ 119 &= 114 \cdot 1 + 5, & 1 &= 23 \cdot 5 - 1 \cdot 114, \\ 114 &= 5 \cdot 22 + 4, & 1 &= 23 \cdot (119 - 1 \cdot 114) - 1 \cdot 114, \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1, & 1 &= 23 \cdot 119 - 24 \cdot 114, \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0. & 1 &= 23 \cdot 119 - 24 \cdot (233 - 1 \cdot 119), \\ & & 1 &= 47 \cdot 119 - 24 \cdot 233, \\ & & 1 &= 47 \cdot (352 - 1 \cdot 233) - 24 \cdot 233, \\ & & 1 &= 47 \cdot 352 - 71 \cdot 233. \end{aligned}$$

Absolutním členem diofantovské rovnice je číslo 2 811, proto poslední rovnici tímto číslem vynásobíme:

$$2\,811 = -199\,581 \cdot 233 + 132\,117 \cdot 352.$$

Z této rovnice již můžeme určit řešení diofantovské rovnice $233x + 352y = 2\,811$, kterým je každá uspořádaná dvojice $(-19\,981 - 352n; 132\,117 + 233n), n \in \mathbb{Z}$.

K dořešení slovní úlohy ještě musíme určit, jaké hodnoty parametr n může dosahovat, aby počty půlhodin cvičení a běhu vyšly celé kladné nebo nula:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & y &\geq 0, \\ -199\,581 - 352n &\geq 0, & 132\,117 + 233n &\geq 0, \\ n &\leq -566,99, & n &\geq -567,03. \end{aligned}$$

Obě tyto podmínky pro n musí být splněny najednou, proto jedinou možnou variantou je $n = -567$. Toto n dosadíme do rovnic pro x a y:

$$x = -199\,581 - 352 \cdot (-567) = 3,$$
$$y = 132\,117 + 233 \cdot (-567) = 6.$$

Odpověď: Aby Aneta spálila denní příjem 2 811 kcal, musela by hodinu a půl cvičit a tři hodiny běhat.

Příklad 11. Na stavbu pergoly byly použity dva druhy latí. Menší druh latí měl plochu $1\ 375$ cm^2 a větší druh latí $2\ 075$ cm^2, celková plocha pergoly je $672\ 250$ cm^2 latí. Kolik kterých latí mohlo být na stavbu použito?

Řešení: Označme x počet menších latí a y větších latí. Pomocí podmínek ze zadání vytvoříme diofantovskou rovnici $1\,375x + 2\,075y = 672\,250$ a nejdříve ověříme její řešitelnost. $a = 1\ 375, b = 2\ 075$ a největším společným dělitelem čísel a, b je číslo 1. Jelikož absolutní člen $672\ 250$ je dělitelný číslem 1, je tato diofantovská rovnice řešitelná a vyřešíme ji pomocí Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnosti:

$$1375x + 2075y = 672\,250, \qquad | : 25$$

$$55x + 83y = 26\,890.$$

$$\begin{aligned} 83 &= 55 \cdot 1 + 28, & 1 &= 28 - 27 \cdot 1,\\ 55 &= 28 \cdot 1 + 27, & 1 &= 28 - (55 - 28 \cdot 1) \cdot 1,\\ 28 &= 27 \cdot 1 + 1, & 1 &= 2 \cdot 28 - 1 \cdot 55,\\ 27 &= 1 \cdot 27 + 0. & 1 &= 2 \cdot (83 - 1 \cdot 55) - 1 \cdot 55,\\ & & 1 &= 2 \cdot 83 - 3 \cdot 55. \end{aligned}$$

Absolutním členem diofantovské rovnice $55x + 83y = 26\,890$ je číslo $26\,890$, proto poslední rovnici tímto číslem vynásobíme:

$$26\,890 = -80\,670 \cdot 55 + 53\,780 \cdot 83.$$

Řešením diofantovské rovnice $55x + 83y = 26\,890$ je každá uspořádaná dvojice $(-80\,670 - 83n; 53\,780 + 55n), n \in \mathbb{Z}$.

Nyní musíme ještě zohlednit podmínky, dané kontextem zadání slovní úlohy:

$$\begin{aligned} x &> 0, & y &> 0,\\ -80\,670 - 83n &> 0, & 53\,780 + 55n &> 0,\\ n &< -971{,}9, & n &> -977{,}8. \end{aligned}$$

Jelikož podmínky musí být splněny najednou, dostáváme 6 možností: $n \in \{-972; -973; -974; -975; -976; -977\}$. Tyto hodnoty dosadíme do rovnic pro x a y.

Odpověď: K postavení pergoly molo být použito 6 menších a 320 větších latí, 89 menších a 265 větších latí, 172 menších a 210 větších latí, 255 menších a 155 větších latí, 338 menších a 100 větších latí nebo 421 menších a 45 větších latí.

Příklad 12. Klára s Tomášem se domluvili, že pojedou na rozhlednu. Když dorazili na místo, zjistili, že na vrchol rozhledny vede spoustu schodů. Rozhodli se, že je všechny spočítají, a oba došli k číslu 545. Také si všimli, že vždy po 25 nebo 28 schodech jsou odpočívadla. Kolik je odpočívadel po 25 schodech a kolik po 28 schodech?

Řešení: Označme x počet odpočívadel, která jsou po 25 schodech, a y počet odpočívadel, která jsou po 28 schodech. Nyní sestavíme diofantovskou rovnici $25x + 28y = 545$ a ověříme, zda je řešitelná. Z rovnice vidíme, že $a = 25, b = 28$. Největším společným dělitelem těchto dvou čísel je číslo 1 a protože číslo 1 dělí i absolutní člen diofantovské rovnice 545, je tato rovnice řešitelná. K jejímu vyřešení použijeme Euklidův algoritmus a Bezoutovu rovnost:

$$\begin{aligned} 28 &= 25 \cdot 1 + 3, & 1 &= 25 - 3 \cdot 8, \\ 25 &= 3 \cdot 8 + 1, & 1 &= 25 - (28 - 1 \cdot 25) \cdot 8, \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0, & 1 &= 9 \cdot 25 - 8 \cdot 28. \end{aligned}$$

Jelikož absolutní člen diofantovské rovnice $25x + 28y = 545$ není 1, ale 545, vynásobíme poslední získanou rovnici číslem 545:

$$545 = 4\,905 \cdot 25 - 4\,360 \cdot 28.$$

Řešením diofantovské rovnice $25x + 28y = 545$ je každá uspořádaná dvojice $(4\,905 - 28n; -4\,360 + 25n), n \in \mathbb{Z}$. Nyní se vrátíme k zadání slovní úlohy a zjistíme, pro která n budou řešení vyhovovat kontextu:

$$\begin{aligned} x &> 0, & y &> 0, \\ 4\,905 - 28n &> 0, & -4\,360 + 25n &> 0, \\ n &< 175{,}18, & n &> 174{,}4. \end{aligned}$$

Z těchto podmínek dostáváme jediné možné celé $n = 175$. Tuto hodnotu dosadíme do řešení diofantovské rovnice:

$$x = 4\,905 - 28 \cdot 175 = 5,$$
$$y = -4\,360 + 25 \cdot 175 = 15.$$

Odpověď: Odpočívadel po 25 schodech je při cestě na rozhlednu pět a odpočívadel po 28 schodech je patnáct.

3.3 Slovní úlohy vedoucí na diofantovské rovnice řešené redukční metodou

Příklad 13. Uhlí o celkové hmotnosti 170 tun bylo naloženo do vagonů dvou druhů: o nosnosti 20 tun a o nosnosti 30 tun. Určete, kolik bylo kterých vagonů, jestliže byly všechny plně naloženy. (Krupka, 2002, str. 263)

Řešení:

Označme x počet vagonů o nosnosti 20 tun, y počet vagonů o nosnosti 30 tun. Podle podmínek ze zadání sestavíme diofantovskou rovnici $20x + 30y = 170$. V této rovnici je $a = 20, b = 30$. Největší společný dělitel těchto dvou čísel je 10. Rovnice je řešitelná, protože číslo 10 dělí i pravou stranu rovnice – číslo 170. Z diofantovské rovnice $20x+30y = = 170$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{170 - 30y}{20},\\
x &= 8 - y + \frac{10 - 10y}{20},\\
x &= 8 - y + \frac{1 - y}{2}.
\end{aligned}
$$

Aby x bylo celé číslo, požadujeme, aby i zlomek $\frac{1-y}{2}$ byl celé číslo. Označíme ho t a následně vyjádříme neznámou y:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1 - y}{2},\\
y &= 1 - 2t.
\end{aligned}
$$

Jelikož je t celé číslo, je i y celé číslo. Do rovnice pro x dosadíme výraz y:

$$
\begin{aligned}
x &= 8 - (1 - 2t) + \frac{1 - (1 - 2t)}{2},\\
x &= 8 - 1 + 2t + t,\\
x &= 7 + 3t,
\end{aligned}
$$

Řešením diofantovské rovnice $20x + 30y = 170$ je každá uspořádaná dvojice $(7 + 3t;$ $1 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Jelikož však počet vagonů musí být kladné číslo, musíme zohlednit ještě tuto podmínku. Pokud by bylo $t > 0$, dostali bychom záporný počet vagonů o nosnosti

30 tun. Pokud by bylo $t < -2$, byl by záporný počet vagonů o nosnosti 20 tun. Řešením této slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(7 + 3t; 1 - 2t)$, $t \in \{-2; -1; 0\}$. Konkrétně $(1; 5), (4; 3), (7; 1)$.

