Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2018 Gabriela Kuchaříková

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vliv typu vztahu proměnných na úspěšnost řešení slovních úloh

Influence of the type of relationship between variables on the success in word problems

Gabriela Kuchaříková

Vedoucí práce: Mgr. Veronika Tůmová

Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)

Studijní obor: B M-PG (7504R015, 7501R008)

2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Vliv typu vztahu proměnných na úspěšnost řešení slovních úloh vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 13. 7. 2018

....

podpis

Poděkování

V první řadě bych ráda poděkovala své vedoucí práce Mgr. Veronice Tůmové za cenné rady, vedení mé práce, poskytnutí odborných materiálů a za čas, který mi věnovala. Dále bych chtěla poděkovat za pomoc doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. a Mgr. Radce Havlíčkové.

Velké díky patří také mým rodičům a celé rodině za podporu v průběhu studia.

ANOTACE

Téma této bakalářské práce je Vliv typu vztahu proměnných na úspěšnost řešení slovních úloh. Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část.

V teoretické části je probírána výuka matematiky se zapojením slovních úloh, s důrazem na ty úlohy, kde je vztah mezi proměnnými aditivní nebo proporční. Dále se tato část věnuje zmapování výskytu zmíněných vztahů v učebnicích.

V praktické části je rozbor žákovských řešení dvou vybraných úloh z testování HT3 projektu 16-06134S Grantové agentury České republiky – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům. Tyto úlohy byly navrženy právě s cílem zkoumat vliv různého vztahu proměnných na úspěšnost žáků. Úlohy analyzuji jak z hlediska kvantitativního, tak i z hlediska kvalitativního – jak se liší strategie a chyby žáků u obou úloh apod.

KLÍČOVÁ SLOVA

Slovní úloha v matematice, legenda (zápis), řešení, aditivní uvažování, proporční uvažování, motivace, analýza učebnic

ANNOTATION

The subject of this bachelor’s thesis is the influence of the type of relationship between multiple variables on the success in word problems. This thesis is divided into two parts. The first is theoretical and the second is practical.

The theoretical part discusses the teaching of mathematics including word problems with an emphasis on problems with additive and proportional reasoning. Subsequently, this part deals with a textbook’s analysis of the mentioned reasonings.

The practical part is analysis of students’ solving of two chosen problems from testing HT3 of the Grant Agency of the Czech Republic’s project number 16-06134S – Word problems as a key to the application and understanding of mathematical concepts. These problems have been designed precisely to examine the impact of different relationships between variables on the success of students. The problems are analysed both in quantitative and qualitative terms – how the student strategies and errors differ in both of the problems, etc.

KEYWORDS

Word problem in mathematics, notation, solving, additive reasoning, proportional reasoning, motivation, textbook's analysis

Obsah

1 Úvod

V každodenním životě se kolem nás děje spousta věcí, které si buď plně uvědomujeme, nebo je vnímáme pouze podvědomě. Pokud se ale zastavíme a soustředíme se na probíhající situace okolo nás, začne nejednoho zvídavého jedince zajímat, zda se dění odehrává náhodně, nebo podle nějakého řádu. Docházíme tak záhy k neuvěřitelnému zjištění, že existují jistá pravidla dění, která se dají matematicky zapsat i znázornit a že vlastně matematiku potřebujeme a používáme každodenně ať v základní, nebo složitější formě. Vždyť jen taková obyčejná činnost jako je běžný nákup v supermarketu náš mozek matematicky „zaměstná". Počítáme peníze, čas, kusy, výhodnější balení atd. Je tedy zřejmé, že matematické znalosti jsou velmi potřebné pro všední život a že právě díky matematice můžeme nalézt přesné odpovědi pro naše myšlenkové pochody typu: „Za jaký čas dojedu autem do práce, která je vzdálená 7 km a cesta vede městem?" „Kolik Kč musím mít, když si chci ve směnárně koupit 100 EUR?", „O kolik mouky musím dát více, když chci péct koláč ze 1,5 dávky?" apod.

Přes všechna možná využití matematiky, a to nejen v reálném životě, ale také např. v chemii, fyzice, technice, lékařství, kosmonautice a v dalších různých vědách, se podle výzkumu Rendla, Vondrové a kol. (2013 a 2015) matematika stává neoblíbeným předmětem u velkého množství žáků ZŠ. Hejný (1995) uvádí, že většina žáků vnímá matematiku pouze jako soubor pouček, návodů, pravidel, které je nutné opakovat, procvičovat a pamatovat. Podle autora je matematika způsob myšlení a pouze hrstce vyvolených je umožněno vstoupit do tajů tohoto myšlení.

V letech 2011 – 2013 probíhal výzkum, v němž bylo zjištěno, že v matematice oblast slovních úloh hodnotí jako kritickou hned 25 učitelů prvního stupně z celkového počtu 26 oslovených pedagogů. Následně i učitelé druhého stupně základních škol potvrzují, že se nejedná o snadné téma ani pro starší žáky. Někteří dokonce uvedli, že jsou to právě slovní úlohy, které mají u žáků za následek vysokou neoblíbenost celého předmětu (Rendl, Vondrová a kol., 2013 a 2015).

Pod záštitou Grantové agentury České republiky se každoročně koná mnoho projektů a tento projekt *„16-06134S – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým* *pojmům"* (dále jen projekt), kterým se budu zabývat ve své bakalářské práci, není výjimkou.

Jak ze samotného názvu předkládané práce a projektu vyplývá, bude se zde pojednávat o slovních úlohách, které jsou jedním z dnes a denně probíraných matematických témat, a jimž se věnuje i velké množství dalších výzkumů.

Tyto výzkumy, tvrzení předchozích autorů, ale i moje vlastní zkušenost z dosavadních studií sehrály podstatnou roli při výběru tématu bakalářské práce. Problém slovních úloh, vedoucí k neoblíbenosti matematiky, považuji za velmi aktuální až palčivý, proto se tomuto tématu věnuji blíže.

Cílem práce je sledovat úspěšnost a strategie řešení žáků u slovních úloh, kde je vztah mezi proměnnými buď proporční (např. 2x rychleji) nebo aditivní (např. stejně rychle, ale u jedné proměnné je určitý "náskok").

Bakalářská práce je strukturovaná do čtyř hlavních kapitol, a to je úvod, teoretická část, praktická část a závěr.

V úvodu jsem objasnila rozhodující okolnosti, které mne inspirovaly k výběru tématu bakalářské práce, a jejich aktuálnost. Rovněž jsem zde vytýčila hlavní cíl práce a prezentovala problémy slovních úloh vedoucí k malé oblibě matematiky.

Teoretickou část jsem v logickém sledu zkoumané oblasti rozčlenila na jednotlivé subkapitoly. Pro zpracování této kapitoly se hlavními zdroji informací stala odborná literatura, články, interní dokumenty, data z výzkumu a internetové zdroje, ze kterých jsem tvořila literární rešerše a komparace. Nejprve jsem se zde krátce zmínila o historii, poněvadž bez ní by nebyla současnost. Vyzdvihla jsem tak významné osobnosti, jakými byli např. *Archimédés, Pythagoras* apod., kteří podstatným způsobem přispěli k rozvoji matematiky. Poukázala jsem na koncepty zadání slovních úloh v minulosti a zmínila významné období pro matematiku. Dále jsem se zabývala samotným pojmem slovní úloha a komparací jeho různých výkladů, rovněž jejich typologií a strukturou jejich řešení. Navazující subkapitola se následně zabývá parametry slovní úlohy a motivací žáků k jejich řešení.

Praktickou část otevírá metodologie, ve které jsou objasněna kritéria pro účastníky výzkumu, průběh a forma testování. Stěžejní částí se pak stává zkoumání řešení slovních úloh od žáků ZŠ a ukázky správných postupů a výsledků.

Čtvrtou částí práce je závěr, ve kterém je vše shrnuto.

2 Teoretická část

2.1 Historie slovních úloh

Jak bylo zmíněno v úvodní kapitole, celá práce se odehrává v kontextu slovních úloh. Významné se tak stává krátké nahlédnutí do historie, kde o nich nacházíme první záznamy. Je velmi zajímavé pojetí konceptu slovních úloh v podobě hádanek, finančních operací, geometrických útvarů, nebo veršů, dochovaných na pro nás netypických nosičích, jako je např. papyrus, nebo hliněné tabulky. Rovněž je důležité z historie zmínit i takové velikány, kteří se zásadním způsobem zapsali do dějin matematiky, a období, která měla podstatný vliv na její rozvoj. Pro lepší pochopení zadávání slovních úloh v té době cituji několik slovních úloh jako příklad.

Starověký Egypt

Matematika se ve starověkém Egyptě využívala především ve stavebnictví.

Nejrozsáhlejším matematickým textem je Rhindův papyrus, který je nyní vystaven v Londýně v Britském muzeu. Nachází se v něm jedna z nejstarších hádanek:

Je 7 domů, v každém domě 7 koček, každá kočka sežere 7 myší, každá myš sežere 7 klasů pšenice, z každého klasu by bylo 7 měřic zrna. Jak velké jsou jednotlivé počty a kolik je všeho dohromady (ČVUT, Starověký Egypt, s. 29)?

Druhým významným egyptským spisem je Moskevský papyrus, který byl necelých šest metrů dlouhý, nyní je rozdělen na několik částí a obsahuje 25 úloh. Nyní je umístěn v Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Dvanáctá úloha tohoto spisu zněla:

Řekne-li se ti: 13 měřic hornoegyptského ječmene převést na 18 džbánů piva, je-li sladu stejně jako datlí. Hle, sladu je stejně jako datlí, (tedy) $2\ \frac{1}{6}$. Počítej s $2\ \frac{1}{6}$, až najdeš těch 13. Hle, bylo řečeno 13, to je těch 13 měřic. Vyjde 6krát. Počítej se 6, až najdeš 18, vyjde 3krát. Hle, to je kvalita 3. Nalezl jsi správně (Vymazalová, 2006, s. 81).

Mezopotámie

Na území Mezopotámie se zapisovaly úlohy klínovým písmem na hliněné tabulky. Vyvíjely se zde finanční operace – počítání daní, úroků, dluhů a dědictví. Proto jednou z dochovaných úloh je:

Kapitál v hodnotě 1 gur byl půjčen na úrok rovný jedné pětině ročně. Za jakou dobu se kapitál zdvojnásobí (Konforovič, 1989, s. 32)?

Základem soustavy bylo číslo 60, které dodnes používáme při počítání s časem a úhly v geometrii. Číslo 158 (= 2.60 + 38) zapisovali takto: 2, 38. Bečvář, Bečvářová a Vymazalová (2003, s. 241) uvádí jako příklad úlohu:

Pole tvaru pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je l = (6, 30) a obsah S = (11, 22, 30), se má rozdělit mezi 6 bratrů tak, aby jejich díly tvořily aritmetickou posloupnost.

Období Helénistických zemí a Římského císařství

Z hlediska matematiky se jedná o velmi důležité období, poněvadž se v něm narodilo velké množství významných osobností, které zásadním způsobem dopomohly k rozvoji matematiky. Těmi velikány jsou např. *„Eratosthenes z Kyreny, Archimédés nebo Diofantos z Alexandrie“* (Kadlčíková, 2010, s. 26).

Novotná (2000) uvádí úlohu:

Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny.“ Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závěť nebožtíka?

Starověké Řecko

V tomto období došlo k rozvoji geometrie. Tháles z Milétu vytvořil seznam tvrzení, která se zabývají základními vlastnostmi geometrických útvarů. Dále se o rozvoj zasloužil Pythagoras ze Samu, který dospěl k názoru, že matematika a číslo je základem všeho. Pythagorovci pracovali s přirozenými čísly, které dělili na 3 kategorie, mužská (lichá) čísla, ženská (sudá) a sudo-lichá čísla, která zastupovala vesmír a dokonalost. Nejdokonalejším číslem je podle nich číslo 10. Dnes pracujeme s Pythagorovou větou a zjišťujeme Pythagorejské trojice.

Dochované úlohy z tohoto období:

Obsah trojúhelníku se rovná 84 jednotkám obsahu. Vypočítejte délky jeho stran, když je známo, že jsou vyjádřeny třemi za sebou následujícími přirozenými čísly

(Konforovič, 1989, s. 126).

Najděte taková tři čísla, aby součet všech tří i součty každých dvou byly čtverce (Konforovič, 1989, s. 73).

Indie

Nejznámějším dílem je Šalvasútra, též Pravidla provazce. Je to kniha psaná veverších a zabývající se tehdejšími stavbami. Více jak tisíc let před naším letopočtem zde byl znám pravoúhlý trojúhelník, pro nějž využívaly poměr 5:12:13.

V úlohách často používali zvířata nebo rostliny. Příkladem takového zadání je následující úloha:

Stádo opic bavících se v háji se rozdělilo na dvě části.
Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích.
Dvanáct opic vítalo radostným křikem tichý rozbřesk dne.
A teď řekni, jinochu, kolik opic bylo v háji (Vítová, 2012, s. 13).

Čína

Nejvýznamnějším spisem této země je Matematika v devíti knihách z let 2000-152 před naším letopočtem (můžeme najít i pod názvem Devět kapitol matematického umění). Je to spis se slovními úlohami z praxe. Jako příklad zde uvedu úlohu o pohybu a zlomcích. (1 li = 0,576 km)

Host ujede za den 300 li. Host vyjel od hostitele, ale zapomněl jeden oděv. Když po třetině dne objevil hostitel zapomenutý oděv, vydal se na cestu, aby hosta dohonil. Když předal oděv hostovi, ihned obrátil koně na zpáteční cestu. Za tři čtvrtiny dne (od odjezdu hosta) byl opět doma. Kolik li by ujel na koni za den? (Vítová, 2012, s. 15)

2.2 Pojem slovní úloha

Jedním z možných způsobů, jak si procvičit počty z běžného života jsou slovní úlohy. Při jejich řešení trénujeme své logické myšlení, schopnost řešit problém, porozumění psanému textu a své matematické schopnosti a dovednosti.

Ačkoliv jsou slovní úlohy složitým tématem pro nemalou část z nás, je důležité s nimi umět pracovat. V životě se neustále setkáváme s texty, kterým potřebujeme porozumět, k čemuž nám právě slovní úlohy dopomáhají a v tomto ohledu trénují naše schopnosti.

Pojmem slovní úloha a jeho vznikem se zabývalo a stále zabývá spousta pedagogů a autorů učebnic a odborných publikací. Každý tento pojem vykládá odlišně.

Mareš (1980) se ve svém článku v časopise Pedagogika pokusil objasnit Fridmanovu teorii učebních úloh. Fridman (v Mareš, 1980) je sovětský psycholog, který se rozhodl sepsat článek o teorii úloh, protože si povšiml, že rozvoj psychologie a didaktiky je zpomalen právě tím, že tento článek v řetězu poznatků chybí. Úloha se podle něj rodí v momentě, kdy se subjekt setkává s obtíží nebo překážkou, kterou si uvědomuje, a hledá způsoby, jak je odstranit. Na pojem úloha dále pohlíží z kyberneticko-logického hlediska, kdy není potřeba zabývat se jednajícím subjektem. Ve svém systémově strukturním rozboru úlohy jako takové zjistil čtyři základní složky každé úlohy. První složkou úlohy podle Fridmana je věcná oblast týkající se objektů, které se v ní vyskytují, a druhou složkou jsou jejich vzájemné vztahy. Na uvedené dvě složky, které tvoří tzv. podmínky úlohy, navazuje třetí, nesoucí cíle a požadavky úlohy, a čtvrtá složka, jež se zabývá soubory operací, které jsou potřeba ke splnění úkolů.

Pro Hejného (1990 a 1995) je slovní úloha v matematice určitou výzvou, která musí provokovat a motivovat. Je to hádanka, ve které je zadání zakleto do slov. Správnému způsobu zadání je proto třeba věnovat hojné množství pozornosti.

Vyšín (1962) uvádí, že slovní úlohy jsou úlohy formulované pomocí slov a ne matematických symbolů. Geometrické úkoly se podle něj obvykle za slovní úlohy nepokládají, avšak Odvárko (1990) je naopak řadí přímo mezi slovní matematické úlohy.

Existují i autoři, kteří za slovní úlohy považují pouze ty s reálným problémem. Například Kuřina (1989) vyslovuje tvrzení, že se jedná o všechny texty obsahující reálnou situaci a otázky. Úkolem řešitele je pak nalézt odpověď na dané otázky.

2.2.1 Typologie slovních úloh

Podobně jako tomu je u jiných věcí, i u slovních úloh můžeme mluvit o typologii. Je spousta způsobů, jak slovní úlohy dělit, např. podle typu úloh, podle obtížnosti a počtu operací, které jsou potřeba k jejich vyřešení, podle oblasti, které se věnují, a v neposlední řadě dle kontextu. Zmíněná dělení jsou jen úzkým výčtem několika příkladů, není zde ani možné zmínit všechna dělení od všech autorů. V pokračování této kapitoly se tedy budu zabývat pěti autory, kteří rozdělují úlohy právě podle výše zmíněných kritérií.

Dělení podle typu úlohy se věnuje Fridman (v Mareš, 1980), který vychází ze svého systémově strukturního rozboru úlohy. Odlišuje tři typy, kterými jsou úlohy na zjištění hledaného, konstruktivní úlohy a úlohy důkazové. Samotné názvy již dostatečně naznačují, o čem jednotlivé typy pojednávají, proto není nutné je zde blíže rozebírat.

Jinak tomu je u Blažkové (2001), která zmiňuje dva základní typy slovní úlohy: jednoduché a složené slovní úlohy. Zpravidla pouze jedna operace stačí k vyřešení jednoduché slovní úlohy. Vyskytují se v ní obvykle dva údaje, ze kterých se má řešitel dostat ke třetímu údaji, který odpoví na zadanou otázku. Naopak k rozřešení složené slovní úlohy potřebujeme více než jednu operaci. Při řešení je rozkládáme pomocí analytické nebo syntetické metody na dílčí jednoduché úlohy, kde každá z nich pak vede pouze k jedné početní operaci.

Vyšín (1962) rozděluje úlohy na algebraické, aritmetické a úlohy z praxe, které ke svému řešení potřebují vyřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.