Odpověď: Vagon o nosnosti 20 tun byl jeden, vagonů o nosnosti 30 tun bylo 5. (Ostatní řešení viz předchozí odstavec).

Příklad 14. Vstupenky na dětské představení do divadla stály 11 Kč pro dospělé a 4 Kč pro děti. Na vstupném bylo vybráno 328 Kč. Kolik dětí a kolik dospělých bylo v divadle? (Krupka, 2002, str. 263)

Řešení: Označíme x počet vstupenek pro dospělé, y počet vstupenek pro děti. Pomocí neznámých sestavíme diofantovskou rovnici $11x + 4y = 328$, ze které vyjádříme neznámou s menším koeficientem. Nejdříve ještě ověříme řešitelnost této rovnice. Největším společným dělitelem čísel $a = 11, b = 4$ je číslo 1. Rovnice je řešitelná, protože číslo 1 dělí absolutní člen 328.

$$y = \frac{328 - 11x}{4},$$
$$y = 82 - 2x - \frac{3x}{4}.$$

Víme, že y je celé číslo, proto je celým číslem i $\frac{3x}{4}$. Zlomek označíme t ($t \in \mathbb{Z}$) a vyjádříme neznámou x:

$$t = -\frac{3x}{4}, \tag{3.3}$$
$$x = -\frac{4t}{3}. \tag{3.4}$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i x je celé číslo. Jelikož je v rovnici (3.4) stále zlomek, označíme $\frac{t}{3} = u$ ($u \in \mathbb{Z}$). Tuto neznámou u dosadíme do rovnice (3.4), ze které dostaneme rovnost $x = -4u$. Výraz x dosadíme do rovnice pro neznámou y:

$$y = 82 - 2(-4u) - \frac{3(-4u)}{4},$$
$$y = 82 + 8u + 3u,$$
$$y = 82 + 11u.$$

Řešením diofantovské rovnice $11x+4y=328$ je každá uspořádaná dvojice $(-4u; 82+11u)$, $u \in \mathbb{Z}$. Musíme si však uvědomit, jaké hodnoty může nabýt počet dospělých i dětí. Pokud by u bylo kladné číslo, počet dospělých by byl záporný, což není možné. Též není možné, aby bylo $u < -7$, protože bychom dostali záporný počet dětí. Řešením této slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(-4u; 82+11u), u \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Konkrétní dvojice jsou $(28; 5), (24; 16), (20; 27), (16; 38), (12; 49), (8; 60), (4; 71), (0; 82)$

Odpověď: V divadle bylo například 28 dospělých a 5 dětí. (Ostatní řešení viz předchozí odstavec).

Příklad 15. 57 litrů vína je třeba rozlít do pětilitrových a sedmilitrových demižonů. Kolik pětilitrových a kolik sedmilitrových použijeme, jestliže mají být všechny plné? (Krupka, 2002, str. 263)

Řešení: Označíme x počet pětilitrových demižonů, y počet sedmilitrových demižonů. Pomocí neznámých vytvoříme diofantovskou rovnici $5x + 7y = 57$. Tato rovnice je řešitelná, protože největší společný dělitel čísel $a = 5, b = 7$ je číslo 1 a toto číslo dělí také absolutní člen rovnice 57. Z této diofantovské rovnice $5x + 7y = 57$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{57 - 7y}{5},$$
$$x = 11 - y + \frac{2 - 2y}{5}.$$

Číslo x je celé číslo, tudíž zlomek $\frac{2-2y}{5}$ je také celé číslo. Tento zlomek položíme roven celému číslu t a ze získané rovnice vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{2 - 2y}{5},$$
$$y = \frac{2 - 5t}{2},$$
$$y = 1 - 2t - \frac{t}{2}.$$

Jelikož řešení diofantovské rovnice jsou celočíselná, položíme $u = \frac{t}{2}$ a dostaneme:

$$y = 1 - 4u - u,$$
$$y = 1 - 5u.$$

Do rovnice pro neznámou x dosadíme výraz y:

$$x = 11 - (1 - 5u) + \frac{2 - 2(1 - 5u)}{5},$$

$$x = 11 - 1 + 5u + 2u,$$

$$x = 10 + 7u.$$

Řešením diofantovské rovnice $5x + 7y = 57$ je libovolná uspořádaná dvojice $(10 + 7u; 1 - 5u), u \in \mathbb{Z}$. Počet pětilitrových i sedmilitrových demižonů musí být kladné číslo. V případě, že by bylo $u > 0$, dostali bychom záporný počet sedmilitrových demižonů. Stejný problém by nastal s počtem pětilitrových demižonů, pokud by bylo $u < -1$. Řešením slovní úlohy je každá uspořádaná dvojice $(10+7u; 1-5u), u \in \{-1; 0\}$. Všechny podmínky slovní úlohy tedy splňují pouze 2 možnosti.

Odpověď: K rozlití 57 litrů vína použijeme 3 pětilitrové a 6 sedmilitrových demižonů nebo 10 pětilitrových a 1 sedmilitrový demižon.

Příklad 16. Karel měl v peněžence samé pětikoruny, v pokladničce pouze koruny a chtěl zjistit, kde má více peněz. Když od částky z peněženky odečetl částku z pokladničky, vyšlo mu -3. Kolik měl kterých mincí?

Řešení: Označíme x počet pětikorun a y počet korun. Pomocí těchto neznámých sestavíme diofantovskou rovnici $5x - y = -3$. Tato rovnice je řešitelná, protože největší společný dělitel čísel $a = 5, b = -1$ dělí také absolutní člen rovnice -3. Z diofantovské rovnice $5x - y = -3$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$y = 3 + 5x.$$

Jelikož ve vyjádřené neznámé y nemáme žádný zlomek, můžeme úlohu vyřešit již v tomto kroku. Řešením diofantovské rovnice $5x - y = -3$ je libovolná uspořádaná dvojice $(x; 3 + 5x), x \in \mathbb{Z}$. Slovní úloze však vyhovují pouze čísla x z množiny kladných čísel, počet mincí nemůže být záporné číslo, ani nula. Řešením slovní úlohy je libovolná uspořádaná dvojice $(x; 3 + 5x), x \in \mathbb{N}$. Konkrétně: $\{(1; 8), (2; 13), (3; 18), (4; 23), (5; 28), \cdots\}$.

Odpověď: Karel mohl mít například jednu pětikorunu a osm korun, dvě pětikoruny a třináct korun nebo tři pětikoruny a osmnáct korun. (Ostatní řešení viz předchozí odstavec.)

Příklad 17. Na dětském táboře jsou k ubytování dětí menší a větší chatky. Do menších chatek je možno ubytovat 4 děti a do větších chatek 6 dětí. Kolik je kterých chatek, když na tábor může najednou přijet 290 dětí a tím bude tábor plně obsazen? (Uvažujeme, že chlapci mohou spát spolu s dívkami.)

Řešení: Označíme x počet menších chatek, y počet větších chatek. Pomocí těchto neznámých a kontextu úlohy vytvoříme diofantovskou rovnici $4x + 6y = 290$ a ověříme její řešitelnost. Největším společným dělitelem čísel $a = 4, b = 6$ je číslo 2, které dělí také absolutní člen rovnice 290. Z tohoto důvodu je diofantovská rovnice $4x + 6y = 290$ řešitelná a vyjádříme z ní neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{290 - 6y}{4},$$
$$x = 72 - y + \frac{1 - y}{2}.$$

Číslo x je celé, proto zlomek $\frac{1-y}{2}$ je také celý. Zlomek $\frac{1-y}{2}$ označíme t a následně vyjádříme y:

$$t = \frac{1 - y}{2},$$
$$y = 1 - 2t.$$

Jelikož řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i y je celé číslo. Za y dosadíme do rovnice pro neznámou x:

$$x = 72 - (1 - 2t) + \frac{1 - (1 - 2t)}{2},$$
$$x = 72 - 1 + 2t + t,$$
$$x = 71 + 3t.$$

Řešením diofantovské rovnice $4x + 6y = 290$ je každá uspořádaná dvojice $(71 + 3t; 1 - 2t), t \in \mathbb{Z}$. Jelikož ale předpokládáme, že na táboře nějaké chatky určitě stojí, musíme vyloučit takové případy, kdy by počet chatek byl záporné číslo. Úloha by nedávala smysl pro $t > 0$, protože by byl počet chatek pro 6 dětí záporný. Stejně tak pro $t < -23$ bychom dostali záporný počet chatek pro 4 děti. Pro ostatní t je úloha řešitelná. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(71 + 3t; 1 - 2t), t \in \{-23; -22; \cdots ; -1; 0\}$.

Odpověď: Na táboře je například 71 čtyřpostelových chatek a 1 šestipostelová, 68 čtyřpostelových a 3 šestipostelové nebo 65 čtyřpostelových a 5 šestipostelových.

Příklad 18. Ředidlo do syntetických barev se prodávalo v lahvích s objemem $0,4$ l nebo $0,7$ l. Natěrač si koupil několik lahví ředidla s objemem $0,4$ l a několik lahví s objemem $0,7$ l. Objem ředidla ve všech lahvích, které sis koupil, byl $12,5$ l. Kolik lahví s objemem $0,4$ l a kolik s objemem $0,7$ l si natěrač koupil? (Trejbal, 1999, str. 7)

Řešení: Označme x počet lahví s objemem $0,4$ l, y počet lahví s objemem $0,7$ l. Na základě kontextu úlohy sestavíme rovnici $0,4x + 0,7y = 12,5$. Obě strany rovnice vynásobíme číslem 10. Dostáváme diofantovskou rovnici $4x + 7y = 125$, která má stejnou množinu řešení jako původní rovnice. Největším společným dělitelem čísel $a = 4, b = 7$ je číslo 1. Protože číslo 1 dělí i absolutní člen diofantovské rovnice, je rovnice řešitelná. Z diofantovské rovnice $4x + 7y = 125$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{125 - 7y}{4},$$
$$x = 31 - y + \frac{1 - 3y}{4}.$$

Protože x je celé číslo, je i zlomek $\frac{1-3y}{4}$ celým číslem. Označme zlomek t a z rovnice vyjádříme y:

$$t = \frac{1 - 3y}{4},$$
$$y = \frac{1 - 4t}{3},$$
$$y = -t + \frac{1 - t}{3}.$$

Jelikož y je celé číslo a ve vyjádření pro y je opět zlomek, postup zopakujeme znovu. Zlomek $\frac{1-t}{3}$ označme u:

$$u = \frac{1 - t}{3},$$
$$t = 1 - 3u.$$

Abychom dostali možné hodnoty x a y, které řeší diofantovskou rovnici $4x + 7y = 125$, postupně dosadíme získané výrazy vždy do předchozí rovnice:

$$y = -1 + 3u + \frac{1 - 2 + 3u}{3} = 4u - 1,$$
$$x = 31 - 4u + 1 + \frac{1 - 12u + 3}{4} = 33 - 7u, \qquad u \in \mathbb{Z}.$$

Řešením diofantovské rovnice $4x + 7y = 125$ je libovolná uspořádaná dvojice $(33 - 7u; 4u - 1), u \in \mathbb{Z}$. Ověříme, která u vyhovují kontextu slovní úlohy. Nulu a záporné hodnoty pro u můžeme vyloučit, protože bychom dostali záporný počet lahví s objemem $0,7$ l. Stejně tak pro $u > 5$ bychom získali záporný počet lahví s objemem $0,4$ l, proto je úloha řešitelná pouze pro $u \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Odpověď: Natěrač si mohl koupit 26 lahví o objemu $0,4$ l a 3 láhve o objemu $0,7$ l; 19 lahví o objemu $0,4$ l a 7 lahví o objemu $0,7$ l; 12 lahví o objemu $0,4$ l a 11 lahví o objemu $0,4$ l nebo 5 lahví o objemu $0,4$ l a 15 lahví o objemu $0,7$ l.

Příklad 19. Představme si záda jako rovinný obrazec, který má obsah 50 cm^2. Nabaňkujeme je krychlovými baňkami o hranách délek 2 cm a 3 cm. Kolik kterých baněk použijeme na pokrytí celých zad?

Řešení: Než sestavíme rovnici, pomocí které vyřešíme tuto úlohu, potřebujeme vypočítat obsahy podstav jednotlivých baněk, kterými budeme záda nabaňkovávat. Oba druhy baněk mají podstavu čtverce, proto pro výpočet obsahu podstavy použijeme vzorec $S = a^2$:

$$\begin{aligned} a &= 2\text{ cm}, & \qquad a &= 3\text{ cm}, \\ S &= a^2, & S &= a^2, \\ S &= 4\text{ cm}^2, & S &= 9\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Označme x počet baněk s podstavou o obsahu 4 cm^2 a y počet baněk s podstavou o obsahu 9 cm^2. Dostaneme diofantovskou rovnici $4x + 9y = 50$ a určíme, zda je řešitelná. V této rovnici je $a = 4, b = 9$. Jejich největší společný dělitel je 1. Poněvadž číslo 1 dělí i číslo 50, které je absolutním členem diofantovské rovnice, je tato rovnice řešitelná. Nyní tuto diofantovskou rovnici vyřešíme. Nejprve vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$
\begin{aligned}
4x + 9y &= 50,\\
x &= \frac{50 - 9y}{4},\\
x &= 12 - 2y + \frac{2 - y}{4}.
\end{aligned}
$$

Jelikož řešíme diofantovskou rovnici, víme, že x je celé číslo, proto je i zlomek $\frac{2-y}{4}$ celé číslo. Označme tento zlomek t a ze získané rovnosti vyjádřeme neznámou y:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{2 - y}{4},\\
y &= 2 - 4t.
\end{aligned}
$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že y je celé číslo. Nyní dosadíme neznámou y do rovnice pro x:

$$
\begin{aligned}
x &= 12 - 2 \cdot (2 - 4t) + \frac{2 - (2 - 4t)}{4},\\
x &= 12 - 4 + 8t + t,\\
x &= 8 + 9t.
\end{aligned}
$$

Řešením diofantovské rovnice $4x + 9y = 50$ je každá uspořádaná dvojice $(8 + 9t; 2 - 4t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Následně budeme zkoumat, kterých hodnot může parametr t nabývat, aby řešení rovnice splňovalo podmínky dané kontextem úlohy. Pokud by t bylo záporné, vycházel by počet baněk s podstavou o obsahu 4 cm^2 záporný, pokud by t bylo kladné, byl by i počet baněk s podstavou o obsahu 9 cm^2 záporný, což není přípustné. Proto jediná možná hodnota je $t = 0$.

Odpověď: K nabaňkování celých zad použijeme osm baněk o hraně délky 2 cm a dvě baňky o hraně délky 3 cm.

Příklad 20. Na sídlišti stojí čtyřpatrové a pětipatrové domy. Kolik jich může být čtyřpatrových a kolik pětipatrových, jestliže je na celém sídlišti 150 pater?

Řešení: Označíme x počet čtyřpatrových domů a y počet pětipatrových domů. Z podmínek slovní úlohy sestavíme diofantovskou rovnici $4x+5y = 150$. Vidíme, že $a = 4, b = 5$. Jejich největší společný dělitel je číslo 1. Rovnice je řešitelná, protože číslo 1 dělí její absolutní člen. Z rovnice vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{150 - 5y}{4},$$
$$x = 37 - y + \frac{2 - y}{4}.$$

Víme, že x je celé číslo, proto zlomek $\frac{2-y}{4}$ je také celým číslem. Tento zlomek označíme t a ze získané rovnosti vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{2 - y}{4},$$
$$y = 2 - 4t.$$

Jelikož řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i y je celé číslo. Za y dosadíme do rovnice pro x:

$$x = 37 - (2 - 4t) + \frac{2 - (2 - 4t)}{4},$$
$$x = 37 - 2 + 4t + t,$$
$$x = 35 + 5t.$$

Řešením diofantovské rovnice $4x + 5y = 150$ je libovolná uspořádaná dvojice $(35 + 5t; 2 - 4t), t \in \mathbb{Z}$. V této fázi musíme zjistit, pro které hodnoty parametru t budou splněny podmínky dané kontextem slovní úlohy. Pokud by t bylo celé kladné číslo, dostali bychom záporný počet pětipatrových domů. Pro $t = -7$ vychází nulový počet čtyřpatrových domů. Kdyby t bylo záporné celé číslo menší než -7, úloha by též neměla řešení, protože počet čtyřpatrových domů by byl záporný. Víme tedy, že $t \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Tyto hodnoty pro t dosadíme do rovnic x a y a získáme 7 možných řešení této úlohy.

Odpověď: Na sídlišti může být 5 čtyřpatrových a 26 pětipatrových domů, 10 čtyřpatrových a 22 pětipatrových domů, 15 čtyřpatrových a 18 pětipatrových domů, 20 čtyřpatrových a 14 pětipatrových domů, 25 čtyřpatrových a 10 pětipatrových domů, 30 čtyřpatrových a 6 pětipatrových domů nebo 35 čtyřpatrových a 2 pětipatrové domy.

Příklad 21. Na parkovišti stojí pouze automobily a motocykly, žádné další dopravní prostředky zde nejsou. Kolik může být zaparkovaných automobilů a kolik motocyklů, jestliže je na parkovišti 198 kol?

Řešení: Označme x počet automobilů a y počet motocyklů. Pomocí neznámých x a y můžeme slovní úlohu zapsat do diofantovské rovnice $4x + 2y = 198$, ze které vyjádříme neznámou s menším koeficientem. Nejdříve ověříme její řešitelnost. Jelikož je největším společným dělitelem čísel $a = 4, b = 2$ číslo 2, které také dělí absolutní člen diofantovské rovnice 198, je tato rovnice řešitelná.
Dále:

$$4x + 2y = 198, \qquad | : 2$$
$$2x + y = 99,$$
$$y = 99 - 2x.$$

Už v této části nemáme žádný zlomek, proto nemusíme volit žádný parametr a můžeme rovnou určit množinu řešení diofantovské rovnice $4x + 2y = 198$. Řešením je libovolná uspořádaná dvojice $(x; 99 - 2x), x \in \mathbb{Z}$. Omezíme-li se pouze na řešení vyhovující podmínkám kontextu slovní úlohy, víme, že neznámé x i y nesmí být záporná čísla. Proto x je z množiny $\{1, 2, \cdots, 48, 49\}$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(1; 97), (2; 95), (3; 93), (4; 91), \cdots, (46; 7), (47; 5), (48; 3), (49; 1)$.