Odvárko a jeho kolegové (1990) je oproti Vyšínovi dělí odlišně. Říkají, že podle oblasti matematiky jsou slovní úlohy matematické a slovní úlohy s nematematickým obsahem. Matematické úlohy nejsou vyjádřené v příslušném symbolickém jazyce kalkulu, do něhož je musí řešitel teprve přeložit. Dále se dělí na slovní aritmetické, slovní algebraické a geometrické úlohy. Oproti matematickým je ve slovních úlohách s nematematickým obsahem vždy aspoň jeden termín, který do žádné matematické teorie nepatří.

Novotná (2000) dále mluví o dělení úloh podle kontextu, které závisí na každém autorovi, jak si je vymezí. Jedním z možných dělení je na slovní úlohy týkající se pohybu, společné práce, směsí, obsahu a dělení celku na části.

2.2.2 Struktura řešení slovní úlohy

V momentě, kdy máme řešit nějaký problém, se musíme plně soustředit na pochopení textu a vzniklé situace. Při řešení slovní úlohy tomu není jinak.

Podle Hejného (1995) popisuje slovní úloha tzv. *situaci úlohy*, tedy ucelený soubor objektů a jejich vazeb, do kterého je potřeba vniknout a pochopit jej. Toto porozumění zařazuje na konec první fáze procesu řešení s názvem *zmocňování se slovní úlohy*. Pokud nedojde ke shodě porozumění řešitele a autora úlohy, nazývá to Hejný (1995) *deformovaným uchopením*. Ve druhé fázi má žák za úkol úlohu početně řešit a ve třetí interpretovat získaný výsledek.

Podobně jako Hejný (1995) popisuje strategii řešení Blažková a kol. (2001). Člení ji také na tři základní fáze: *matematizace slovní úlohy, řešení matematické úlohy a konfrontace výsledku matematické úlohy s jejím zadáním*. Druhé členění, které ve své publikaci uvádí, je již o něco podrobnější a jasnější. Je to celkem sedmifázový postup. V první fázi jde o pochopení textu, kdy se žák snaží docílit čtení s porozuměním. Následuje rozbor, kterému je potřeba věnovat maximální pozornost, a matematizace reálné situace, jež je textem vyjádřena. Čtvrtou fázi vyplní odhad výsledku, například určit řád čísla, které má vyjít. Na ni navazuje samotné řešení problému pomocí algoritmů, jejichž zvládnutí má velký vliv na konečnou úspěšnost řešení dané slovní úlohy. V neposlední řadě se provádí zkouška správnosti a v sedmé fázi se zapisuje odpověď na položenou otázku.

Má vlastní zkušenost se blíží podrobnějšímu členění od Blažkové a kol. Když jsme se ve škole učili řešit slovní úlohy, nejprve jsme si přečetli zadání a ujistili se, že všem slovům z textu rozumíme. Poté jsme začali úlohu opětovně číst. Při druhém čtení jsme si již zapisovali pro nás relevantní informace a jejich vztahy, tedy vytvořili jsme si legendu. Zjednodušili jsme tím text na několik slov a znaků, aby byl pro nás lépe srozumitelný. Pod legendu jsme pak doplnili, co je naším úkolem zjistit. V dalším kroku jsme se zamysleli, kolik početních úkonů musíme vykonat, abychom problém rozřešili, a které to budou. Po splnění předchozích kroků jsme započali řešení. Ve chvíli, kdy byl proces u konce, zkontrolovali jsme, zda náš postup opravdu odpovídá zadání. V následujícím kroku jsme provedli zkoušku, abychom opravili případné nedostatky a početní chyby. Pokud zkouška souhlasila, zopakovali jsme si dotaz a napsali odpověď. V tento moment pro nás byla situace vyřešena a výsledky jsme mohli využít v praxi nebo k řešení nových problémů.

Nikde není psáno, že ihned přijdeme na správné kroky vedoucí k rozřešení problému. K tomu se dopracujeme i několika mylnými pokusy, přičemž pokaždé procházíme celý výše zmíněný postup, případně pouze vynecháme první čtení naší úlohy. I Theodore Roosevelt pronesl slavnou větu: „*Člověk, který nikdy nedělá chyby, je člověk, který nikdy nedělá nic.*“ (dostupné z www.citaty.net).

Následující obrázek 1 jednodušeji znázorňuje celou strategii.

Obrázek 1: Schéma strategie řešení slovní úlohy

Ve výše uvedeném schématu jsou jednotlivé kroky v logickém sledu znázorněné šipkami. Jedná se o stručný návod, kudy by se měly ubírat myšlenkové pochody žáků.

2.3 Parametry slovní úlohy

V této kapitole se budu zabývat slovní úlohou a tzv. parametry, které mají vliv na její obtížnost. Nejprve se zaměřím na základní parametry slovní úlohy, jak je popisují někteří autoři (viz. níže). Dále se budu věnovat příkladovým úlohám ke dvěma určitým parametrům, jejichž dopad na žákovská řešení zkoumám v praktické části této bakalářské práce.

Struktura úlohy je podle Fridmana (v Mareš, 1980) prvním podstatným znakem každé úlohy. Těchto znaků, které nazývá parametry úlohy, uvádí celkem šest a přiznává, že se nejedná o konečný počet. Výčet těchto parametrů je následující: *„Vedle už zmíněné struktury úlohy k nim patří logická správnost úlohy, stupeň určenosti úlohy, míra zobecnění úlohy a konečně míra úplnosti zadání. … Šestým parametrem je způsob jazykového vyjádření úlohy“* (Mareš, 1980, s. 597).

V projektu, kterého se tato práce týká, se zkoumalo velké množství dalších parametrů, které jsou v úzkém propojení s parametry podle Fridmana. Jedním z nich je hustota textu, díky kterému je zahrnuto velké množství informací v jednom delším souvětí a pro žáky je tak často obtížněji zpracovatelný zápis zadání. Dalšími byly například uvedení údajů v určitém pořadí, nahrazení názvu koruna za jinou měnu, přítomnost slov v roli antisignálu, uvedení nadbytečného údaje, přítomnost obrázku v zadání a explicitnost zadání (interní pracovní materiálu projektu).

Tato práce se přímo zabývá dvěma parametry: aditivním a proporčním, které byly také součástí výše zmíněného projektu. Aditivní myšlení předpokládá využití operace sčítání a odčítání a proporční myšlení vyžaduje užití operace násobení a dělení a práci s poměrem. Těmito parametry se zabývají i Dooren, De Bock a Verschaffel ve svém výzkumu (2010). Ti také zjišťují, že se velké množství výzkumů již několik desetiletí soustředí na rozvoj proporčního myšlení žáků, zejména tedy na přechod mezi aditivním a proporčním myšlením. Jak tyto výzkumy matematického vzdělávání dokazují, násobení a dělení je více než pouze rozdílná sada aritmetických operací, které se učí po sčítání a násobení, multiplikativní smýšlení má daleko větší rozsah využití než pouze jako rychlejší cesta pro opakované sčítání. Ačkoliv opakované přičítání je jednoduchým modelem násobení, Geer (V Dooren and kol., 2010) zjistil, že žáci ho neradi používají, protože mají strach, že tato metoda není kompletní, a mají pocit, že je jejich povinností dosáhnout významné kvalitativní změny přechodem od aditivního smýšlení k multiplikativnímu. Dooren a kolektiv dokládají, že studie (například: Nunes & Bryant, 1996; Squire, Davies & Bryant, 2004) potvrdily, že žáci lépe řeší slovní úlohy, které mohou být koncipované jako a řešené přes opakované sčítání. Selhávají ale na úlohách, kde se s násobením zachází odlišně. Dooren uvádí dva příklady slovních problémů, které nám blíže specifikují zmíněné typy úloh. Prvním typem úlohy na násobení, který žákům nedělá nikterak velký problém, je například následující úloha s auty: Když má každé auto 4 kola, kolik kol má dohromady 6 aut?. Zde vidíme, že se jedná pouze o klasické vynásobení dvou zmíněných hodnot v zadání. Druhým typem a méně oblíbeným je úloha: Dejme tomu že mám šestery kalhoty a celkem 4 trička. Kolika způsoby se mohu obléknout? Oproti první slovní úloze zde již není zcela zřetelné, že číslo 6 má být číslem 4 násobeno.

Dooren (1980, s. 361, 362) se dále zabývá, jak se liší úspěšnost stejné skupiny žáků při řešení úlohy obsahující aditivní situaci a při řešení úlohy, ve které by se mělo využít násobení a dělení případně práce s poměrem. Pro svůj výzkum vytvořil dvě úlohy, které jsou přímo zářným příkladem zkoumaných parametrů.. První z nich zní: Tomáš a jeho sestra Anička mají narozeniny ve stejný den. Tomášovi je nyní již 15 let, přičemž Anička dovršila věku teprve 5 let. Tomáš přemýšlí nad tím, jak stará bude Anička, když jemu bude 75 let. Druhá má tuto formulaci: Rick si šel koupit tuňáka. Měl před sebou jednoho zákazníka, který za 250 gramů tuňáka zaplatil 10 euro. Kolik euro zaplatí Rick, když potřebuje koupit 750 gramů? V první úloze se jedná o krásný příklad pro aditivní smýšlení, kdežto druhá jasně vyžaduje použití poměru případně operace násobení a dělení.

Podle názorů výše zmíněných autorů je spousta aspektů, které mohou negativně ovlivnit správné řešení slovních úloh. Jejich zjištění by měly mít na paměti nejen zadavatelé slovních úloh při jejich koncipování, ale i tvůrci učebnic.

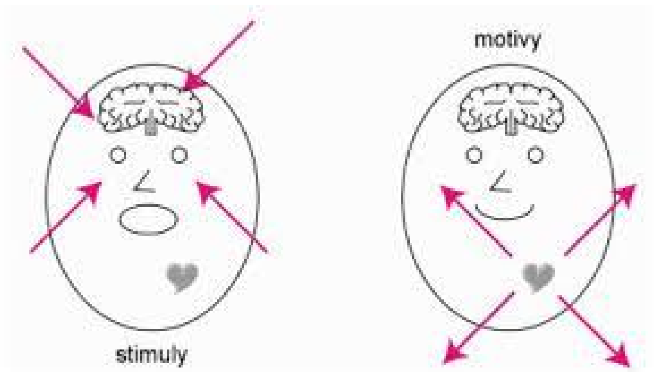
2.4 Vztah žáků ke slovním úlohám a motivace k vyřešení problému

V této subkapitole se budu zabývat vztahem žáků ke slovním úlohám a jejich motivací k nalezení správného řešení. Nejprve se zaměřím na samotnou motivaci, která hraje v procesu učení velmi podstatnou roli, dále pak na její typy a zdroje.

Podle Plamínka (2015) je motivace vytváření kladného přístupu k něčemu, např. k výkonu, nebo typu chování. Nakonečný (2014) definuje motivaci jako intrapsychický proces, který je aktivován určitou potřebou za účelem dosažení žádoucího vnitřního stavu. Hejný (2014) pak přisuzuje motivaci klíčovou úlohu v poznávacím procesu a uvádí, že žák s vnitřní potřebou poznání vše zkoumá intenzivněji, hlouběji a komplexněji oproti žákovi, který je k tomu donucen.

Většina autorů dělí motivaci na vnitřní a vnější, kdy primární roli přisuzují vnitřní části motivace a sekundární vnější části motivace. Rozdíl mezi nimi pak Plamínek (2015) shledává ve vnitřních pohnutkách (motivech) člověka, který vykonává nějakou činnost, protože ho to baví a ve vnějších podnětech (stimulech), kdy je ochota něco udělat vyvolána z vnějšku a to stimuly typu různých pobídek (odměn/trestů). Hejný (2014) odlišnost obou částí motivace nachází již ve významu samotných latinských slov, kdy moveô znamená pohyb a stimulô ostnem bodati, píchati. Oba pojmy graficky znázorňuje následující obrázek 2 od Plamínka (2015, s. 16).

Obrázek 2: Rozdíl mezi motivací a stimulací



Pro pochopení problematiky motivace v chování a jednání člověka je podle autorů Bedrnové, Nového a kol. (2007) nutné vědět co motivaci ovlivňuje, jak vzniká a z čeho pramení. Jedná se tak o zdroje motivace, podílející se na utváření lidské činnosti. Autoři za hlavní považují potřeby, návyky, zájmy, hodnoty a ideály.

Mimo výše uvedené zdroje motivace, které utvářejí a ovlivňují motivaci lidské činnosti, existuje ještě celá řada nástrojů, jež na ni působí. Podle Mikuláštíka (2015) se jedná spíše o motivační stimuly, jako je možnost využití znalostí a dovedností, možnost rozvíjet se, mít dostatečnou míru demokracie atd. Stejně tak i Hejný (2014) vnímá nástroje školní motivace, především ve výuce matematiky, jako stimuly, poněvadž žáci motivovaní svou vlastní potřebou zkoumat taje matematiky bývají spíše výjimečným úkazem. Nástroji, které mají žáka pobídnout k učení, bývá snaha dostat dobrou známku, obavy ze špatné známky, možnost zalíbit se pedagogovi, udělat někomu radost, třeba mamince. Hejný (2014) uvádí, že snahou učitelů je žáky motivovat a přilákat jejich zájem o matematiku, a proto používají různé nástroje motivace, jako jsou třeba soutěže, atraktivní kontext matematických úloh nebo metody přiměřených úloh. I v tomto způsobu motivace lze najít určitá negativa, jako např. časový limit u soutěží, který pomalejší žáky diskvalifikuje, zase u úloh s atraktivním kontextem je motivace pouze krátkodobá a je zapotřebí vynalézavosti učitele a u metod přiměřených úloh je nutné mít na paměti individualizaci výuky, kdy slabší žáci úlohu nevyřeší a zdatnějším se zdá být velmi lehká. Proto Hejný (2014) zdůrazňuje, že nejúčinnější motivací je ta, která vychází z vnitřního pocitu žáka vyvolaného pocitem úspěchu, nebo radosti z dobře vyřešené úlohy. Vnitřně motivovaní žáci mají tak pocit intelektuálního růstu, sociálního uznání nebo odměny např. formou pochvaly, kterou i Bednář (2012) považuje za nejmocnější nástroj motivace, poněvadž okamžitě zvyšuje momentální výkon a zásadním způsobem přispívá k jeho udržení.

Slovní úlohy jsou pro žáky náročným tématem, jak dokazují závěry různých výzkumů, jako např. od Rendla, Vondrové a kolektivu (2013 a 2015). Snahou těchto badatelů bylo v letech 2011 – 2013 shromáždit a následně podrobit analýze praktické zkušenosti učitelů základních škol týkající se kritických míst v matematice. Celkem 60 vyučujících, z nichž bylo 26 učitelů z prvního a 34 z druhého stupně ZŠ, se zúčastnilo rozhovorů týkajících se slovních úloh z matematiky. Tento výzkum dospěl k závěru, že u 25 učitelů prvního stupně panovala shoda v tom, že slovní úlohy patří k těm nejkritičtějším oblastem. Tento závěr potvrzují i učitelé na druhém stupni, kteří se také pozastavují nad čtenářskou gramotností svých žáků, a to v případech, kdy se jedná o porozumění psanému textu.

2.5 Analýza učebnic

V této kapitole se budu zabývat tím, jak vypadají dnešní učebnice matematiky včetně pracovních sešitů. Co obsahují a co naopak postrádají. Jaký je poměr učebních úloh s aditivním vztahem mezi proměnnými a s proporčním vztahem. Vzhledem k tomu, že se v práci blíže věnuji pátému až sedmému ročníku, zmíním se o plánu učební látky v daných ročnících.

Vědeckotechnické pokroky přináší urychlení vývoje, ale vytváří stále vyšší nároky na obsah vzdělání, které se stává více odborné. Škramovská (1987) se dále zmiňuje o vlivu modernizace dnešní doby. Proces modernizace totiž neúnosně zvyšuje vědeckost učiva, které jde souběžně s jeho obtížností. Navyšuje se tak množství teorie, jež je pro pedagogickou praxi nezvladatelné a vytváří překážku pro propojení teorie s aplikovanými složkami učiva.

Ve své práci se v praktické části zabývám řešeními žáků pátého až sedmého ročníku a porovnávám úspěšnost v každé ze dvou úloh napříč těmito ročníky. Je tedy potřeba zmínit obsah učiva, které žáci v daném ročníku probírají, a které souvisí s možnostmi řešení zkoumaných úloh.

V pátých ročnících se věnují přirozeným číslům nad milion, jejich zápisu v desítkové soustavě, posloupnosti a umístěním na číselné ose. Žák by měl být schopen čísla porovnat, uspořádat je a dále s nimi pracovat, tedy ovládat písemné sčítání, odčítání, násobení a dělení a umět řešit jednoduché i složené úlohy, které k těmto operacím vedou. V tomto ročníku se také začínají poprvé zabývat desetinnými čísly, přesněji zjišťují, co je to desetinná čárka, desetina a setina, pracují se zlomky se jmenovatelem 10 nebo 100 a učí se řešit slovní problémy se zapojením znalostí z této oblasti. K podstatným znalostem patří i tvorba grafů, diagramů a tabulek, pomocí kterých lze přehledně uspořádat informace (Jeřábek a kol., 1996, Justová, 2009).

Šestý ročník automaticky navazuje na znalosti žáků z předešlého ročníku. Například u tematického celku *Desetinná čísla* se žáci učí pamětně násobit a dělit desetinná čísla a zaokrouhlovat je na požadovaný řád. Dále je učivo rozšířeno o dělitelnost čísel a jejich vlastnosti a o sčítání zlomků se stejným jmenovatelem (Jeřábek a kol., 1996, Molnár, 1998).

Sedmý ročník pak hlouběji využívá získané znalosti z předešlých ročníků, navíc se jeden z tematických celků přímo věnuje učivu poměru a přímé a nepřímé úměrnosti (Jeřábek a kol., 1996, Molnár, 1999).

Tato témata probíraná ve zmíněných ročnících jsou součástí učebních materiálů, jako jsou učebnice, pracovní sešity a různé pracovní listy. Vzhled těchto materiálů je velmi podstatný a rozsáhlý vědní obor, který se zabývá teorií a výzkumem učebnic je součástí systému pedagogických věd. Jsou celkem dva přístupy ke zkoumání učebnic. První je přístup *kurikulární*, zkoumající probírané učivo a vztah kurikula a učebnice. Druhý je *psychodidaktický*, který se zabývá prací s učebnicí ve výuce a zkoumá vliv učebnice na žáka a učitele (Knecht a Janík, 2008).

Školy, které se účastnily testování, používají učebnice od známých nakladatelství Alter a Prodos (interní dokumenty projektu), jejichž strukturou se zabývám v následujících dvou odstavcích. Nejprve uvádím název učebnice a jejího autora a posléze vyhodnocuji její strukturu (přehlednost, prolínání se témat, označení nového učiva atd.)

<u>Učebnice: Matematika pro 5. ročník základních škol (Justová, 2009)</u>

Tuto učebnici vydává nakladatelství Alter. Je určena pro vzdělávání se matematice a její aplikaci. Početní část je rozčleněna celkem do 31 kapitol, které se prolínají se stejným množstvím kapitol týkajících se geometrie. Každá kapitola obsahuje růžové texty, které vždy vysvětlují novou látku, nebo připomínají látku již probranou. Následně se v každé z kapitol vyskytuje minimálně 15 učebních úloh. Jsou mezi nimi vždy slovní úlohy, úlohy zadané tabulkami a obrázky a početní příklady. V kapitolách se pak objevují i úlohy, které nejsou zaměřené na učební látku dané kapitoly, ale procvičují již zvládnuté učivo, což žákům napomáhá udržet si již nabyté znalosti. K učebnici je možné si objednat také pracovní sešit členěný na jednotlivé, tematicky zaměřené, kapitoly, v nichž se ale opět vyskytují úlohy týkající se odlišných témat a geometrie.

<u>Učebnice: Matematika 6 a Matematika 7 (Molnár, 1998 a 1999)</u>

Učebnice, Matematika pro 6. a pro 7. ročník, jsou koncipované obdobně, proto se jimi budu zabývat společně. Vydává je nakladatelství Prodos a jsou rovněž členěny do několika kapitol. Oproti učebnicím od nakladatelství Alter se v těchto nekombinuje početní a geometrická část. Nejprve se probere jedna celá kapitola věnovaná početním operacím a poté se začíná s novou kapitolou, která se věnuje jednomu celému úseku geometrie. Toto členění působí přehledněji a srozumitelněji, záleží však na učiteli, jak si poskládá učivo do svých hodin. Látka je zde vysvětlena ve žlutě podbarvených rámečcích, oproti učebnicím od nakladatelství Alter se zde každá kapitola věnuje pouze svému tématu a žádné úlohy z předešlých kapitol se v následujícím tematickém celku nevyskytují. Tento fakt opět přispívá k přehlednosti učebnice, avšak přenechává na učiteli veškerou zodpovědnost za opakování probraného učiva, vyjma učiva v právě probírané subkapitole, pro jehož opakování jsou uvedeny souhrnná cvičení na konci celé hlavní kapitoly. Učebnice je plná slovních úloh, početních příkladů, tabulek, grafů a obrázků, učivo je tedy probíráno rozmanitou a hravou formou a je také doplněno o úlohy v pracovních sešitech.

Poslední bod této kapitoly se zaměří na aditivní a proporční vztah proměnných a jejich výskyt v učebnicích matematiky pro páté, šesté a sedmé ročníky základních škol.

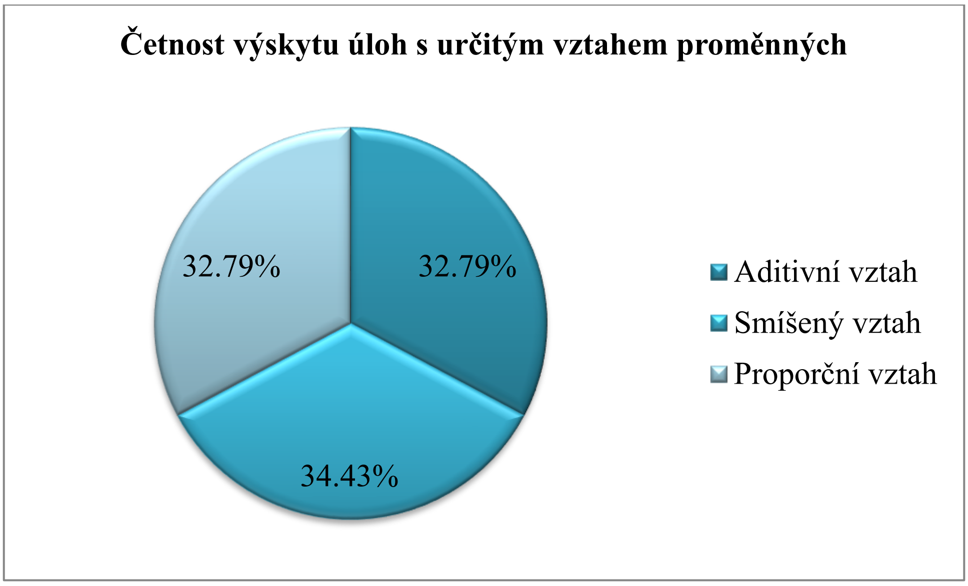
<u>Slovní úlohy s proměnnými v aditivním nebo proporčním vztahu</u>

Mým hlavním cílem bylo zjistit, jak je to s četností výskytu úloh, které procvičují aditivní a proporční myšlení. Úlohy, které jsou postavené na volbu operace násobení, ale jsou zároveň možné vyřešit opakovaným přičítáním nebo odčítáním, zahrnuji ve své práci k proporčnímu vztahu proměnných.

Při procházení učebnic jsem zjistila, že v každé kapitole je minimálně polovina ze skupiny cvičení věnovaná právě slovním úlohám. Jejich formulace zahrnují i následující sousloví: *o x více, o x méně, xkrát více a xkrát méně.*

Četnost úloh vyžadujících operaci násobení, případně dělení, nebo operaci sčítání, případně odčítání, nebo kombinaci dvou různých operací (např. něco vynásobit a poté výsledky sečíst), zachycuje následující graf 1.

Graf 1: Četnost výskytu úloh s určitým vztahem proměnných



Graf 1 znázorňuje, že v učebnicích od nakladatelství Alter je zastoupení aditivního vztahu proměnných srovnatelné se zastoupením proporčního vztahu proměnných. Přičemž navíc obdobnou četnost výskytu mají i úlohy s kombinací obou vztahů.

Stejné rozvržení vztahů proměnných ve slovních úlohách lze nalézt i v učebnicích od nakladatelství Prodos.

3 Praktická část

3.1 Metodologie

Účastníci a postup

Představená studie je součástí širšího výzkumu v rámci Grantové agentury České republiky (GA ČR), který je zaměřen na zkoumání proměnných ovlivňujících obtížnost problémů se slovy. Účastníci jsou žáci 5. (ve věku 10-11 let), 6. (11-12 let) a 7. ročníku (12-13 let) ze čtyř pražských základních škol, záměrně vybraných pro účely zmíněného projektu. Školy byly vybrány podle zpráv České školní inspekce a webových stránek škol. Cílem bylo nalézt školy střední velikosti splňující tyto vybrané charakteristiky:

- školy jsou bez odborné přípravy
- školy jsou navštěvované dětmi v jejich bezprostředním okolí
- ve školách jsou studenti s různorodým socioekonomickým zázemím
- podíl zahraničních dětí ve vybraných školách nesmí přesahovat průměr jejich podílu v rámci celé ČR
- školy nejsou zaměřeny na děti se zvláštními potřebami
- školy se nacházejí v oblasti vnější Prahy
- projektu se zúčastnila celá škola, bez bližšího výběru konkrétních žáků, součástí studie jsou tedy všichni žáci 5., 6. a 7. třídy vybraných škol.

Žákům byly podány tři testy. Počáteční zkouška z matematiky a českého jazyka se uskutečnila na začátku školního roku (říjen 2016). V těchto testech byly všechny úkoly stejné pro všechny žáky v daném ročníku. Přesněji se skládaly z matematických problémů (nejen slovních úloh), porozumění textu a jazykových úkolů, které vycházely z předmětů běžně vyučovaných ve všech čtyřech školách. Cílem této zkoušky bylo rozdělit žáky na čtyři skupiny s podobnými celkovými výsledky, z nichž každé z těchto skupin měla být přidělena jedna další varianta úloh. Konkrétními kritérii pro rozdělení do zmíněných skupin byla jejich průměrná míra úspěšnosti v počátečním testování, standardní odchylka od úspěšnosti a minimální a maximální úspěšnost. Na základě těchto kritérií byly vytvořeny skupiny lišící se ve výsledcích předběžné zkoušky maximálně o 2 % se směrodatnou odchylkou mezi 20 % a 25 %. Protože cílem testů bylo pouze vytvoření počátečního rozdělení žáků do skupin, není pro práci podstatné hlouběji charakterizovat tyto testy.

Tato bakalářská práce se zaměřuje na třetí kolo testování (HT3), kterého se účastnily již výše zmíněné čtyři základní školy. Testování obsahovalo opět několik slovních úloh, které byly vždy ve 2 nebo 4 variantách právě kvůli různým skupinám žáků. Jednotlivé varianty se lišily v určitých parametrech a cílem výzkumu bylo sledovat proměnu žákovských řešení vlivem těchto parametrů a zjistit tak jejich vliv.

Napříč všemi snahami o rozdělení na srovnatelné skupiny, nebylo možné tak učinit zcela přesně. Do testů byly tedy zařazeny i tzv. kotvící úlohy, které prostupovaly jak skupinami žáků, tak i různými ročníky. Ty měly za úkol alespoň částečně ověřit rozdíly jednotlivých skupin žáků a byly navrženy tak, aby sledovaly co možná nejvíce jejich schopností. Na řešení mohlo mít vliv i umístění úlohy v testu. Výše zmíněné kotvící úlohy tedy nesměly být zařazeny na první ani na poslední pozici.

Byly vytvořeny čtyři varianty testů (označené římským číslem 1 – tedy I) s kombinací několika vybraných a na míru sestavených slovních úloh, z nichž každá varianta byla přiřazena jedné ze vzniklých skupin žáků z předchozích testování. K těmto variantám se vytvořili další čtyři (označené římským číslem 2 – tedy II), jež obsahovaly stejnou kombinaci slovních úloh, které však byly seřazené v opačném pořadí (první úloha z I byla v II jako poslední atd.)

Celý postup zadání byl proveden školenými pomocníky studie. Učitelé matematiky byli přítomni v hodinách a také pozorovali a sledovali své žáky. Zadavatel měl jasné pokyny, jak postupovat, co zajistit a co vše je nutné účastníkům sdělit, aby se zaručila co možná nejvyšší objektivita a stejné podmínky pro všechny žáky.

Testy se nesměly nikde ukazovat. Zadavatel musel být 30 minut před začátkem testování přítomen na dané škole a vyhledat kontaktní osobu, kterou byl ve většině případů zástupce nebo ředitel školy. Ti zadavatelům sdělili, kterou hodinu ve které třídě mají testování rozdávat a který pedagog bude přítomen a jim nápomocen. Tento pedagog měl navíc za úkol žáky motivovat k co možná nejlepším výsledkům. Jeho úlohou bylo žákům sdělit, že výzkumu se účastní i jiné školy a že jejich výsledky jsou velmi důležité. Měl jim také připomenout, že podobného testování se již dříve účastnili, že se nemají čeho obávat a případně i stanovit odměnu pro účinkující nebo pro prvních x nejlepších řešitelů.

Jakmile zazvonilo na hodinu, ve které testování probíhalo, zadavatel zajistil příjemné prostředí ve třídě a seznámil žáky s pravidly a podmínkami testování. Nejdříve nahlas a zřetelně přečetl dva odstavce, které byly na prvním listu nahoře u každého testu. V odstavcích bylo napsáno několik důležitých sdělení a upozornění:

„Děkujeme, že se účastníš našeho testování. Pro tvé učitele i pro nás je důležité vědět, co žákům v matematice jde a co ne. Pomůže to i tvůrcům učebnic.

Úlohy řeš bez použití kalkulačky. Zapisuj i postup řešení a nezapomeň na slovní odpověď. Pokud se ti řešení nevejde na tento papír, požádej učitele o další. Úlohy řeš v libovolném pořadí. Pokud uděláš chybu, negumuj, jen škrtni chybné řešení jednou čarou. Nezapomeň otočit papír na druhou stranu, kde jsou další úlohy. Nepoužívej gumovací pero!“

Dále žákům znovu připomněl, že test je oboustranný, že mají číst úlohy pozorně a nemají zapomenout na kontrolu jména, k němuž měli navíc připsat známku z matematiky na posledním vysvědčení. Že jim není povoleno používat jakékoliv další pomůcky mimo psací potřeby a všechny pomocné výpočty mají být součástí jejich řešení. V neposlední řadě informoval, že na test je vyhrazeno 45 minut včetně zadávání. Tento čas měl být dostačující a neměl žáky stresovat, protože díky pilotáži, při které byla sledována časová náročnost úloh, byl odhadnut počet úloh tak, aby jejich řešení zvládli všichni pod 40 minut. Na konci zadávání bylo vyhrazeno několik minut na otázky. Pokud bylo vše v pořádku a dodatečně zodpovězeno, mohlo se přejít k rozdávání testů.

Jak bylo již výše uvedeno, bylo celkem osm druhů testů a varianty jedné úlohy byly na první pohled dosti podobné. Díky tomu bylo vytvořeno speciální schéma, jak žáky správně usadit do lavic, aby ti, co seděli vedle sebe, měli výrazně rozdílná zadání.

Dále bylo potřeba zaručit, aby nedošlo k opisování a zajistit klid ve třídě. Pokud měl žák dotaz k zadání slovní úlohy, mohl se přihlásit a zeptat se zadavatele. Ten měl za úkol dotaz zodpovědět. Jeho odpověď ale nesměla poradit s řešením, měla pouze upřesnit věci zmíněné v textu. Všechny položené otázky a odpovědi na ně byly zaevidovány do testovacího protokolu, který je uveden v příloze 1.

3.2 Návrhy úloh pro 5., 6. A 7. ročník v testování HT3

Tvorba úloh probíhala ve spolupráci s pracovníky katedry českého jazyka, aby byla v co nejvyšší míře zajištěna věcná i jazyková správnost úloh. Úlohy byly tvořeny vždy cíleně k prověření určitého parametru slovní úlohy. Takovým parametrem byla například délka textu, přítomnost nadbytečného údaje v zadání, přítomnost obrázku apod. Já se ve své práci zabývám dvojicí úloh speciálně navrženou pro otestování vlivu parametru aditivního a proporčního.

3.3 Zkoumaná úloha

Jak jsem již uvedla výše, pro své zkoumání problematiky řešení slovních úloh jsem se účastnila testování HT3 z projektu 16-06134S GA ČR – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům. Zde jsem se věnovala kotvící slovní úloze označené 6B, která byla zadána celkem ve třech ročnících v již zmíněných čtyřech základních školách.

Celkem byly dvě formy zadání této slovní úlohy. U první formy se předpokládalo využití proporčního parametru a u druhé aditivního parametru.

Zadání úlohy 6B:

6B1:

V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů. Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek a ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový. Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

6B2:

V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů a jezdí stejně rychle. Jana jela na starém vleku a Lenka jela novým. Jana nasedla na vlek později, v okamžiku, kdy se dostala do poloviny cesty, Lenka měla ujeto 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

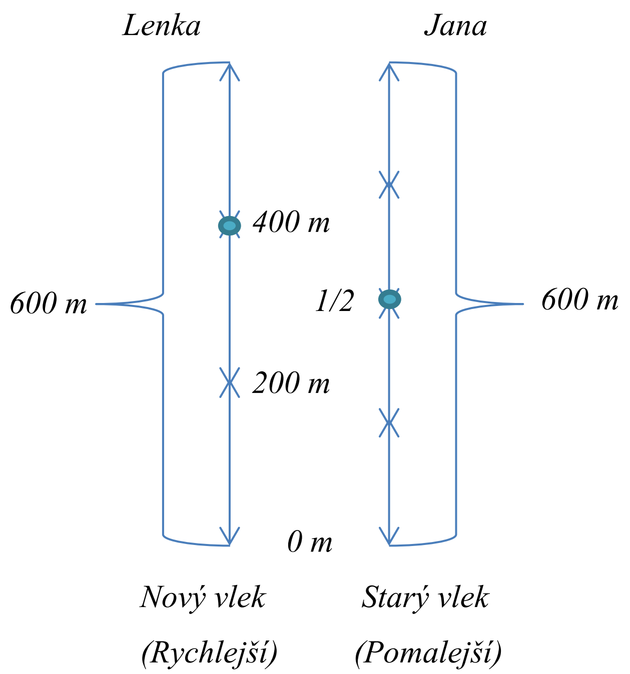
3.3.1 Analýza úloh apriori

Poněvadž se zde věnuji analýze žákovských řešení zmíněné dvojice úloh, je důležité uvést vzorové řešení každé z nich. Tyto úlohy mají však několik možností, jak se dobrat ke správnému výsledku. Není však možné zde všechny uvést, proto zvolím vždy jen nejdůležitější z nich a ty aplikuji.

Úloha 6B1

U prvního vzorového řešení úlohy 6B1 využiji obrázkovou legendu v kombinaci se slovními poznámkami a určím poměr mezi ujetou dráhou Jany a Lenky.

1) utvořím zápis zadání



- *obě dívky vyjely ve stejný čas*
- *když Jana v polovině -> Lenka ujeto 400 m*

  Kolik metrů ujela Jana do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

2) spočtu polovinu dráhy, kterou ujela Jana

   600 : 2 = 300 metrů

   Jana měla ujeto 300 metrů ve chvíli, kdy Lenka dosáhla 400 metrů.

3) určím poměr L:J

Důležité je si uvědomit, že vyjely ve stejný čas a jeden vlek je pomalejší než ten druhý.

L:J = 400 m:300 m = 4:3 (1 díl dráhy je 100 metrů, celá dráha má pak 6 dílů)

4) dopočítám hledaný údaj

Potřebuji zjistit, kde se bude nacházet Jana v době, kdy Lenka již bude vystupovat z vleku, hledám tedy následující neznámou x.