Odpověď: Na parkovišti může stát například 1 automobil a 97 motocyklů, 2 automobily a 95 motocyklů, 3 automobily a 93 motocyklů. (Ostatní řešení viz předchozí odstavec).

Příklad 22. Několik matek čerstvě narozených miminek se spolu baví v čekárně u paní doktorky. Maminky se rozdělily na dvě skupiny podle toho, kolik hodin jejich miminka přes noc spí. Jedna skupina říká, že jejich miminka spí 5 hodin za noc a druhá skupina tvrdí 8 hodin za noc. Kolik je miminek, která spí v noci 5 hodin a která spí 8 hodin? Maminky spočítaly, že dohromady jejich miminka spí 62 hodin.

Řešení: Označme x počet miminek, která spí 5 hodin a y počet miminek, která spí 8 hodin. Na základě textu slovní úlohy vytvoříme diofantovskou rovnici $5x+8y = 62$, u které nejprve ověříme řešitelnost a poté vyjádříme neznámou s menším koeficientem. Z rovnice víme, že $a = 5$, $b = 8$. Jejich největší společný dělitel je číslo 1. Jelikož číslo 1 dělí také číslo 62, které je absolutním členem diofantovské rovnice, je tato rovnice řešitelná.

Dále tedy:

$$x = \frac{62 - 8y}{5},$$
$$x = 12 - y + \frac{2 - 3y}{5}.$$

Víme, že neznámá x je celé číslo. Z tohoto důvodu je celým číslem i zlomek $\frac{2-3y}{5}$. Tento zlomek označíme t a následně z vytvořené rovnosti vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{2 - 3y}{5},$$
$$y = \frac{2 - 5t}{3},$$
$$y = -t + \frac{2 - 2t}{3}.$$

Poněvadž řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i x je celé číslo. Znovu je ve vyjádření y zlomek, stejný postup opakujeme. Tentokrát zlomek $\frac{2-2t}{3}$ označíme $u, u \in \mathbb{Z}$:

$$u = \frac{2 - 2t}{3},$$
$$t = \frac{2 - 3u}{2},$$
$$t = 1 - u - \frac{1}{2}u.$$

Jelikož je v poslední získané rovnice stále zlomek, zvolíme další neznámou $w = \frac{1}{2}u$. Následným dosazením zjistíme hodnoty pro t, x a y:

$$t = 1 - 2w - w = 1 - 3w,$$

$$y = -1 + 3w + 2w = 5w - 1,$$

$$x = 12 - 5w + 1 - 3w + 1 = 14 - 8w.$$

Řešením diofantovské rovnice $5x + 8y = 62$ je libovolná uspořádaná dvojice $(14 - 8w; 5w - 1), w \in \mathbb{Z}$. Ze zadání úlohy však víme, že v čekárně je alespoň jedno miminko, které spí 5 hodin, a alespoň jedno miminko, které spí 8 hodin. Proto $x > 0$ a $y > 0$. Kdybychom do rovnice dosadili pro neznámou y za w hodnotu nula či kteroukoliv zápornou, vyšel by počet miminek, které spí v noci 8 hodin, záporný. Stejně tak by úlohy neměla řešení pro $w > 2$, protože bychom opět dostali záporné číslo (tentokrát pro miminka, která spí 5 hodin). Slovní úloha má tedy jediné řešení pro $w = 1$.

Odpověď: V čekárně bylo šest miminek, které spí v noci 5 hodin, a čtyři miminka, která spí v noci 8 hodin.

Příklad 23. Jana chtěla vybrat z bankomatu $3\ 500$ Kč. Z bankomatu získala tuto částku pouze v bankovkách s hodnotami 500 a 200 Kč. Kolik kterých bankovek mohla Jana dostat?

Řešení: Označme x počet bankovek o hodnotě 500 korun a y počet bankovek o hodnotě 200 korun. Následně vytvoříme diofantovskou rovnici $500x + 200y = 3\ 500$. Aby byla tato rovnice řešitelná, musí největší společný dělitel čísel $a = 500, b = 200$ dělit také absolutní člen rovnice. Největším společným dělitelem čísel a, b je číslo 100, které dělí i číslo $3\ 500$. Tato diofantovská rovnice je tedy řešitelná. Obě strany rovnice vydělíme číslem 100; dostaneme opět diofantovskou rovnici s menšími koeficienty $5x + 2y = 35$. Vyjádříme z ní neznámou s menším koeficientem:

$$\begin{aligned}
500x + 200y &= 3\ 500, \qquad | : 100\\
5x + 2y &= 35,\\
y &= \frac{35 - 5x}{2},\\
y &= 17 - 2x + \frac{1 - x}{2}.
\end{aligned}$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, je y celé číslo. Proto celým číslem je i zlomek $\frac{1-x}{2}$. Tento zlomek označíme t a následně z rovnosti vyjádříme rovnici pro x:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1 - x}{2},\\
x &= 1 - 2t.
\end{aligned}$$

Když t je celé číslo, je celým číslem i x. Nyní dosadíme hodnotu x do rovnice pro y:

$$y = 17 - 2 + 4t + t = 15 + 5t.$$

Řešením diofantovské rovnice $500x + 200y = 3\,500$ je libovolná uspořádaná dvojice $(1-2t;\ 15 + 5t), t \in \mathbb{Z}$. Zkontrolujeme, která řešení vyhovují kontextu slovní úlohy. Víme, že Jana dostala bankovky s hodnotami 500 i 200 Kč, proto x i y musí být kladné. Neznámá x bude kladná, pokud t bude záporné číslo či nula. Pro neznámou y splňují zadání čísla $t > -3$. Tyto podmínky musí platit najednou, proto t může nabývat pouze tří hodnot, a sice $0; -1; -2$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice: $(1; 15), (3; 10), (5; 5)$.

Odpověď: Jana mohla z bankomatu vybrat například 1 bankovku o hodnotě 500 korun a 15 bankovek o hodnotě 200 korun. (Další dvě řešení viz předchozí odstavec).

Příklad 24. V loděnici původně byla ke každé lodi 4 pádla. Najednou však majitel zjistil, že u některých lodí jedno pádlo chybí. Kolik může být v loděnici lodí se třemi a kolik se čtyřmi pádly, pokud jich dohromady v loděnici je 100?

Řešení: Označíme x počet lodí se třemi pádly a y počet lodí se čtyřmi pádly. Pomocí těchto zvolených neznámých vytvoříme diofantovskou rovnici $3x + 4y = 100$ a ověříme její řešitelnost. Z rovnice víme, že $a = 3, b = 4$. Největší společný dělitel těchto dvou čísel je číslo 1. Protože číslo 1 dělí také absolutní člen rovnice, číslo 100, je tato diofantovská rovnice řešitelná. Nyní z ní vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{100 - 4y}{3},$$
$$x = 33 - y + \frac{1 - y}{3}.$$

Aby neznámá x byla celé číslo, je celým číslem i zlomek $\frac{1-y}{3}$. Tento zlomek položíme roven t a následně vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{1 - y}{3},$$
$$y = 1 - 3t.$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i y je celé číslo. Posledním krokem pro zjištění řešení diofantovské rovnice je dosazení hodnoty y do rovnice pro neznámou x:

$$x = 33 - 1 + 3t + t = 32 + 4t.$$

Řešením diofantovské rovnice $3x + 4y = 100$ je každá uspořádaná dvojice $(32 + 4t; 1 - 3t), t \in \mathbb{Z}$. Z kontextu úlohy plyne, že x i y jsou nezáporná čísla. Počet lodí se třemi pádly bude tuto podmínku spňovat v případě, že $t > -8$, a počet lodí se čtyřmi pádly, pokud $t < 1$. Jelikož musí platit obě podmínky najednou, dostáváme podmínku $-8 < t < 1$. Možným řešením jsou tedy uspořádané dvojice: $(4; 22), (8; 19), (12; 16), (16; 13), (20; 10), (24; 7), (28; 4), (32; 1)$.

Odpověď: V loděnici mohou mít například 4 lodě se třemi pádly a 22 lodí se čtyřmi pádly nebo 8 lodí se třemi pádly a 19 lodí se čtyřmi pádly. (Ostatní možnosti řešení viz uspořádané dvojice v předchozím odstavci).

Příklad 25. Na poli sbíralo jahody 21 lidí, kteří byli rozděleni do dvou skupin. V jedné skupině bylo 8 lidí, ve druhé 13 lidí. Kolik kilogramů jahod nasbíral každý člen jedné i druhé skupiny, když dohromady nasbírali 100 kilogramů jahod? Uvažujme, že váha, na které se jahody váží, ukazuje pouze celá kila a členové jednotlivých skupin sbírali stejně rychle.