L:J = 4:3 = 6:x

Ze zápisu je zřetelné, že poměr 6:x získám vhodným vynásobením poměru 4:3. Vím, že číslo 6 je 1,5násobkem čísla 4, tedy i číslo 3 musím vynásobit 1,5.

3 x *1,5 = 4,5 = x*

Jelikož 1 díl je 100 metrů, pak tedy 4,5 dílu je 450 metrů.

5) napíši odpověď

V momentě, kdy Lenka vystoupila z vleku, měla Jana ujeto celkem 450 metrů.

Ke správnému výsledku úlohy 6B1 je možné si dopomoci i jednotkami času. Tuto možnost uvedu v následujícím druhém vzorovém řešení. Vzhledem k tomu, že se jedná o stejnou úlohu, vynechám zde bod 1 – legendu a bod 2 – výpočet poloviny dráhy a následně bod 5 – odpověď a přejdu přímo k postupu řešení.

3) vhodně si přiřadím jednotky času ke vzdálenosti

Již z obrázku si mohu povšimnout, že Lence zbývá ujet 600 – 400 = 200 metrů do cíle cesty. 200 metrů je současně i polovina ze 400 metrů, má tedy ujeté dvě třetiny dráhy.

Délku 600 metrů mám rozdělenu na třetiny a zvolím si, že celou dráhu ujela za 3 minuty.

Vím tedy, že za uplynulé 2 minuty se Lenka dostala na 400 metrů a Jana na 300 metrů a zbývá 1 minuta do doby, kdy Lenka vystoupí.

Nově vzniklá otázka tedy zní: Kolik metrů ujela každá z dívek za 1 minutu?

Vzhledem k tomu, že vlek jede konstantní rychlostí, není odpověď na tuto otázku složitá.

Za jednu minutu ujela každá z dívek polovinu z uvedených délek.

400 : 2 = 200, 300 : 2 = 150

Za 1 minutu ujela Lenka 200 metrů a Jana 150 metrů.

4) dopočítám hledaný údaj

Pro přehlednost vše zapíši do tabulky.

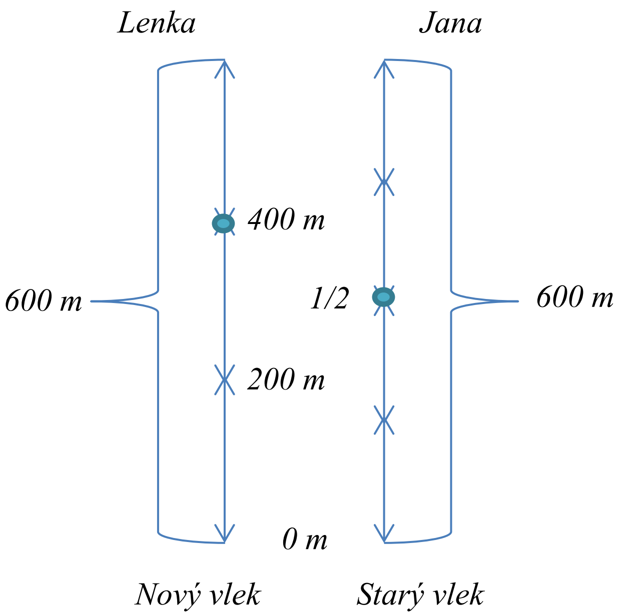
Čas	*Lenka*	*Jana*
1 min	*200 m*	*150 m*
2 min	*400 m*	*300 m*
3 min	*600 m*	*450 m*

Úloha 6B2

Druhá forma (6B2) úlohy je o něco jednodušší. Polovinu z 600 metrů zjistíme stejným způsobem jako u první formy a k následnému rozřešení problému již využijeme pouze dvě základní operace: sčítání a odčítání. Opět zde uvedu dva způsoby, jak nalézt odpověď na zadanou otázku.

První metoda výpočtu:

1) vytvořím legendu



- *oba vleky se pohybují stejnou rychlostí*
- *Jana vyjela později než Lenka*

- *když Jana v polovině -> Lenka ujeto 400 m*

  Kolik metrů ujela Jana do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

2) vypočítám polovinu z 600 metrů

   600 : 2 = 300 m

3) dopočítám hledaný údaj

   Zjistím rozdíl mezi ujetou dráhou Lenky a Jany.

   400 – 300 = 100 metrů

   Lenka jede shodnou rychlostí jako Jana, ale se stometrovým rozestupem. Dívky od sebe budou vzdáleny vždy o stejné množství metrů – i v případě, kdy Lenka dosáhne 600 metrů, bude Jana o 100 metrů pozadu.

   600 – 100 = 500 metrů

4) napíši odpověď

   V okamžiku, kdy Lenka vystoupí, bude mít Jana ujeto celkem 500 metrů.

Druhá metoda výpočtu se od té první liší pouze ve třetím kroku, který uvedu níže.

3) dopočítám hledaný údaj

   Pokud má Lenka vystoupit z vleku, musí ujet navíc 600 – 400 = 200 metrů. Obě dívky se pohybují stejnou rychlostí, tedy i Jana ujede dalších 200 metrů. Otázka zní, kolik Jana ujede celkem, tedy k dosud dosaženým 300 metrům přidám dalších 200 a úloha bude vyřešena.

   300 + 200 = 500 metrů

<u>Očekávaná pochybení</u>

Při zadávání zmíněných dvou úloh jsem předpokládala, že některé údaje a kroky pro řešení těchto úloh budou žákům dělat problémy, díky kterým se dopustí různých chyb. Mezi mnou očekávané chyby a problémové situace patřily například: vynechání údaje ze zadání, vytvoření špatného zápisu zadání, jež povede k řešení diametrálně odlišné slovní úlohy, špatné určení poměru a v neposlední řadě jsem očekávala menší úspěšnost řešitelů první formy úlohy (6B1) a velký rozdíl v úspěšnosti žáků napříč ročníky.

3.4 Analýza dat

Po dokončení testování na všech čtyřech základních školách se testy roztřídily do desek podle ročníků, které je vypracovaly. V deskách poté byly navíc rozděleny podle škol a seřazeny dle abecedy. Jakmile bylo vše roztříděno, mohlo se začít s opravováním. Byl vytvořen tým o několika studentech, se kterými jsme spolupracovali. Každý student obdržel zprvu jednu slovní úlohu k opravení, po splnění jim byla přidělena další. U jednotlivých řešení byl sledován celkový počet bodů a výskyt předem zadaných jevů. Aby mohly být výsledky testování porovnatelné, byl vytvořen dokument s informacemi, jak a co opravovat a kolik za dané řešení přiřadit bodů. Každý jsme tedy pracovali pomocí stejného algoritmu a výsledky jsme zapisovali do jedné tabulky v programu Microsoft Excel.

V této tabulce byl zpočátku jmenný seznam žáků, nebo jejich číselné kódy, pod nimiž byli vedeni žáci ze základní školy Na Slovance. Následovalo několik sloupců k jednotlivým slovním úlohám, z nichž prvních 14 sloupců se týkalo stejného tématu, a další byly různé pro každý typ úlohy. Jednotlivé sloupce nemohl opravovatel nijak zaměňovat nebo mazat. Tabulka navíc obsahovala sloupec Sešit, kde byl uveden kód (číslo) testu, který měl žák vyplňovat, a sloupec VAR, ve kterém byla zaznamenána varianta dané úlohy, jež se v testu nacházela, a který byl odlišen od ostatních šedým podbarvením.

Nyní již k samotnému procesu opravování. Jelikož se testy připravovaly podle jednotlivých typů pro určité žáky, bylo potřeba zkontrolovat, že nikde nenastala chyba a číslo, jež je natištěné na testu žáka, odpovídá číslu zapsanému v tabulce v Excelu. Pokud bylo číslo v tabulce zapsané správně, mohlo se přejít k dalšímu kroku. Pokud však bylo číslo špatné nebo bylo políčko prázdné, muselo se opravit nebo dodatečně doplnit a pole se vyznačilo červeně jako upozornění pro ostatní a pro vedoucí projektu. Ovšem mohla zde nastat i situace, kdy žákovo jméno nebo jeho kód v tabulce nebyl uveden, tudíž ani číslo testu a varianta úlohy. V takovém případě se žák nezařazoval mezi ostatní podle abecedy, nevkládal se tedy nový řádek do tabulky, nýbrž se toto jméno zaneslo až na úplný konec tabulky. To se většinou stávalo, pokud se jednalo o nově zařazeného žáka do testované třídy, který se tedy neúčastnil předchozích testování, a tudíž nebylo jeho jméno předem umístěno do tabulky a nebylo mu přiděleno žádné ze zadání.

V druhém kroku se sledovala varianta slovní úlohy. Při její kontrole se postupovalo obdobně jako v předešlé revizi.

Jakmile vše souhlasilo s tabulkou, testy se shodnou variantou dané slovní úlohy byly vyfiltrovány, tedy všechny se rozdělily na 2 nebo 4 skupiny, a každá skupina se opravovala zvlášť.

Jak jsem již zmínila výše, u úloh se zkoumalo několik předem zvolených jevů. Tyto jevy vycházely z předpokladů organizátorů testování, jak budou žáci úlohy řešit. Jevy byly rozděleny do tří skupin: obecné jevy, kroky v postupu a očekávané chyby. Obecné jevy byly právě v oněch prvních 14 sloupcích tabulky (označeny oranžovou barvou), tedy pro všechny úlohy společné. Byly pojmenovány následovně: (číslo úlohy)o(číslo zkoumaného jevu). Tedy pokud byl hodnocen obecný jev číslo 2 u úlohy 6B, výsledek se zapisoval do sloupce s názvem 6Bo2. Kroky/jevy v postupu byly pod označením (číslo úlohy)p(číslo zkoumaného jevu), například tedy do sloupce s názvem 6Bp1 se zapisovalo hodnocení jevu 1 v postupu u úlohy 6B. Očekávané chyby byly pod názvem (číslo úlohy)ch(číslo zkoumaného jevu), například 6Bch4.

Vyhodnocování jednotlivých jevů bylo pro rychlejší zjištění výsledků kódované čísly 0, 1, 2 a 3. Položky XXoX a XXchX byly kódované pouze čísly 0 a 1. 0 znamenala, že daný jev se v žákově řešení nevyskytuje a číslo 1 znamenalo opak, tedy že jev je přítomen. Položky XXpX, tedy jevy týkající se postupu řešení, byly kódovány podle kvality: 0 – jev se nevyskytuje, 1 – jev je zcela správně, 2 – jev se vyskytuje, ale je v něm numerická chyba (tedy kdyby se numerická chyba nevyskytla, byl by postup zcela správně) a 3 – jev je zcela nesprávný a nesprávnost nelze přisoudit numerické chybě.

Poznámka: Numerická chyba se zaznamenala tam, kde se vyskytla a v dalších položkách, pokud nedojde k jiné numerické chybě, se již neregistruje.

Veškeré sledované jevy více přiblíží následující tabulka 1, kde jsou uvedené ve stejném pořadí jako ve výsledkové listině v již zmíněném Excelu a u každé položky je znovu uvedeno, které kódy jsou pro ni relevantní.

Poznámka: Jevy v tabulce jsou již pod názvem k mé opravované úloze, které se věnuje celá tato bakalářská práce.

Tabulka 1: Zkoumané jevy

Název jevu	Co se sledovalo	Kód
6Bo0	V řešení není nic napsáno.	0-1
6Bo01	V řešení je jen správný výsledek bez náznaku řešení.	0-1
6Bo11	Přítomnost slovní legendy	0-1
6Bo12	Přítomnost tabulkové legendy	0-1
6Bo13	Přítomnost obrázkové legendy	0-1
6Bo14	Přítomnost algebraické legendy	0-1
6Bo2	Přítomnost zápisu postupu řešení	0-1
6Bo31	Přítomnost správné slovní odpovědi	0-1
6Bo32	Přítomnost nesprávné slovní odpovědi (gramatické chyby nebereme v úvahu; nesprávné je z hlediska slovní úlohy)	0-1
6Bo33	Chybí odpověď, ale v řešení je jiné označení výsledku jednoznačným způsobem (např. dvakrát podtrženo apod.)	0-1
6Bo41	Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který řešitel považuje za konečný (dá se na to usoudit na základě písemného řešení)	0-1
6Bo42	Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který řešitel nepovažuje za konečný (z nějakého důvodu, který nemůžeme znát, už dál nepokračoval)	0-1
6Bo5	Využití všech relevantních údajů ze zadání	0-1
6Bo6	Použití trojčlenky (což je patrné z charakteristického zápisu podle šipek nebo z něčeho jiného)	0-1
6Bp1	Určení poloviny cesty	0-1-2-3
6Bp2	Určení vzdálenosti Lenky od cíle, když se Jana dostala do poloviny cesty	0-1-2-3
6Bp3	Určení vztahu mezi vzdáleností, kterou ujede Jana a kterou ujede Lenka	0-1-3

6Bp4	Určení celkové vzdálenosti, kterou ujede na vleku Jana v okamžiku, kdy Lenka vystupovala na konci vleku	0-1-2-3
6Bch1	Chybné použití informace o různé rychlosti (místo poměru použit jiný vztah)	0-1
6Bch2	Správné použití poměru, ale jeho chybné určení	0-1
6Bch3	Chybné použití informace, že oba vleky jedou stejně rychle	0-1
6Bch4	Místo aditivního vztahu použit proporční/místo proporčního vztahu použit aditivní	0-1
6Bch5	Jiná chyba (pokud možno specifikujte v poznámce)	0-1

Po zakódování výše uvedených položek se přistoupilo k bodovému ohodnocení žákova řešení. Body se zapisovaly do zvláštního sloupce tabulky s modrým podbarvením a byly rozřazeny následovně: Nejvyšší počet – 3 body byly za správně spočtený výsledek libovolným postupem. 2 body se udělovaly za řešení, které by bylo zcela správné nebýt numerické chyby. Pokud nebylo vše správně, ale šla alespoň část postupu (například nějaký dílčí výsledek) uznat, připsal se žákovi 1 bod. 0 bodů se pak udělilo za řešení, ve kterém nebylo nic správně, nebo tam byl jen výsledek bez jakéhokoliv náznaku řešení, který by mohl být pouze opsán. A pokud u úlohy nebylo nic napsáno, bylo to započítáno také za 0 bodů.

Mohlo nastat i několik sporných situací, kdy byl také stanovený postup, jak hodnotit. Například pokud nebylo zcela jasné, co má být výsledek – chyběla odpověď a vyskytovalo se tam více výsledků, přičemž žádný z nich nebyl podtržen nebo zakroužkován – považovalo se to za signál pro hodnocení počtem bodů 1. To se dodržovalo i v případě, že se mezi výpočty vyskytoval správný výsledek, tedy ani v těchto případech se nehodnotilo počtem bodů 3.

Při celkovém hodnocení úlohy se nesnižoval počet bodů za chybějící legendu, chybějící zapsání částí postupu, nebo odpověď, pokud však byl výsledek jinak zřetelně označen.

Pokud žák řešil úlohu zcela odlišným způsobem, než bylo předpokládáno od tvůrců testování, a byl jeho postup správný, pak mohl mít u všech (většiny) zmíněných jevů 0 a bodové ohodnocení bylo i napříč tomu 3.

Na závěr opravování bylo možné využít sloupec s názvem 6B_poznámka, který byl žlutě podbarven, a zapsat do něj zvláštnosti žákova řešení, popřípadě blíže specifikovat chybu, jež se žák dopustil.

Příklad zakódování úlohy

Řešení 1: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)

HT3_6B1 **Úloha 3.** V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů. Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek a ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový. Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

zápis

oba vleky ..... 600 m

Jana ujela 300 m

Lenka ujela 400 m

výpočet: $600 - 400 = 200$ $\quad 600 - 300 = 300$ $\quad 200 = 400 : 2$ $\quad 300 : 2 = 150$

odpověď: Jana ujela 450 m

Obrázek 3: první část doplněného řádku v tabulce v Excelu

1	šk	tří	jméno	sešit	6B	Bo	Bo	Bo	Bo	Bo	6B	Bo	Bo	Bo	Bo	Bo	6B	6B	HT3_6 6I 1
203	An	7A	[redacted]	HT3_7_3I	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	

Obrázek 4: druhá část doplněného řádku v tabulce v Excelu

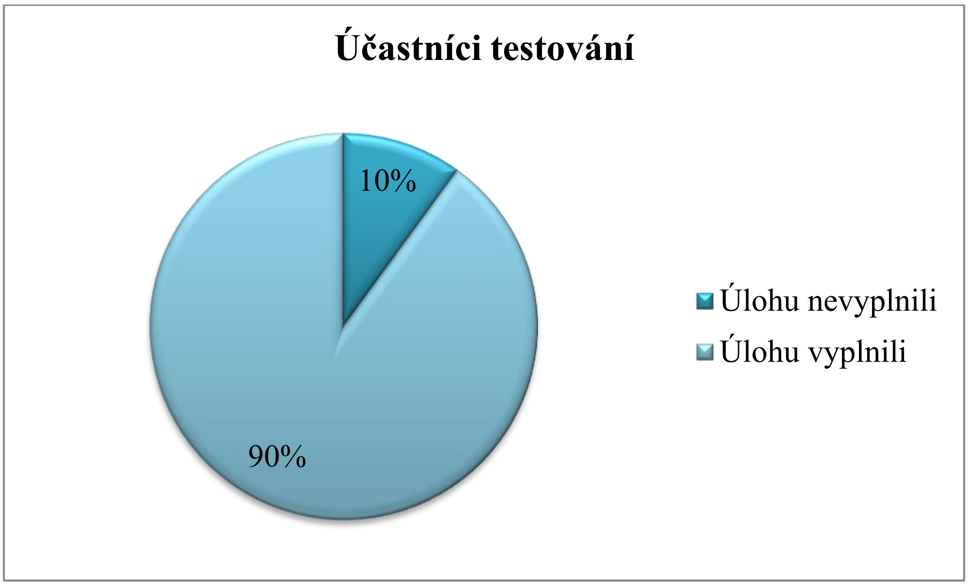
_6B 6Bn 1	6Bn 2	6Bn 3	6Bn 4	6Bc h1	6Bc h2	6Bc h3	6Bc h4	6Bc h5	VA	6B	6B_poznamka
1	1	1	1	0	0	0	0	0	6B1	3	

3.5 Výsledky výzkumu

Jak jsem již uvedla v předchozích kapitolách, celého výzkumu se účastnili žáci čtyř základních škol a já se ve své práci zabývám celkem třemi ročníky – pátým, šestým a sedmým. Získala jsem celkem 922 vypracovaných testů, jež jsem opravila a zanalyzovala výsledky. Touto analýzou se zabývá celá kapitola, v jejímž úvodu uvádím data vycházející ze všech žákovských řešení společně a následně ji člením do několika subkapitol, ve kterých se blíže věnuji vždy jedné oblasti ze struktury řešení slovní úlohy a prezentuji konkrétní příklady správného a chybného postupu.

Prvním bodem, kterým jsem zahájila své zkoumání, bylo, zda se žáci (účastníci testování) po přečtení úlohy nevzdali a snažili se o vyřešení zadaného problému. Nepochybně se objevili řešitelé, co úlohu nevyplnili, nebo napsali, že zadání nerozumí. Bylo jich celkem 92. Jak nám ale tento údaj a graf 2 naznačují, v silné převaze byli ti, co se k problému postavili čelem a přemýšleli, jak ho překonat.

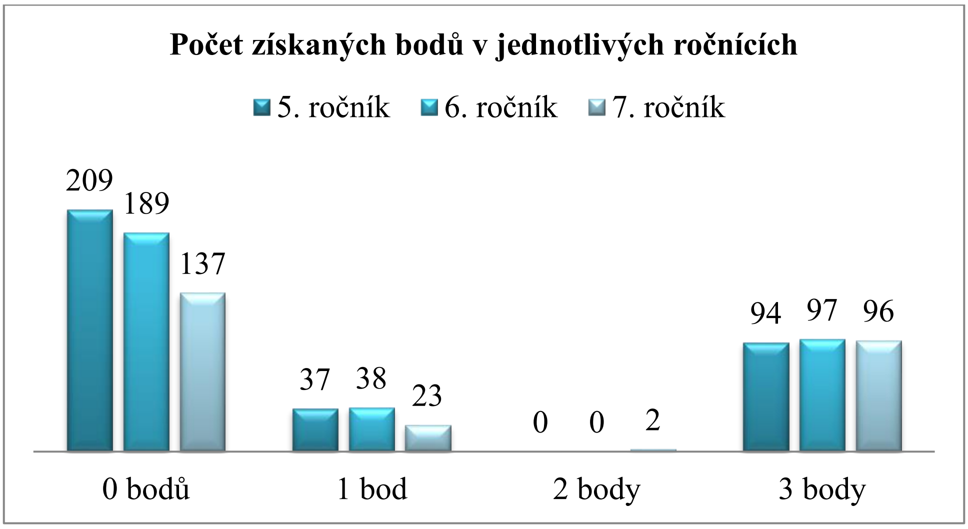
Graf 2: Rozdělení účastníků testování



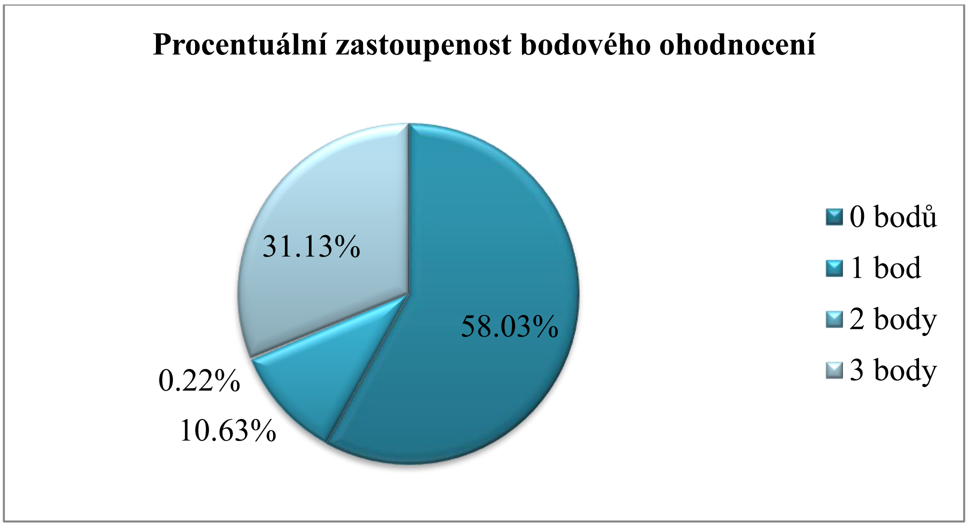
Pokud se zaměříme na všechny účastníky testování a jejich výsledky, tak vyzkoumáme procentuální zastoupení žáků, kteří dosáhli plného počtu bodů, až po žáky, co nezískali bod žádný.

Blíže nám zmíněnou skutečnost reprezentuje graf 3 a graf 4.

Graf 3: Počet získaných bodů v jednotlivých ročnících



Graf 4: Procentuální zastoupení bodového ohodnocení

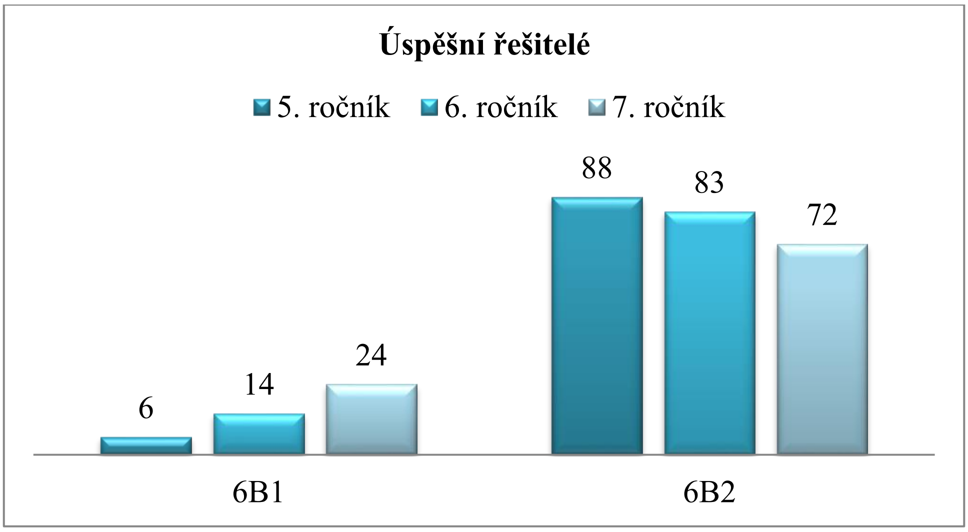


Vzhledem k předchozím grafům je podstatné uvést, jak dopadla úspěšnost řešitelů individuálně u každé úlohy.

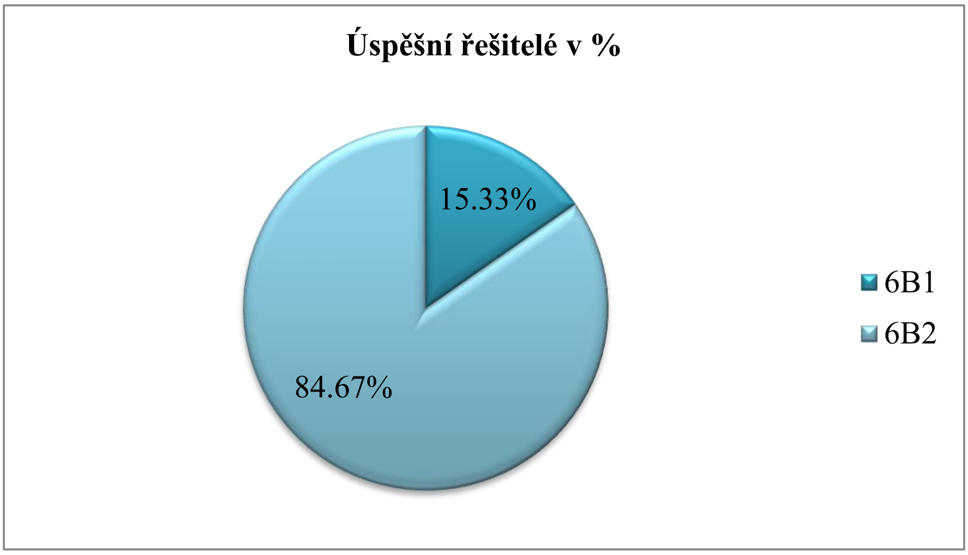
Již ze zadání je zřetelné, že forma úlohy 6B1 musela být pro žáky obtížnější, než forma 6B2. Právě u 6B1 se předpokládalo využití poměru, kdežto úloha 6B2 byla předurčena „pouze“ k procvičení sčítání a odčítání.

Každou z úloh řešilo přesně 170 žáků v pátém, 162 v šestém a 129 žáků v sedmém ročníku, z nichž někteří dosáhli plného počtu bodů, tj. 3 bodů. Tyto žáky nám ukazuje následující graf 5, který je současně důkazem toho, že bez ohledu na ročník byla úloha 6B2 pro žáky snazší. Z grafu vyplývá, že celkem 44 žáků bylo úspěšnými řešiteli první úlohy a 243 žáků bylo úspěšnými řešiteli druhé úlohy. Tento fakt je zanesen do grafu 6.

Graf 5: Úspěšní řešitelé



Graf 6: Úspěšní řešitelé v %



Po celkových výsledcích všech řešení mohu přistoupit k jednotlivým oblastem struktury řešení slovní úlohy, jak jsem zmínila v úvodu této kapitoly. Zaměřila jsem se tedy na to, zda si žáci vytváří zápisy zadání (legendy), poté pokračují výpočtem, který mohli zakončit zkouškou, a v samotném závěru napíší odpověď.

Krásným příkladem dodržení struktury slovní úlohy je řešení 1 (nahoře). Žákyně si svůj postup rozčlenila přesně do uvedených tří částí, které i nadepsala, a nadto jako jedna z mála úlohu 6B1 vyřešila správně.

3.5.1 Legenda

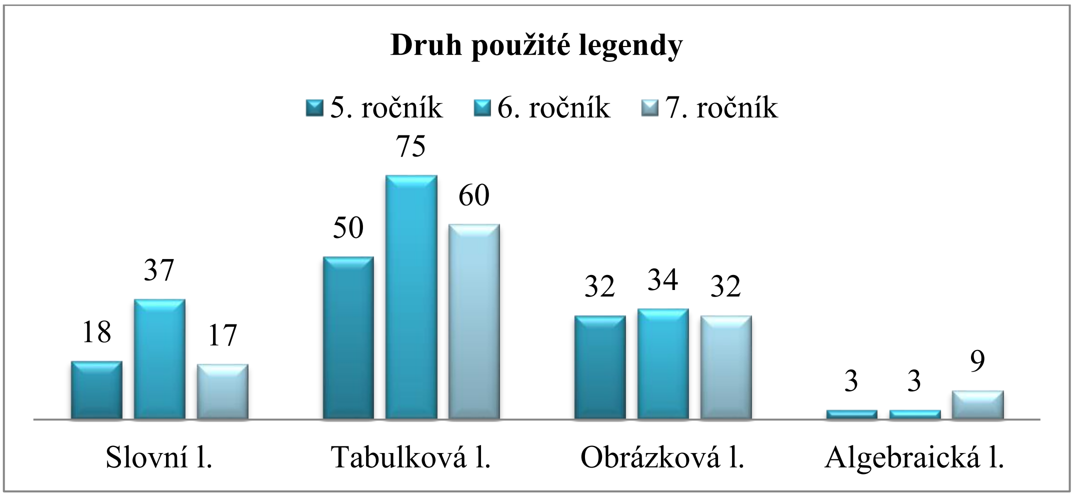
Co je to legenda, nám vysvětluje následující definice z interního dokumentu projektu.

„Při uchopování zadání slovní úlohy řešitel reprezentuje (kóduje) zadání problému, tj. převádí slovně zadaný problém do vhodného znakového systému, kterým přehledněji a úsporněji zaznamená data, podmínky a neznámé řešeného problému. Takový záznam zadání úlohy nazýváme legendou."

Zápis zadání neboli legenda existuje v několika podobách. Je možno použít slovní legendu, nebo třeba tabulkovou, obrázkovou a algebraickou legendu, případně jejich kombinace. Kombinovanou legendu použili 2 žáci v pátém, 10 žáků v šestém a 8 žáků v sedmém ročníku. V celkovém počtu 20 žáků zkombinovalo více způsobů zápisu, přičemž nejčastěji využili tabulkovou nebo obrázkovou doplněnou o slovní legendu.

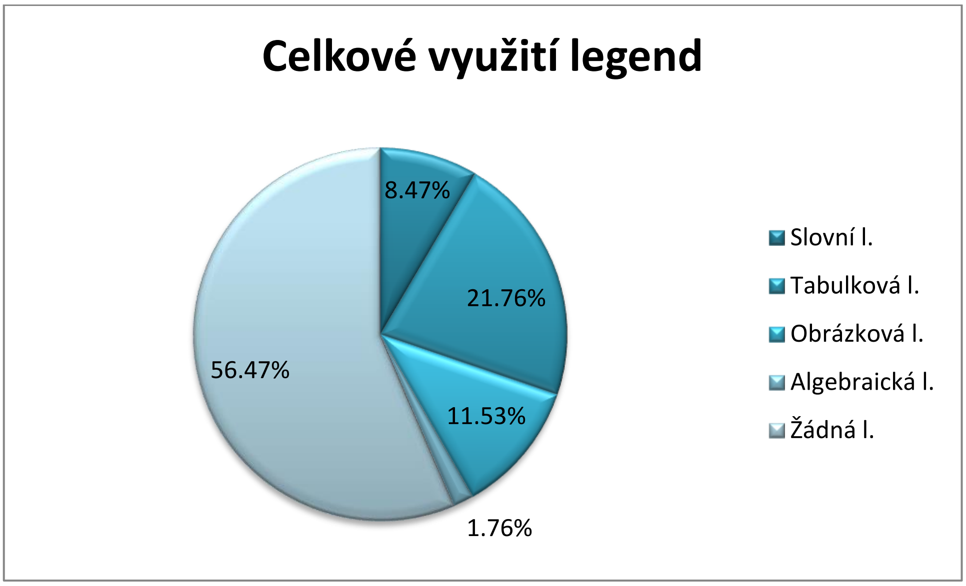
Graf 7 ukazuje, že dnešním žákům, nehledě na ročník, je nejblíže tabulková legenda, kterou v testování použilo 185 žáků. Pokud vezmeme v potaz pouze žáky, kteří si nějakou legendu utvořili, dospějeme k závěru, že přesně 50% z nich použilo právě onen tabulkový styl zápisu. Poté následuje obrázková a slovní legenda, a nejdále jim je algebraická.

Graf 7: Druh použité legendy



Z grafu 8 je zřetelné, že více, jak polovina žáků si údaje ze zadání úlohy nezapisuje vůbec a po přečtení pokračuje ihned k výpočtu, nebo, ještě hůře, ihned k většinou špatné odpovědi.

Graf 8: Celkové využití legend



Tabulková legenda

Tabulková legenda je legenda, ve které si žáci zjištěné informace z textu slovní úlohy zapisují například do sloupců, nebo do řádků a oddělují třemi a více tečkami. Pomocí dalších znaků, jako jsou například šipky, zaznamenávají vztahy mezi řádky a sloupci. Někdy je považována za jednu z forem slovní legendy (Novotná, 2000).

To, jak si žáci poradili s tabulkovou legendou, je popsáno níže.

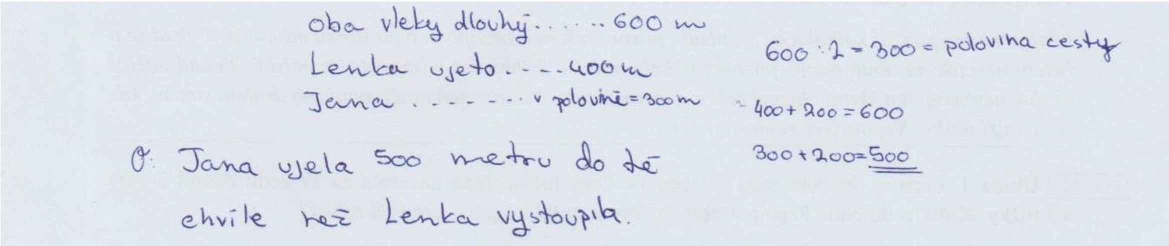
Chybí údaje ze zadání a jejich vztahy

Řešení 2 a 3 nám nabízejí pohled na tabulkovou legendu.

V prvním příkladu si můžeme povšimnout, že ze zapsaných údajů nelze zcela určit vztah mezi ujetou dráhou Jany a Lenky. Chybí zde údaj, zda dívky vyjely ve stejný čas či nikoliv a zda se vleky pohybují stejnou rychlostí. Úloha je však vyřešena správně, pravděpodobně si tedy žákyně tyto informace zapamatovala a využila je pro své myšlenkové pochody bez potřeby je zapisovat na papír.

V druhém příkladu je zápis už o něco dokonalejší. Dozvídáme se, že dívky jedou stejný čas a z ujetých drah vidíme, že jedou různou rychlostí. Pro úplnost v tomto zápisu chybí na závěr otázka, co je vlastně úkolem řešitele.