Řešení: Označíme x počet kilogramů, které nasbíral každý člen osmičlenné skupiny a y počet kilogramů, které nasbíral každý člen třináctičlenné skupiny. Jelikož dohromady nasbírali 100 kilogramů, vytvoříme diofantovskou rovnici $8x+13y = 100$. Z této rovnice vidíme, že $a = 8, b = 13$. Největším společným dělitelem čísel a, b je 1. Tato rovnice je řešitelná, poněvadž tento největší společný dělitel dělí také absolutní člen rovnice, číslo 100. Z diofantovské rovnice $8x + 13y = 100$ vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{100 - 13y}{8},$$
$$x = 12 - y + \frac{4 - 5y}{8}.$$

Protože x je celé číslo, je i zlomek $\frac{4-5y}{8}$ celým číslem. Označíme ho t a následně z rovnice vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{4 - 5y}{8},$$
$$y = \frac{4 - 8t}{5},$$
$$y = -t + \frac{4 - 3t}{5}.$$

Jelikož řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i y je celé číslo. V neznámé y se stále objevuje zlomek, proto opakujeme stejný postup. Zlomek $\frac{4-3t}{5}$ označíme u:

$$u = \frac{4-3t}{5},$$
$$t = \frac{4-5u}{3},$$
$$t = 1 - u + \frac{1-2u}{3}.$$

Stále zůstává zlomek, proto použijeme další neznámou v, kterou položíme rovnu zlomku $\frac{1-2u}{3}$. Ze získané rovnosti vyjádříme u:

$$v = \frac{1-2u}{3},$$
$$u = \frac{1-3v}{2},$$
$$u = -v + \frac{1-v}{2}.$$

Můžeme si všimnout postupně se zmenšujícího jmenovatele u jednotlivých zlomků. Opět předpokládáme, že se jmenovatel zmenší. Naposledy tedy použijeme stejný postup s další neznámou w:

$$w = \frac{1-v}{2},$$
$$v = 1 - 2w, \qquad w \in \mathbb{Z}.$$

K vyjádření neznámých x a y potřebujeme znát hodnotu t. Proto musíme nejdříve dopočítat hodnoty pro všechny zvolené neznámé v, u, t v závislosti na parametru w:

$$v = 1 - 2w,$$
$$u = -v + w = -1 + 2w + w = 3w - 1,$$
$$t = 1 - u + v = 1 - 3w + 1 + 1 - 2w = 3 - 5w.$$

Jelikož nyní už známe potřebnou hodnotu t, dosadíme ji do rovnic pro x a y:

$$y = -t + u = -3 + 5w + 3w - 1 = 8w - 4,$$
$$x = 12 - y + t = 12 - 8w + 4 + 3 - 5w = 19 - 13w.$$

Řešením diofantovské rovnice $8x + 13y = 100$ je libovolná uspořádaná dvojice $(19 - 13w;\ 8w - 4), w \in \mathbb{Z}$. Musíme ještě zjistit, pro která w jsou splněny podmínky kontextu slovní úlohy. Počet kilogramů, které nasbírali členové skupiny osmi lidí, musí být větší než 0, což by nevycházelo, pokud by bylo $w > 1$. Stejně tak by počet kilogramů, které nasbírali členové skupiny jedenácti lidí, nebyl větší než 0, pokud by nebylo $w > 0$. Z těchto podmínek vychází jediná varianta $w = 1$.

Odpověď: Každý člen osmičlenné skupiny nasbíral šest kilo jahod a každý člen jedenáctičlenné skupiny nasbíral čtyři kila jahod.

Příklad 26. Na běžecký závod přišlo několik závodníků v proužkovaných podkolenkách. Některé podkolenky měly 7 pruhů a jiné 9 pruhů. Kolik bylo účastníků, kteří měli podkolenky se sedmi pruhy, a kolik s devíti pruhy, pokud diváci napočítali dohromady 884 pruhů?

Řešení: Označíme x počet závodníků, kteří měli podkolenky se sedmi pruhy a y počet závodníků s devíti pruhy na podkolenkách. Pro tyto neznámé sestavíme diofantovskou rovnici $7x + 9y = 884$, u níž nejdříve zjistíme, zda je řešitelná. Z rovnice snadno zjistíme, že $a = 7, b = 9$. Největším společným dělitelem těchto dvou čísel je 1. Jelikož číslo 1 je dělitelem také absolutního členu rovnice 884, je tato diofantovská rovnice řešitelná. Nyní z ní vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$x = \frac{884 - 9y}{7},$$
$$x = 126 - y + \frac{2 - 2y}{7}.$$

Na základě podmínky, že x je celé číslo, víme, že i zlomek $\frac{2-2y}{7}$ je celým číslem. Označíme t zlomek $\frac{2-2y}{7}$ a následně z rovnice vyjádříme neznámou y:

$$t = \frac{2 - 2y}{7},$$
$$y = \frac{2 - 7t}{2},$$
$$y = 1 - 3t - \frac{1}{2}.$$

Jelikož řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i y je celé číslo. V rovnosti je zlomek, proto postup opakujeme znovu. Položíme:

$$u = \frac{1}{2}t,$$
$$t = 2u, \qquad u \in \mathbb{Z}.$$

Nyní za t dosadíme do rovnice pro y a následně pro x:

$$y = 1 - 6u - u = 1 - 7u,$$
$$x = 126 - 1 + 7u + 2u = 125 + 9u.$$

Řešením diofantovské rovnice $7x + 9y = 884$ je každá uspořádaná dvojice $(125 + 9u; 1 - 7u), u \in \mathbb{Z}$. Díky kontextu úlohy však víme, že počet účastníků, kteří mají podkolenky se sedmi i devíti pruhy, musí být větší než nula. Pokud by $u < -13$ nebo $u > 0$, nebyla by tato podmínka splněna. Z tohoto důvodu můžeme dosazovat pouze celá čísla z intervalu $u \in (-14; 1)$. Dostáváme tedy tyto uspořádané dvojice: $(8; 92), (17; 85), (26; 78), (35; 71), (44; 64), (53; 57), (62; 50), (71; 43), (80; 36), (89; 29), (98; 22), (107; 15), (116; 8), (125; 1)$.

Odpověď: Závodu se mohlo zúčastnit například 8 závodníků se sedmi pruhy na podkolenkách a 92 závodníků s devíti pruhy. (Ostatní možnosti viz předchozí odstavec).

Příklad 27. Petr přešel na šířku fotbalové hřiště. Hřiště je široké 68 metrů. K tomu, aby hřiště přešel, dělal kroky dlouhé 70 cm nebo 65 cm. Kolik kterých kroků musel udělat, aby hřiště přešel?

Řešení: Nejdříve musíme všechny rozměry převést do stejných jednotek, proto 68 metrů převedeme na $6\,800$ cm. Označíme x počet kroků dlouhých 70 cm a y počet kroků dlouhých 50 cm. O tyto neznámé sestavíme diofantovskou rovnici $70x + 65y = 6\,800$. Z rovnice snadno zjistíme, že $a = 70, b = 65$. Největší společný dělitel těchto dvou čísel a, b je číslo 5. Číslo 5 dělí absolutní člen rovnice $6\,800$, proto je rovnice $70x + 65y = 6\,800$ řešitelná. Obě strany rovnice vydělíme číslem 5; dostaneme opět diofantovskou rovnici s menšími koeficienty $14x + 13y = 1\,360$, která má stejnou množinu řešení. Nyní z ní vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$14x + 13y = 1\,360,$$
$$y = \frac{1\,360 - 14x}{13},$$
$$y = 104 - x + \frac{8 - x}{13}.$$

Víme, že y je celé číslo. Z tohoto důvodu je i zlomek $\frac{8-x}{13}$ celým číslem. Zlomek označíme t a ze získané rovnice vyjádříme neznámou x:

$$t = \frac{8-x}{13},$$
$$x = 8 - 13t.$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i x je celé číslo. Hodnotu x dosadíme do rovnice pro y:

$$y = 104 - 8 + 13t + t = 96 + 14t.$$

Řešením diofantovské rovnice $70x + 65y = 6\,800$ je každá uspořádaná dvojice $(8 - 13t; 96 - 14t), t \in \mathbb{Z}$. Vrátíme-li se k zadání slovní úlohy, jsou řešením pouze dvojice $(x; y)$, kde x i y jsou kladná. Proto $t \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Pokud by t bylo kladné číslo, vycházel by počet sedmdesáti centrimetrových kroků záporný. Stejně tak by nebyly splněny podmínky z kontextu úlohy pro $t < -6$, protože by byl záporný počet kroků o velikosti 65 cm. Dostáváme tedy 7 možných řešení, které můžeme zapsat jako uspořádané dvojice: $(8; 98), (21; 82), (34; 68), (47; 54), (60; 40), (73; 26), (86; 12)$.

Odpověď: Aby Petr přešel fotbalové hřiště o šířce 68 metrů, musel udělat například 8 kroků o délce 70 cm a 96 kroků o délce 65 cm. (Ostatní řešení viz předchozí odstavec.)

Příklad 28. Výčepní Martin přišel ráno do práce a zjistil, že má v tanku pouze 70 litrů piva. Kolik půllitrových a kolik třetinkových piv může z tohoto množství načepovat?