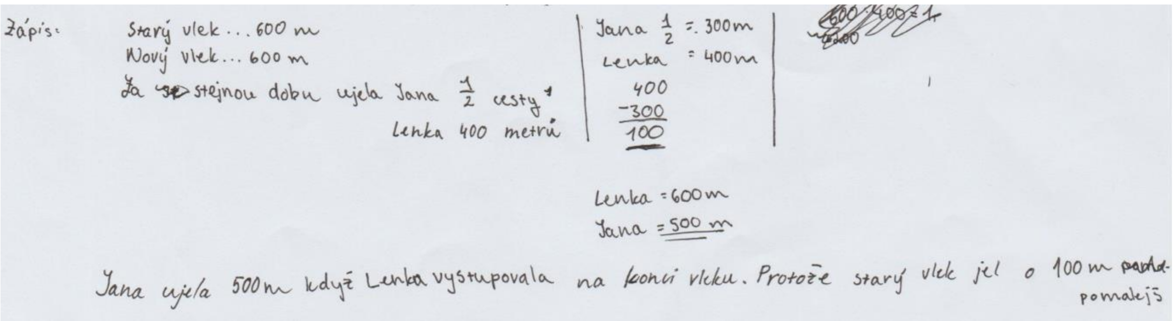
Řešení 2: žákyně, 7. ročník (úloha 6B2)


Oba vleky dlouhý.......600 m
Lenka ujeto.....400 m
Jana........v polovině = 300 m

$600 : 2 = 300$ = polovina cesty
$400 + 200 = 600$
$300 + 200 = \underline{500}$

O: Jana ujela 500 metru do té chvíle než Lenka vystoupila.

Řešení 3: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)


Zápis: Starý vlek...600 m
Nový vlek...600 m
Za ~~se~~ stejnou dobu ujela Jana $\frac{1}{2}$ cesty
Lenka 400 metrů

Jana $\frac{1}{2}$ = 300 m
Lenka = 400 m
$400 - 300 = \underline{100}$

Lenka = 600 m
Jana = $\underline{500 \text{ m}}$

Jana ujela 500 m když Lenka vystupovala na konci vleku. Protože starý vlek jel o 100 m ~~pomal~~ pomalejš

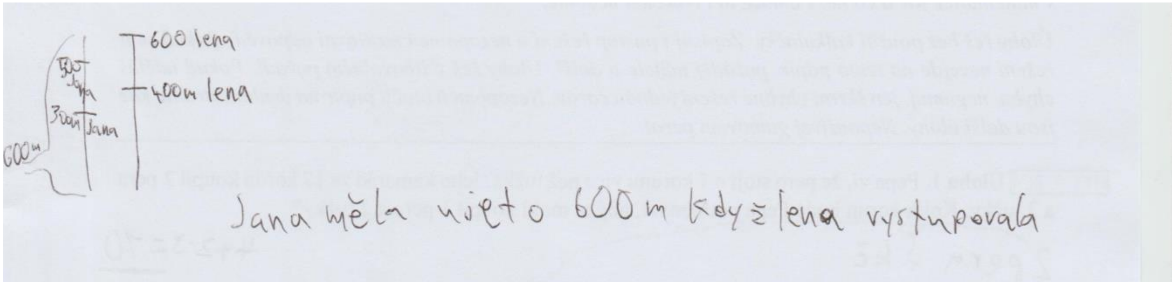
Obrázková legenda

Obrázková legenda je legenda, kde si žáci zjištěné informace z textu slovní úlohy zapisují graficky. Při zápisu používají přímky, úsečky, dělení celku na části a další geometrické interpretace, které jim pomáhají zadání zjednodušit a lépe si uvědomit, co mají dané a co je jejich cílem. Mnohdy se jednotlivé informace zaznamenávají a rozlišují i pomocí barev. Pro tuto legendu je dále typické užití čísel a spíše zkratek a jednoslovných poznámek, nežli dlouhého textu (Novotná, 2000).

Správná obrázková legenda

V řešení 4 si můžeme povšimnout, že až na lehké pozměnění jména Lenky na Lenu, načrtnul žák správnou a přehlednou obrázkovou legendu, do které zaznamenal jak zadání, tak i svůj postup řešení. Lze spatřit, že vyznačil 300 metrů přesně do poloviny celkové dráhy, která byla 600 metrů, a další hodnoty rozmístil na osách též v přesných vzdálenostech od sebe, jak to má být. Pouze zde postrádám informaci o rychlosti pohybu a nástupu děvčat na vlek.

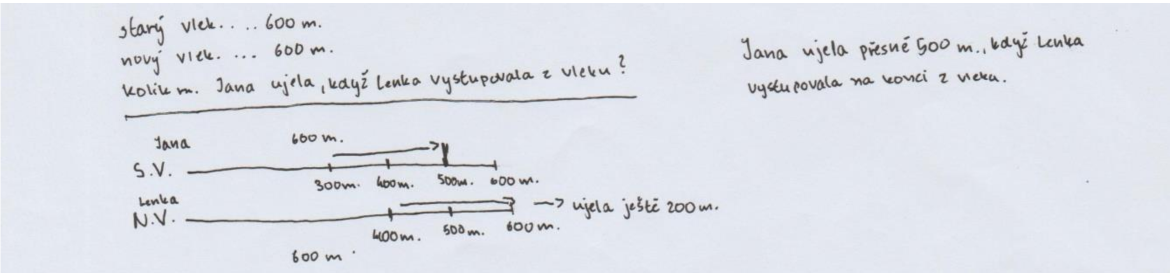
Řešení 4: žák, 7. ročník (úloha 6B2)



Záměna zápisu úlohy 6B1 za 6B2

Řešení 5 nám poskytlo opět příklad správně vytvořené obrázkové legendy. Naneštěstí neodpovídá zadání 6B1, ale žákyně si úlohu vyložila ve znění druhé formulace, tedy 6B2.

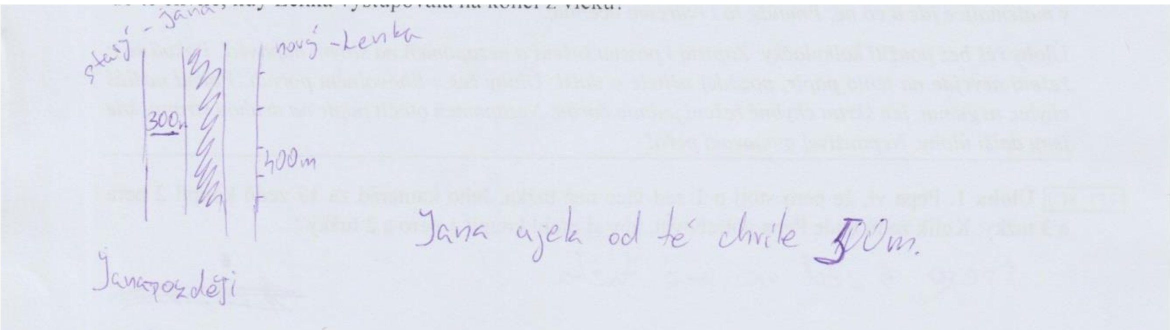
Řešení 5: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)



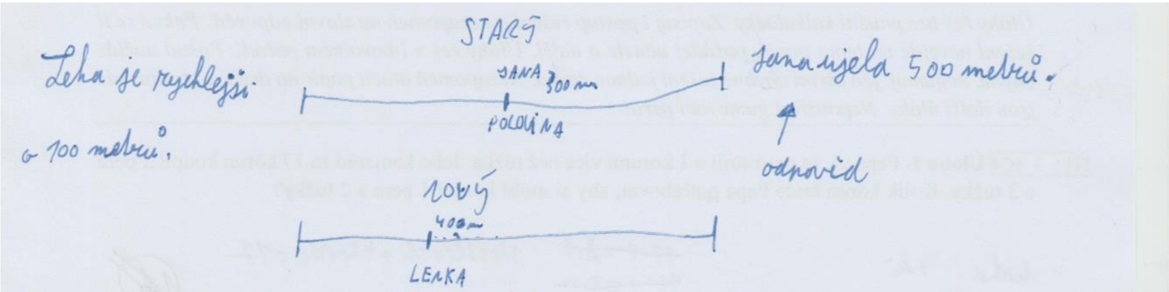
Nelogické naznačení délky trasy

Naopak v řešení 6 a 7 je zřetelné, že obrázkové legendy nejsou zcela v pořádku. Vzdálenost 400 metrů je na ose vyznačena dříve než 300 metrů, pokud tedy postupujeme logickým směrem, tedy zdola nahoru, nebo zleva doprava.

Řešení 6: žák 7. ročník (úloha 6B2)



Řešení 7: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



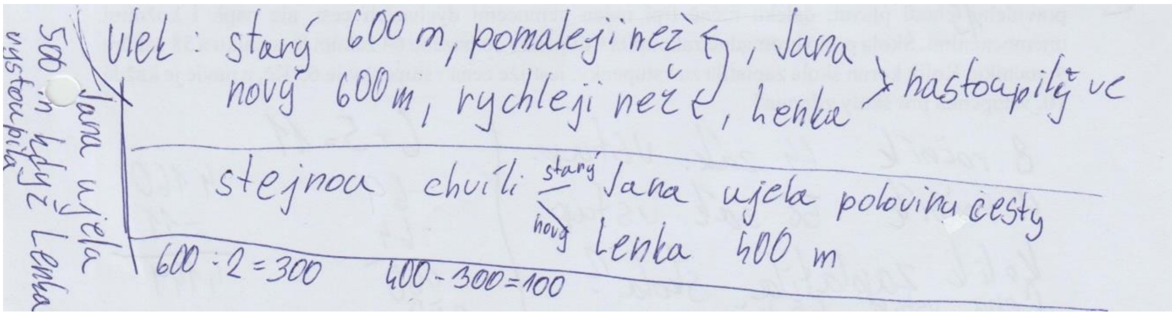
Slovní legenda

Touto legendou si žák ve zkratce zaznamená zadání pomocí slov, která mu pomohou převést si daný problém na úlohu ryze matematickou. Pro tuto formu je typické i použití symbolů, například šipek, k utvoření jednoduchého schématu, které je pro žáka přehlednější a lépe uchopitelné než samotné věty v zadání (Novotná, 2000).

<u>Absence otázky, na kterou má nalézt odpověď</u>

Autorka řešení 8 má takřka úplný zápis slovní úlohy. Obsahuje všechny potřebné informace, aby daný problém mohl být vyřešen. Její zaznamenání postrádá pouze otázku, čím přesně se máme zabývat. (opět se zabýváme pouze legendou, ne správností řešení).

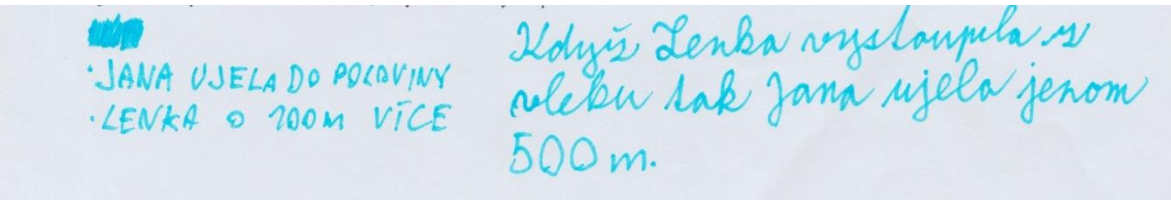
Řešení 8: žákyně, 6. ročník (úloha 6B1)



<u>Nedostatečné informace k řešení</u>

Od řešení 8 se řešení 9 velmi liší. Zápis je proveden pomocí dvou krátkých vět, ve kterých je minimum informací, které potřebujeme vědět. Schází informace o dvou vlecích, jejich délce, a o tom kdy, kdo a kam nastoupil.

Řešení 9: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)



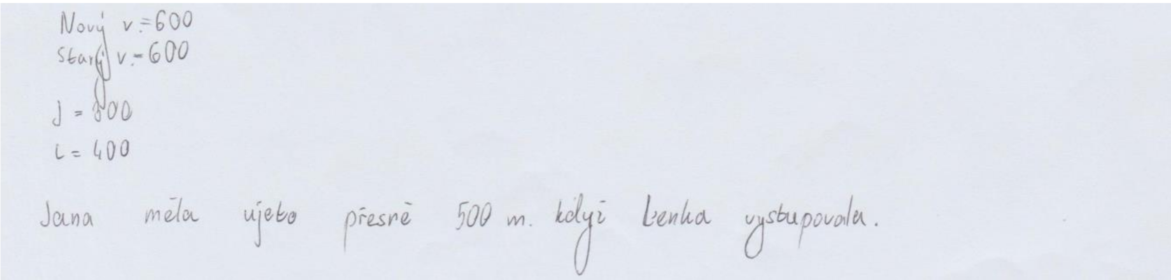
Algebraická legenda

Správný zápis algebraické legendy, bez úkolu pro řešitele

Jak už nám řešení 10 může napovědět, algebraická legenda je zápis, ve kterém se používá symbol „=“. Informace uvedené v zadání slovní úlohy tedy zapisujeme pomocí rovnic, případně nerovnic (Novotná, 2000).

Opět zde chybí otázka na závěr, který údaj hledáme.

Řešení 10: žákyně, 7. ročník (úloha 6B2)



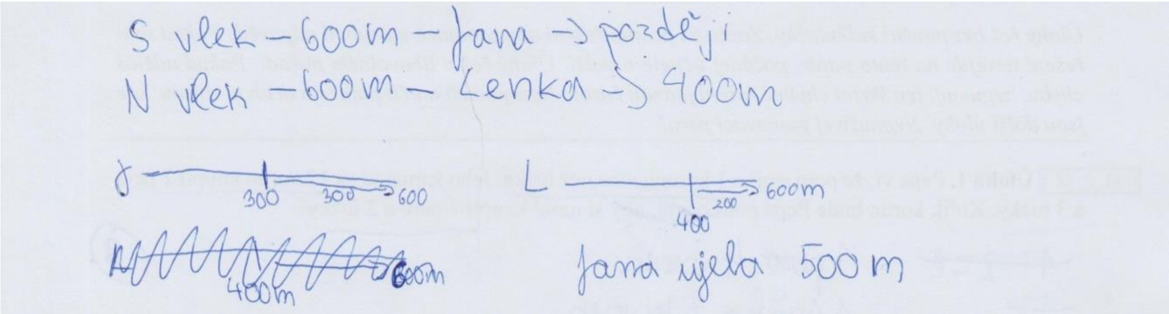
Kombinovaná legenda

Mezi žáky byli i tací, co použili více zápisů současně, například, jak jsem již výše uvedla, tabulkovou legendu doplnili nadto obrázkem.

Správná kombinace legend

Jako příklad zde uvádím řešení 11 žákyně ze sedmého ročníku, která si nakreslila obrázek a část informací si zaznamenala i slovy.

Řešení 11: žákyně, 7. ročník (úloha 6B2)



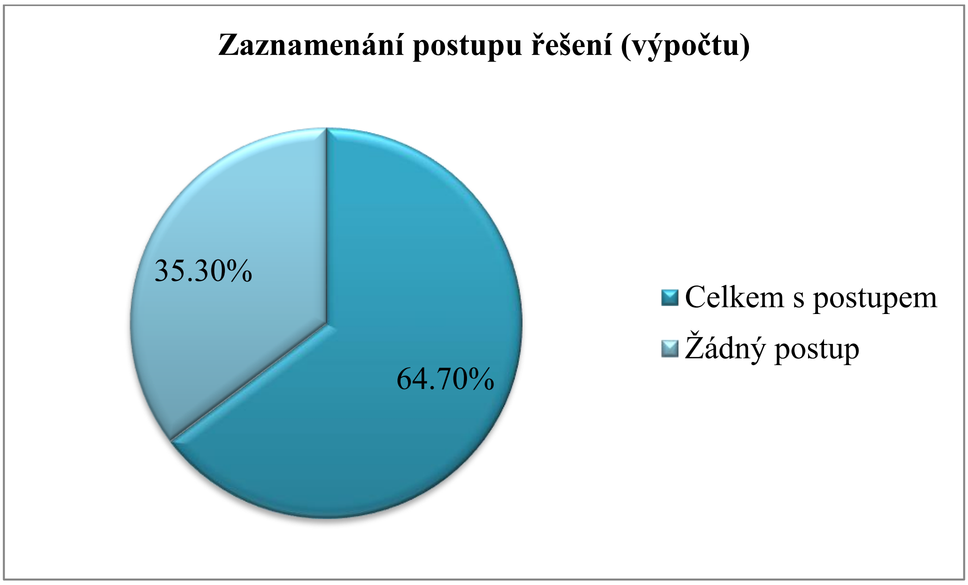
3.5.2 Výpočet

Následujícím zkoumaným jevem byl výpočet hledaného údaje. Zajímala jsem se, zda žáci postup nevynechávají. Zda si ho zapíší, aby posléze měli možnost provést kontrolu svých výpočtů.

Naneštěstí jsem zjistila, že více jak třetina dětí (viz. graf 9) si svůj postup nezapisuje a píše pouze odpověď. Dle mého bádání tím prudce stoupá pravděpodobnost neúspěchu. Žák si něco promyslí v hlavě, ale už nemá nic, podle čeho by si svůj postup zkontroloval. Navíc se ve slovních úlohách často vyžaduje vyřešení několika problémů současně, a tak se do toho většinou „zamotá“ a poté není schopen najít cestu ven.

Přitom řešení je vcelku snadné. Udělat si správně zápis všech potřebných informací, vyřadit ty, které jsou uvedeny pouze ke zmatení řešitele a poté se zamyslet, jak by se dalo postupovat a zapisovat své návrhy na papír, abychom to i viděli a později se k tomu mohli navrátit.

Graf 9: Zaznamenání postupu řešení (výpočtu)



Nyní uvedu celkem čtyři druhy výpočtu, které mě nejvíce zaujaly.

Správné využití poměru

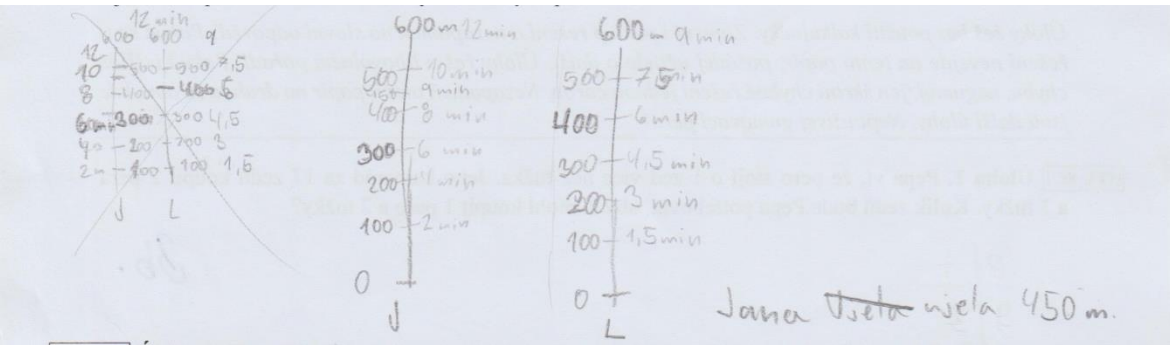
Opět se vrátím k řešení 1 (nahoře), ve kterém žákyně elegantně a přehledně úlohu vyřešila. Správně využila myšlenky poměru, pomocí které dospěla ke zdárnému cíli.