Řešení: Označme x počet půllitrových piv, a y počet třetinkových piv. Pomocí těchto neznámých můžeme sestavit rovnici $0,5x + 0,3y = 70$. Tato rovnice není diofantovská. Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem 10, nezměníme množinu řešení rovnice. Vzhledem ke kontextu úlohy řešíme diofantovskou rovnici $5x + 3y = 700$, ve které $a = 5, b = 3$. Největším společným dělitelem těchto dvou čísel je číslo 1. Číslo 1 dělí absolutní člen diofantovské rovnice, číslo 700, proto je tato rovnice řešitelná. Nyní z rovnice vyjádříme neznámou s menším koeficientem:

$$y = \frac{700 - 5x}{3},$$
$$y = 233 - x + \frac{1 - 2x}{3}.$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že y je celé číslo. Proto je celým číslem i zlomek $\frac{1-2x}{3}$, který položíme roven t a následně vyjádříme neznámou x:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1-2x}{3}, \\ x &= \frac{1-3x}{2}, \\ x &= -t + \frac{1-t}{2}. \end{aligned}$$

Protože řešíme diofantovskou rovnici, víme, že i x je celé číslo. V poslední rovnosti je opět zlomek, proto musíme postup zopakovat. Zlomek $\frac{1-t}{2}$ označíme u a ze získané rovnosti vyjádříme t:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-t}{2}, \\ t &= 1 - 2u. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme hodnotu t do rovnice pro x a následně x do rovnice pro y a určíme řešení diofantovské rovnice:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2u + u = 3u - 1, \\ y &= 233 - 3u + 1 + 1 - 2u = 235 - 5u. \end{aligned}$$

Řešením diofantovské rovnice $5x + 3y = 700$ je libovolná uspořádaná dvojice $(3u - 1; 235 - 5u)$, $u \in \mathbb{Z}$. Nyní se omezíme na řešení slovní úlohy dané kontextem. Víme, že úloha by neměla řešení, pokud by vyšel počet půllitrových nebo třetinkových piv záporný. Může se však stát, že Martin načepuje samá půllitrová piva a žádné třetinkové nebo naopak. Proto $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

Pokud bychom dosadili za u hodnoty záporné nebo nulu, vyšel by záporný počet půllitrových piv. Pokud bychom dosadili kladná čísla $u > 47$, vycházel by záporný počet třetinkových piv, proto $u \in \langle 1; 47 \rangle$. Řešením slovní úlohy jsou všechny uspořádané dvojice: $(2; 230)$, $(5; 225)$, $(8; 220)$, $\cdots$, $(134; 10)$, $(137; 5)$, $(140; 0)$.

Odpověď: Výčepní Martin může ze 70 litrů piva načepovat například 2 půllitrová piva a 230 třetinkových nebo 5 půllitrových piv a 225 třetinkových piv. (Ostatní možnosti viz předchozí odstavec).

Příklad 29. Máme 5 litrů jablečného džusu a chceme ho rozlít do $0,4$ litrových sklenic a $0,8$ litrových sklenic. Kolik kterých sklenic džusem naplníme tak, že budou všechny plné?

Řešení: Označme x počet $0,4$ litrových sklenic a y je počet $0,8$ litrových sklenic. Z kontextu slovní úlohy sestavíme rovnici $0,4x + 0,8y = 5$. Tato rovnice není diofantovská. Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem 10, nezměníme množinu řešení rovnice. Vzhledem ke kontextu úlohy řešíme diofantovskou rovnici $4x + 8y = 50$, ve které, že $a = 4, b = 8$. Největším společným dělitelem čísel a, b je číslo 4. Jelikož číslo 4 nedělí beze zbytku absolutní člen diofantovské rovnice, číslo 50, není tato diofantovská rovnice řešitelná.

Odpověď: 5 litrů jablečného džusu není žádným způsobem možné rozlít do $0,4$ litrových a $0,8$ litrových plných sklenic.

3.4 Slovní úlohy vedoucí na diofantovské rovnice řešené metodou pokus a omyl

Příklad 30. Kolika způsoby je možno zaplatit 100 Kč samými pětikorunami a dvoukorunami? (Krupka, 2002, str. 263)

Řešení: Označme x počet pětikorun a y počet dvoukorun, pak platí $5x + 2y = 100$. Jelikož máme zaplatit 100 Kč, vidíme, že pro počet pětikorun musí platit nerovnost $0 \leq x \leq 20$. Pokud bychom měli více než 20 pětikorun, dostali bychom částku větší než je 100 Kč. Následně zkoumáme, pro který počet pětikorun dostaneme počet dvoukorun také celočíselný. Pro lepší přehlednost zapíšeme možná řešení do tabulky, kde x je počet pětikorun, z je počet zbylých peněz a y je počet dvoukorun:

x	z	y
1	$100 - 5 = 95$	$95 : 2 = 47,5$
2	$100 - 10 = 90$	$90 : 2 = 45$
3	$100 - 15 = 85$	$85 : 2 = 42,5$
4	$100 - 20 = 80$	$80 : 2 = 40$
5	$100 - 25 = 75$	$75 : 2 = 37,5$
6	$100 - 30 = 70$	$70 : 2 = 35$
7	$100 - 35 = 65$	$65 : 2 = 32,5$
8	$100 - 40 = 60$	$60 : 1 = 30$
9	$100 - 45 = 55$	$55 : 2 = 27,5$
10	$100 - 50 = 50$	$50 : 2 = 25$
11	$100 - 55 = 45$	$45 : 2 = 22,5$
12	$100 - 60 = 40$	$40 : 2 = 20$
13	$100 - 65 = 35$	$35 : 2 = 17,5$
14	$100 - 70 = 30$	$30 : 2 = 15$
15	$100 - 75 = 25$	$25 : 2 = 12,5$

16	$100 - 80 = 20$	$20 : 2 = 10$
17	$100 - 85 = 15$	$15 : 2 = 7,5$
18	$100 - 90 = 10$	$10 : 2 = 5$
19	$100 - 95 = 5$	$5 : 2 = 2,5$
20	$100 - 100 = 0$	$0 : 2 = 0$

Z tabulky vidíme, že zadání vyhovuje celkem jedenáct řešení, kde vychází celé kladné číslo pro pětikoruny i dvoukoruny.

Odpověď: Pětikorunami a dvoukorunami je 100 Kč možné zaplatit jedenácti způsoby. Konkrétně 0 pětikorun a 50 dvoukorun, 2 pětikoruny a 45 dvoukorun, 4 pětikoruny a 40 dvoukorun, 6 pětikorun a 35 dvoukorun, 8 pětikorun a 30 dvoukorun, 10 pětikorun a 25 dvoukorun, 12 pětikorun a 20 dvoukorun, 14 pětikorun a 15 dvoukorun, 16 pětikorun a 10 dvoukorun, 18 pětikorun a 5 dvoukorun nebo 20 pětikorun a 0 dvoukorun.

Příklad 31. Na dvoře běhají slepice a králíci. Kolik je slepic a kolik je králíků, jestliže na dvoře běhá celkem 20 nohou? (Krupka, 2002, str. 263)

Řešení: Každý králík má 4 nohy a každá slepice má 2 nohy. Označme x počet králíků, y počet slepic, pak platí $4x + 2y = 20$. Víme, že na dvoře je alespoň jeden králík a alespoň jedna slepice. Hledáme proto jen ta řešení x, y, která jsou obě kladná. Stejně jako v předchozím příkladě zapíšeme hledaná řešení do tabulky, kde x vyjadřuje počet králíků, z je počet zbývajících nohou a y je počet slepic:

x	z	y
1	$20 - 4 = 16$	$16 : 2 = 8$
2	$20 - 8 = 12$	$12 : 2 = 6$
3	$20 - 12 = 8$	$8 : 2 = 4$
4	$20 - 16 = 4$	$4 : 2 = 2$
5	$20 - 20 = 0$	$0 : 2 = 0$

Z tabulky je patrné, že pro $x > 5$ už nemusíme hodnoty dosazovat, protože už pro $x = 5$

řešení úlohy nevychází správně (na dvoře by neběhala žádná slepice). Získali jsme čtyři možná řešení.

Odpověď: Po dvoře může běhat 1 králík a 8 slepic, 2 králíci a 6 slepic, 3 králíci a 4 slepice nebo 4 králíci a 2 slepice.

Příklad 32. V papírnictví stojí pastelky 36 Kč a skicák 19 Kč. Marcela si chce odpoledne malovat, ale nemá ani skicák, ani pastelky. Kolik balení pastelek a kolik skicáků si může Marcela koupit, pokud má u sebe 203 Kč a chce utratit všechny peníze?

Řešení: Označme x počet balení pastelek a y počet skicáků. K vyřešení úlohy sestavíme diofantovskou rovnici $36x + 19y = 203$.
Ze zadání úlohy víme, že počet balení pastelek a počet skicáků musí být celá kladná čísla. Uvažujme kladné celočíselné hodnoty pro výrobek, který je dražší, v našem případě pastelky. Hledáme, pro které jeho hodnoty nabývá celočíselné hodnoty i počet skicáků. Možnosti zapíšeme do tabulky, ve které x označuje počet koupených pastelek, z představuje počet zbylých peněz, za které si Marcela může koupit skicáky, a y je počet skicáků, které si může koupit:

x	z	y
1	$203 - 36 = 167$	$167 : 19 = 8,79$
2	$203 - 72 = 131$	$131 : 19 = 6,89$
3	$203 - 108 = 95$	$95 : 19 = 5$
4	$203 - 144 = 59$	$59 : 19 = 3,11$
5	$203 - 180 = 23$	$23 : 19 = 1,21$
6	$203 - 216 = -13$	$nelze$

Z tabulky vidíme, že zkoušet dosazovat hodnoty pro $x > 6$ není třeba, jelikož na více než 5 balení pastelek nemá Marcela peníze. Poněvadž balení pastelek i skicáků se prodává pouze po celých kusech, vyhovuje slovní úloze pouze jedno řešení.

Odpověď: Marcela si může koupit tři balení pastelek a pět skicáků, čímž všechny své peníze utratí.

3.5 Další příklady slovních úloh k procvičení

Příklad 33. Ve třídě sedí na židlích dívky a chlapci. Každá dívka sedí tak, že má danou jednu nohu přes druhou, chlapci mají na podlaze obě nohy. Kolik může být ve třídě chlapců a kolik dívek, když učitel spočítal 21 nohou na podlaze a víme, že ve třídě sedí alespoň pět chlapců?

Příklad 34. Bratři Pavel a Jirka Novákovi se s kamarády Honzou, Filipem a Petrem Procházkovými rozhodli, že půjdou na Velikonoce koledovat společně. Kolik vajíček si odnesl každý z chlapců, když jich dohromady vykoledovali 645? Dále víme, že každý z bratrů dostal stejný počet vajíček, ale chlapci, kteří sourozenci nejsou, dostali různý počet vajíček.

Příklad 35. Ve třídě jsou dívky, které sportují, i dívky, které nesportují. Sportující dívky přišly ráno se dvěma culíky, každá nesportující dívka měla pouze jeden culík. Kolik je ve třídě sportujících a kolik nesportujících dívek, pokud je ve třídě 20 culíků?

Příklad 36. Na koupališti si děti mohou koupit točenou malinovku za 29 Kč nebo Sprite za 50 Kč. Kolik kterých nápojů si může Kristýna koupit, když dostala od rodičů 400 Kč a 84 Kč stojí vstupenka na koupaliště a chce utratit veškeré peníze?

Příklad 37. V hotelu jsou dvoulůžkové a pětilůžkové pokoje. Kolik je postelí na dvoulůžkových a kolik na pětilůžkových pokojích, pokud na začátku prázdnin do hotelu přijelo 148 hostů a hotel byl plně obsazen?

Příklad 38. Veliký lustr v obchodním domě má výkon $2\,780$ watů. Kolik do něho můžeme dát žárovek o výkonu 40 wattů a kolik o výkonu 60 wattů?

Příklad 39. Vanda žehlila prádlo svoje a jejího manžela a trvalo jí to 90 minut. V prádle měla pouze trička a košile. Jedno tričko žehlila 3 minuty a jednu košili 5 minut. Kolik mohla mít v prádle na vyžehlení triček a kolik košil?

Příklad 40. U tramvajové zastávky Národní třída se střetla dvě osobní auta a zastavila se tím tramvajová doprava. Tramvaje stály až na zastávku Malostranská po cestě přes Karlovy Lázně. Pozoruhodný turista si všiml, že tramvaje, které zde v koloně stojí mají číslo 2 nebo 18. Tramvajová linka číslo 2, která jede z Nádraží Braník na Sídliště Petřiny, má vždy pouze jeden vagon. Naopak linka číslo 18, která jede z Vozovny Pankrác na Nádraží Podbaba, má vždy vagony dva. Kolik bylo kterých linek, jestliže v koloně bylo 46 vagonů?

Příklad 41. Optika si objednává skla do brýlí. Sluneční sklo stojí 250 Kč a čiré sklo stojí 180 Kč. Optika má rozpočet na skla 16 640 Kč. Kolik kterých skel si optika objedná?

Příklad 42. Nákladní automobil má nosnost návěsu 10 tun. Kolik veze dvacetikilogramových a pětikilogramových pytlů cibule?

Příklad 43. Na umytí jednoho hrnce se použije 8 kapek jaru. Abychom umyli jeden talíř, použijeme 1 kapku jaru. Kolik hrnců i talířů umyjeme jednou lahví jaru, ve které je 1 000 kapek?

Příklad 44. Býk denně vyprodukuje 21 kilogramů hnoje, kráva denně vyprodukuje 19 kilogramů hnoje. Za týden se z kravína vyveze 5 096 kilogramů hnoje. Kolik je ve stáji krav a kolik býků, pokud víme, že krav je více než býků?

Příklad 45. Švadlena k našpendlení kalhot potřebuje 25 špendlíků. K našpendlení šatů ji stačí špendlíků 15. Kolik švadlena našpendlila kalhot a kolik šatů, pokud použila 950 špendlíků?

Příklad 46. Dělníci na stavbě používají dva pracovní výtahy. Jeden výtah má nosnost 450 kilogramů a druhý výtah má nosnost 630 kilogramů. Kolikrát který výtah použili, pokud potřebovali přepravit 8 tun materiálu a použili oba výtahy?

Příklad 47. Ve výrobě se za směnu vyrobí 10 316 jednovrstevných tabulek skla, které se dále vrství a vyrábí se z nich pětivrstvené a osmivrstvené protipožární dveře. Kolik jakých dveří se vyrobí ze skla vyrobeného za jednu směnu? Víme, že na každé směně se vyrobí od každého druhu dvěří minimálně 1 kus.

Příklad 48. V obchodě s hudebními nástroji mají šestistrunné a devítistrunné kytary. Majitel se rozhodl vyměnit u všech kytar struny. Dohromady použil 339 strun. Kolik je v obchodě kterých kytar, když víme, že šestistrunných je více než devítistrunných?

Příklad 49. Chceme nechat zahrát písničky v jukeboxu, ve kterém jsou starší písničky účtovány za 10 Kč a novější za 15 Kč. Kolik kterých skladeb si můžeme nechat zahrát, když máme 195 Kč?

3.5.1 Výsledky úloh k procvičení

Všechny tyto úlohy jsou řešitelné, protože splňují podmínku řešitelnosti: NSD(a, b) dělí c.

33. x označuje počet dívek ve třídě, y označuje počet chlapců ve třídě. Diofantovskou rovnici $x + 2y = 21$ řeší každá uspořádaná dvojice $(21 - 2y; y), y \in \mathbb{Z}$. Řešením slovní úlohy jsou pouze některé tyto dvojice, protože $x > 0, y \geq 5$. Úlohu řeší dvojice $(11; 5), (9; 6), (7; 7), (5; 8), (3; 9), (1; 10)$.

34. x vyjadřuje počet čokoládových vajíček, které dostal každý z bratrů Novákových, y je počet čokoládovch vajíček, které dostal každý z bratrů Procházkových. Sestavená diofantovská rovnice $2x + 3y = 645$ je řešitelná každou uspořádanou dvojicí $(321 + 3t; 1 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Slovní úlohu řeší všechny tyto dvojice, které mají parametr t z intervalu $(-107; 1)$. Z řešení se vyloučí dvojice, pro kterou by byl počet x roven počtu y. Úloha tedy není řešitelná pro $t = -64$: $(129; 129)$.

35. x je počet dívek, které nesportují a y počet dívek, které sportují. Diofantovskou rovnici $x + 2y = 20$ řeší každá uspořádaná dvojice $(20 - 2y; y), y \in \mathbb{Z}$. Řešení slovní úlohy je omezené podmínkami $x > 0$ a $y > 0$, proto jsou řešení pouze tyto uspořádané dvojice: $(18; 1), (16; 2), (14; 3), (12; 4), (10; 5), (8; 6), (6; 7), (4; 8), (2; 9)$.

36. x označuje počet malinovek, y počet nápojů Sprite. Nejdříve odečteme částku za vstupné $400 - 84 = 316$ a sestavíme diofantovskou rovnici $29x + 50y = 316$. Řešením této rovnice je libovolná uspořádaná dvojice $(6\,004 - 50n; -3\,476 + 29n), n \in \mathbb{Z}$. Počet řešení slovní úlohy je však zmenšený podmínkami $x > 0$ a $y > 0$, proto je řešitelná pouze pro $n = 120$. Kristýna si může koupit pouze 4 malinovky a 4 nápoje Sprite.

37. x určuje počet postelí na dvoulůžkových pokojích a y je počet postelí na pětilůžkových pokojích. Diofantovskou rovnici $2x + 5y = 148$ řeší každá uspořádaná dvojice $(74 - 5t; 2t), t \in \mathbb{Z}$. Řešení úlohy je omezené kontextem $x > 0$ a $y > 0$, proto t je pouze z intervalu $(0; 15)$. Řešením slovní úlohy jsou pouze tyto uspořádané dvojice: $(69; 2), (64; 4), (59; 6), (54; 8), (49; 10), (44; 12), (39; 14), (34; 16), (29; 18), (24; 20), (19; 22), (14; 24), (9; 26), (4; 28)$.

38. x označuje počet žárovek o výkonu 40 wattů, y je počet žárovek o výkonu 60 wattů. Obě strany diofantovské rovnice $40x + 60y = 2\,780$ můžeme vydělit číslem 20; dostaneme rovnici $2x + 3y = 139$. Řešením této diofantovské rovnice je každá uspořádaná dvojice $(68 + 3t; 1 - 2t), t \in \mathbb{Z}$. Protože $x > 0$ a $y > 0$, řešeními slovní úlohy jsou pouze ta z řešení rovnice, pro která $t \in (-23; 1)$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(2; 45), (5; 43), (8; 41), (11; 39), \cdots, (59; 7), (62; 5), (65; 3), (68; 1)$.

39. x označuje počet vyžehlených triček, y je počet vyžehlených košil. Diofantovskou rovnici $3x + 5y = 90$ řeší každá uspořádaná dvojice $(30 - 5n; 3n), n \in \mathbb{Z}$. Protože řešení slovní úlohy jsou omezena podmínkami $x > 0$ a $y > 0$, jsou jimi uspořádané dvojice, pro které je u z intervalu $\langle 1; 5\rangle$: $(25; 3), (20; 6), (15; 9), (10; 12), (5; 15)$.

40. x označuje počet tramvajových linek číslo 2, y je počet tramvajových linek číslo 18. Řešením diofantovské rovnice $x + 2y = 46$ je libovolná uspořádaná dvojice $(46 - 2y; y)$, $y \in \mathbb{Z}$. Po doplnění podmínek $x > 0$ a $y > 0$ vyplývajících ze zadání slovní úlohy získáme omezení pro y. Hodnoty pro y můžeme brát pouze z intervalu $(0; 23)$. Řešením úlohy jsou tedy uspořádané dvojice: $(44; 1), (42; 2), (40; 3), \cdots, (6; 20), (4; 21), (2; 22)$.

41. x je počet slunečních skel, y je počet čirých skel, která optika objednává. Levou i pravou stranu diofantovské rovnice $250x + 180y = 16\ 640$ můžeme vydělit číslem 10, čímž dostaneme rovnici $25x + 18y = 1\ 664$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $(18w - 4; 98 - 25w), w \in \mathbb{Z}$. Z kontextu úlohy víme dvě podmínky: $x \geq 0$ a $y \geq 0$, proto je w z intervalu $\langle 1; 3\rangle$. Slovní úloha má 3 řešení: $(14; 73), (32; 48), (50; 23)$.

42. x označuje počet dvacetikilogramových pytlů, y je počet pětikilogramových pytlů. Obě strany diofantovské rovnice $20x + 5y = 10\ 000$ můžeme vydělit číslem 5, čímž dostaneme $4x + y = 2\ 000$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $(x; 2\ 000 - 4x), x \in \mathbb{Z}$. Podmínky z kontextu slovní úlohy jsou $x > 0$ a $y > 0$, z nichž dostaneme omezení, že x je z intervalu $\langle 1; 499\rangle$. Řešením úlohy jsou všechny uspořádané dvojice: $(1; 1\ 996), (2; 1\ 992), (3; 1\ 988), \cdots, (497; 12), (498; 8), (499; 4)$.

43. x označuje počet hrnců, y značí počet talířů. Obě strany diofantovské rovnice $8x + 2y = 1\ 000$ můžeme nejdříve vydělit číslem 2 a dostaneme rovnici $4x + y = 500$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $(x; 500 - 4x), x \in \mathbb{Z}$. Podmínkami slovní úlohy jsou $x > 0$ a $y > 0$, proto x může být pouze z intervalu $\langle 1; 124\rangle$. Řešením úlohy jsou uspořádané dvojice: $(1; 496), (2; 492), (3; 488), \cdots, (122; 12), (123; 8), (124; 4)$.

44. x označuje počet býků, y je počet krav v kravíně. Sestavíme diofantovskou rovnici $21x +$

$+\ 19y = 5\ 096$. Jejím řešením je každá uspořádaná dvojice $(2 - 19u; 266 + 21u), u \in \mathbb{Z}$. Z kontextu úlohy vyplývají tři podmínky: $x > 0, y > 0$ a $y > x$, proto je u pouze z intervalu $\langle -6; 0\rangle$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice: $(116; 140), (97; 161), (78; 182), (59; 203), (40; 224), (21; 245), (2; 266)$.

45. x vyjadřuje počet kalhot, y je počet šatů, které švadlena našpendlila. Obě strany diofantovské rovnice $25x+15y = 950$ vydělíme číslem 5, čímž dostaneme rovnici $5x+3y = 190$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $(3u-1; 65-5u), u \in \mathbb{Z}$. Podmínky dané kontextem jsou $x > 0$ a $y > 0$, proto u může být pouze z intervalu $\langle 1; 12\rangle$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice: $(2; 60), (5; 55), (8; 50), \cdots, (29; 15), (32; 10), (35; 5)$.

46. x označuje počet použití výtahu s nosností 450 kilogramů, y je počet použití výtahu s nosností 630 kilogramů. Obě strany diofantovské rovnice $450x + 630y = 9\ 000$ vydělíme číslem 90 a dostaneme rovnici $5x+7y = 100$. Řešením této rovnice je libovolná uspořádaná dvojice $(-7u + 20; 5u), u \in \mathbb{Z}$. $x > 0$ a $y > 0$ jsou podmínky dané kontextem úlohy, proto u může být pouze 1 nebo 2. Řešením úlohy jsou dvě uspořádané dvojice: $(13; 5), (6; 10)$.

47. x označuje počet pětivrstvených dveří, y je počet osmivrstvených dveří. Sestavíme diofantovskou rovnici $5x + 8y = 10\ 316$, jejím řešením je libovolná uspořádaná dvojice $(2\ 060 + 8v; 2 - 5v), v \in \mathbb{Z}$. Podmínky dané kontextem $x > 0$ a $y > 0$ zmenší počet řešení úlohy: v může být pouze z intervalu $\langle -257; 0\rangle$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice: $(4; 1\ 287), (12; 1\ 282), (20; 1\ 277), \cdots, (2\ 044; 12), (2\ 052; 7), (2\ 060; 2)$.

48. x označuje počet šestistrunných kytar, y je počet devítistrunných kytar. Obě strany diofantovské rovnice $6x + 9y = 339$ vydělíme číslem 3 a dostaneme rovnici $2x + 3y = 113$. Řešením této diofantovské rovnice je každá uspořádaná dvojice $(55 + 3t; 1 - 2t), t \in \mathbb{Z}$. Z kontextu úlohy dostaneme tři podmínky: $x \geq 0, y \geq 0, x > y$, proto t je z intervalu $\langle -10; 0\rangle$. Řešením slovní úlohy jsou uspořádané dvojice $(25; 21), (28; 19), (31; 17), \cdots, (49; 5), (52; 3), (55; 1)$.

49. x označuje počet starších písniček, y je počet novějších písniček. Obě strany diofantovské rovnice $10x + 15y = 195$ vydělíme číslem 5; dostaneme rovnici $2x + 3y = 39$. Řešením této diofantovské rovnice jsou uspořádané dvojice $(18+3t; 1-2t), t \in \mathbb{Z}$. Podmínky z kontextu úlohy $x \geq 0, y \geq 0$ řešení omezí: $t \in \langle -6; 0\rangle$. Řešením slovní úlohy jsou dvojice: $(0; 13), (3; 11), (6; 9), (9; 7), (12; 5), (15; 3), (18; 1)$.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s diofantovskými rovnicemi se dvěma neznámými a především mu ukázat různé metody, které vedou k jejich řešení. Čtenář si může z těchto metod vybrat tu, která mu vyhovuje nejvíce, a pomocí ní by měl být schopen vyřešit jakoukoliv diofantovskou rovnici se dvěma neznámými, která je řešitelná.

Dalším cílem bylo shromáždění a vytvoření slovních úloh pro základní školy, které se dají řešit diofantovskými rovnicemi se dvěma neznámými.

Dle mého názoru se oba cíle podařilo splnit. Práce obsahuje 43 zadání slovních úloh, z nichž 36 jsem vytvořila sama. 7 úloh je převzatých či upravených od jiných autorů, kteří jsou vždy uvedeni u slovní úlohy.

Toto téma mě nadchlo. Proto věřím, že v něm budu pokračovat i v diplomové práci. Ráda bych žákům základních škol ukázala alespoň některé možné metody řešení a následně jim zadala několik slovních úloh. Zajímá mě, který způsob by považovali za nejjednodušší či nejzajímavější a zda by žáci v různých ročnících dokázali úlohy řešit bez znalostí těchto postupů.

Seznam použité literatury

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. Lineární algebra. 3. Praha: MATFYZPRESS, 2005. ISBN 80-86732-57-6.

[2] CALDA, Emil. *Rovnice ve škole neřešené.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 1995, 54 s. ISBN 80-85849-88-7.

[3] BARTSCH, Hans-Jochen. Matematické vzorce. 4. Praha: Academia, 2006, 832 s. ISBN 80-200-1448-9.

[4] HEJNÝ, Milan a Naďa VONDROVÁ. Elementární matematika: rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie. 2. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-014-5.

[5] HESTERIC, Roman. Priklady.EU: diofantické rovnice [online]. [citováno 24. 4. 2018]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/matematika/diofanticke-rovnice.alej.

[6] JANSOVÁ, Pavlína. Diofantické rovnice. Praha, 2010, 51 s. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Jarmila Novotná.

[7] KRUPKA, Peter. Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií, 1.díl. 3. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-188-4.

[8] NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika : sbírka příkladů: 3. část - Základy algebry.* Vyd. 2. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, 136 s. ISBN 80-7290-190-7.

[9] NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika : sbírka příkladů: 2. část - Polynomická algebra.* Vyd. 2. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000, 150 s. ISBN 80-7290-007-2.

[10] POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

[11] RIEMEL, Tomáš. Diofantovské rovnice a jejich soustavy. Olomouc, 2017. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce Jaroslav Švrček.

[12] TREJBAL, Josef. Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1999, 88 s. ISBN 80-7235-057-9.