Správné přidání jednotek času

Nejoriginálnější přístup k 6B1 je však k vidění v řešení 12, kde si žákyně dopomohla k rozuzlení problému přidáním určitého času, jehož zavedení nám přispěje k bližšímu seznámení se s textem slovní úlohy. V zadání ani jedné formy úlohy 6B není totiž přesný čas, kdy a kde se dívky nacházely, zadán. Je zde pouze uvedeno, zda vyjely spolu, nebo nikoliv, a v jaké části dráhy se nacházely ve stejný okamžik.

Moudře si zvolila celkový čas 6 minut, kdy Lenka byla ve 400 metrech a Jana ve 300 metrech, a rozpočítala si, kolik minut uplynulo, když byla Jana na 100 metrech, na 200 metrech atp., obdobně rozdělila dráhu a čas u Lenky.

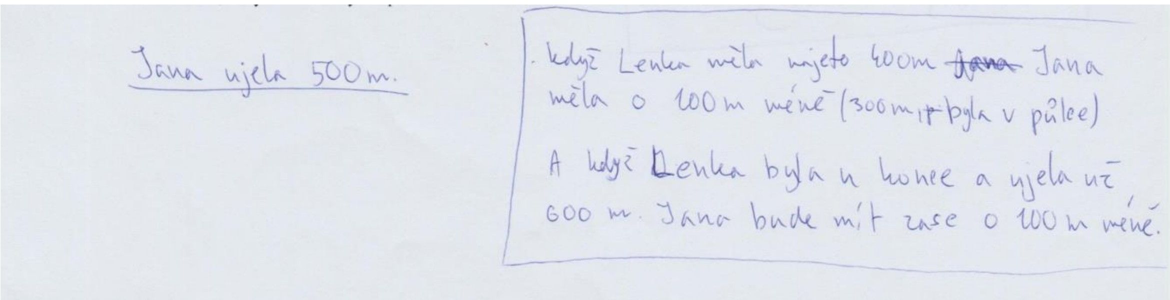
Řešení 12: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)



Zapsané myšlenkové pochody

Řešení 13 nám poskytlo správný slovní popis postupu. Žákyně podrobně popsala své myšlenkové pochody, aby nebylo pochyb, jak se dostala k výsledku. Toto řešení nám krásně přiblížilo způsob myšlení žáků v tomto věku.

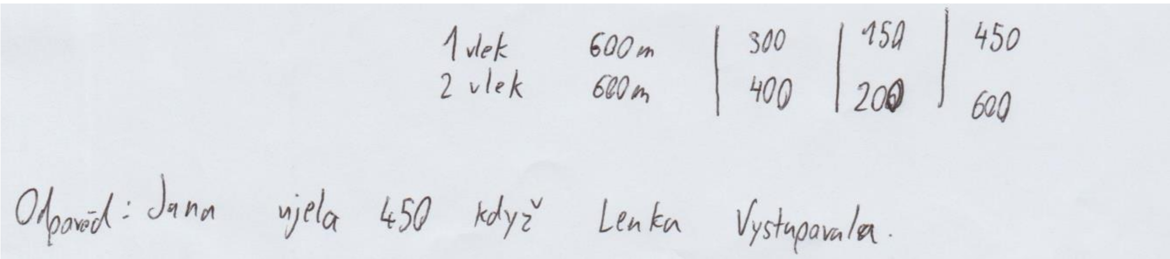
Řešení 13: žákyně, 7. ročník (úloha 6B2)



Výpočet v tabulce

Řešení 14 je zajímavé svým stylem zápisu výpočtů do tabulky. Je to velmi přehledný a jednoznačný způsob zápisu toku myšlenek. Opět se zde setkáváme s použitím poměru, který není sice přímo určen a zaznamenán, ale je tu zřetelný.

Řešení 14: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



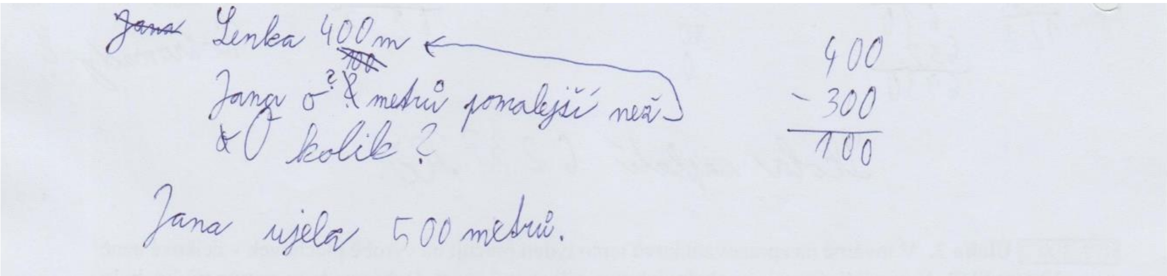
Nejčetnější pochybení

<u>Záměna 6B1 a 6B2</u>

Žáci často nahrazovali formu 6B1 formou 6B2, a tím se pro ně stávala úloha jednodušší a srozumitelnější. Rozdíl mezi počáteční dráhou Jany (300 metrů) a Lenky (400 metrů), tedy 100 metrů, zaměňovali (pro sebe) s časem. Nebylo tedy výjimkou se setkat s formulací věty: *Jana byla pomalejší o 100 metrů.* Tato myšlenka později vzbudila u žáků dojem, že Jana jednoduše vyjela, když Lenka byla na 100 metrech, a navíc že jela stejnou rychlostí. Postupně se tak z 6B1 stala úloha 6B2 a žáci řešili diametrálně rozdílnou úlohu.

Záměnu úloh lze vidět v řešení 3 (nahoře) a v řešení 15 níže.

Řešení 15: žák, 6. ročník (úloha 6B1)

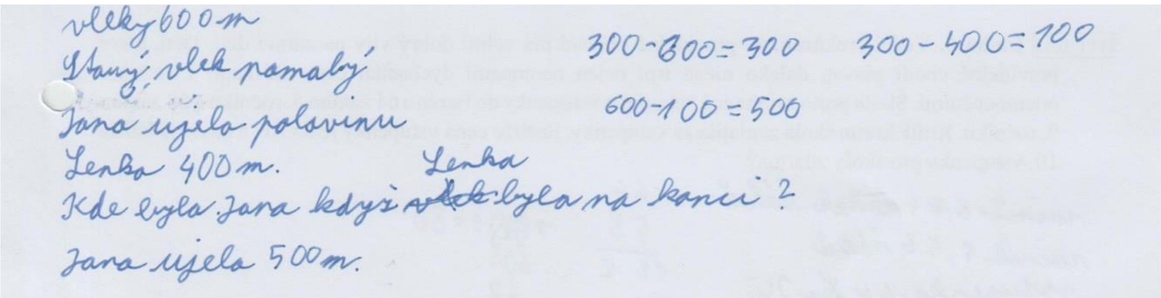


Záměna menšence a menšitele

Výjimkou nebyla ani záměna menšence a menšitele. Toto pochybení máme možnost vidět v následujících řešeních, tedy v řešení 16 a 17. Je zcela zřejmé, co tím žáci mysleli, avšak tento zápis u mě vzbudil velkou pozornost. To, jak správně odečíst dvě čísla, se učí děti již v první a druhé třídě, proto si kladu otázku, jak je možné, že žáci 6. třídy udělají takovou hrubku, když toto učivo mají dávno zažité a probírají již mnohem složitější operace, než je odčítání.

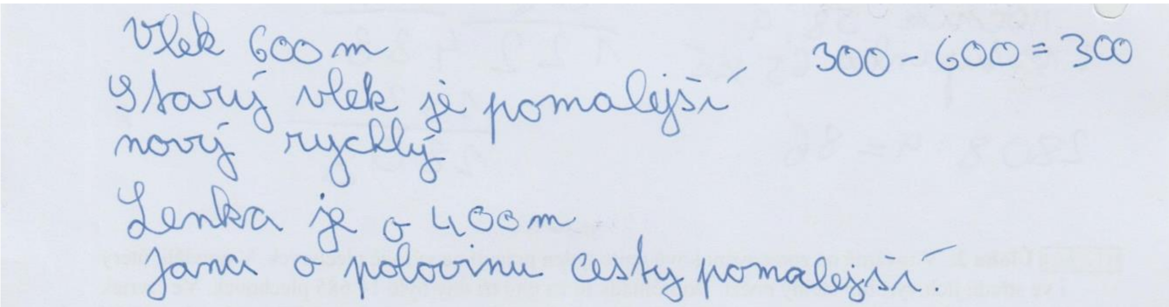
V řešení 17 je dále zarážející vyjádření v posledních dvou řádcích legendy. Zápis *Lenka je o 400 m a Jana o polovinu cesty pomalejší* totiž není správný vzhledem k zadání.

Řešení 16: žák, 6. ročník (úloha 6B1)


vleky 600 m
Starý vlek pomalý
Jana ujela polovinu
Lenka 400 m.
Kde byla Jana když ~~vlek~~ Lenka byla na konci?
Jana ujela 500 m.

300 - 600 = 300
600 - 100 = 500
300 - 400 = 100

Řešení 17: žákyně, 6. ročník (úloha 6B1)

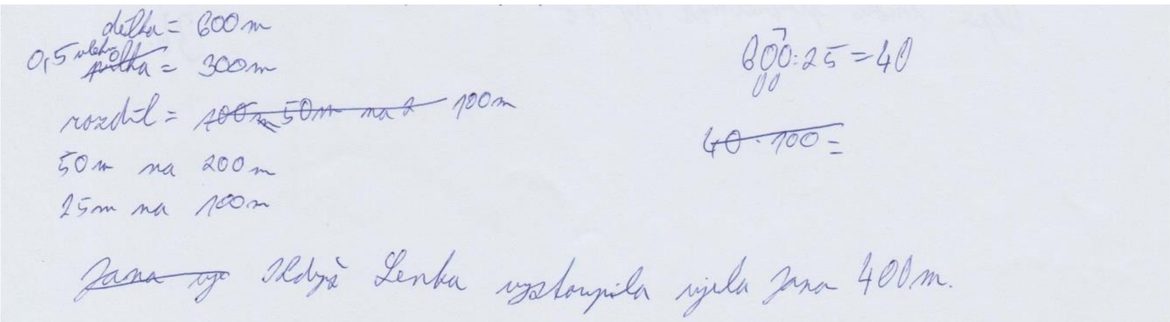

Vlek 600 m
Starý vlek je pomalejší
nový rychlý
Lenka je o 400 m
Jana o polovinu cesty pomalejší.

300 - 600 = 300

Chybná aplikace poměru

Někteří žáci byly správnému výsledku na cestě, měli totiž správné úvahy o poměru ujetých vzdáleností, ke konci však dospěli k nesprávnému závěru. Tento jev se objevuje v řešení 18. Zde si žák nejprve poznamenal údaje ze zadání, tedy délku vleku 600 metrů a spočetl si polovinu, tedy 300 metrů. Poté zkoumal, jaký vliv má pomalejší vlek na ujetou vzdálenost Jany. Správně zjistil a zaznamenal rozdíly oproti Lence. Tedy při ujetých 100 metrech Lenky je Jana o 25 metrů pozadu, při ujetých 200 metrech je pozadu o 50 metrů a tak dále. Tímto způsobem by došel ke správnému výsledku, že při 600 metrech je Jana teprve na 450 metrech dráhy vleku. Bohužel se žák pustil do jiné cesty, jak zjistit výsledek. Dělil 600 metrů 25, navíc s chybou, vynásobil deseti a považoval to za správný výsledek.

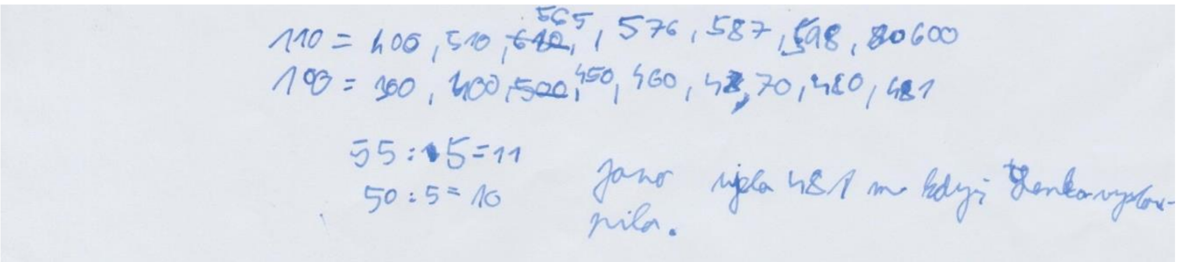
Řešení 18: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



Chybné určení poměru

Následujícím příkladem je řešení 19, kde žák dospěl k názoru, že musí k rozluštění úlohy využít poměr a pokusil se ho určit. Jeho řešení je však mylné a díky chybějícím výpočtům nelze odhalit, jak našel čísla 50 a 55. Nemůžeme tedy určit, kde přesně žák pochybil.

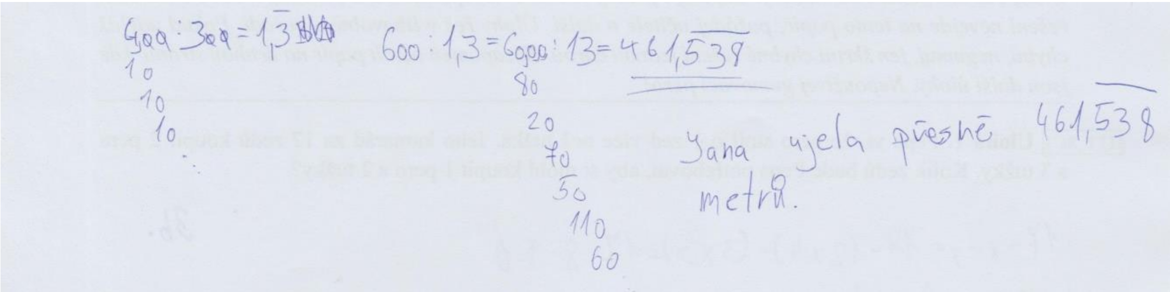
Řešení 19: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



Užití zaokrouhlování

Zde, v řešení 20, vidíme správnou cestu k určení poměru a tedy i správného výsledku. Touhu uspět však překazila jedna maličkost, a tou je zaokrouhlení. Kdyby nebylo použito zaokrouhlení a žák by 4:3 převedl na zlomek $\frac{4}{3}$, kterým by pak dělil (násobil převrácenou hodnotou $\frac{3}{4}$) číslo 600, byl by výsledek chtěných 450 metrů, oproti necelým 462 metrům.

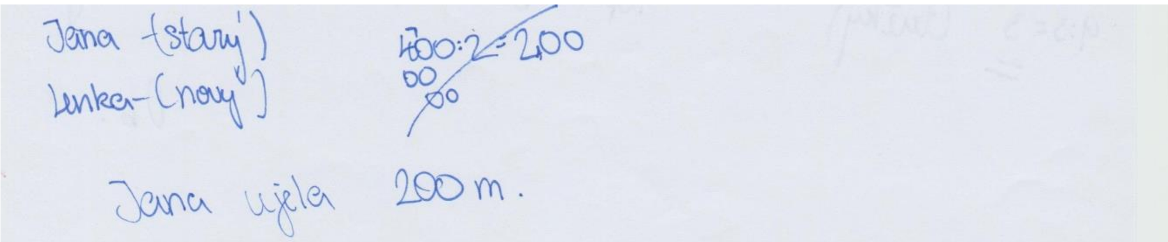
Řešení 20: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



Nepochopení zadání

Špatně pochopili zadání a to v tom, že vypočetli polovinu ujeté tratě Lenky, v délce 400 metrů, nikoliv tratě Jany, která potom byla rovna 300 metrům, a navíc to zapsali jako konečnou odpověď, tudíž se dostali pouze ke špatnému dílčímu výsledku (viz. řešení 21).

Řešení 21: žákyně, 7. ročník (úloha 6B2)

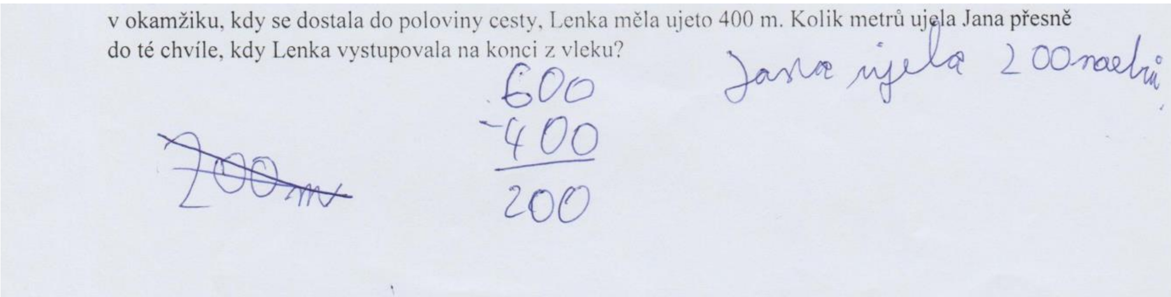


2 možnosti špatného uchopení otázky

V úloze 6B2 se dívky pohybovaly stejnou rychlostí. Tato informace pravděpodobně zmátla žákyni s řešením 22. Patrně spočetla, že Lence na konec vleku zbývá ujet dalších 200 metrů a využila zmíněného údaje o stejné rychlosti. Věděla tedy, že Jana musela také popojet o 200 metrů, což také zapsala ve své odpovědi. Problémem ale zůstává, že úloha se ptala, kolik Jana ujela celkem do chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci vleku.

Žákyně ovšem není jediná, která se dopustila tohoto pochybení. Problém nejspíše bude ve formulaci otázky. Ta zněla: Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?. Při určitém pohledu by se mohlo zdát, že se tvůrci neptají na celkovou dráhu, ale na počet metrů od zmíněné poloviny trasy.

Řešení 22: žákyně, 7. Ročník (úloha 6B2)


v okamžiku, kdy se dostala do poloviny cesty, Lenka měla ujeto 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?

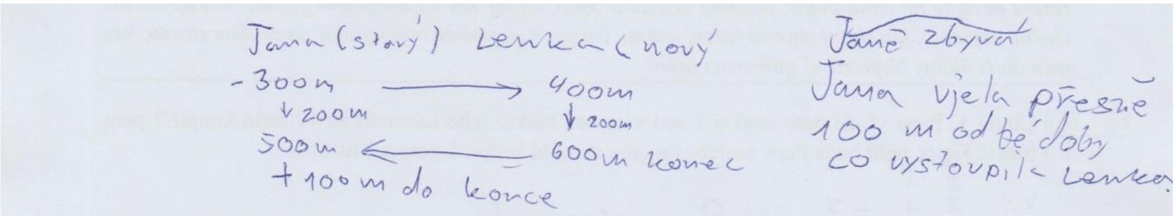
~~200 m~~

600
-400
200

Jana ujela 200 metrů

Řešení 23 nám ukazuje postup žáka, který pochopil, že má za úkol spočítat, kolik metrů Janě zbývalo na konec vleku v době, kdy Lenka již vystoupila. Ve výpočtech sice byl zmíněn správný výsledek, ale odpověď naznačuje, že otázka nebyla zcela pochopena.

Řešení 23: žák, 7. ročník (úloha 6B2)

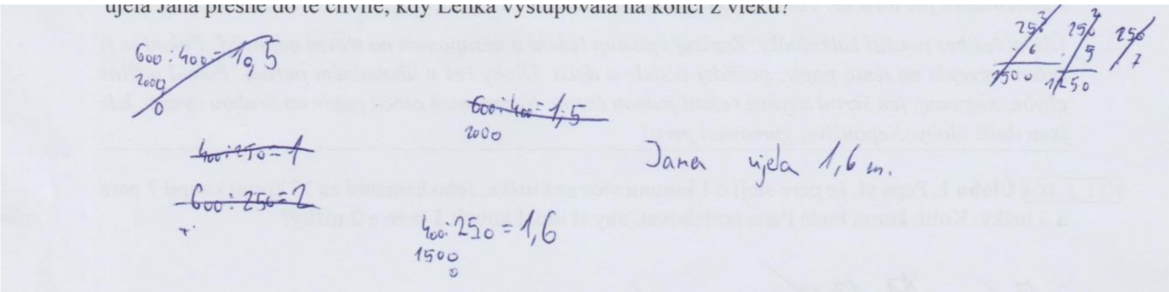

Jana (starý) Lenka (nový)
-300 m → 400 m
↓ 200 m ↓ 200 m
500 m ← 600 m konec
+100 m do konce

~~Janě zbývá~~
Jana ujela přesně 100 m od té doby co vystoupila Lenka.

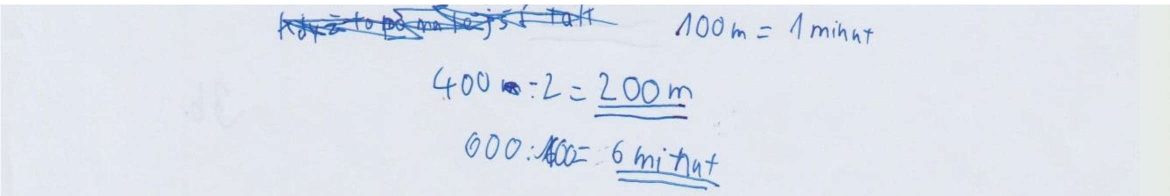
Řešení nekoresponduje se zadáním, uvedení smyšlených hodnot

Objevili se i tací, jejichž řešení nekorespondovalo se zadáním. Uvedli smyšlené hodnoty, z jejich postupu nebylo skutečně zřejmé, co počítají a k čemu vlastně dospěli v samotném závěru svých výpočtů (viz. řešení 24-26).

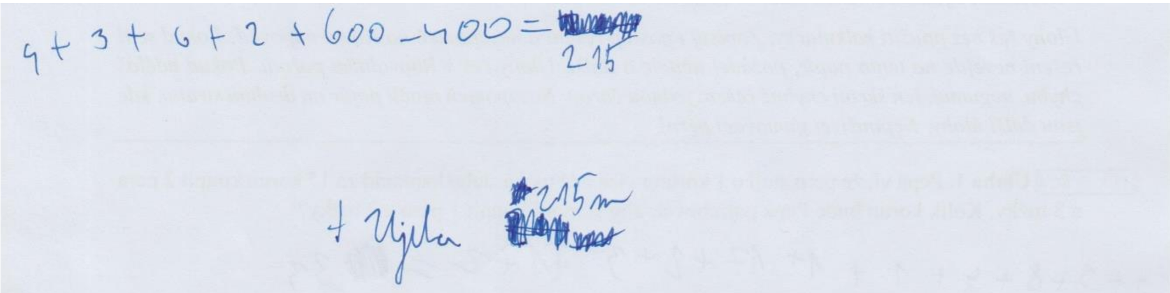
Řešení 24: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)



Řešení 25: žákyně, 7. ročník (úloha 6B1)



Řešení 26: žák, 7. ročník (úloha 6B2)

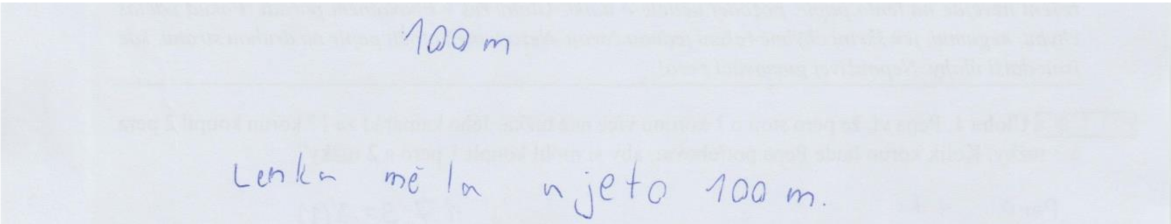


3.5.3 Odpověď

Záměna jmen

V následujícím řešení 27 si můžeme povšimnout, že se v něm vyskytuje zcela špatně utvořená odpověď. V úloze se ptají, kolik ujela Jana, ne Lenka a mají na mysli celkovou vzdálenost. Vypadá to, že žák úloze zcela neporozuměl a chtěl svou odpovědí říci, že Lenka ujela v tu danou chvíli o 100 metrů více.

Řešení 27: žák, 7. ročník (úloha 6B2)



Přepis ve jméně a počtu ujetých metrů

Menším nedopatřením v řešení 4 (nahoře) je přeměna jména Lenky na Lenu, což se objevuje v obrázku i v odpovědi. Poté nastalo ještě jedno pochybení v podobě špatného zapsání celkové ujeté dráhy Jany do odpovědi. Jde ale spíše o přepis, než že by žák nevyřešil správně slovní úlohu.

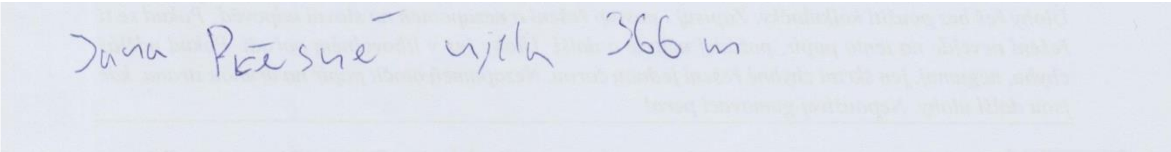
Odpověď na jinou otázku

Vyskytli se i tací, co neodpověděli na celou dráhu, ale až od té poloviny, kterou u Jany brali jako výchozí pozici (viz. řešení 22 nahoře).

Zcela špatná odpověď

Oproti předešlému řešení je řešení 28 bez jakéhokoliv zápisu zadání nebo postupu. Obsahuje pouze odpověď, v níž je zanesen špatný výsledek, u něhož nelze určit původ.

Řešení 28: žák, 7. ročník (úloha 6B1)



Závěrem této kapitoly, kde jsou prezentované vybrané chyby v žákovských řešeních, lze říci, že někteří žáci dospěli k opravdu nevídanému způsobu řešení a pouze malá hrstka dokázala nalézt správnou odpověď na danou otázku.

4 Závěr

Předkládaná bakalářská práce se nesla v kontextu slovních úloh a členila se do čtyř hlavních kapitol. První částí byl úvod, kde jsem popsala nepostradatelnost matematiky v běžném životě člověka, zdůvodnila výběr tématu práce a stanovila hlavní cíl práce. Druhá část byla teoretická a vznikla na základě sekundárních zdrojů. Obsahem této části práce bylo krátké seznámení s historií slovních úloh, definicí pojmu slovní úloha a jejími parametry. Rovněž jsem se zabývala vztahem žáků ke slovním úlohám, nástroji školní motivace a analýzou učebnic. Třetí částí práce byla ryze praktická, založená především na výzkumných datech, jejich analyzování a vyhodnocení. Poslední částí se pak stal závěr, ve kterém je vše shrnuto a posouzeno.

Hlavním cílem této práce bylo sledovat úspěšnost a strategie řešení žáků u slovních úloh, kde je vztah mezi proměnnými buď proporční (např. 2x rychleji) nebo aditivní (např. stejně rychle, ale u jedné proměnné je určitý "náskok").

Matematika je vědní obor, který ne každému „přiroste“ k srdci a stává se tak pro ně abstraktní disciplínou. Matematika, jako výukový předmět má své „stinné“ stránky, kterými jsou právě slovní úlohy, jež většina žáků neřeší s nadšením a na základě nichž nemá tento předmět v lásce.

A právě na řešení slovních úloh u žáků základních škol byl zaměřen můj výzkum.

Sběr dat probíhal formou testování žáků pátého až sedmého ročníku. Ačkoliv jsem očekávala velké rozdíly v úspěšnosti napříč ročníky, bylo tomu přesně naopak. Procentuální úspěšnost všech ročníků v obou typech úlohy byla téměř shodná. Oproti tomu mě překvapil propad v úspěšnosti mezi žáky řešícími úlohu 6B2 a 6B1, který je téměř 70 %.

Nebylo pro mne lehké tento fakt přijmout, proto jsem se v analýze učebnic zaměřila na četnost úloh, kde je mezi proměnnými právě aditivní nebo proporční vztah. Překvapením mi bylo zjištění, že oba typy úloh se v učebnicích matematiky vyskytují s prakticky stejným procentuálním zastoupením. Je ovšem pravda, že úlohy s proměnnými v proporčním vztahu jsou v učebnicích velmi jednoduché. Úloha 6B1 tedy musela být pro žáky opravdu složitou záležitostí. V úvahu by se měl vzít i určitý stres a tlak, který, i přes všechny snahy jej odstranit, byl nepochybně součástí celého testování. Stres pak mohl mít negativní vliv na soustředěnost a výsledky žáků.

Dalšími záležitostmi, jež mě nemile překvapily, a které jsem opravdu nečekala, jsou velké nedostatky ve znalosti převodů jednotek délky (jež se ani nemusely používat, nebylo to potřebné pro vyřešení úloh), v základních pravidlech odčítání (žáci zaměňovali menšence a menšitele) a v zaokrouhlování, které překazilo úspěšné řešení dvěma žákům.

Z výsledků testování se dá vyvodit hned několik závěrů, jež mohou být inspirací tvůrcům učebnic, kteří na jejich základě mohou učební materiály upravit (například je doplnit o podobně obtížné úlohy jako byla úloha 6B1), což přispěje ke zvýšení matematické vzdělanosti žáků základní škol.

Mně osobně toto testování dalo pocit, že bych se slovními úlohami měla v hodinách matematiky detailněji zabývat a dbát na jejich znalost a na schopnost porozumět textu.

V tomto smyslu bych u žáků ráda rozvíjela samostatnost, vzbuzovala potřebu poznání a touhu po vědění a nových zkušenostech.

„Život je jako příklad z matematiky. Počítáš příklad a na konci zjistíš, že jsi někde udělal chybu. Chceš začít znovu, ale nemůžeš - zvoní.“
(dostupné z www.citaty.net)

5 Seznam použitých informačních zdrojů

[1] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.

[2] BEDNÁŘ, Vojtěch. *Pochvala - nejlepší motivace.* [online]. 2012 [cit. 2018-07-09]. Dostupné z WWW: http://www.firemni-sociolog.cz/cz/clanky/38-pochvala-nejlepsi-motivace2

[3] BEDRNOVÁ, Eva a Ivan NOVÝ. *Psychologie a sociologie řízení*. 3., rozš. a dopl. vyd. Praha: Management Press, 2007. ISBN 978-80-7261-169-0.

[4] BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-3022-0.

[5] Citáty.net. [online]. [cit. 2018-07-12] Dostupné z WWW: https://citaty.net/citaty/4258-theodore-roosevelt-clovek-ktery-nikdy-nedela-chyby-je-clovek-ktery/?page=2

a z WWW: https://citaty.net/citaty/7481-neznamy-autor-zivot-je-jako-priklad-z-matematiky-pocitas-prikla/

[6] HARVÁNKOVÁ, Pavla. *Využití historických poznatků při výuce matematiky na střední škole*. Brno, 2012. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Vedoucí práce Karel Lepka.

[7] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.

[8] HEJNÝ, Milan. *Zmocňování se slovní úlohy.* Pedagogika, roč. 45, 1995.

[9] JEŘÁBEK, Jaroslav, Milan ROSENZWEIG, Adriena SMEJKALOVÁ, Eva JANOUŠKOVÁ a kol. *Vzdělávací program základní škola.* [online]. 1996 [cit. 2018-07-10]. Dostupné z WWW: http://www.nuv.cz/file/194_1_1/

[10] JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. Všeň: Alter, 2009. ISBN 978-80-7245-154-8.

[11] KADLČÍKOVÁ, Kateřina. *Komparace řešení matematických úloh u žáků primární školy*. Olomouc, 2010. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Vedoucí práce Eva Hotová.

[12] KNECHT, Petr a Tomáš JANÍK. *Učebnice z pohledu pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2008. Pedagogický výzkum v teorii a praxi. ISBN 978-80-7315-174-4.

[13] KONFOROVIČ, Andrìj Hryhorovyč. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-21848-2.

[14] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1989. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-0.

[15] MAREŠ, Jiří. *Fridmanova teorie učebních úloh.* [online]. [cit. 2018-3-15]. Dostupné z WWW: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiQ_aDgopncAhWyiqYKHR1oCikQFggrMAA&url=http%3A%2F%2Fpages.pedf.cuni.cz%2Fpedagogika%2F%3Fattachment_id%3D5520%26edmc%3D5520&usg=AOvVaw3GQpFT4aZEmZgLR5DDyek8

[16] MIKULÁŠTÍK, Milan. *Manažerská psychologie*. 3., přepracované vydání. Praha: Grada, 2015. Manažer. ISBN 978-80-247-4221-2.

[17] MOLNÁR, Josef a kol.. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 978-80-85806-98-3.

[18] MOLNÁR, Josef a kol.. *Matematika 7: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1999. ISBN 978-80-7230-032-7.

[19] NAKONEČNÝ, Milan. *Motivace chování*. 3., přeprac. vyd. V Praze: Triton, 2014. ISBN 978-80-7387-830-6.

[20] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

[21] ODVÁRKO, Oldřich, Jaroslav ŠEDIVÝ a Emil CALDA. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-04-20434-1.

[22] PLAMÍNEK, Jiří. *Tajemství motivace: jak zařídit, aby pro vás lidé rádi pracovali*. 3., rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing, 2015. Poradce pro praxi. ISBN 978-80-247-5515-1.

[23] RENDL, Miroslav, Naďa VONDROVÁ a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

[24] *Starověký Egypt*. [online]. [cit. 2018-2-11]. Dostupné z WWW: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/matematika/historie/files/prednaska_egypt.pdf

[25] VÍTOVÁ, Lenka. *Proměny matematických úloh v různých zemích a dobách.* Olomouc, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Fakulta přírodovědecká, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky. Vedoucí práce Miloslav Závodný.

[26] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

[27] VYMAZALOVÁ, Hana. *Staroegyptská matematika: hieratické matematické texty*. Praha: Český egyptologický ústav, 2006. Dějiny matematiky (Český egyptologický ústav), sv. 31. ISBN 80-7308-156-3.

[28] VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. Praha: SPN, 1962.

[29] Wim Van Dooren, Dirk De Bock & Lieven Verschaffel (2010) *From Addition to Multiplication ... and Back*: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills, Cognition and Instruction, 28:3, 360-381, DOI: 10.1080/07370008.2010.488306

[30] Interní pracovní materiály projektu 16-06134S GA ČR

I. Manual 2 stupeň HT3 pro opravovatele

II. Návrh úloh pro HT3 po ročnících

III. Participants and procedure

IV. Pokyny pro zadavatele

V. Popis tvorby testů a rozřazení žáků do skupin

VI. Seznam parametrů

6 Seznam příloh

7 Seznam obrázků

8 Seznam řešení

9 Seznam tabulek

10 Seznam grafů

Příloha 1 – Testovací protokol

Informace o vstupním testu z matematiky:
Datum:
Škola:
Třída:
Vyučovací hodina:
Jméno zadavatele:
Jméno přítomného učitele:
Jméno případného dalšího dospělého, který byl přítomen zadávání:
Počet žáků ve třídě, kteří psali test:
Počet žáků, kteří na test chybí:
Kdy se začal test psát:
Kdy odevzdal první žák:
Kdy odevzdal poslední žák:
Otázky, které žáci položili (vždy otázku, zhruba čas v hodině, kdy se tak stalo, zda byla položena veřejně nebo jen privátně, vaše odpověď):
Další relevantní informace k zadávání testu: