Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vliv pořadí informací v zadání slovní úlohy na její obtížnost u žáků 2. stupně

The influence of the order of information in word problems on their difficulty for lower secondary pupils

Bc. David Hennlich

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy anglický jazyk — matematika

2018

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Vliv pořadí informací v zadání slovní úlohy na její obtížnost u žáků 2. stupně vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 11. 7. 2018

....

podpis

V první řadě bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za vedení mé práce, za její ochotu, se kterou mi vždy vycházela vstříc, a za to, že jsem se na ni mohl vždy obrátit s jakýmkoli dotazem. Dále děkuji celému týmu podílejícímu se na výzkumu GAČR, který je blíže popsán v této práci, za to, že mi umožnili nahlédnout do způsobu fungování rozsáhlého akademického výzkumu, což pro mne bylo velkou inspirací. V neposlední řadě patří dík mé rodině, která mne při mém studiu bezmezně podporovala, a především mé manželce Marcele a dceři Evě, které mi pomohly překonat i ty nejtěžší překážky.

NÁZEV:

Vliv pořadí informací v zadání slovní úlohy na její obtížnost u žáků 2. stupně

AUTOR:

Bc. David Hennlich

KATEDRA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VEDOUCÍ PRÁCE:

doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

ABSTRAKT:

Výzkumy ukazují vliv různých parametrů slovních úloh na úspěšnost a metody jejich řešení. V případě parametru pořadí informací se předchozí výzkumy převážně soustředily na úlohy, ve kterých pořadí informací v zadání odpovídá (nebo neodpovídá) posloupnosti událostí, jež jsou v zadání úlohy popsány. Tato práce se odlišuje zkoumáním vlivu parametru pořadí informací u úloh, jejichž situační model takovouto posloupnost neobsahuje. Analyzovány byly dvě sady úloh, které řešili žáci devátých ročníků čtyř pražských základních škol. Pro zjištění vlivu zkoumaného parametru byla použita kombinace kvantitativního a kvalitativního výzkumu. Z kvantitativního hlediska byla pro analýzu využita Teorie odpovědi na položku (IRT). Zde práce využívá výsledků dosažených v rámci projektu GAČR 16–6134S. V rámci kvalitativního zkoumání byla analyzována písemná žákovská řešení, která byla následně doplněna dodatečnými rozhovory s žáky. U žádné z úloh nebyl pozorován statisticky významný vliv zkoumaného parametru na úspěšnost ani na metody řešení, které žáci u daných úloh volili. Vliv zkoumaného parametru se nepotvrdil ani v předpokládaných aspektech řešení, kterými byly volba základní neznámé a uvedení údaje o celku na různé straně rovnice. Žáci volili za neznámou údaj uvedený na druhém místě ve větě a téměř výlučně uváděli údaj o celku na pravé straně rovnice. Z kvalitativního hlediska práce přináší vhled do strategií, které žáci při řešení úloh používali, a chyb, kterých se přitom dopouštěli.

KLÍČOVÁ SLOVA:

slovní úlohy, parametry slovních úloh, metody řešení slovních úloh, pořadí informací

TITLE:

The influence of the order of information in word problems on their difficulty for lower secondary pupils

AUTHOR:

Bc. David Hennlich

DEPARTMENT:

Department of Mathematics and Mathematical Education

SUPERVISOR:

doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

ABSTRACT:

Research has shown an influence of various parameters of word problems on their success rate and solving strategies that are used by pupils. In case of the order of information variable, most of research has focused on word problems, in which the order of information corresponds, or not, with the order of events described in the problem statement. This thesis differs from them by aiming at word problems without the sequence of this kind in their situational models. Two sets of problems solved by ninth grade pupils of four secondary schools situated in Prague were analysed. In order to recognize the influence of the analysed parameter, the combination of qualitative and quantitative approach was used. Item Response Theory (IRT) was used to analyse the parameter from the quantitative point of view. The written solutions of pupils were also analysed in a qualitative way and later amended by additional interviews with pupils. No influence of the parameter was found on either success rate or solving strategies in any of the analysed word problems. There was also no influence of the parameter on any expected aspects of the solutions, namely on the choice of the variable in relation to which the other elements are expressed, and on the side of equation on which the information about the whole is stated. The pupils chose as a variable the second element stated in a sentence and almost exclusively put the information about the whole on the right side of the equation. From the qualitative way, the thesis provides insight into strategies which pupils used when solving the problems and into mistakes they made.

KEYWORDS:

word problems, word problem parameters, word problem solving strategies, order of information

Obsah

1 Úvod 7
2 Teoretická část 9
2.1 Slovní úlohy 9
2.1.1 Vymezení slovní úlohy 9
2.1.2 Charakteristika slovních úloh 10
2.1.3 Význam slovních úloh 14
2.1.4 Fáze řešení slovních úloh 16
2.1.5 Metody řešení slovních úloh 19
2.2 Parametry obtížnosti slovních úloh 23
2.2.1 Vyjádření matematických údajů 24
2.2.2 Návodnost triády 25
2.2.3 Návodnost funkčních vazeb 26
2.2.4 Přítomnost nepravé implikace 27
2.2.5 Délka textu 28
2.2.6 Roviny sdělení 29
2.2.7 Pořadí informací 29
3 Metodologie 32
3.1 Vzorek 32
3.2 Popis úloh 33
3.3 Průběh výzkumu: didaktický test a rozhovor 37
3.4 Vyhodnocení didaktického testu: analýza žákovských řešení 38
3.4.1 Předpokládané metody řešení sady úloh 9A 42
3.4.2 Předpokládané metody řešení sady úloh 9C 44
3.5 Kvantitativní analýza dat 47
4 Výsledky 49
4.1 Výsledky kvantitativní části výzkumu 49
4.2 Kvalitativní analýza řešení sady úloh 9A 53
4.3 Kvalitativní analýza řešení sady úloh 9C 60
5 Diskuse a závěr 70
6 Literatura 75

1 Úvod

Tato práce se zabývá parametry slovních úloh a klade si za cíl odhalit vliv parametru pořadí informací na řešení slovních úloh u žáků 9. ročníků základních škol, a to jak z hlediska jejich úspěšnosti, tak s ohledem na použité metody řešení. Předpokládalo se, že žáci budou v úlohách, ve kterých pořadí informací v zadání nekoresponduje s pořadím matematických údajů ve výpočtech, dosahovat nižší úspěšnosti. Dalším předpokládaným vlivem tohoto parametru byla volba objektu, pomocí něhož se budou vyjadřovat ostatní objekty. Vycházelo se z předpokladu, že žáci budou na tuto pozici volit objekt vyskytující se na prvním místě v zadání úlohy. Posledním očekáváním bylo, že pořadí informací v zadání úlohy bude mít vliv na způsob sestavení rovnice, sloužící jako matematický model.

Slovní úlohy jsou jednou z problematických oblastí ve výuce matematiky (Rendl, Vondrová, et al. 2013: s. 97) a výzkumy ukazují, že tuto skutečnost zapříčiňují především obtíže žáků při vytváření situačního modelu dané úlohy (Jimenez & Verschaffel, 2014). Pokud by se zjistilo, co tyto obtíže způsobuje, bylo by možné odpovídajícím způsobem modifikovat výuku matematiky a žáky připravit na překonávání těchto obtíží. Z tohoto důvodu je tato práce zaměřena právě na parametry slovních úloh. Vzhledem k omezenému rozsahu práce bylo zkoumání zaměřeno pouze na žáky 9. tříd a pozornost byla věnována výlučně parametru pořadí informací v zadání slovní úlohy. Důvodem pro tuto volbu byl předpoklad, že na konci posledního ročníku povinného základního vzdělávání by žáci měli již dosáhnout veškerých výstupů uvedených v *Rámcovém vzdělávacím programu*, mezi které patří právě i řešení slovních úloh.

Práce je rozdělena na dvě části, část teoretickou a praktickou. V první části je poskytnut teoretický základ získaný studiem literatury, jež je následně využit při rozboru dat v rámci praktické části. Teoretická část je rozdělena na dvě podkapitoly. První se zabývá slovními úlohami a druhá parametry slovních úloh.

V rámci první podkapitoly je zaveden termín slovní úlohy. Z českých autorů se zde používá pojetí Odvárka, Kuřiny a Hejného a jako zahraniční autoři jsou pro srovnání uvedeni Blum a Niss. Následuje charakteristika slovních úloh a jejich rozdělení podle různých kritérií. Těmito kritérii jsou kontext úlohy, její podoba a způsob řešení. Pro tuto charakteristiku je z hlediska kontextu využit přístup Jurdaka a Beswick, s ohledem na podobu úlohy je popsána charakteristika podle Hejného a Bluma a Nisse a v případě rozdělení podle způsobu řešení jsou zmíněny typy úloh na základě Hejného a Rendla a Vondrové. Následně je rozpracován význam slovních úloh a důvody pro jejich využití při výuce matematiky na základě článků od Beswick a Bluma a Nisse. V další části této podkapitoly jsou rozebrané fáze řešení slovních úloh podle Hejného a Jimenez a Verschaffela. V samém závěru teoretické části jsou popsány metody řešení slovních úloh na základě teoretického rámce Hejného a Daroczy et al.

Praktická část práce obsahuje dvě kapitoly. První kapitola se zabývá metodologií a jsou v ní uvedeny informace týkající se výzkumu a sběru dat. Tato kapitola popisuje vzorek žáků, s nimiž bylo testování provedeno, úlohy využité v rámci této práce a formu testu a didaktického rozhovoru, v jejichž rámci byla získána data. Druhá kapitola se zabývá výsledky. Nejprve jsou kvantitativně analyzována získaná data a poté jsou pro obě zkoumané sady úloh popsány předpokládané metody řešení a následně jejich skutečná podoba, podpořená konkrétními žákovskými řešeními. Význam zkoumaného parametru je rozebírán z kvantitativního i kvalitativního hlediska v odpovídající oddílech.

Data využitá pro tuto práci vychází z výzkumu GAČR 16–6134S, který je realizován pod záštitou Grantové agentury České republiky. Tento výzkum si klade za cíl identifikovat lingvistické, psychologické a matematické parametry slovních úloh ovlivňující jejich náročnost, popsat jejich vlivy na úspěšnost žáků základních škol a vztahy mezi úrovněmi čtenářské a matematické gramotnosti žáků různého věku (Novotná & Vondrová, 2017: s. 1137). Na jeho realizaci se podílejí odborníci z oblastí didaktiky matematiky, lingvistiky a psychologie, aby se zamezilo jednostrannému náhledu na tak komplexní téma, jakým slovní úlohy bezpochyby jsou.

V práci se zaměřuji na jeden z parametrů identifikovaných v rámci projektu GAČR, a sice pořadí informací v zadání slovní úlohy. Zjišťuji, zda a jak odlišné pořadí informací ovlivňuje obtížnost slovní úlohy, žákovské strategie a případně jejich obtíže. Předmětem mého zájmu jsou žáci 9. ročníku.

2 Teoretická část

2.1 Slovní úlohy

2.1.1 Vymezení slovní úlohy

V první řadě je nezbytné vymezit, co je to slovní úloha. I přesto, že tomuto termínu intuitivně rozumí asi každý, kdo prošel základním vzděláním v oblasti matematiky, vymezení slovní úlohy se v literatuře značně liší. Například Odvárko definuje slovní úlohy jako „takové úlohy, v jejichž zadání se objevují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších matematických oblastí“ (Odvárko, 1990, cit. v Novotná, 2000: s. 10). Podle Kuřiny slovní úlohou rozumíme úlohu „kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpověď na položené otázky“ (Kuřina, 1989, cit. v Novotná, 2000: s. 10). Hejný vymezuje pojem slovní úlohy následovně.

> Podle nás, úloha (pro daného žáka) je slovní tenkrát, když
>
> - je dána textem, k jehož porozumění se žák musí dopracovat,
> - k tomu žák použije svoje životní zkušenosti (pak mluvíme o úloze sémantické) nebo pouze svoje matematické zkušenosti (pak mluvíme o úloze strukturální).
>
> Úlohu typu „Řešte rovnici ….“ za slovní nepovažujeme, protože porozumění textu nevyžaduje žádné úsilí.[1]

Na tomto přístupu je zajímavé, že vychází z pohledu konkrétního řešitele úlohy, a to, co bude považováno za slovní úlohu, není univerzální. Jako příklad Hejný uvádí úlohu „Myslím si číslo. Jeho polovina je o čtyři větší než jeho třetina. Jaké číslo si myslím?“ a tvrdí, že pro žáka „který ihned po přečtení napíše $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 4$, nelze úlohu považovat za slovní“[2]. Tento přístup do jisté míry koresponduje s rozdělením slovních úloh na implicitní a explicitní, které je rozebráno v oddíle 2.1.2.

Trochu odlišně přistupují k vymezení slovní úlohy zahraniční autoři, například Blum a Niss. Nejprve definují úlohu, v originále *problem*, jako:

[1] Podle poznámek z přednášky M. Hejného.
[2] Podle poznámek z přednášky M. Hejného.

> situaci, z níž vyplývají určité otevřené otázky, které jsou intelektuální výzvou pro někoho, kdo v daném okamžiku nezná přímou metodu/postup/algoritmus dostatečný pro jejich vyřešení (Blum & Niss, 1991: s. 37).

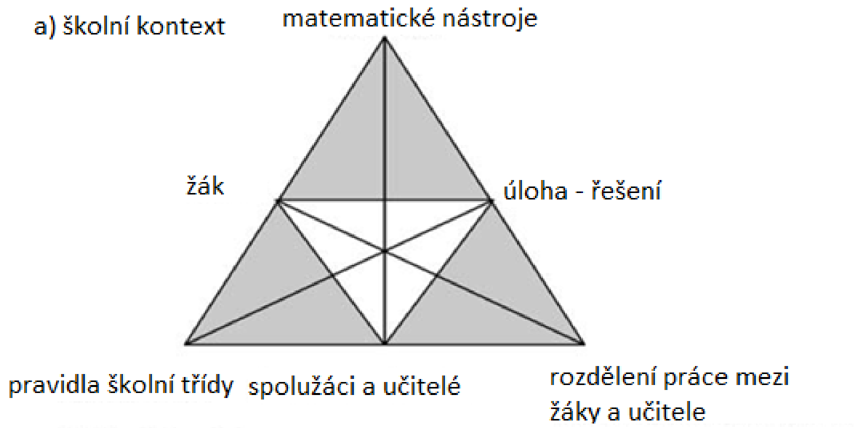
Následně pokračují k vymezení slovní úlohy jakožto aplikované matematické úlohy, v níž „situace a otázky, vyplývající z dané úlohy, mají souvislost s nějakou částí reálného světa a zahrnují určité matematické koncepty, metody a výsledky“ (Blum & Niss, 1991: s. 37). Nezbytnost tohoto postupného vymezení slovní úlohy pravděpodobně vychází z rozdílu mezi českým slovem *úloha* a anglickým slovem *problem,* jejichž konotace nejsou totožné. Slovo *úloha* se v českém jazyce pojí do značné míry s matematikou, zatímco slovo *problem* v anglickém jazyce neevokuje přímou souvislost s matematikou.

Sjednocujícím faktorem různých vymezení slovní úlohy je přítomnost reálného, nebo alespoň pseudoreálného kontextu, zadání úlohy je vyjádřeno slovně a řešení zadaného problému vyžaduje použití matematických znalostí. Vymezení slovní úlohy, z níž se vychází v rámci této práce, je shodné s vymezením přijatým v rámci výzkumu GAČR 16–6134S (dále jen GAČR), z nějž pocházejí data využitá v praktické části práce:

> Slovní úloha je úloha obsahující nějaký kontext (reálný, realistický nebo vymyšlený), ve kterém jsou zadána numerická data a žákům je položena otázka, kterou mají zodpovědět za použití svých matematických znalostí a mimoškolních zkušeností. (Novotná & Vondrová, 2017: s. 1137)

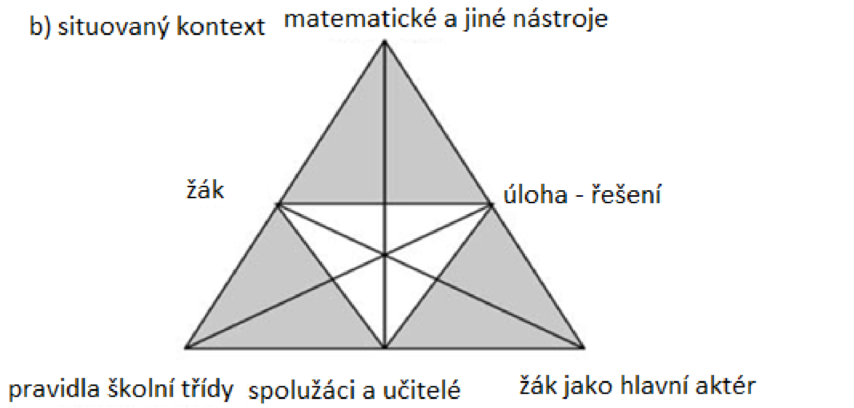
2.1.2 Charakteristika slovních úloh

Slovní úlohy lze charakterizovat z různých pohledů. Prvním z nich je kontext, do kterého je úloha zasazena. Jurdak uvádí tři různé druhy kontextů, školní, situovaný a reálný. Při řešení úloh zasazených do školního kontextu využívá žák naučené matematické postupy, kterými nalezne řešení (Jurdak, 2006: s. 299). V tomto případě se nemusí nutně jednat o slovní úlohy, úlohou může být například vyřešení rovnice. Pokud se jedná o slovní úlohu, je na první pohled patrné, jak postupovat při řešení, a úloha neimituje situaci z mimoškolního prostředí. Schéma aktivity pro úlohy tohoto typu je vyobrazeno na obrázku 1.



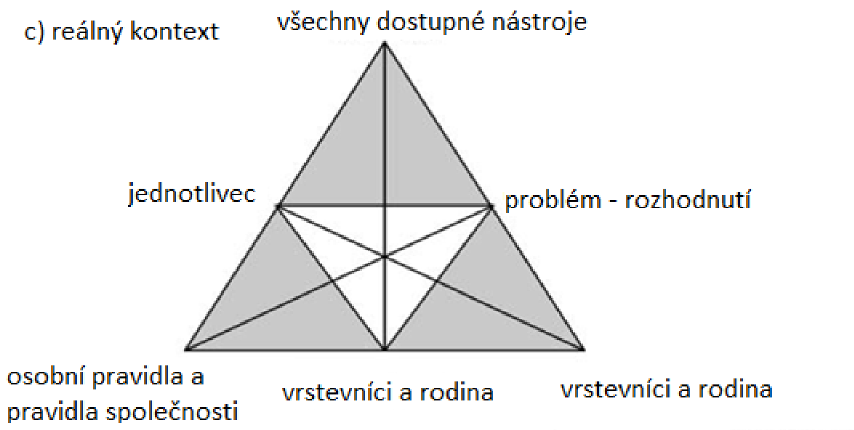
Obrázek 1 – Schéma aktivity pro úlohy zasazené do školního kontextu (převzato z Jurdak, 2006: s. 300)

Dalším typem jsou úlohy se situovaným kontextem. Při nich žák využívá nejen matematické, ale i ostatní nástroje vhodné pro řešení úlohy, viz obrázek 2. Při těchto úlohách hraje hlavní roli žák, na rozdíl od úloh ve školním kontextu, kde se na řešení podílel částečně i učitel, a to vysvětlováním řešení obdobných úloh. Dalším rozdílem je povaha úlohy, kterou žák řeší, protože v tomto případě se jedná o „realistický problém, který však nemusí být nezbytně zamýšlen jako procvičení určitého matematického jevu" (Jurdak, 2006: s. 300).



Obrázek 2 – Schéma aktivity pro úlohy zasazené do situovaného kontextu (převzato z Jurdak, 2006: s. 300)

Posledním typem úloh v rámci rozdělení podle kontextu, které Jurdak uvádí, jsou úlohy reálné. Schéma tohoto typu úloh je znázorněno na obrázku 3. Zde se už nejedná o slovní úlohy, které by žák mohl řešit při výuce matematiky, ale o skutečné reálné situace. Jedním z rozdílů je tedy cíl, jehož se žák snaží dosáhnout. Již mu nejde o řešení úlohy, ale spíše o nějaké rozhodnutí, jak bude na situaci reagovat. Naučit žáka řešení těchto úloh, i když v tomto kontextu je možná lepší říci problémů, je jedním z hlavních cílů matematického vzdělávání v rámci školní docházky, jak je uvedeno v *Rámcovém vzdělávacím programu*[3]. „Osoba, která úlohu řeší, už zde vystupuje v pozici jedince v rámci společnosti a není identifikována jako žák“ (Jurdak, 2006: s. 301).



Obrázek 3 – Schéma aktivity pro úlohy zasazené do reálného kontextu (převzato z Jurdak, 2006: s. 300)

Jurdak v rámci svého výzkumu zjistil, že žáci by použili diametrálně odlišné strategie při řešení úloh, podle toho v jakém kontextu byly použity (Jurdak, 2006, s. 307).

Podobnou klasifikaci slovních úloh zmiňuje i Beswick, která uvádí celkem tři různé termíny užívané pro slovní úlohy v odborné literatuře a upozorňuje na rozdíly v jejich pojetí. Jsou to úlohy z reálného života, v originále „real life problems“, situované úlohy, „situated problems“, a autentické úlohy, „authentic word problems“. Následně je všechny zaštiťuje termínem *úlohy zasazené do kontextu* a pracuje s nimi společně (Beswick, 2011: s. 369).

Všechny tři výše zmíněné termíny, tedy úlohy z reálného života, situované úlohy a autentické úlohy, označují slovní úlohu zasazenou na škále s různým podílem matematických a nematematických informací. Úlohy z reálného života popisují „slovní úlohy, v nichž je matematická informace obsažena v jednoduché větě obsahující minimum nematematických informací“ (Beswick, 2011: s. 368–369). Vymezení situovaných úloh vychází z Jurdakova přístupu, který je zmíněn výše, a pro autentické úlohy používá stejné vymezení jako Kramarski, Mevarech a Arami, a to úlohy pro něž „neexistuje žádný vzorový postup řešení“ (Beswick, 2011: s. 369), a překrývá se tak s úlohami zasazenými do reálného kontextu v Jurdakově pojetí.

[3] Viz http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf [8.7.2018]

Dalším z možných pohledů na charakterizaci slovních úloh je rozdělení podle jejich podoby. Hejný uvádí, že většina slovních úloh, vyskytujících se na českých základních a středních školách, jsou úlohy číselné. Nečíselným úlohám bývá věnována pozornost pouze v malé míře a v učebnicích jsou používány spíše jako hádanky pro špičkové žáky.[4] Příkladem může být hádanka zaměřená na příbuzenské vztahy: „Jsem muž a nemám sourozence. Na stěně visí podobizna. Otec muže na obrazu je synem mého otce. Kdo je na obrazu?“ Úlohy používané v rámci tohoto výzkumu jsou však jen číselné, a proto bude věnována pozornost výlučně jim.

Blum a Niss rozdělují matematické úlohy na čistě matematické a aplikované (1991: s. 37). Dále uvádí, že čistě matematické úlohy mohou vyvstat při řešení aplikovaných úloh poté, co jsou tyto vytrženy z původního kontextu. Toto do jisté míry koresponduje s jiným rozdělením typů slovních úloh podle Hejného, v němž jsou úlohy děleny podle způsobu řešení, či lépe řečeno podle skutečnosti, zda řešitel zná postup řešení. V tomto pojetí mohou být úlohy implicitní, nebo explicitní. Explicitní úlohu Hejný definuje jako úlohu, „u které žák zná jasný postup, jak ji řešit“ (2014: s. 102). Ostatní úlohy pak nazývá implicitními. Jinými slovy Hejný považuje za explicitní úlohy i takové slovní úlohy, u nichž žák vidí postup řešení na první pohled, a tyto úlohy by v jeho pojetí neměly být nazývány slovními úlohami.

Jakmile tedy dojde k přechodu mezi aplikovanou a čistě matematickou úlohou, úloha se změní z implicitní na explicitní, a to za předpokladu, že řešitel má dostatečný matematický aparát potřebný pro řešení úlohy. Úlohy explicitní by tedy do jisté míry odpovídaly úlohám zasazeným do školního kontextu podle Jurdaka či úlohám reálným, podle Beswick.

Dále se lze setkat s klasifikací slovních úloh do skupin podle druhů matematických výpočtů, jenž jsou použity při jejich řešení. Vyjmenovat všechny kategorie slovních úloh z tohoto pohledu není možné, vzhledem k množství kategorií, které by mohly být vytvořeny, a k vzájemným překryvům mezi nimi. Proto bude uvedeno pouze několik příkladů takovýchto skupin slovních úloh. Jedná se například o úlohy aditivní, v nichž se vyskytuje situace, jíž lze popsat matematickým modelem $A+B=C$, nebo o úlohy multiplikativní, u kterých má matematické vyjádření vztahů mezi objekty podobu $A{\cdot}B=C$. Dalšími skupinami jsou například úlohy na společnou práci, úlohy

[4] Podle poznámek z přednášky M. Hejného.

o pohybu a úlohy na směsi, které jsou zmiňovány učiteli druhého stupně základních škol jako problematické (Rendl & Vondrová, 2013: s. 97).

2.1.3 *Význam slovních úloh*

Slovní úlohy tvoří nezanedbatelnou část výuky matematiky a jsou zakotveny i v *Rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání*, konkrétně v oddíle Matematika a její aplikace, kde jsou slovní úlohy zmiňovány ve všech tematických okruzích. Proč je však jejich zařazení do výuky vhodné? Beswick (2011) uvádí celkem pět hlavních důvodů, proč využívat slovní úlohy ve výuce.

1. Utilitární účel zahrnující naplňování ekonomických požadavků společnosti. Tento důvod vychází z předpokladu, že společnost potřebuje, aby její členové ovládali matematiku a byli schopni využívat ve škole získané matematické poznatky také v každodenním životě. Této problematice a tomu, jakým způsobem by mohlo napomoci zařazení slovních úloh do vyučování, se věnuje řada akademiků, například Boaler (1993), Evans (1999) a Jurdak (2006).

2. Používání matematiky za účelem prohloubení porozumění reálným problémům. Cooper a Harries (2002) poukazují na nedostatečnou realističnost slovních úloh používaných v rámci hodin matematiky, zkoumají jejich odlišnosti od problémů, které musí člověk umět řešit v běžném životě, a ilustrují, jak by se měly používané úlohy změnit.

3. Prohloubení porozumění matematickým konceptům. Toto je druhý z důvodů, které uvádí Cooper a Harries (2002) a o jehož platnosti se vyjadřují i další autoři, například Jurdak (2006) a Kramarski, Mevarech, a Arami (2002). Ti také zdůrazňují důležitost autentických úloh oproti pouhé aplikaci postupů řešení.

4. Navýšení míry docenění významu matematiky. Tento důvod předpokládá zadávání úloh, které se přibližují reálným problémům, jež běžně řeší lidé v profesích vyžadujících matematiku. Například Van den Heuvel-Panhuizen (2003) uvádí, že je nezbytné, aby si žáci byli schopni situace představit a považovali je za reálné.

5. Zlepšení vztahu žáků k matematice. Boaler uvádí, že žáci vnímají matematiku jako „monotónní, nesmyslnou, individualizovanou práci“ (Boaler, 1994, cit. v Beswick, 2011: s. 370). Právě v použití aplikovaných matematických úloh vidí Boaler přínos. „Takový přístup by mohl vést k náhledu na matematiku ne jako na izolovaný soubor znalostí, ale jako na flexibilní způsob, jakým se dá interpretovat realita“ (Boaler, 1994: s. 552).

Blum a Niss ve svém článku uvádí také pět důvodů pro zařazení slovních úloh do matematického kurikula, na základě jimi prostudovaných zdrojů. Tyto důvody se z velké části překrývají s přístupem Beswick. Navíc však poskytují dva další důvody, které považují za neméně důležité.

> (I) Uvážíme-li, že podstatné matematické vzdělání již není vyhrazeno pouze pro malou skupinu lidí, kteří se pohybují v matematicky zaměřených profesích, ale je nyní poskytováno […] stále se zvětšující části populace, pak se musí výuka matematiky ve všech vstupních vzdělávání věnovat roli a využití matematiky v běžném světě. (II) Porozumění matematice se nemůže již nadále rovnat znalosti určitých matematických skutečností. Na místo toho vyžaduje osvojení matematických procesů, v nichž zastává řešení problémů dominantní pozici. (Blum & Niss, 1991: s. 44)

Autoři tedy de facto parafrázují utilitární důvod pro zařazování slovních úloh do výuky a zdůrazňují vývoj společnosti a jeho vliv na očekávané výstupy matematického kurikula.

I přesto, že vhodnost využívání slovních úloh byla potvrzena značným množstvím výzkumů, existují i argumenty proti zařazování slovních úloh do výuky matematiky. Blum a Niss zmiňují, že je lze nahlížet třemi způsoby.

Prvním z nich jsou překážky týkající se výuky matematiky. Mnoho učitelů uvádí, že širšímu zařazení aplikovaných úloh do výuky matematiky brání nedostatek času, způsobený rozsahem ostatního matematického učiva, které je součástí osnov. Někteří učitelé dokonce pochybují, zda je jejich zařazení vůbec vhodné, neboť tyto úlohy vedou podle jejich názoru ke „zkreslení jasnosti, estetické čistoty, krásy a nezávislosti matematiky na kontextu (na nichž je, podle jejich názoru, význam matematiky založen)“ (Blum & Niss, 1991: s. 53–54).

Druhým typem jsou překážky na straně žáků. Úlohy, vyžadující aplikaci matematiky pro vyřešení reálných problémů zasazených do určitého kontextu, jsou pro žáky náročnější, a proto také méně oblíbené v porovnání s rutinními výpočty. Ty jsou pro žáky „podstatně jednodušší na pochopení a mohou být často vyřešeny pouhou aplikací naučených postupů, což umožňuje žákům získat lepší známky z testů a zkoušení“ (Blum & Niss, 1991: s. 54).

Posledním typem, který Blum a Niss uvádějí, jsou překážky z pohledu učitele. Využívání slovních úloh s reálným kontextem je totiž náročnější jak na přípravu, tak na hodnocení řešení žáků, a navíc vyžaduje dodatečné znalosti z jiných odvětví. Učitelé také často neznají dostatek příkladů aplikací probírané látky v ostatních odvětvích mimo matematiku (Blum & Niss, 1991: s. 54).

V neposlední řadě zmiňují Blum a Niss význam aplikovaných matematických úloh ve vztahu ke stále se zlepšujícím výpočetním technologiím. Tvrdí, že schopnost provádět rutinní výpočty manuálně ztrácí na důležitosti, a naopak schopnosti, jako jsou „vytváření modelů, experimentování, simulování, algoritmické myšlení nebo provádění výpočetního modelování“, se stávají čím dál důležitějšími (Blum & Niss, 1991: s. 58). Opět stojí za zmínku, že s těmito myšlenkami přicházejí již v roce 1991, kdy byly výpočetní schopnosti počítačů, a hlavně jejich dostupnost, nesrovnatelně menší než dnes. K tomuto tématu se vyjadřuje například i Conrad Wolfram, zakladatel výpočetního programu Wolfram Alpha, který umožňuje uživatelům získat výsledky poměrně složitých výpočtů, a to bez nutnosti znalosti postupů řešení. Conrad Wolfram poukazuje na nutnost změny výuky matematiky, která by se měla zaměřovat právě na řešení aplikovaných matematických úloh a interpretaci výsledků poskytnutých výpočetními programy, namísto výuky jednoduchých výpočetních algoritmů. Jeho postoje je možno nalézt na webové stránce computerbasemath.org. Využití počítačů ve výuce matematiky není předmětem této práce, proto mu nebude věnována další pozornost, jedná se však o další z argumentů pro změnu matematického kurikula a důvod, proč se ve výuce matematiky zaměřovat na slovní úlohy namísto tradičních výpočtů.

2.1.4 Fáze řešení slovních úloh

Pro lepší porozumění myšlenkovým procesům, které se odehrávají při řešení slovní úlohy, je na místě popsat obecnou strukturu slovní úlohy. Hejný uvádí, že slovní úloha sestává ze čtyř různých vrstev.

1. vrstva příběhu či situace se týká rámcových představ o úloze.
2. vrstva objektů se týká toho, co tvoří „podmět” textu úlohy.
3. vrstva vztahů se týká vazeb mezi objekty úlohy.

4. vrstva matematického modelu prezentuje přepis textu úlohy do formalizovaného jazyka. (Hejný, 2003: s. 23)

Vrstva příběhu je podle Hejného pro žáka při řešení slovní úlohy klíčová, aby byl schopen si úlohu představit. Na základě této vrstvy dojde k zasazení úlohy do kontextu, což ovlivňuje způsob řešení, viz kategorizace úlohy podle Jurdaka uvedená v oddíle 2.1.2, a také může mít vliv na úspěšnost řešení, viz níže v oddíle 2.2.

Vrstva objektů zahrnuje všechny osoby, věci, události a stavy, které se v úloze objevují. Tyto objekty se váží

> buď s číslem známým, daným textem úlohy, nebo neznámým, které má řešitel odhalit. Schopnost žáka identifikovat všechny objekty úlohy je základní předpoklad toho, že žák úloze porozumí.[5]

Zde se tedy jedná o veškeré informace poskytnuté v zadání úlohy, které jsou relevantní pro řešení.

Samotné údaje však pro zasazení do kontextu nejsou u většiny úloh dostatečné, je tedy potřeba je, hlavně u úloh složitějších, vzájemně provázat. Hejný uvádí, že vztahy mezi objekty „mohou z textu úlohy vyplývat přímo či nepřímo“, a nemusí tedy nutně obsahovat číslo (Hejný, 2003: s. 24).

Poslední z vrstev, tedy vrstva matematického modelu, popisuje situaci pomocí matematických vztahů a převádí ji na úlohu čistě matematickou, podle terminologie Bluma a Nisse. Hejný zmiňuje různé typy matematických modelů, nejčastěji podle něj bývá používáno modelování pomocí neznámé, které však nemusí být pro všechny úlohy nejvhodnější. Jako další modely zmiňuje například vizualizaci pomocí obrázku, či diagramu (Hejný, 2003), ale zajisté by mohl být využit i model grafu nebo vyjádření pomocí tabulky.

Při řešení slovní úlohy je nutné pracovat se všemi jejími vrstvami a při běžném postupu řešení dochází k využití vrstvy matematického modelu úlohy pro získání matematického řešení, které je následně převedeno zpět do první vrstvy, tedy vrstvy příběhu, v níž je poskytnuto finální řešení úlohy. Toto vícefázové řešení je u složitějších

---

[5] Podle poznámek z přednášky M. Hejného

úloh nezbytné, a tedy „řešení slovní úlohy nespočívá v pouhém převedení vět na rovnice“ (Paige & Simon, 1966, cit. v Daroczy, Wolska, Meurers & Nuerk, 2015: s. 4).

Blum a Niss popisují jednotlivé fáze řešení slovních úloh následovně. Na začátku stojí řešitel před problémem zasazeným v reálném kontextu. Tuto situaci musí zjednodušit, strukturovat a podrobit odpovídajícím podmínkám a předpokladům. To vede k reálnému modelu původní situace, který stále obsahuje veškeré podstatné údaje, ale již je schematizovaný způsobem, který, za předpokladu řešitelnosti úlohy, může být dále řešen pomocí matematických nástrojů. Tento model musí být dále matematizován, jinými slovy údaje a vztahy mezi nimi musí být převedeny do jazyka matematiky, čímž vzniká matematický model původní situace. Řešitelský proces dále pokračuje v rámci matematického jazyka, až dojde k získání matematických výsledků. Tyto výsledky jsou nakonec interpretovány v rámci původního kontextu úlohy. Pokud tyto výsledky nevedou k žádanému řešení, je nutno celý proces opakovat (Blum & Niss, 1991: s. 38–40).

Jimenez a Verschaffel ve své práci shrnují obecné přístupy k řešení slovních úloh velmi podobně, a to jako „proces matematického modelování obsahujícího více fází“ (2014: s. 94). První, z celkem šesti fází, je utvoření vnitřního modelu situace, vycházející z porozumění jednotlivým elementům úlohy a jejich vztahům. Ve druhé fázi dochází k transformaci tohoto modelu na model matematický, tentokrát obsahující pouze údaje podstatné pro řešení úlohy a vztahy mezi nimi. Ve třetí fázi řešitel pracuje s matematickým modelem a snaží se získat matematické výsledky. V rámci čtvrté fáze jsou tyto výsledky interpretovány. V páté fázi je zhodnocena správnost výpočtu vedoucího k matematickým výsledkům a ověřena relevance výsledků. V poslední fázi je vyjádřeno získané řešení úlohy (Jimenez & Verschaffel, 2014: s. 94). Oproti svým starším pracím tak Verschaffel přidal navíc šestou fázi, kterou v roce 1985 ještě neuváděl (de Corte, Verschaffel & de Win, 1985). Z tohoto procesu řešení slovních úloh vycházejí i další autoři, například Daroczy et al. (2015).

Obecně se dá říci, že až na drobné odchylky se autoři shodují na výše uvedených šesti fázích řešení slovních úloh. Problematická je však stránka terminologie. Například Kintsch je kritizován za vynechání první fáze řešení a za nejasné vymezení termínu situačního modelu, v originále „situation model“, a textového základu, „text base“ (Nesher, Hershkovitz & Novotná, 2003: s. 153–154 a 169–170)

Tento postup při řešení slovních úloh je však nezbytné uplatňovat i při výuce matematiky a naučit žáky, aby takto ke slovním úlohám přistupovali a nesnažili se pouze o přímé převedení úlohy do tvaru rovnice. Kramarski et al. (2002) uvádí čtyři sady otázek, na které by se žáci měli sami sebe ptát v průběhu řešení úlohy. Zaprvé „O čem úloha je?“, tato otázka je zaměřená na porozumění úloze. Zadruhé „V čem je úloha podobná, či rozdílná, od ostatních úloh, které jsem kdy řešil, a proč?“, cílem této otázky je propojení starých a nových znalostí. Třetí otázka zní „Jaké jsou vhodné strategie, či postupy pro řešení této úlohy a proč?“. A poslední dvojice otázek je zaměřena na vyhodnocení řešení úlohy, „Udělal jsem něco špatně?“; „Dává toto řešení smysl?“ (Kramarski, Mevarech & Arami, 2002: s. 228). Takto pokládané otázky provádějí žáky jednotlivými fázemi řešení slovní úlohy, s výjimkou fáze práce s matematickým modelem, která je však implicitně obsažena ve třetí otázce, a poslední fáze řešení, tedy fáze, ve které jsou prezentovány výsledky.

2.1.5 Metody řešení slovních úloh

Úspěšné řešení slovní úlohy víceméně kopíruje fáze řešení zmíněné v předchozí kapitole. Vzhledem ke komplexnosti tohoto postupu dochází k problémům, hlavně v rámci přechodů mezi jednotlivými fázemi. V této kapitole budou zmíněny metody či strategie, zjednodušující některé z fází řešení. Důraz bude kladen na úlohy implicitní, tedy úlohy, u kterých žák nezná přímý algoritmus vedoucí k jejich řešení.

Nejprve je však třeba krátce se vyjádřit k řešitelnosti slovních úloh. Daroczy et al. uvádí, že se žáci většinou nezabývají řešitelností úlohy a automaticky ji považují za řešitelnou (2015: s. 3). Za tento problém jsou podle Papea zodpovědné učebnice, které „implicitně předpokládají, že každá slovní úloha je řešitelná a každá číselná informace je relevantní“ (Pape, 2003, cit. v Daroczy et al., 2015: s. 3). Díky tomuto předpokladu se žáci dopouštějí závažných chyb v úlohách, které Jimenez a Verschaffel označují jako „nestandardní“ (2014). Jednou z úloh, jež v tomto kontextu zmiňují, je úloha, kterou položila žákům prvních až čtvrtých tříd Baruk. „Na lodi je 26 ovcí a 10 koz. Kolik let je kapitánovi lodi?“ (Baruk, 1985, cit. v Jimenez & Verschaffel, 2014: s. 97). Vysoká úroveň neúspěšnosti v podobných úlohách poukazuje na problémy v první fázi řešení slovní úlohy, tedy vytvoření modelu postihujícího všechny důležité údaje a vztahy mezi nimi.

Pro překonání problémů v této fázi řešení je možné využít například metodu dramatizace. Jak je již patrné z názvu, tato metoda je založena na dramatickém ztvárnění úlohy v jejím původním či lehce pozměněném kontextu. Jednoduše by se tato metoda dala použít například pro řešení úloh typu „Ve třídě je *n* žáků. Urči, v kolika dvojicích půjdou na výletě za sebou.“ Pokud je ve třídě *n* či více žáků, mohou tuto situaci snadno ztvárnit a dvojice následně spočítat. Dramatizovat se dají i úlohy, ve kterých nelze přesně replikovat zadání, Hejný například zmiňuje využití této metody u slovních úloh o věku. Při těch někteří z žáků hrají účastníky slovní úlohy a jejich věk je vyjádřen pomocí krokovacího pásu. Posléze je možno přejít na metodu simulované dramatizace, kterou už může používat žák samostatně a účastníky situace nahrazují rekvizity (Hejný, 2014). Tyto metody jsou zvláště vhodné pro vizualizaci dynamických slovních úloh, protože umožňují znázornění procesuální stránky úlohy. Nevýhodou těchto metod je jejich obtížný zápis, pokud nejsou zkombinovány s následujícími metodami, a nezbytnost opakování celého procesu v případě, že žák udělá při řešení chybu.

Logickým pokračováním simulované dramatizace je metoda vizualizace. Zde už nastává přechod z procesuálního pojetí úlohy do konceptuálního. Tento přechod lze ilustrovat na příkladu řešení slovní úlohy o čase, jak zmiňuje Hejný. Žák řeší úlohu „Sestry Klára a Lenka mají společně 19 let. Klára měla 3 roky, když se Lenka narodila. Kolik je dnes Kláře a kolik Lence?“ pomocí obrázku, ve kterém čárky znázorňují roky. Nejprve si ke jménu Kláry udělá 3 čárky a poté začne přidávat ke jménům obou dívek po jedné čárce a pokaždé spočítá jejich celkový počet. V tomto postupu pokračuje, dokud nemá celkem 19 čárek, a z výsledného obrázku odečte výsledek „Lenka 8, Klára 11“.[6] Tímto způsobem žák zaznamenává průběh procesu vycházejícího ze situace a vytváří její koncept. Z finálního obrázku lze odečíst věk dívek i pro jiný součet jejich věků, než je zadaný.

Pokud by místo obrázku byla využita jako model tabulka, ve které by byly uvedeny věky obou dívek rok za rokem a součet jejich věků, jednalo by se o metodu tabulace a řešení výše uvedené úlohy by vypadalo takto.

[6] Podle poznámek z přednášky M. Hejného.

Tabulka 1 – Úloha o věku řešená použitím metody tabulace

Klára	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Lenka	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Celkem	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Metoda tabulace je účinným nástrojem při řešení složitějších úloh. Její využití v rámci metody simplifikace napomáhá poznání podle Hejného teorie generických modelů (Hejný, 2014) tím, že přehledně organizuje izolované modely a umožňuje odhalit závislosti, které nejsou na první pohled patrné, a poskytuje tak žákovi možnost hlubšího porozumění úloze.

Výše zmíněná metoda simplifikace vychází z přístupu opačného ke gradaci. Tedy pokud je úloha příliš obtížná, vyjde se z úloh, které jsou typově podobné, ale nejsou tak komplexní. Jako příklad může posloužit následující úloha: „Honzík si dal novoroční předsevzetí, že si bude šetřit peníze. Rozhodl se, že si 1. ledna do kasičky uloží 1 korunu a každý další den si uloží o korunu více. Kolik peněz měl Honzík našetřeno po 100 dnech?“ Řešením této úlohy je součet aritmetické posloupnosti přirozených čísel od 1 do 100. Bez znalosti vzorce či postupu pro výpočet součtu n členů posloupnosti je úloha velice obtížná. Pro její zjednodušení lze účinně využít metodu simplifikace, začít od úloh jednodušších a jejich výsledky přehledně zapisovat například pomocí metody tabulace, aby z nich bylo následně patrné řešení původní úlohy.

Tabulka 2 – Řešení úlohy na součet aritmetické posloupnosti pomocí kombinace metod simplifikace a tabulace

Den	1	2	3	4	5	6	7	10	100
Ušetřeno	1	3	6	10	15	21	28	55	5050

V tabulce 2 je již možné objevit závislost mezi počtem dnů a našetřeným množstvím peněz. V prvním sloupci se z počtu dní přejde na ušetřené peníze vynásobením jedničkou. Ve druhém sloupci vynásobením jednou celou a pěti desetinami, ve třetím sloupci vynásobením dvěma a tak dále. Po tomto objevu už zbývá jen kousek k vyřešení celé úlohy a stačí si uvědomit, že tato nová posloupnost činitelů začíná na jedničce a navýší se devadesát devětkrát o pět desetin, než bude dosažena stovka. Řešení původní úlohy je tedy možno vypočítat jako $100 \cdot (1 + 99 \cdot 0{,}5) = 5\,050$.

V neposlední řadě je potřeba zmínit metodu pokus omyl. Její pozice v kontextu školní matematiky je poněkud rozporuplná, protože ji někteří učitelé odsuzují a neuznávají řešení získaná její pomocí. Hejný například uvádí následující názor jedné učitelky.

> Hádání a zkoušení není matematika, ale alchymie. Když neznám metodu, tak holt musím hádat. A metodu neznám, protože jsem nedával pozor a neučil jsem se. Achillova pata takového hádání je veliká omezenost použití. Když jsou čísla v úloze malá, tak má žák naději výsledek uhodnout. Když mu dám ale čísla velká, je v koncích. Proto, když můj žák vyřeší úlohu hádáním, dostává nula bodů.[7]

Přitom, jak uvádí Hejný, se jedná o metodu, která je automaticky použita při řešení implicitních úloh. Jak již název metody napovídá, pro řešení úlohy není využit převod na matematický model, ze kterého by následně vzešel výsledek, ale řešitel výsledek úlohy odhadne a následně ověří jeho platnost. Výhodou této metody je, že nevyžaduje znalost postupu řešení úlohy a dají se s její pomocí vyřešit i úlohy, na které nemá člověk dostatečný matematický aparát. Její nevýhodou je nízká úspěšnost, pokud není kombinována s jinou metodou a nepřistupuje se k ní systematicky. Šance, že správné řešení bude dosaženo na první pokus, je u této metody velmi malá a skutečnost, zda řešitel nakonec dojde ke správnému řešení, je do velké míry závislá na množství informací, které si odnese z neúspěšných pokusů. Jako ilustrace může sloužit řešení následující úlohy metodou pokus omyl.

„Petr vyrazil na návštěvu k babičce v 10 hodin. Tam i zpátky jel autobusem, u babičky strávil 2 hodiny a domů přijel v 17 hodin. Jak dlouho jede autobus od Petra k babičce, když víš, že cesta trvá stejně dlouho oběma směry?“ Zvolené odhady výsledků jsou opět pro přehlednost uvedeny v tabulce 3.

[7] Podle poznámek z přednášky M. Hejného.

Tabulka 3 – Řešení úlohy pomocí metody pokus omyl a tabulace

Délka cesty	1 hodina	2 hodiny	3 hodiny	2,5 hodiny
Odjezd z domova	10:00	10:00	10:00	10:00
Příjezd k babičce	11:00	12:00	13:00	12:30
Odjezd od babičky	13:00	14:00	15:00	14:30
Příjezd domů	14:00	16:00	18:00	17:00

První délka cesty autobusem je náhodně zvolena jako jedna hodina. Po sečtení veškerých časů řešitel zjistí, že Petr přijel domů dříve, než měl. Následuje tedy prodloužení délky cesty na dvě hodiny, které však opět vede k dřívějšímu příjezdu domů, než je uvedeno v zadání. Znovu se prodlouží délka cesty, tentokrát na tři hodiny a řešitel zjišťuje, že v tomto případě by Petr přijel domů pozdě. Hledaná délka cesty je tedy někde mezi dvěma a třemi hodinami, řešitel zkouší dvě a půl hodiny a dostává se ke správnému výsledku.

Díky průběžné evaluaci výsledků v uvedeném případě bylo možno postupně dospět ke správnému řešení úlohy i bez převedení na matematický model, kterým by v tomto případě byla lineární rovnice $2x+2=7$. Nejednalo se však o úplně náhodnou volbu délky cesty, ale o postupné zpřesňování a přibližování se výsledku. Tento postup nazveme metodou postupné aproximace, protože koresponduje s obdobnou metodou používající se při numerických řešeních rovnic vyšších řádů.

2.2 Parametry obtížnosti slovních úloh

Zřejmým parametrem ovlivňujícím obtížnost slovní úlohy je náročnost řešení matematického modelu zadané situace. Úloha vedoucí na použití lineární rovnice o jedné neznámé bude jednodušší než úloha vyžadující řešení soustav více rovnic o více neznámých. Tato kapitola se bude věnovat parametrům, které mohou ovlivňovat úspěšnost řešení slovních úloh, aniž by ztížily práci v rámci matematického modelu. Jejich vliv tedy bude spočívat ve změně obtížnosti přechodu mezi modelem situace, uvedené v zadání úlohy, a matematickým modelem, ve kterém je úloha řešena.

V literatuře se lze setkat s řadou takových parametrů. Příkladem mohou být: větná struktura/srozumitelnost textu, obeznámenost s kontextem, délka textu a přítomnost ilustrace v zadání, které používá Leiss et al. pro určení obtížnosti slovních úloh, za účelem jejich vzájemného porovnávání (Leiss, Schukajlow, Blum, Messner & Pekrun, 2010: s. 131).

V rámci výzkumu GAČR, z něhož jsou použita data v rámci praktické části této práce, byla vymezena řada parametrů obtížnosti slovních úloh (Novotná & Vondrová, 2017). V rámci několika kol testování byly některé parametry blíže prozkoumány a v době psaní diplomové práce se zpracovávaly výsledky. Pro ilustraci bude uvedeno sedm parametrů, které byly použity v prvním testování. Budou ilustrovány úlohami, které byly v testování v rámci GAČR použity.

2.2.1 Vyjádření matematických údajů

Tento parametr rozlišuje mezi dvěma možnostmi, jak mohou být matematické údaje zprostředkovány v zadání slovní úlohy, tedy číselně, či slovně. Příkladem úloh lišících se pouze o tento parametr může být následující dvojice.

V obchodě s ovocem a zeleninou mají ve výloze napsáno: „Tři kg pomerančů za cenu šesti kg jablek“. Majitel blízké restaurace zde pravidelně nakupuje a při poslední návštěvě koupil 13 kg pomerančů a 17 kg jablek celkem za 731 korun. Kolik korun majitel zaplatí příště, jestliže bude kupovat 11 kg pomerančů a 20 kg jablek?

V obchodě s ovocem a zeleninou mají ve výloze napsáno: „3 kg pomerančů za cenu 6 kg jablek“. Majitel blízké restaurace zde pravidelně nakupuje a při poslední návštěvě koupil 13 kg pomerančů a 17 kg jablek celkem za 731 korun. Kolik korun majitel zaplatí příště, jestliže bude kupovat 11 kg pomerančů a 20 kg jablek?[8]

V rámci studií zkoumajících pohyby očí žáků při řešení slovních úloh vyšlo najevo, že se zaměřují především na číselné údaje obsažené v zadání (Pape & Wang, 2003: s. 5) z tohoto důvodu lze očekávat snížení úspěšnosti u úloh, ve kterých jsou matematické údaje nezbytné pro řešení vyjádřeny slovně. Pro ilustraci míry, do jaké žáci spoléhají na číselné údaje v zadání úlohy, je možno připomenout výše zmiňovanou úlohu o věku kapitána lodi. Při ní žáci vycházeli z údajů bez jakékoliv souvislosti s položenou otázkou jen proto, že se jednalo o jediné matematické údaje přítomné v zadání.

[8] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 9. ročníku.

2.2.2 Návodnost triády

Tento parametr je založen na skutečnosti, že pokud je žákovi prezentována dvojice čísel, mezi kterou je na první pohled patrný vztah, vytane mu na mysli třetí číslo, které tento vztah doplňuje, nezávisle na jeho relevanci pro danou úlohu. Příkladem jsou čísla 6 a 120 v druhé úloze uvedené níže, jež evokují číslo 20, získané ze vztahu $6 \cdot 20 = 120$. V tomto případě se samozřejmě nejedná o správný výsledek, je však možno předpokládat, že se tento výsledek v žákovských řešeních objeví.

Sestřenice Hana nakupuje sešity v internetovém obchodě, kde právě dnes stojí všechny červené linkované sešity stejně. Má 150 Kč a ty jí stačí přesně na 6 sešitů. Kolik sešitů by nejvíce mohla koupit, kdyby měla 220 Kč?

Sestřenice Hana nakupuje sešity v internetovém obchodě, kde právě dnes stojí všechny červené linkované sešity stejně. Má 150 Kč a ty jí stačí přesně na 6 sešitů. Kolik sešitů by nejvíce mohla koupit, kdyby měla 120 Kč?[9]

K tomuto fenoménu se vyjadřují například Mattarella-Micke a Beilock, kteří uvádějí že:

> Podle DOA (distribution of association) modelu, když je člověku zadána početní úloha (například $4 \cdot 5 = x$), současně se aktivuje výsledek správný ($4 \cdot 5 = 20$) i ty nesprávné (například $4 \cdot 5 = 21$). To, k jakému výsledku se člověk v první chvíli přikloní, závisí na síle asociace příkladu se správným výsledkem, v porovnání s výsledkem nesprávným. Proto pokud je nesprávný výsledek dostupnější, dochází k interferenci se správným výsledkem. (Mattarella-Micke & Beilock, 2010: s. 106)

Odvolávají se zde na výzkum Winkelmana a Schmidta, kteří zjistili, že při ověřování správnosti výpočtu dojde k prodloužení času nezbytného pro rozhodnutí a ke zvýšení chybovosti, pokud je jako výsledek součinu dvou čísel uveden jejich součet, v porovnání

[9] Úlohy byly použity v 1. hlavním testování výzkumu GAČR pro žáky 5. ročníku.

s ostatními chybnými výsledky (například u dvojice úloh $4 \cdot 5 = 9$ a $4 \cdot 5 = 8$) (Winkelman & Schmidt, 1974, cit. v Mattarella-Micke & Beilock, 2010: s. 107).

2.2.3 Návodnost funkčních vazeb

Tento parametr je založen na sémantických vztazích mezi objekty vystupujícími v zadání slovní úlohy. Tyto vztahy slouží jako nápověda, podle které je možno poznat, jaké matematické vztahy je potřeba využít při řešení úlohy, podobně jako signální slova. Je však nutno zmínit, že pojetí těchto vztahů je do značné míry individuální (Boaler, 1993: s. 29). Tyto funkční vazby jsou velice často využívány ve slovních úlohách vystupujících v učebnicích matematiky, které prostudovali Martin a Bassok.

> V 97 % úloh vyžadujících sčítání patřily sčítance do stejné kategorie předmětů (například červené a modré kuličky), a v 94 % úloh vyžadujících dělení byly dělence a dělitele ve vzájemném funkčním vztahu (například sušenky a sklenice) (Martin & Bassok, 2005: s. 472).

Tím, že se žáci v zadání úloh setkávají téměř výlučně s takto nastavenými vztahy mezi objekty, využívají je i při odhadování řešení nových úloh, u kterých neznají algoritmus řešení. V případě úlohy: „*n* počítačů bylo přiděleno *m* sekretářkám“ se mezi chybnými řešeními objevovaly matematické vztahy vyjadřující asymetrické role. Avšak u úlohy: „*n* doktorů z jedné nemocnice bylo přiřazeno k *m* doktorům z jiné nemocnice“ vyjadřovaly matematické vztahy symetrické role mezi neznámými (Bassok & Olseth, 1995: s. 359). „Nesprávná řešení úlohy na permutaci byla strukturována obdobně k sémantickým vztahům evokovaným mezi objekty“ (Martin & Bassok, 2005: s. 472).

Rozdíl mezi úlohami lišícími se pouze o tento parametr může být ilustrován například na následujících úlohách:

Ve skladu nábytku, kde jsou uskladněny židle a stoly, momentálně připadá na 10 stolů 30 židlí. Kolik je ve skladu stolů, když židlí je 360?

Ve skladu nábytku, kde jsou uskladněny židle a stoly, momentálně připadá na 30 stolů 10 židlí. Kolik je ve skladu stolů, když židlí je 360?[10]

[10] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 6. ročníku.

Dá se očekávat vyšší úspěšnost u první úlohy, která kopíruje představu, že k jednomu stolu patří více židlí a ne naopak. K obdobnému zjištění došel Taylor při porovnání odpovědí žáka na dvě úlohy týkající se zlomků. Když bylo jeho úkolem rozdělit mezi šest lidí dort, nebyl zde žádný problém a automaticky uváděl jako výsledek správný zlomek. Avšak pokud měl rozdělit bochník chleba mezi pět lidí, přistupoval k úloze odlišně. Konkrétně rozdělil bochník nejprve na deset krajíců a každému člověku pak dal dva krajíce (Taylor, 1989, cit. v Boaler, 1993: s. 2). Na tomto příkladu je jasně patrné, do jaké míry ovlivňuje přístup žáka k úloze jeho předchozí zkušenost.

2.2.4 Přítomnost nepravé implikace

V tomto případě se jedná o lingvistický parametr. Jeho podstatou je způsob používání implikace v otázkách u slovních úloh, v nichž se vlastně nejedná o implikaci v pravém slova smyslu (jestliže platí A, potom platí B). Dochází tak k rozporu mezi jazykem používaným v kontextu slovních úloh a běžnou češtinou, což může působit žákům problémy. Následující dvojice úloh se liší právě přítomností nepravé implikace.

Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku v Děčíně. Dostali odměnu 8 800 Kč, o kterou se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Jak si peníze rozdělili, jestliže Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil?

Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Vydělali si celkem 8 800 Kč. o odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Jak si peníze rozdělili?[11]

Tento parametr však není jediným případem, ve kterém se jazyk používaný při zadávání slovních úloh sémanticky odlišuje od způsobu, jakým je běžně používán. Další odlišnost je možno nalézt i ve významu jednoduché věty „Petr má 3 jablka". v kontextu slovní úlohy je tato informace interpretována jako „Petr má právě 3 jablka", zatímco

[11] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 9. ročníku.

v běžném jazyce tato věta může vyjadřovat i význam „Petr má alespoň 3 jablka“. S touto významovou nekonzistentností nemají zkušení řešitelé úloh problémy, avšak může působit potíže méně zdatným žákům (de Corte, Verschaffel & de Win, 1985: s. 463).

2.2.5 Délka textu

Protože řešení slovních úloh je úzce propojeno s porozuměním textu (Artelt & Schlagmüller, 2004, cit. v Leiss et al., 2010: s. 125), bez něhož není možné převést rovinu příběhu úlohy na matematický model, dá se předpokládat snížení úspěšnosti při řešení úloh těžších na porozumění. Jednou z možností, jak úlohu z tohoto hlediska ztížit, je přidat další informace, které prodlouží délku zadání úlohy, aniž by napomohly žákovi při jejím řešení (Kingsdorf & Krawec, 2014: s. 72; Jerman, 1973: s. 109). Pro ilustraci tohoto parametru slouží následující dvojice úloh:

V obchodě s ovocem a zeleninou mají ve výloze napsáno: „3 kg pomerančů za cenu 6 kg jablek“. Majitel blízké restaurace zde pravidelně nakupuje a při poslední návštěvě koupil 13 kg pomerančů a 17 kg jablek celkem za 731 korun. Kolik korun majitel zaplatí příště, jestliže bude kupovat 11 kg pomerančů a 20 kg jablek?

Dnes už je všeobecně známo, že ovoce a zelenina dodávají lidskému tělu mnoho prospěšných živin. Proto poptávka po tomto sortimentu stále stoupá. V obchodě s výběrovým ovocem a čerstvou zeleninou na Národní třídě mají ve výloze napsáno: „Přímý dovoz tropického ovoce z Řecka! 3 kg pomerančů za cenu 6 kg jablek od českého farmáře!“. Majitel blízké restaurace u Bílého koníčka, která je vyhlášená výbornými ovocnými saláty, zde pravidelně nakupuje a při poslední návštěvě koupil 13 kg pomerančů a 17 kg jablek celkem za 731 korun. Kolik korun majitel zaplatí příště, jestliže bude kupovat 11 kg pomerančů a 20 kg jablek?[12]

V druhé úloze došlo k prodloužení zadání poskytnutím dodatečných informací, které se sice vztahují ke kontextu úlohy, avšak nejsou nijak využity při jejím řešení.

Očekává se, že tato úloha bude pro žáky složitější, avšak existují i studie, při kterých dosahovali žáci v případě prodloužených úloh vyšší úspěšnosti (Mellone,

[12] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 9. ročníku.

Verschaffel & Van Dooren, 2017: s. 4). To může být způsobeno poskytnutím dodatečných informací, které napomohou vytvoření přesnějšího situačního modelu úlohy. Důležitý je také způsob, jakým jsou nadbytečné informace propojeny s původním textem úlohy. V případě, kdy byly nadbytečné informace uvedeny pohromadě na začátku či na konci úlohy, se v rámci pilotního testování vyskytlo žákovské řešení oddělující je od zbytku zadání a označující je za zbytečné. Vliv tohoto parametru je také v současnosti v rámci projektu GAČR teprve vyhodnocován.

2.2.6 Roviny sdělení

Důvodem pro zařazení tohoto parametru byla 25% úspěšnost českých žáků u následující úlohy, která se objevila v testování TIMSS 2007 v osmém ročníku (Novotná & Vondrová, 2017: s. 1143).

Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Pepův kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky?

K této úloze byla vytvořena úloha, lišící se pouze v parametru roviny sdělení, která zní následovně:

Plnicí pero stojí v internetovém obchodě o 1 zed více než obyčejná tužka. Za 17 zedů je možné koupit 2 plnicí pera a 3 obyčejné tužky. Kolik zedů stojí 1 plnicí pero a 2 obyčejné tužky?[13]

Zahrnutí nadbytečné roviny sdělení v první úloze může sloužit pro zdůraznění určité informace v zadání úlohy. V tomto konkrétním případě se pravděpodobně jedná o existenci Pepy a jeho kamaráda, čímž může dojít ke snížení pozornosti věnované údajům relevantním pro řešení úlohy. Mattarella-Micke a Beilock (2010) předpokládají, že takovéto zvýrazňování určitých informací může ovlivnit úspěšnost řešení negativně, pokud se netýká podstatných údajů.

2.2.7 Pořadí informací

Posledním ze sledovaných parametrů je pořadí, v jakém jsou v zadání úlohy uvedeny údaje relevantní pro její řešení. Toto pořadí může ovlivňovat způsob sestavení

[13] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 7. ročníku.

matematického modelu, což může vést k chybě, například v případě, že se v zadání úlohy vyskytuje antisignál (slovo, či fráze, se kterým se běžně pojí určitá operace, ale v této konkrétní úloze značí operaci opačnou, Hejný, 2014). „Děti mohou přeložit anglickou větu do matematického vyjádření jednoduše zleva doprava. ‚O 3 méně než číslo' je pak mnoha žáky interpretováno jako ‚$3-x$', protože ‚o 3 méně' (což značí odčítání, podle toho, co se učili) následuje za 3" (Capraro & Joffrion, 2006: s. 153). Tento problém spočívá ve způsobu, jakým žáci využívají signální slova.

> I přesto, že hledání signálních slov může být užitečným heuristickým způsobem řešení, může také podporovat přílišnou závislost na přímých, spíše než analytických, způsobech převodu slovních úloh do rovnic (Wagner & Parker, 1993: s. 128, cit. v Capraro & Joffrion, 2006: s. 153).

Pořadí matematických údajů také ovlivňuje způsob výpočtu z hlediska volby čísla, od kterého žák začíná počítat (Wilkins, Baroody & Tiilikainen, 2001; Daroczy et al., 2015), i když pořadí může být zanedbáno ve prospěch snadnějšího výpočtu. Lze však předpokládat, že v úlohách, ve kterých postup výpočtu kopíruje pořadí informací v zadání, se budou žáci dopouštět menšího množství chyb.

Příkladem dvojice úloh, lišících se pouze v pořadí informací, může být následující dvojice:

Kroužky gymnastiky, košíkové a plavání se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Celkem je do všech tří kroužků zapsáno 380 dětí. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

380 dětí je zapsáno do tří kroužků: gymnastiky, košíkové a plavání. Všechny tyto kroužky se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?[14]

[14] Úlohy byly použity v rámci 1. hlavního testování výzkumu GAČR pro žáky 9. ročníku.

Poněkud odlišným pojetím tohoto parametru, které však nebylo v rámci testování GAČR použito, je změna pozice, na které je v zadání uvedena otázka. Tradičně je ve slovních úlohách uváděna na posledním místě, aby již žák znal veškeré informace obsažené v zadání a mohl otázku případně zodpovědět ihned po jejím přečtení. Otázka samotná se dá ze zjevných důvodů také pokládat za nezbytný matematický údaj, a jako s takovým je tedy možné experimentovat s její pozicí. Studie provedená s žáky čtvrtých tříd ve Francii dokonce uvádí zvýšení úspěšnosti řešení, pokud je otázka položena na úplném začátku zadání slovní úlohy, a to hlavně u žáků s nižší úrovní matematických dovedností (Thevenot, Devidal, Barrouillet & Fayol, 2007). Tuto skutečnost odůvodňují tím, že žák dopředu ví co má v úloze řešit, a je tedy schopen lépe vybírat relevantní informace a řešit úlohu již při jejím prvním čtení.

Právě parametr pořadí informací bude zkoumán v praktické části práce.

3 Metodologie

Jak bylo naznačeno, práce se zabývá následující výzkumnou otázkou: Jak ovlivňuje parametr pořadí informací úspěšnost žáků 9. ročníku v řešení slovních úloh?

3.1 Vzorek

Sběr dat pro tuto práci se uskutečnil v rámci výzkumu GAČR 16–6134S. Výzkumu se účastní žáci od třetích do devátých tříd čtyř pražských základních škol. Tato práce se však věnuje pouze třídám devátým, ze kterých se zapojilo celkem 182 žáků. Školy, jejichž žáci se účastní výzkumu, byly vybrány na základě údajů České školní inspekce. Podmínkou bylo, aby se jednalo o základní školu bez specializace, navštěvovanou žáky z blízkého okolí, pocházejícími z různorodého socio-ekonomického prostředí. Dalším z požadavků bylo, aby počet cizinců navštěvujících tyto školy nepřesahoval celorepublikový průměr.

V první fázi výzkumu prošli všichni účastníci vstupním testováním, které zjišťovalo úroveň jejich matematické a čtenářské gramotnosti. Tyto výsledky sloužily pro rozdělení žáků do vyrovnaných skupin, kterým byly v následujících testováních zadávány verze úloh lišící se o daný parametr. Výsledky těchto skupin by tedy měly být srovnatelné a případné rozdíly v metodách řešení a v úspěšnosti by měly převážně vycházet z rozdílů mezi variantami úloh samotných. Následovalo pilotní testování úloh, které měly být použity v prvním hlavním testování. Pilotního testování se účastnili žáci ze škol, jež se nepodílely na hlavním testování, a jeho účelem bylo poskytnout zpětnou vazbu ohledně obtížnosti úloh. Cílem bylo eliminovat úlohy pro hlavní testování, které by byly pro daný ročník příliš snadné, či obtížné, což by značně snižovalo jejich výpovědní hodnotu.

Řešení, podrobená analýze v rámci této práce, pochází z prvního hlavního testování výše zmiňovaného výzkumu. Počty žáků řešících konkrétní verze zkoumaných úloh jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4 – Počet žáků řešících jednotlivé verze zkoumaných úloh

Úloha	9A1	9A2	9A3	9A4	9C1	9C2	9C3	9C4
Počet žáků	46	46	45	45	45	46	46	45

Autor se podílel na korekturách testů i na jejich zadávání a vyhodnocení řešitelských strategií. Po vyhodnocení úloh prvního hlavního testování proběhly ještě dodatečné rozhovory s celkem čtyřmi žáky devátých tříd, kteří se neúčastní výzkumu.

Tyto rozhovory měly za cíl osvětlit některé z aspektů řešení úloh zkoumaných v této práci. Žáci byli vybráni na základě doporučení jejich učitele matematiky tak, aby se jednalo o žáky s různou úrovní matematických schopností. Z celkového počtu deseti vybraných žáků nakonec s rozhovory souhlasili pouze čtyři z nich.

3.2 Popis úloh

Úlohy, použité v praktické části této práce, vznikly v rámci výše zmiňovaného výzkumu GAČR a byly použity v rámci prvního hlavního testování.

V první fázi výzkumu se vycházelo ze slovních úloh z mezinárodních výzkumů TIMSS a PISA, ve kterých dosahovali čeští žáci špatných výsledků (Novotná & Vondrová, 2017: s. 1139). Tyto úlohy byly analyzovány z lingvistického, matematického a psychologického hlediska. Takto vznikl seznam parametrů, které by potenciálně mohly mít vliv na úspěšnost řešení slovní úlohy. Tyto parametry byly následně ověřeny na dalších slovních úlohách z výše zmíněných výzkumů a z učebnic matematiky. Na základě debaty mezi všemi výzkumníky vznikl seznam čítající celkem 71 parametrů, z toho 44 z nich bylo zaměřením lingvistických a 14 matematických. Nakonec bylo vybráno pro první testování 7 z těchto parametrů, a to *Vyjádření matematických údajů číselně, či slovně*; *Návodnost triády čísel*; *Návodnost funkčních vazeb*; *Pořadí informací*; *Přítomnost nepravé implikace*; *Délka textu*; *Roviny sdělení*. Pro každý z nich byly vytvořeny dvojice úloh, lišící se pouze daným parametrem (Novotná & Vondrová, 2017: s. 1139). Parametry byly blíže popsány v oddíle 2.2.

Úlohy byly navrhovány tak, aby odpovídaly svou obtížností úrovni matematických znalostí žáků v testovaných ročnících. Některé z úloh byly použity jako překryvové úlohy, tedy byly použity ve dvou po sobě jdoucích ročnících, aby bylo možno srovnat výsledky a metody řešení žáků mezi ročníky. Sady úloh analyzované v této práci však jako překryvové určeny nebyly, takže nejsou k dispozici data pro výše zmíněné porovnání.

<u>9A1:</u> Kroužky gymnastiky, košíkové a plavání se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Celkem je do všech tří kroužků zapsáno 380 dětí. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

<u>9A2:</u> 380 dětí je zapsáno do tří kroužků: gymnastiky, košíkové a plavání. Všechny tyto kroužky se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

<u>9A3:</u> v parlamentu jsou tři politické kluby: liberálů, konzervativců a zelených. Každý poslanec může být členem jen jednoho klubu. Klub liberálů má třikrát více členů než klub konzervativců, klub zelených o 114 členů víc než klub liberálů. Celkem je ve všech třech klubech 380 členů. Kolik členů mají jednotlivé kluby?

<u>9A4:</u> 380 členů parlamentu v jisté cizí zemi je rozděleno do tří politických klubů: liberálů, konzervativců a zelených. Každý poslanec může být členem jen jednoho klubu. Klub liberálů má třikrát více členů než klub konzervativců, klub zelených o 114 členů víc než klub liberálů. Kolik členů mají jednotlivé politické kluby?

<u>9C1:</u> Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku v Děčíně. Dostali odměnu 8 800 Kč, o kterou se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Jak si peníze rozdělili, jestliže Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil?

<u>9C2:</u> Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Za jednu výpravu získali 40 Kč. o odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Jak si peníze rozdělili, jestliže Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil a celkem dostali odměnu 8 800 Kč?

<u>9C3:</u> Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Vydělali si celkem 8 800 Kč. o odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Jak si peníze rozdělili?

<u>9C4:</u> Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Za jednu výpravu získali 40 Kč. o odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu

provedených výprav. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Celkem dostali odměnu 8 800 Kč. Jak si peníze rozdělili?

Čtveřice úloh označená jako 9A byla navržena pro testování parametrů „pořadí informací“ a „neznámý kontext“. Jedná se o dvě dvojice úloh, zasazených do stejného kontextu, které se mezi sebou liší pořadím informací. Při navrhování úloh bylo dbáno, aby došlo k eliminaci všech odlišností, jež nevycházejí ze zkoumaného parametru. Proto se i délka zadání shoduje u dvojic úloh se stejným kontextem na slovo přesně, matematické údaje jsou vyjádřeny stejným způsobem a obě zadání obsahují naprosto totožné informace. V zadání úloh se vyskytují tyto informace:

A_1 – Informace o souběžném konání kroužků

A_2 – Informace o možnosti být členem pouze jednoho politického klubu.

B_1 – Vztah mezi počty dětí navštěvujících košíkovou a gymnastiku.

B_2 – Vztah mezi počty členů klubu liberálů a konzervativců.

C_1 – Vztah mezi počty dětí navštěvujících plavání a košíkovou.

C_2 – Vztah mezi počty členů klubu zelených a liberálů.

D_1 – Celkový počet dětí navštěvujících všechny tři kroužky.

D_2 – Celkový počet členů všech třech politických klubů.

E – Otázka.

F – Informace o existenci třech politických klubů.

Pořadí informací v zadání jednotlivých úloh je uvedeno v tabulce 5.

Tabulka 5 – Pořadí informací v jednotlivých úlohách sady 9A

Úloha	Pořadí informací
9A1	A_1–B_1–C_1–$\mathbf{D_1}$–E.
9A2	$\mathbf{D_1}$–A_1–B_1–C_1–E.
9A3	F–A_2–B_2–C_2–$\mathbf{D_2}$–E.
9A4	$\mathbf{D_2}$–F–A_2–B_2–C_2 –E.

Rozdíl mezi dvojicemi úloh 9A1 a 9A2, respektive 9A3 a 9A4, spočívá v pořadí informace o celkovém počtu dětí či poslanců. U úloh 9A1 a 9A3 je tento údaj uveden až v předposlední větě zadání, těsně před otázkou. U úloh 9A2 a 9A4 je celkový počet dětí či poslanců první informací, se kterou se řešitel v úloze setkává. Informace o existenci třech politických klubů v úloze 9A3 a 9A4 byla zařazena proto, aby byla zachována shodná délka zadání úloh.

Sada úloh 9C testuje parametry „pořadí informací“ a „nepravá implikace“. Zahrnuje tedy dvě dvojice úloh, z nichž v jedné se využívá při pokládání otázky nepravé implikace a ve druhé nikoliv, a úlohy v rámci dvojice se mezi sebou liší pouze pořadím informací. Velký důraz byl opět kladen na eliminaci veškerých odlišností, které přímo nevycházejí ze zkoumaného parametru. Délka zadání se tak shoduje u dvojic úloh se stejně položenou otázkou na slovo přesně a matematické údaje jsou vyjádřeny stejným způsobem. Všechna zadání obsahují naprosto totožné informace, až na úlohu 9C1, ve které je navíc doplněno, že zámek, na kterém studenti provázeli, se nachází v Děčíně. Tato změna byla nezbytná pro zachování stejné délky zadání a poskytnutá informace nemá žádný vliv na řešení úlohy. V zadání úloh jsou tedy uvedeny následující informace:

A – Jména studentů a skutečnost, že si přivydělávali jako průvodci.

B – Velikost celkové odměny.

C – Informace o způsobu rozdělení celkové vydělané částky.

D – Výše odměny za jednu provedenou výpravu

E – Vztah mezi počtem výprav Kamila a Evy.

F – Vztah mezi počtem výprav Davida a Kamila.

G – Otázka.

G( ) – Otázka s nepravou implikací.

Pořadí informací v zadání jednotlivých variant úloh je popsáno v tabulce 6.

Tabulka 6 – Pořadí informací v jednotlivých úlohách sady 9C

Úloha	Pořadí informací
9C1	A–**B**–C–**D**–G(E–F)
9C2	A–**D**–C–G(E–F–**B**)
9C3	A–**B**–C–**D**–E–F–G
9C4	A–**D**–C–E–F–**B**–G

Pokud jde tedy o pořadí informací, úlohy 9C1 a 9C3 jsou shodné, stejně jako úlohy 9C2 a 9C4. Rozdíl mezi uvedenými dvojicemi spočívá v dřívějším uvedení informace o výši odměny za jednu provedenou výpravu u úloh 9C2 a 9C4, kde se vyskytuje jako v pořadí druhá informace v zadání, na rozdíl od úloh 9C1 a 9C3, kde je tato informace uvedena až za způsobem rozdělení celkového výdělku. Dalším rozdílem je pořadí údaje týkajícího se celkového výdělku studentů. Ten se vyskytuje na druhém místě v zadání u úloh 9C1 a 9C3. Avšak u úloh 9C2 a 9C4 je tento údaj uveden až jako úplně poslední před otázkou u úlohy 9C4 a jako poslední údaj v rámci otázky s nepravou implikací u úlohy 9C2.

3.3 Průběh výzkumu: didaktický test a rozhovor

Testy, které se psaly v rámci hlavního testování výše uvedeného výzkumu, vypracovávali žáci v rámci jedné ze svých vyučovacích hodin matematiky. Test vždy psali všichni přítomní žáci, účastnící se testování, najednou. Nepřítomní žáci dopisovali test dodatečně samostatně. Po celou dobu trvání testu byli ve třídě přítomni dva lidé dohlížející na hladký průběh a dodržování pravidel testování. První osobou byl vyučující matematiky v dané třídě, který zodpovídal za ověření identity testovaných žáků a za to, aby každý z nich dostal jemu určený test. Druhou osobou byl zadavatel testu, jenž zadal žákům pokyny pro vypracování testu a vysvětlil jim průběh testu. Jedním ze zadavatelů byl i autor diplomové práce.

Všechny obecné pokyny byly zároveň uvedeny na každém z testů, aby se k nim mohli žáci případně vrátit, a zněly takto: „Úlohy řeš bez použití kalkulačky. Zapisuj i postup řešení a nezapomeň na slovní odpověď. Pokud se ti řešení nevejde na tento papír, požádej učitele o další. Úlohy řeš v libovolném pořadí. Pokud uděláš chybu, negumuj, jen škrtni chybné řešení jednou čarou. Nezapomeň otočit papír na druhou stranu, kde jsou další úlohy.“ Zadavatel dále vyplňoval protokol o průběhu testu, ve kterém se uvádělo datum a čas, kdy byl test zadán, seznam osob přítomných ve třídě, čas odevzdání posledního z žáků a případné otázky, které žáci položili před či při testu, a odpovědi na ně.

Testy byly zadávány formou celkem osmi testových sešitů v každém ročníku. Tyto sešity se skládaly ze čtyř až šesti úloh, podle ročníku, tak, že každý testový sešit obsahoval různé varianty úloh ze stejné sady. Tímto způsobem byly vytvořeny čtyři testové sešity, protože každá z úloh má pouze čtyři různé varianty. Zbylá čtveřice testovacích sešitů vznikla obrácením pořadí úloh tak, aby se eliminoval vliv pořadí, v jakém byla úloha v rámci testu zadána. Za účelem snížení rizika opisování byl vytvořen pro každou třídu zvláštní zasedací pořádek, který k sobě do lavic řadil žáky s co nejodlišnějšími testovými sešity. Dále byli žáci předem upozorněni zadavatelem, že úlohy v testech jsou různé a mají odlišná řešení i přes to, že mohou na první pohled vypadat totožně. Zamezit opisování bylo také jedním z úkolů přítomného učitele a zadavatele testu.

Po skončení testu zadavatel testy vybral a předal je příslušné osobě, která měla na starost opravování testů. Pro zaručení maximální porovnatelnosti výsledků vždy celou sadu variant konkrétní úlohy opravoval jeden člověk, a to i v případě překryvových úloh, které vypracovávali žáci různých ročníků. Tímto způsobem se eliminovalo rozdílné posuzování, a případně i bodování, stejných metod řešení u konkrétní sady úloh, které by mohlo zkreslit výsledky výzkumu.

Pro účely této práce byly provedeny ještě dodatečné rozhovory s žáky 9. ročníku, kteří se neúčastnili hlavního testování. Cílem těchto setkání bylo osvětlit důvody pro upřednostňování určitých metod řešení daných úloh před ostatními. Tyto rozhovory proběhly celkem čtyři. Při každém z nich byl přítomen pouze jeden žák devátého ročníku a autor této práce. Celkem bylo vybráno deset žáků na základě doporučení jejich učitele matematiky, avšak s účastí v experimentu souhlasili pouze čtyři z nich. V průběhu setkání byly žákům zadány pouze dvě úlohy tak, aby každý z žáků řešil jinou variantu úloh 9A a 9C a aby každá z variant byla řešena právě jedním z žáků. Ze všech setkání byl pro účely této práce pořízen audio záznam, který byl spolu s písemným řešením podroben dalšímu zkoumání.

V první části setkání žáci samostatně řešili zadané úlohy. Poté vysvětlili, jakým způsobem úlohu řešili, a odpovídali na případné dotazy týkající se řešení. V případě, že žák úlohu nevyřešil celou, bylo mu vysvětleno zadání a pokládány návodné otázky, které ho k řešení dovedly. Vzhledem k tomu, že žáků podílejících se na tomto dodatečném zkoumání bylo málo a že se jednalo převážně o žáky s nadprůměrnými výsledky v matematice, nedají se z těchto rozhovorů vyvozovat žádné definitivní závěry, ale poskytly zajímavý pohled na volbu metod řešení vybraných úloh (více viz kapitola 4).

3.4 Vyhodnocení didaktického testu: analýza žákovských řešení

Pro každou z testovaných úloh byl v rámci projektu GAČR vytvořen manuál pro opravovatele, určující, za jakou část řešení se přiděluje jaký počet bodů, a specifikující, jakým způsobem kódovat další průvodní jevy řešení úloh. Vzhledem k rozsáhlosti celého výzkumu zde budou uvedeny pouze způsoby vyhodnocení úloh analyzovaných v rámci této práce. Bodování úloh je uvedeno v tabulce 7.

Tabulka 7 – Bodování úloh při hlavním testování

Celkový počet bodů	
3 body	Správně vypočítaný výsledek jakýmkoliv postupem.
2 body	Správný postup, který by vedl ke správnému výsledku, kdyby nebylo numerické chyby.
1 bod	Část postupu je správná.
0 bodů	Neřešeno vůbec, nebo ani jeden krok není správně, nebo je v testu uveden pouze výsledek, bez náznaku řešení.

Důvodem pro volbu univerzální tříbodové bodovací škály pro každou úlohu bylo vzájemné srovnávání úspěšnosti úloh a zjednodušená možnost statistické analýzy všech úloh. Touto volbou bodování bylo také umožněno plošné přebodování úloh pro účely statistického zkoumání, které je popsáno v oddíle 3.5.

Dály byly zkoumány průvodní jevy řešení úloh, které byly podkladem pro následné kvalitativní zkoumání. Všechny jevy jsou kódovány 0 nebo 1, kde 1 značí přítomnost popsaného jevu a 0 jeho absenci. Některé z těchto jevů sloužily pro rozlišení různého přístupu žáků k úlohám, například skutečnost, že u úlohy není nic napsáno, a žák se jí tedy nevěnoval, či jestli je úloha rozřešena, ale ohodnocena 0 body, je důležitým ukazatelem při rozboru obtížnosti úlohy. Je totiž možné, že úloha nebyla řešena z důvodu omezeného časového rozsahu, což by mohlo sloužit jako zpětná vazba při přípravě dalších sérií testů. Skutečnost, že u úlohy není napsáno žádné řešení, ale jen správný výsledek, zase naznačuje, že úloha byla příliš jednoduchá a dala se vypočítat zpaměti, nebo žák výsledek opsal. To, jakým způsobem si žák, jestli vůbec, vypracoval zápis ze zadání úlohy může poskytnout vhled do žákova uchopení úlohy, což je důležité při kvalitativní analýze řešení. Další jevy zmíněné v tabulce výše napomáhají opravovateli testu určit, zda žák plně porozuměl otázce položené v zadání úlohy, a je tedy schopen identifikovat konečné řešení. Všechny zkoumané obecné průvodní jevy řešení úloh jsou vypsány v tabulce 8.

Tabulka 8 – Průvodní jevy řešení úloh

		Kód
XXo0	V řešení není nic napsáno	0–1
XXo01	V řešení je jen správný výsledek bez náznaku řešení.	0–1
XXo11	Přítomnost slovní legendy	0–1
XXo12	Přítomnost tabulkové legendy	0–1
XXo13	Přítomnost obrázkové legendy	0–1
XXo14	Přítomnost algebraické legendy	0–1
XXo2	Přítomnost zápisu postupu řešení	0–1
XXo31	Přítomnost správné slovní odpovědi (věcně správné, i když je v ní výsledek špatný díky numerické chybě)	0–1
XXo32	Přítomnost nesprávné slovní odpovědi (gramatické chyby nebereme v úvahu; nesprávné je z hlediska slovní úlohy)	0–1
XXo33	Chybí odpověď, ale v řešení je jiné označení výsledku jednoznačným způsobem (např. dvakrát podtrženo apod.)	0–1
XXo41	Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který řešitel považuje za konečný (dá se na to usoudit na základě písemného řešení)	0–1
XXo42	Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který řešitel nepovažuje za konečný (z nějakého důvodu, který nemůžeme znát, už dál nepokračoval)	0–1
XXo5	Využití všech relevantních údajů ze zadání	0–1
XXo6	Použití trojčlenky (což je patrné z charakteristického zápisu podle šipek nebo z něčeho jiného)	0–1

Podobným způsobem byly navrženy tabulky na zaznamenávání určitých aspektů řešení pro jednotlivé sady úloh. Jevy kódované 0–1 opět značí přítomnost zmíněného aspektu, pro jevy kódované 0–3 se zkoumá navíc i správnost výpočtu. Toto, spolu s chybami, které jsou v rámci opravování také značeny, umožňuje provádět kvantitativní analýzu týkající se chyb i metod řešení. Právě metody řešení jsou v případě této sady úloh zásadní, protože se předpokládá, že se projeví vliv parametru pořadí informací na volbě základní části, ke které se budou ostatní vyjadřovat. Zároveň tento záznam umožňuje identifikovat řešení, u kterých chybí část předpokládaného postupu, protože byla udělána zpaměti, nebo žák pro řešení zvolil jinou řešitelskou strategii.

U sady úloh 9A byly zaznamenávány aspekty řešení zmíněné v tabulce 9.

Tabulka 9 – Aspekty řešení zkoumané u sady úloh 9A

9Ap1	Výběr základní části, vzhledem ke které se budou ostatní vyjadřovat	0–1
9Ap2	Matematizace vztahu další části ke zvolené v 9Ap1	0–1–2–3
9Ap3	Matematizace vztahu další části ke zvolené v 9Ap1 a 9Ap2	0–1–2–3
9Ap4	Matematizace vztahu mezi všemi částmi	0–1–2–3
9Ap5	Výpočet části z 9Ap1	0–1–2–3
9Ap6	Výpočet části z 9Ap2	0–1–2–3
9Ap7	Výpočet části z 9Ap3	0–1–2–3
9Ach1	Chybná matematizace v 9Ap2	0–1
9Ach2	Chybná matematizace v 9Ap3	0–1
9Ach3	Chybná matematizace v 9Ap4	0–1
9Ach4	Chybně provedená úvaha v případě řešení bez použití rovnice	0–1
9Ach5	Chybné vyřešení sestavené rovnice	0–1
9Ach2	Chybné dosazení do vztahu z 9Ap2	0–1
9Ach7	Chybné dosazení do vztahu z 9Ap3	0–1
9Ach8	Jiná chyba	0–1

Obdobným způsobem bylo zpracováno kódování jevů u sady úloh 9C, jak je uvedeno v tabulce 10.

Rozšíření hodnocení úloh o tyto parametry zajistilo výzkumnému týmu detailnější popis řešení úloh a větší vhled do podoby konkrétního řešení bez nutnosti opětovně procházet samotné testové sešity.

Kvalitativní analýza byla provedena tak, že každému žákovskému řešení byly jednak přiděleny celkové body a jednak bylo v souboru Excel zaznamenána přítomnost výše uvedených jevů. Kromě toho byla sledována přítomnost jiných jevů, které nebyly předpokládány, avšak v žákovských řešeních se výrazněji projevily.

Tabulka 10 – Aspekty řešení zkoumané u sady úloh 9C

9Cp1	Určení počtu výprav celkem	0–1–2–3
9Cp2	Výběr základní části (počtu výprav jednoho ze studentů), vzhledem ke které se budou ostatní vyjadřovat	0–1
9Cp3	Matematizace vztahu další části ke zvolené v 9Cp2	0–1–2–3
9Cp4	Matematizace vztahu další části ke zvolené v 9Cp2 a 9Cp3	0–1–2–3
9Cp5	Matematizace vztahu mezi všemi částmi	0–1–2–3
9Cp6	Výpočet části z 9Cp2	0–1–2–3
9Cp7	Výpočet části z 9Cp3	0–1–2–3
9Cp8	Výpočet části z 9Cp4	0–1–2–3
9Cp9	Výpočet honoráře za část z 9Cp6	0–1–2–3
9Cp10	Výpočet honoráře za část z 9Cp7	0–1–2–3
9Cp11	Výpočet honoráře za část z 9Cp8	0–1–2–3
9Cch1	Chybný výpočet počtu výprav	0–1
9Cch2	Chybná matematizace v 9Cp3	0–1
9Cch3	Chybná matematizace v 9Cp4	0–1
9Cch4	Chybná matematizace v 9Cp5	0–1
9Cch5	Chybně provedená úvaha v případě řešení bez použití rovnice	0–1
9Cch6	Chybné vyřešení sestavené rovnice	0–1
9Cch7	Chybné dosazení do vztahu z 9Cp3	0–1
9Cch8	Chybné dosazení do vztahu z 9Ap4	0–1
9Cch9	Chybné dopočítání honoráře za část z 9Cp6	0–1
9Cch10	Chybné dopočítání honoráře za část z 9Cp7	0–1
9Cch11	Chybné dopočítání honoráře za část z 9Cp8	0–1
9Cch12	Jiná chyba	0–1

3.4.1 Předpokládané metody řešení sady úloh 9A

Vzhledem k tomu, že úlohy 9A1 a 9A3, respektive 9A2 a 9A3, se od sebe liší pouze v kontextu, do kterého je úloha zasazena, je možno předpokládat, že strategie zvolené pro jejich řešení budou shodné.

Předpokládanou řešitelskou strategií u této úlohy je použití rovnice. Vztahy mezi počty dětí/poslanců uvedené v zadání úlohy jsou vzájemně provázané způsobem, který neupřednostňuje žádný z počtů pro volbu neznámé. Bude tedy zajímavé sledovat, projeví-li se do této volby pořadí informací v zadání úlohy.

První možností je zvolit za neznámou, která bude následně figurovat v rovnici, počet dětí navštěvujících košíkovou, respektive počet členů klubu liberálů. Zápis úlohy a řešení rovnice za pomoci takto zvolené neznámé by vypadaly takto:

Košíková	...	x
Gymnastika	...	$\frac{x}{3}$
Plavání	...	$x + 114$
Celkem	...	380

$$x + \frac{x}{3} + x + 114 = 380$$

$$\frac{7}{3}x = 266$$

$$x = 114$$

Řešení č. 1 – Úloha 9A se základní neznámou odpovídající počtu dětí navštěvujících kroužek košíkové

Tato volba neznámé se jeví jako nejpravděpodobnější, protože košíková/klub liberálů se vyskytuje v zadání úlohy na prvním místě.

Další možností je zvolit za neznámou počet dětí navštěvujících gymnastiku, respektive počet členů klubu konzervativců. Tímto způsobem se řešitel vyhne dělení, které pro něj může být obtížnější než násobení. Zápis úlohy a řešení rovnice s takto zvolenou neznámou by vypadaly následovně:

Košíková	...	$3x$
Gymnastika	...	x
Plavání	...	$3x + 114$
Celkem	...	380

$$3x + x + 3x + 114 = 380$$

$$7x = 266$$

$$x = 38$$

Řešení č. 2 – Úloha 9A se základní neznámou odpovídající počtu dětí navštěvujících kroužek gymnastiky

Poslední možností je zvolit za neznámou, k níž se bude vztahovat rovnice, počet dětí navštěvujících kroužek plavání, respektive počet poslanců v klubu zelených. Zápis úlohy a řešení rovnice tímto způsobem jsou uvedeny v řešení č. 3.

Košíková	...	$x - 114$
Gymnastika	...	$\frac{x\text{-}114}{3}$
Plavání	...	x
Celkem	...	380

$$x - 114 + \frac{x - 114}{3} + x = 380$$
$$\frac{7}{3}x = 532$$
$$x = 228$$

Řešení č. 3 – Úloha 9A se základní neznámou odpovídající počtu dětí navštěvujících kroužek plavání

Tato možnost se jeví jako nejméně pravděpodobná, protože zápis úlohy i úpravy rovnice jsou komplikovanější než v předchozích případech.

Všechny výše uvedené zápisy předpokládají, že řešitel zapisuje vztahy mezi údaji rovnou prostřednictvím neznámé, dá se však očekávat, že těmto zápisům bude předcházet určitá forma vyjádření vztahů, za pomoci více neznámých.

Rozdíl mezi dvojicemi úloh 9A1 a 9A2, respektive 9A3 a 9A4, tkví v pořadí informace o celkovém počtu dětí či poslanců. U úloh 9A1 a 9A3 je tento údaj uveden až v předposlední větě zadání, těsně před otázkou. Na druhou stranu u úloh 9A2 a 9A4 je celkový počet dětí či poslanců první informací, se kterou se řešitel v úloze setkává. Rozdíl, který by z tohoto mohl plynout, spočívá ve způsobu sestavení rovnice. Pokud bude rovnice sestavována čistě podle pořadí informací, dá se předpokládat, že údaj o celkovém počtu dětí či poslanců bude na pravé straně rovnice u úloh 9A1 a 9A3 a na levé straně rovnice u úloh 9A2 a 9A4. Poslední zmíněný případ jde však proti zavedenému školskému postupu zápisu rovnic, při kterém se neznámé píší na levou stranu.

3.4.2 Předpokládané metody řešení sady úloh 9C

Protože úlohy 9C1 a 9C3, respektive 9C2 a 9C3, se od sebe liší pouze v přítomností nepravé implikace v položené otázce, dá se předpokládat, že zvolené metody řešení těchto úloh budou shodné. Úlohy 9C1 a 9C2, respektive 9C3 a 9C4, se od sebe liší v pořadí informací. Konkrétně se jedná o údaj týkající se celkového výdělku studentů, který je uveden buď na začátku, u úloh 9C1 a 9C3, nebo na konci zadání, u úloh 9C2 a 9C4.

Předpokládanou řešitelskou strategií je sestavení rovnice počtu výprav za pomoci vhodně zvolené neznámé a následné dopočítání jednotlivých výdělků všech studentů pomocí údaje o odměně za jednu výpravu. Tato strategie předpokládá, že řešitel nejprve dopočítá celkový počet výprav, a to z celkového výdělku a z odměny za jednu výpravu. Zápis úlohy a sestavení rovnice by pak vypadaly takto:

Celková odměna	…	8 800 Kč
Odměna za jednu výpravu	…	40 Kč
Celkový počet výprav	…	x

$$x = 8800 : 40$$
$$x = 220$$

Řešení č. 4 – Výpočet celkového počtu výprav všech studentů

Volba neznámé, ke které se bude vztahovat rovnice, může být různá. Pokud by řešitelé postupovali podle pořadí informací uvedených v úloze, pravděpodobně bude zápis a řešení úlohy vypadat následovně:

Kamil – počet výprav	…	y
Eva – počet výprav	…	$y + 12$
David – počet výprav	…	$2y$
Celkový počet výprav	…	220

$$y + y + 12 + 2y = 220$$
$$4y = 208$$
$$y = 52$$

Řešení č. 5 – Úloha 9C se základní neznámou odpovídající Kamilovu počtu výprav

Další možností je zvolit za neznámou počet výprav, který provedla Eva. Tento způsob volby neznámé může být zrádnější, protože řešitel nesmí zapomenout na závorku při vyjadřování počtu výprav, které provedl David. Zároveň se v této variantě využívá při vyjadřování počtu Kamilových výprav operace odčítání, která na rozdíl od sčítání není komutativní, což také vytváří větší prostor pro chybu. V tomto případě by zápis úlohy a řešení rovnice vypadaly takto:

Kamil – počet výprav … $y - 12$

Eva – počet výprav … y

David – počet výprav … $2 \cdot (y - 12)$

<u>Celkový počet výprav… 220</u>

$$\begin{aligned} y - 12 + y + 2 \cdot (y - 12) &= 220 \\ y - 12 + y + 2y - 24 &= 220 \\ 4y &= 256 \\ y &= 64 \end{aligned}$$

Řešení č. 6 – Úloha 9C se základní neznámou odpovídající Evině počtu výprav

Poslední možností je zvolit za neznámou, k níž se bude vztahovat zbytek rovnice, počet výprav provedených Davidem. Zápis a řešení rovnice v tomto případě vypadá následovně:

Kamil – počet výprav … $\frac{y}{2}$

Eva – počet výprav … $\frac{y}{2}+12$

David – počet výprav … y

<u>Celkový počet výprav… 220</u>

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 12 + y &= 220 \\ 2y + 12 &= 220 \\ 2y &= 208 \\ y &= 104 \end{aligned}$$

Řešení č. 7 – Úloha 9C se základní neznámou odpovídající Davidovu počtu výprav

V této variantě, jako v jediné z uvedených, musí řešitel pracovat s neceločíselným koeficientem u neznámé. Dá se tedy předpokládat, že tato volba neznámé nebude velmi častá.

Nyní, u všech výše zmíněných variant, stačí jen dopočítat počty výprav zbylých studentů a vynásobit je 40, abychom dostali celkový výdělek každého ze studentů.

Dalším ze způsobů řešení je přímo sestavit rovnici pro výpočet vydělané částky jednoho ze studentů, který se zvolí jako neznámá, k níž se zbytek rovnice vztahuje. Tato možnost je komplikovanější z hlediska sestavení rovnice, ale následuje pořadí informací použité v úlohách 9C2 a 9C4. Dá se tedy předpokládat, že se tento způsob řešení bude častěji vyskytovat právě u této dvojice úloh. Zápis úlohy a sestavení rovnice by tedy vypadaly následovně:

Odměna za jednu výpravu	…	40 Kč
Kamil – odměna	…	$40x$
Eva – odměna	…	$40 \cdot (x + 12)$
David – počet výprav	…	$80x$
Celková odměna	…	8 800 Kč

$$40x + 40(x + 12) + 80x = 8\,800$$
$$160x = 8\,320$$
$$x = 52$$

Řešení č. 8 – Výpočet počtu Kamilových výprav, bez vyjádření celkového počtu výprav

Použitím takto sestavené rovnice vycházejí, po dosazení x do vyjádření výdělku každého ze studentů, přímo konečné výsledky. V tomto postupu však figurují podstatně větší čísla než v postupu předchozím. Dalo by se tedy předpokládat, že žáci, kteří přijdou na oba postupy, použijí spíše předchozí způsob řešení.[15]

Další odlišností, která by mohla v řešení vyplynout z rozdílného pořadí informací, je výměna stran výsledné rovnice. Pokud bude rovnice sestavována čistě podle pořadí informací, dá se předpokládat, že údaj o celkovém výdělku či počtu výprav bude na pravé straně rovnice u úloh 9C2 a 9C4 a na levé straně rovnice u úloh 9C1 a 9C3.

3.5 Kvantitativní analýza dat

Vzhledem k rozsáhlosti hlavního testování a k vysoké přesnosti nezbytné pro kvantitativní analýzu výsledků výzkumu v rámci projektu GAČR bylo pro účely této práce převzato statistické vyhodnocení výsledků od Martina Chvála. Závěry vyvozené z jím poskytnutých dat, spolu s kvalitativní analýzou konkrétních žákovských řešení, jsou však dílem autora této práce.

[15] I u tohoto postupu se samozřejmě mohou vyskytovat různé způsoby volby neznámé, k níž se vztahují celkové výdělky zbylých studentů. Tyto variace řešení nejsou popsány, protože pořadí, v němž se řešitel úlohy dozvídá informace o Kamilovi, Evě a Davidovi, je vždy stejné. Lze se tedy domnívat, že rozdílná volba neznámé bude založena na stejném principu jako u výpočtu přes celkový počet provedených výprav.

Bodové ohodnocení žákovských řešení bylo zpracováno jednak z hlediska bodové škály 0–3 (viz výše), jednak odlišení „vyřešil vs. nevyřešil“. Řešení, která dosáhla 0 a 1 bodu, byla přebodována na 0 bodů. Řešení, která dosáhla 2 a 3 bodů, byla přebodována na 1 bod. Z hlediska výzkumné otázky je důležité, zda daný parametr ovlivnil pochopení úlohy, a naopak není důležité, zda se žák dopustil numerické chyby.

Získané výsledky byly dále podrobeny statistické analýze. Vzhledem tomu, že byla provedena diferenciace žáků na základě jejich matematických dovedností a čtenářské gramotnosti, bylo možné rozlišit mezi silnými a slabými žáky. Díky této skutečnosti bylo možné modelovat úlohy podle Teorie odpovědi na položku (IRT), která pracuje se třemi parametry.[16] V případě tohoto testování byl parametr *c* položen roven 0, protože se nepředpokládá, že by žáci byli schopni odpovědi na slovní úlohy uhodnout. Parametr a popisuje míru, do jaké se liší úspěšnost řešení konkrétní úlohy u žáků s různou úrovní matematických znalostí. V grafech uvedených níže tento parametr vystupuje jako směrnice rovnice tečny v bodě označujícím průměrného žáka. Poslední parametr *b* vyjadřuje obtížnost úlohy, a bude tedy stěžejní pro následující analýzu porovnávající obtížnost úloh lišících se pouze o daný parametr. Pro vyhodnocení statistické významnosti rozdílů objevených mezi parametry *a* a *b* u IRT modelů úloh byl proveden nezávislý dvouvýběrový t–test.

Výše popsaný způsob kvantitativního vyhodnocení dat je blíže popsán v knize (Vondrová et al., v tisku).

[16] Popis využití IRT vychází z poznatků sdělených M. Chválem (viz Vondrová et al., v tisku).

4 Výsledky

4.1 Výsledky kvantitativní části výzkumu

Jak již bylo zmíněno výše, všechny úlohy v rámci hlavního testování byly hodnoceny na stupnici 0–3 body. Počty žáků, kteří dosáhli určitého bodového ohodnocení ve sledovaných úlohách, jsou uvedeny v tabulce 11.

Tabulka 11 – Výsledky prvního hlavního testování u sledované dvojice sad úloh

			četnosti					
	ročník	sešit	0 bodů	1 bod	2 body	3 body	řešilo	Průměrná úspěšnost
9A1	9	2	17	4	1	24	46	57 %
9A2	9	3	13	7	4	22	46	59 %
9A3	9	4	13	8	3	21	45	57 %
9A4	9	1	16	9	3	17	45	49 %
9C1	9	1	19	15	3	8	45	33 %
9C2	9	2	14	20	3	9	46	38 %
9C3	9	3	21	12	5	8	46	33 %
9C4	9	4	23	17	2	3	45	22 %

Z tabulky je patrné, že úlohy byly vhodně navrženy, takže ani u jedné z nich žáci nedosahovali extrémně vysoké úspěšnosti, ani nebyla úspěšnost příliš nízká. Pokud by nějaký z těchto případů nastal, hrozilo by, že data získaná z takové úlohy budou mít nízkou výpovědní hodnotu a nebude na nich možno pozorovat vliv zkoumaných parametrů. Průměrná úspěšnost žáků v sadě úloh 9A je mezi 49 % u úlohy 9A4 a 59 % u úlohy 9A2. Tato sada úloh byla tedy pro žáky snazší, než sada 9C, ve které lze pozorovat úspěšnost mezi 22 % u úlohy 9C4 a 38 % u úlohy 9C2.

Vzhledem k tomu, že spolu poměrně přesně korespondují průměrné úspěšnosti u úloh, které zaujímají stejné místo ve své sadě úloh, tedy 9A1 a 9C1 a obdobně, by se mohlo zdát, že tyto stejně číslované úlohy řešila vždy jedna skupina žáků a výsledné rozdíly v úspěšnosti jsou dány rozdílnými matematickými dovednostmi těchto skupin. Tento závěr by však byl mylný, protože úlohy byly v testových sešitech koncipovány tak, aby žáci neřešili obdobnou variantu ostatních úloh. Rozdíly v úspěšnosti by tedy měly být dány rozdíly mezi samotnými variantami úloh. Pro snadnější orientaci mezi počty žáků s určitým počtem dosažených bodů u konkrétních úloh jsou tyto relativní četnosti uvedeny jako procentuální rozložení v tabulce 12.

Tabulka 12 – Relativní četnosti dosažených bodů u analyzované dvojice sad úloh v rámci prvního hlavního testování

	relativní četnosti – původní bodování				
	0 bodů	1 bod	2 body	3 body	Průměrná úspěšnost
9A1	37 %	9 %	2 %	52 %	57 %
9A2	28 %	15 %	9 %	48 %	59 %
9A3	29 %	18 %	7 %	47 %	57 %
9A4	36 %	20 %	7 %	38 %	49 %
9C1	42 %	33 %	7 %	18 %	33 %
9C2	30 %	43 %	7 %	20 %	38 %
9C3	46 %	26 %	11 %	17 %	33 %
9C4	51 %	38 %	4 %	7 %	22 %

Tyto výsledky ukazují, že nejméně často byly žákům za jejich řešení uděleny 2 body. Chyby, které udělali, nebyly tedy pouze numerické, ale spočívaly ve špatně zvoleném nebo nedotaženém způsobu řešení. U sady úloh 9C je vidět vyšší počet žáků s 1 bodem, který značí částečné řešení, oproti sadě 9A, což má pravděpodobně souvislost s větší komplexností úlohy, viz dále v kapitolách věnujících se očekávaným postupům řešení jednotlivých čtveřic úloh.

Aby byly odhaleny případné rozdíly v úspěšnosti jednotlivých úloh, které by mohly být potlačeny volbou tří bodového hodnotícího systému, došlo k přebodování, které koresponduje s cíli prováděného zkoumání a reflektuje především pochopení úlohy. Výsledky po tomto přebodování jsou uvedeny v tabulce 13.

Tabulka 13 – Relativní četnosti dosažených bodů po přebodování

	0 bodů	1 bod
9A1	46 %	54 %
9A2	43 %	57 %
9A3	47 %	53 %
9A4	56 %	44 %
9C1	76 %	24 %
9C2	74 %	26 %
9C3	72 %	28 %
9C4	89 %	11 %

Při přebodování byla bodovací škála omezena pouze na 0–1 bod. Řešení, která byla původně bodována nulou nebo jedním bodem, jsou v tomto bodování sloučené do kategorie bez bodového zisku, a jedním bodem byla ohodnocena všechna zbylá řešení.

Toto přebodování je založeno na skutečnosti, že částečného řešení, a tedy původně jednobodového zisku, mohli žáci dosáhnout i v případě, že nepochopili úlohu jako celek a pouze matematicky vyjádřili vzájemné vztahy mezi údaji obsaženými v zadání. Tento případ se velice často objevuje v řešeních sady 9C, kde žáci správně vyjádřili vztahy mezi počty výprav jednotlivých studentů, avšak nebyli schopni z těchto vztahů vyjít při výpočtu jejich výdělků. Taková řešení dokazují, že žáci pochopili část úlohy, ale neporozuměli ji v úplnosti. Často se například objevuje chybné sestavení rovnice, ve které žáci dávají do rovnosti počty výprav studentů s jejich celkovým výdělkem, aniž by využili údaj týkající se výše odměny za jednu provedenou výpravu. Tato chyba byla u sady 9C velice častá a udělalo ji celkem 46 ze 182 žáků, kteří tuto sadu úloh řešili.

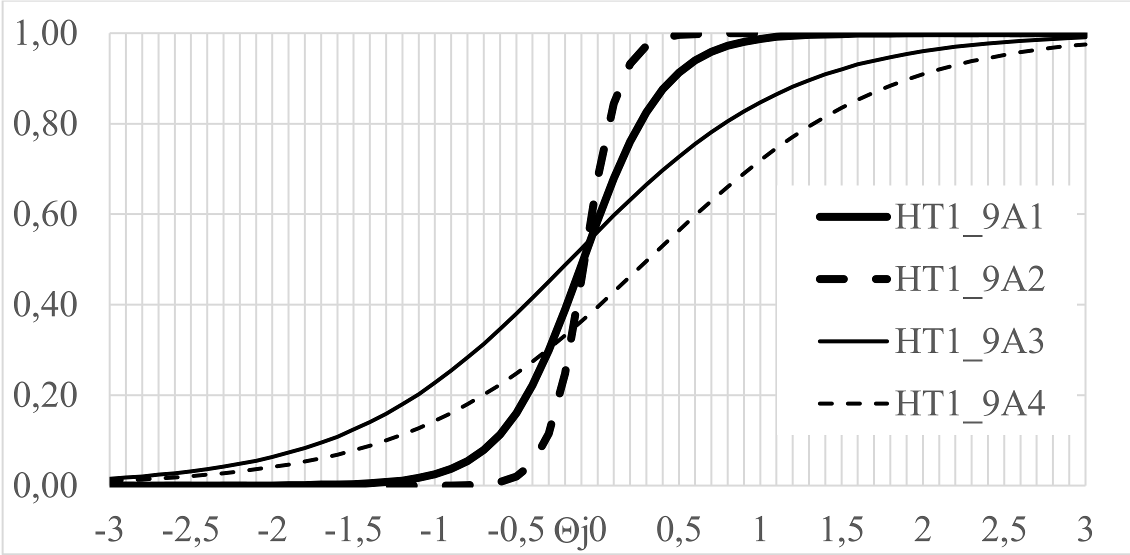
Při tomto způsobu přidělení bodů samozřejmě došlo k poklesu průměrné úspěšnosti úloh, a to o 2–5 % u sady 9A a o 5–12 % u sady 9C. Rozdíl je opět podstatně větší u sady 9C, kvůli vysokému počtu řešení, která byla původně ohodnocena jedním bodem. Ke zvýšení došlo i u rozdílů mezi průměrnými úspěšnostmi jednotlivých úloh v dané sadě. Tento rozdíl se navýšil z původních 10 % na 13 % u sady úloh 9A a z 16 % na 17 % u sady 9C.

Toto přebodování bylo použito také pro modelaci úloh podle IRT, protože testování si klade za cíl zkoumat vliv parametrů na porozumění úloze a vytvoření situačního modelu, což je nejlépe patrné právě při tomto rozdělení bodů. Parametry pro sady úloh 9A a 9C, spolu s ostatními údaji využitými pro statistické zkoumání, jsou uvedeny v tabulce 14.

Tabulka 14 – Hodnoty parametrů IRT u sad úloh 9A a 9C. N označuje počet žáků, kteří řešili danou úlohu, s.e. označuje směrodatnou chybu pro daný parametr

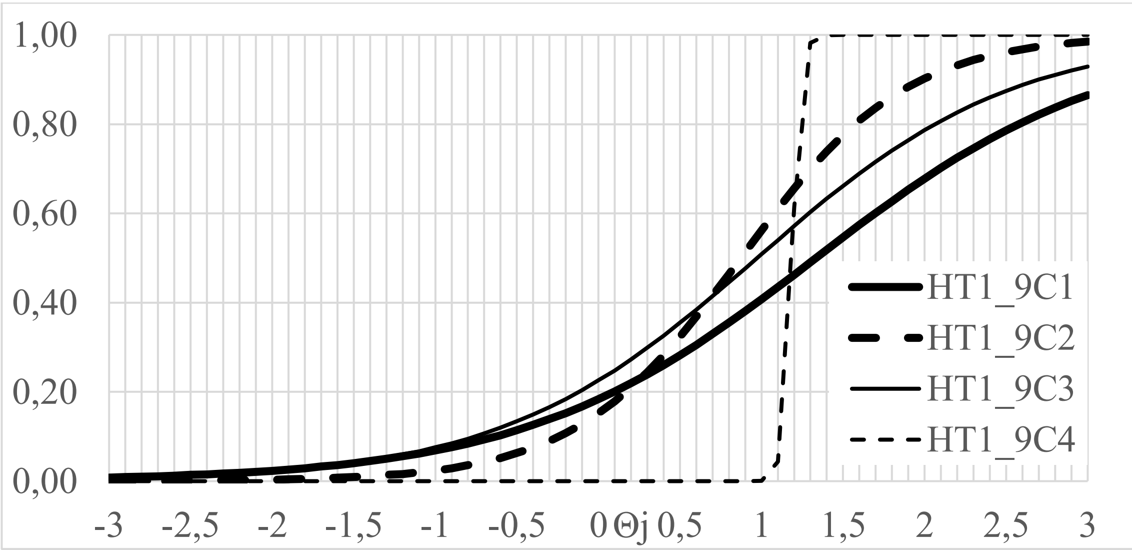
	N	a	s.e._a	b	s.e._b		N	a	s.e._a	b	s.e._b
9A1	46	2,21	0,59	–0,09	0,15	**9C1**	45	1,47	0,46	1,01	0,26
9A2	46	2,01	0,52	0,07	0,15	**9C2**	46	2,30	0,87	1,13	0,22
9A3	45	2,21	0,59	–0,09	0,15	**9C3**	46	1,47	0,46	1,01	0,26
9A4	45	2,01	0,52	0,07	0,15	**9C4**	45	2,30	0,87	1,13	0,22

Pravděpodobnost dosažení správného řešení, v závislosti na úrovni matematických znalostí žáka, je zanesena pro sady úloh 9A a 9C v následujících grafech.



Graf 1 – Pravděpodobnost správného vyřešení (osa *y*) úloh ze sady 9A u žáků s různou úrovní matematických dovedností (osa *x*)

Z grafu 1 je patrné, že největší rozdíly mezi žáky různých schopností nastávají u úlohy 9A2. Pravděpodobnost dosažení správného řešení pro průměrného žáka je velice podobná u úloh 9A1–9A3 a liší se pouze u 9A4, u které je přibližně o 20 % nižší.



Graf 2 – Pravděpodobnost správného vyřešení (osa *y*) úloh ze sady 9A u žáků s různou úrovní matematických dovedností (osa *x*)

Graf 2 ukazuje, že největší rozdíly mezi slabými a silnými žáky jsou u úlohy 9C4. Tato úloha se zdá být téměř neřešitelná pro slabší žáky, ale lehce nadprůměrní žáci v ní dosahují velice dobrých výsledků. Rozdíly mezi ostatními úlohami již zdaleka nejsou tak markantní.

V tabulce 15 a 16 jsou zaznamenány *p* hodnoty nezávislého dvouvýběrového t–testu pro parametry a a *b* u sad úloh 9A a 9C.

Tabulka 15 – *p* hodnoty t–testu sady úloh 9A (hodnoty pro parametr a jsou uvedeny nad diagonálou a hodnoty pro parametr *b* pod diagonálou)

	9A1	**9A2**	**9A3**	**9A4**
9A1	1,000	0,800	1,000	0,800
9A2	0,453	1,000	0,800	1,000
9A3	1,000	0,453	1,000	0,800
9A4	0,453	1,000	0,453	1,000

Tabulka 16 – *p* hodnoty t–testu sady úloh 9C (hodnoty pro parametr a jsou uvedeny nad diagonálou a hodnoty pro parametr *b* pod diagonálou)

	9C1	**9C2**	**9C3**	**9C4**
9C1	1,000	0,401	1,000	0,401
9C2	0,725	1,000	0,401	1,000
9C3	1,000	0,725	1,000	0,401
9C4	0,725	1,000	0,725	1,000

Z tabulek je patrné, že ani u jedné sady úloh nejsou rozdíly statisticky významné, a to jak z hlediska obtížnosti jednotlivých úloh, tak z hlediska rozdílů mezi úspěšností silných a slabých žáků. Ve zkoumaných úlohách se tedy neprojevil vliv ani jednoho ze zkoumaných parametrů, kterými byly pořadí informací, neznámý kontext a nepravá implikace.

4.2 Kvalitativní analýza řešení sady úloh 9A

Z celkového počtu 182 žáků, kterým byla tato sada úloh zadána, pouze 10 nenapsalo do řešení úlohy vůbec nic a úlohu zřejmě vynechalo. 147 žáků provedlo zápis úlohy, a to jedním nebo více způsoby, zbylých 35 žáků uvedlo pouze výpočet s výsledkem, a ve dvou případech se objevil pouze samostatný výsledek. Nejčastější byla kombinace slovní a algebraické legendy. Důvodem pro časté využití slovní legendy je pravděpodobně její dominantní pozice při řešení slovních úloh ve výuce matematiky. Přítomnost algebraické legendy vychází ze způsobu řešení úlohy, protože je nezbytná při použití matematického modelu rovnice. Jedno z řešení využívajících tabulkovou legendu je uvedeno na obr. 8

dále v textu. Obrázková legenda byla použita pouze v jednom řešení, a to v podobě Vennova diagramu, který není v dané úloze vhodný, protože průniky množin dětí navštěvujících různé kroužky/poslanců různých klubů jsou prázdné. Počty žáků, kteří využili jednotlivé způsoby zápisu, jsou zaznamenány v tabulce 17.

Tabulka 17 – Počty žáků, kteří využili daný způsob zápisu slovní úlohy u sady 9A

	Použilo	Nepoužilo
Slovní legenda	119	63
Tabulková legenda	2	180
Obrázková legenda	1	181
Algebraická legenda	129	53

Jedním ze zkoumaných parametrů žákovských řešení, u nějž se předpokládal vliv pořadí informací, byla volba neznámé, k níž se vztahuje zbytek hodnot figurujících v konečné rovnici. Předpokladem bylo, že žáci budou za tuto neznámou volit počet dětí/poslanců, který se v zadání vyskytuje na prvním místě, tedy počet dětí navštěvujících kroužek košíkové/počet poslanců klubu liberálů. Tuto volbu učinili pouze tři z žáků, dva u varianty 9A2 a jeden u varianty 9A4. Všichni ostatní žáci jako neznámou volili počet dětí navštěvujících kroužek gymnastiky/počet poslanců klubu konzervativců. Podle předpokladu nikdo z žáků nezvolil jako neznámou počet dětí v kroužku plavání/počet poslanců strany zelených.

Tato volba by mohla být odůvodněna snadnějším vyjádřením ostatních vztahů, protože ve většinově zvoleném případě se na rozdíl od ostatních případů v rovnici nevyskytují neceločíselné koeficienty. Avšak v sadě úloh 9C, jak je popsáno níže, byl také za základní neznámou většinou volen údaj, vyskytující se na druhém místě v zadání bez ohledu na to, že taková volba v této sadě úloh neposkytuje žádné zjednodušení výpočtu. Žáci si také základní neznámou volili tímto způsobem hned na první pokus i přesto, že zjednodušení výpočtu touto volbou nemusí být na první pohled patrné. Lze se tedy domnívat, že důvod pro tuto volbu spočívá v něčem jiném.

Při dodatečných rozhovorech uváděli žáci 9. ročníků, že tato volba vychází ze struktury věty v zadání úlohy: „Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku.“ Tím, že se počet dětí navštěvujících kroužek košíkové vymezuje v poměru ke gymnastice, jim připadalo logické, aby za neznámou volili právě počet dětí chodících na gymnastiku.

Toto pojetí je v rozporu s aktuálním větným členěním, které formuloval v rámci *Functional Sentence Perspective* Vilém Mathesius. Podle něj ve větě s objektivním slovosledem, jakou by věta „Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku.“ bez pochyby byla, vycházíme na začátku věty ze známé skutečnosti a na konci věty, v rématické části, se nacházejí skutečnosti nové. Podle tohoto pojetí by tedy volba košíkové, jakožto základní neznámé, dávala větší smysl. Tento rozpor by bylo vhodné podrobit důkladnému lingvistickému zkoumání, které však není náplní této práce.

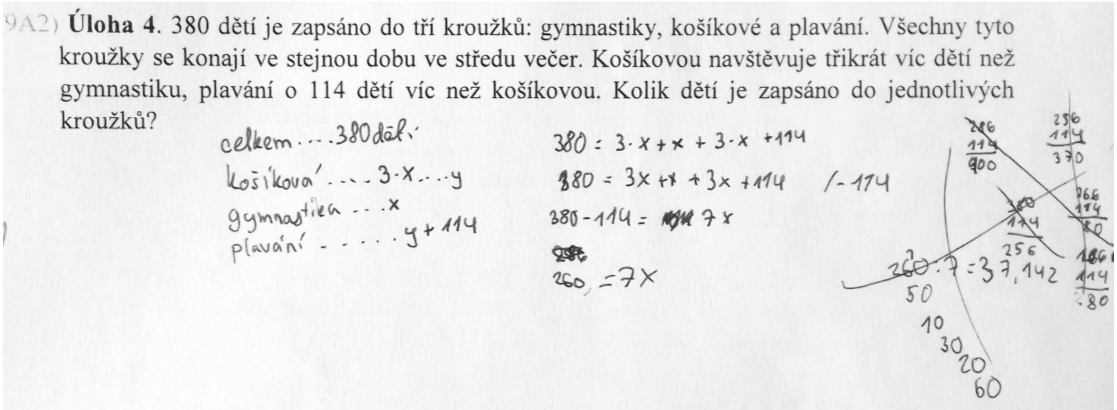
Dalším zkoumaným aspektem řešení úloh bylo pořadí stran rovnice v závislosti na pořadí informací v zadání úlohy. Předpokládalo se, že pokud budou žáci sestavovat rovnici čistě na základě pořadí informací v zadání, bude se u úloh 9A2 a 9A4, v porovnání s jejich paralelními úlohami, častěji vyskytovat údaj o celkovém počtu dětí/poslanců na levé straně rovnice. Tento předpoklad se nepotvrdil, jak je patrné z tabulky 18.

Tabulka 18 – Počet řešení s celkovým počtem dětí na levé straně rovnice u sady úloh 9A

Název úlohy	9A1	9A2	9A3	9A4
Počet řešení s celkovým počtem dětí na levé straně rovnice	5	7	3	1

Není zde tedy patrný žádný významný rozdíl mezi úlohami, v nichž se tento údaj vyskytuje na prvním, nebo na posledním místě. U pěti žáků se zdá, že by jejich volba mohla být ovlivněna pořadím informací v zadání, protože jejich volba se jeví jako konzistentní i se sadou úloh 9C. Avšak pouze u třech z celkových šestnácti žáků, kteří údaj o celkovém počtu napsali na levou stranu, se jejich volba liší u úlohy ze sady 9C. Dá se tedy předpokládat, že volba, na kterou stranu rovnice žák napíše neznámou, je ovlivněna jeho osobními preferencemi, nezávislými na podobě zadání úlohy.

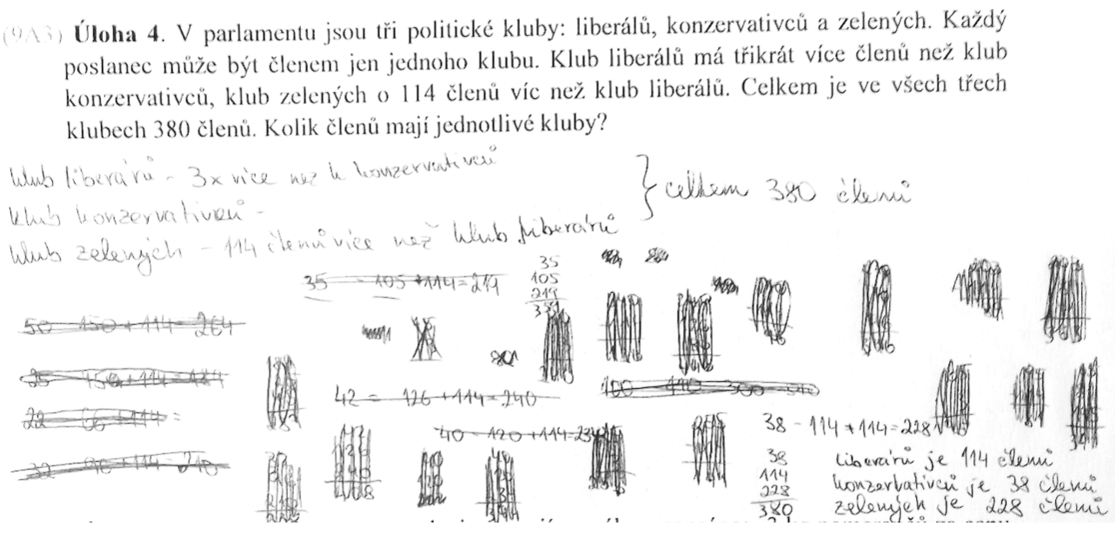
Pokud jde o konkrétní metody řešení, uchýlila se naprostá většina žáků, nezávisle na variantě úlohy, k řešení pomocí rovnice. Díky tomu, že si žáci téměř výlučně za neznámou zvolili počet dětí navštěvujících gymnastiku/počet poslanců strany konzervativců, se řešení shodují s řešením č. 2 uvedeným výše. Ne vždy však žáci vyjadřovali počty dětí rovnou pomocí jedné neznámé, často k tomuto vyjádření docházeli postupně. Jeden ze zápisů ukazuje obr. 4.



Obrázek 4 – Využití více neznámých

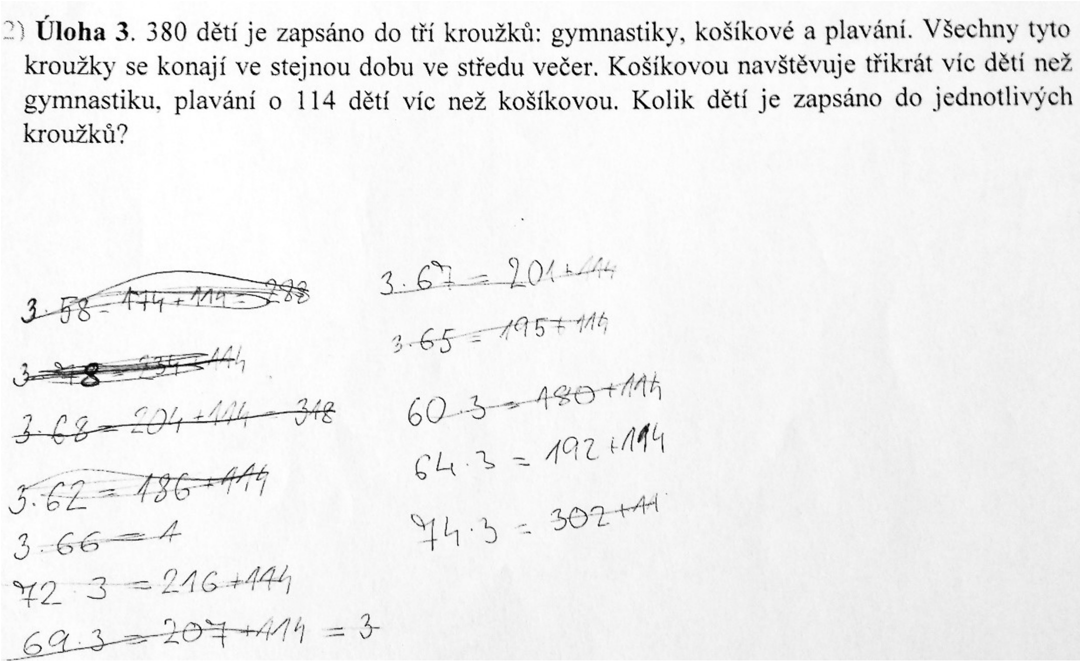
Pro vyjádření počtu dětí navštěvujících košíkovou využívá žák vyjádření *3x* a zároveň *y*, pomocí nějž posléze vyjadřuje počet žáků chodících na plavání. V samotné rovnici však již vystupuje pouze neznámá *x* a všechny ostatní hodnoty jsou vyjádřeny pomocí ní.

Metodou pokus omyl se úlohu snažilo řešit celkem devět žáků, z nichž sedm nakonec dospělo ke správnému řešení. Jejich postupy se značně lišily. Někteří z žáků tipovali nahodile různé hodnoty, jiní postupovali systematicky a postupně se blížili ke správné kombinaci. Například jeden z žáků postupně zkoušel, jak by mu při volbě počtu členů klubu konzervativců vycházel počet zelených. Počty členů následně sčítal a na základě výsledků upravoval svůj odhad týkající se počtu konzervativců. Následuje řešení pomocí postupné aproximace (viz obr. 5).



Obrázek 5 – Metoda postupné aproximace

Na výše uvedeném postupu je vidět, jak žák využívá své průběžné výsledky ke zpřesňování svého počátečního odhadu a díky této strategii se dostává ke správnému výsledku. Další z žáků také náhodně volí počet dětí navštěvujících gymnastiku a poté dopočítá zbylé hodnoty, avšak v tomto případě nevyužívá dílčích výsledků a volí nadále čistě náhodně (viz obr. 6).


2) **Úloha 3**. 380 dětí je zapsáno do tří kroužků: gymnastiky, košíkové a plavání. Všechny tyto kroužky se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

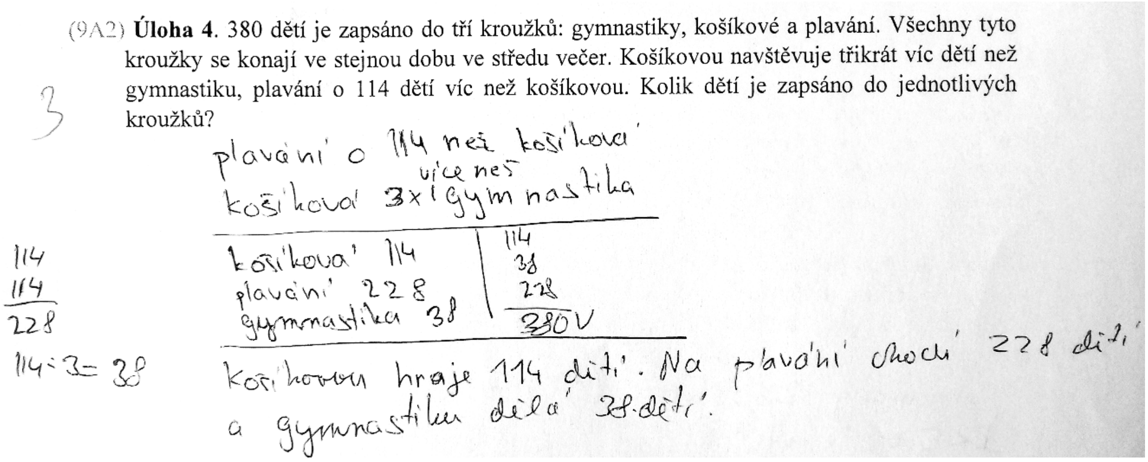
~~3·58 = 174 + 114 = 288~~
~~3·118 = 354 + 114~~
~~3·68 = 204 + 114 = 318~~
~~3·62 = 186 + 114~~
3·66 = 4
72·3 = 216 + 114
69·3 = 207 + 114 = 3

3·67 = 201 + 114
3·65 = 195 + 114
60·3 = 180 + 114
64·3 = 192 + 114
74·3 = 302 + 14

Obrázek 6 – Metoda pokus omyl bez systematického zápisu

Touto strategií ověří postupně několik počtů dětí na gymnastice, z nichž ani jeden není správný, a poté žák přestane úlohu řešit.

Zvláštní skupinou jsou žáci, kteří bez uvedení dílčích výpočtů dospějí přímo ke správné kombinaci hodnot, tedy (38; 114; 228), kterou zdánlivě pouze ověří a rovnou píší odpověď. Dva žáci dokonce napsali pouze správné řešení, bez jakéhokoliv postupu. Pro tento jev mohou být různá vysvětlení. Prvním z nich je možnost, že tito žáci opsali hodnoty od některého ze svých spolužáků a pouze je ověřili (což mohlo být dáno tím, že před testem byli instruováni, že nemají opisovat, protože testy jsou různé, i když se na první pohled mohou zdát stejné). Druhou možností je, že žáci dělali pomocné výpočty na zvláštní papír, který nebyl k testu přiložen, což by bylo v rozporu s pravidly testování. Tato možnost je tedy vysoce nepravděpodobná. Třetí vysvětlení poskytuje varianta, že žáci byli schopni vyřešit rovnici z hlavy a pouze si ověřili svůj výpočet. A poslední možností, jež se jeví jako nejpravděpodobnější, je, že žáci tipli za počet dětí navštěvujících košíkovou či za počet členů klubu liberálů hodnotu 114, která je jedním z pouhých dvou číslem vyjádřených údajů v zadání. Tato hodnota je shodou okolností správným řešením. Skutečnosti, že se jedná o náhodnou volbu, napovídá i podoba zápisu úlohy (viz obr. 7).


(9A2) **Úloha 4**. 380 dětí je zapsáno do tří kroužků: gymnastiky, košíkové a plavání. Všechny tyto kroužky se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

plavání o 114 více než košíková
košíková 3x gymnastika

košíková 114
plavání 228
gymnastika 38

114
38
228
380 V

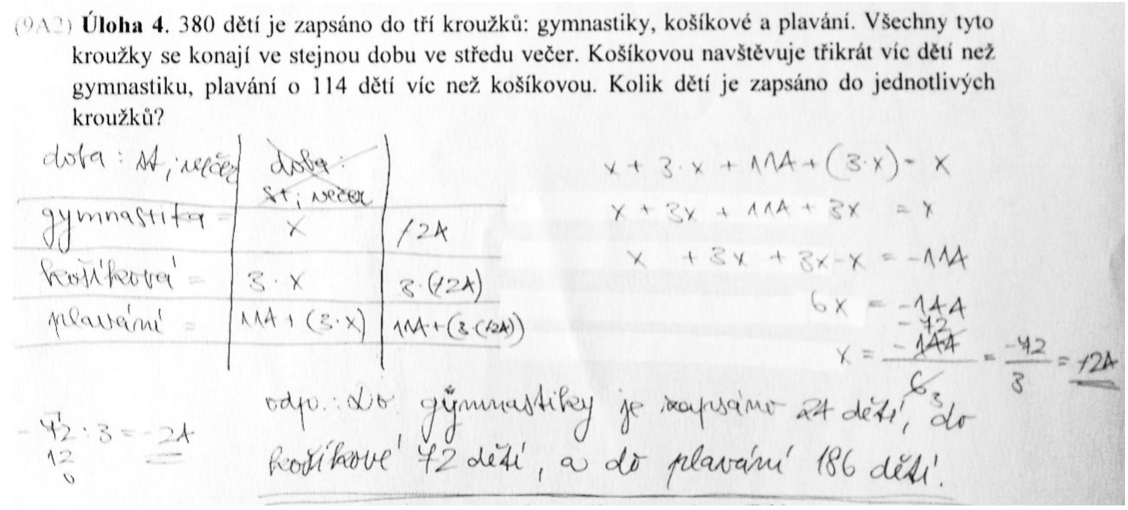
114
114
228
114 : 3 = 38

Košíkovou hraje 114 dětí. Na plavání chodí 228 dětí a gymnastiku dělá 38 dětí.

Obrázek 7 – Úspěšný odhad řešení na první pokus

Pro další testování by tedy bylo vhodné volit hodnoty tak, aby se vyloučila tato možnost.

V ojedinělých případech docházelo ke špatnému sestavení rovnice i tehdy, kdy žáci správně vyjádřili počty dětí/poslanců. Jedním z příkladů by mohlo být řešení na obr. 8, které je zajímavé také tím, že je jedno z mála, ve kterých se vyskytuje zápis formou tabulky.


(9A2) **Úloha 4**. 380 dětí je zapsáno do tří kroužků: gymnastiky, košíkové a plavání. Všechny tyto kroužky se konají ve stejnou dobu ve středu večer. Košíkovou navštěvuje třikrát víc dětí než gymnastiku, plavání o 114 dětí víc než košíkovou. Kolik dětí je zapsáno do jednotlivých kroužků?

doba: st, večer	~~doba~~ st; večer	
gymnastika =	x	12
košíková =	3 · x	3 · (12)
plavání =	114 + (3 · x)	114 + (3 · (12))

$x + 3 \cdot x + 114 + (3 \cdot x) = x$

$x + 3x + 114 + 3x = x$

$x + 3x + 3x - x = -114$

$6x = -114$

$x = \frac{-72}{6} = \frac{-12}{3} = 12$

$-42 : 3 = -24$

odp.: Do gymnastiky je zapsáno 24 dětí, do košíkové 72 dětí, a do plavání 186 dětí.

Obrázek 8 – Chybné sestavení rovnice

V tomto řešení žák pokládá součet dětí navštěvujících jednotlivé kroužky roven počtu dětí navštěvujících gymnastiku. Je tedy zřejmé, že žákovo poznání týkající se rovnic je zatím pouze ve formální rovině. Dokáže s rovnicí pracovat a provádí bez problémů ekvivalentní úpravy, avšak neuvědomuje si, co celá rovnice vyjadřuje ve vztahu k dané úloze. Absence tohoto spojení je patrná také ze způsobu, jakým žák vyřešil situaci na konci rovnice. Hodnota x mu po vyřešení rovnice vyšla záporná a z vedlejšího výpočtu $-72 : 3 = -24$ je vidět, že na znaménko pouze nezapomněl, ale rozhodl se ho změnit na plus. Tato skutečnost svědčí o tom, že si žák uvědomuje vztah mezi svým vyjádřením počtů dětí a zadáním úlohy. Je mu tedy jasné, že kroužek nemůže navštěvovat záporný počet lidí. Toto uvědomění ho však nepřiměje ke kontrole sestavení rovnice a na místo toho pouze změní konečný výsledek.

Chyby, kterých se žáci při řešení dopouštěli, jsou spolu s počty žáků, v jejichž řešení se vyskytly, uvedeny v tabulce 19.

Tabulka 19 – Počty žákovských řešení obsahujících chybu v daném kroku řešení u sady úloh 9A

	Počet řešení s danou chybou
Chybná matematizace vztahu základní neznámé a druhého údaje	7
Chybná matematizace vztahu základní neznámé a třetího údaje	21
Chybné sestavení rovnice, či jiného vyjádření vzájemných vztahů	11
Chybně provedená úvaha v případě řešení bez využití rovnice	13
Chybné vyřešení sestavené rovnice	22
Chybné dosazení při výpočtu výsledku druhého údaje	5
Chybné dosazení při výpočtu výsledku třetího údaje	6
Jiná chyba	2

Vzhledem k tomu, že chyby uvedené v tabulce se vzájemně nevylučují, mohli se žáci dopustit chyb ve více krocích řešení. Tato řešení jsou tedy případně započítána opakovaně. Zbylí žáci řešili bez chyby, a buď dospěli ke konečnému výsledku a dosáhli plného počtu bodů, nebo skončili v průběhu řešení, aniž by udělali chybu, a jsou hodnoceni nulou, nebo jedním bodem. Nejčastěji se chyby vyskytovaly při matematizaci vztahů mezi jednotlivými údaji v zadání nebo při řešení samotné rovnice. Při řešení rovnice byly chyby nejčastěji způsobeny špatně provedenými úpravami či se jednalo o chyby numerické. Z hlediska matematizace vztahů žáci nejčastěji chybovali při vyjadřování vztahu mezi základní neznámou a třetím údajem. Dodatečné rozhovory s žáky naznačují, že vzhledem ke způsobu volby neznámé, který je popsán níže, se jednalo o vztah mezi údaji, jež nebyly vyjádřeny ve stejné větě.

Podoby řešení z hlediska odpovědí na slovní úlohu jsou uvedeny v tabulce 20.

Tabulka 20 – Počty řešení sady úloh 9A s ohledem na formu odpovědi na slovní úlohu

	Počet řešení
Správná slovní odpověď	77
Nesprávná slovní odpověď	9
Chybí odpověď, ale výsledek je jednoznačně vyznačen	16
Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který je považován za konečný	3
Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který není považován za konečný	47

Zbývajících 30 žáků ve svém řešení nedošlo ani k dílčímu výsledku. Nejčastějším způsobem prezentace řešení slovní úlohy tedy byla slovní odpověď. To je jistě alespoň částečně zapříčiněno tím, že žáci byli k tomuto způsobu uvádění výsledku vyzváni v pokynech, uvedených v testu, a kromě toho se jedná o způsob tradičně využívaný při výuce slovních úloh v hodinách matematiky. Dále je zajímavé, že si žáci uvědomují, zda dosáhli konečného řešení, či nikoliv. To však může být způsobeno relativně malou komplexností této sady úloh, ve které vychází konečný výsledek základní zvolené neznámé přímo ze sestavené rovnice a zbylé údaje se dopočítají ze vztahů, které byly pro sestavené rovnice využity.

4.3 Kvalitativní analýza řešení sady úloh 9C

U této sady úloh se o řešení pokusilo 175 z celkového počtu 182 žáků. Ve 149 řešeních se vyskytuje zápis úlohy jedním nebo více způsoby, 33 žáků řešilo zadanou úlohu bez zápisu. Počty řešení, v nichž se objevují dané způsoby zápisu, jsou uvedeny v tabulce 21.

Tabulka 21 - Počty žáků, kteří využili daný způsob zápisu slovní úlohy u sady 9C

	Použilo	Nepoužilo
Slovní legenda	118	64
Tabulková legenda	2	180
Obrázková legenda	2	180
Algebraická legenda	127	55

Stejně jako u sady úloh 9A byla nejčastější kombinace slovní a algebraické legendy. Obecně se dá pozorovat stejný způsob zápisu u obou řešených úloh v případě většiny žáků, čemuž odpovídají i celkové počty řešení obsahujících různé způsoby zápisu, které jsou téměř totožné s počty u sady úloh 9A, viz tabulka 17.

Pokud se jedná o volbu základní neznámé, k níž se vztahuje zbytek informací ze zadání, volili žáci v naprosté většině případů počet výprav či výdělek Evy, jak je patrné z tabulky 22.

Tabulka 22 – Počet řešení podle volby základní neznámé u jednotlivých úloh

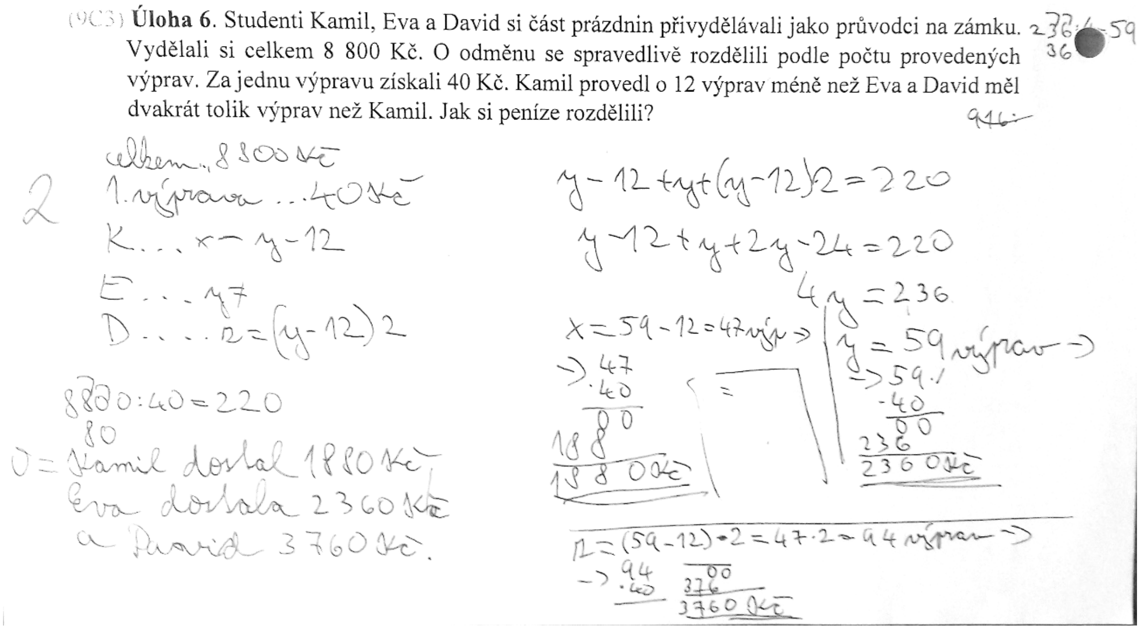
	9C1	9C2	9C3	9C4
Eva	34	25	27	32
Kamil	4	6	5	1
David	0	0	0	0

Jedná se tak o stejný případ jako u sady úloh 9A, který byl popsán výše, tedy o rozpor s předpokládanou volbou, kterou byl Kamilův počet výprav či jeho výdělek. Na rozdíl od předchozí sady úloh se zde nedá tato volba vysvětlovat zjednodušením výpočtu, jelikož vyjádření počtů výprav či výše výdělků v závislosti na Evě vyžaduje, na rozdíl od Kamila, použití závorek a operace odčítání na místo sčítání.

Nezbývá tedy než přijmout fakt, že tato volba neznámé závisí na její pozici ve větě a stavba věty v zadání je důležitější než pořadí prezentovaných informací. I u této sady úloh totiž žáci devátých tříd uvádějí, že jim připadá „logičtější“ kvůli tomu, jak je věta postavena, a volbu provádějí podvědomě.[17] Podle předpokladů si nikdo z žáků nezvolil jako základní neznámou počet výprav či výdělek Davida. Hlavním důvodem zde však pravděpodobně nebyla složitost vyjádření počtu výprav či výdělku ostatních studentů, ale pořadí informací v zadání. Při dodatečných rozhovorech totiž žáci většinou volili základní neznámou hned po přečtení věty v zadání, která srovnává Kamila s Evou. Údaje týkající se Davida pak byly vždy doplňovány až jako úplně poslední. Většina zápisů úlohy tedy odpovídá řešení č. 6 s jediným rozdílem, kterým je často chybějící údaj o celkovém počtu výprav, viz níže.

[17] Tento údaj pochází z dodatečných rozhovorů s žáky devátých tříd, kteří se neúčastnili hlavního testování.

Většina žáků ve svém zápisu automaticky vyjadřovala vztahy mezi počty výprav jednotlivých studentů za pomoci jedné neznámé, avšak někteří žáci přiřadili neznámou každému ze studentů a následně vybrali jednu z nich a s její pomocí vyjádřili ostatní neznámé (viz obr. 9).


(9C3) **Úloha 6.** Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Vydělali si celkem 8 800 Kč. O odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Jak si peníze rozdělili?

celkem... 8 800 Kč
1. výprava ... 40 Kč
K... x = y − 12
E... y
D... z = (y − 12)2

8800 : 40 = 220

$y - 12 + y + (y-12)2 = 220$
$y - 12 + y + 2y - 24 = 220$
$4y = 236$
$y = 59$ výprav
$x = 59 - 12 = 47$ výp.
$z = (59-12)\cdot 2 = 47 \cdot 2 = 94$ výprav

O = Kamil dostal 1880 Kč
Eva dostala 2360 Kč
a David 3760 Kč.

Obrázek 9 – Řešení začínající volbou více neznámých

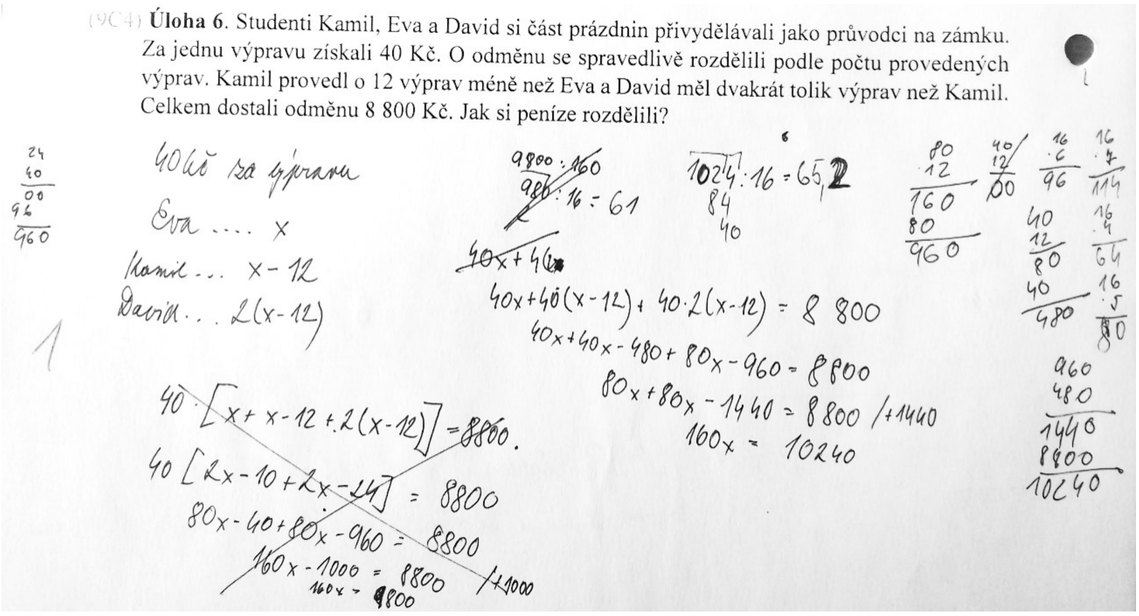
Předpoklad týkající se častějšího výskytu celkového výdělku či počtu výprav na levé straně rovnice u úloh 9C1 a 9C3 se, stejně jako u předchozí sady úloh, nepotvrdil. Jak již bylo zmíněno výše, zdá se, že tato volba závisí daleko více na školních zvyklostech a u žáků, vyjadřujících údaj o celku na levé straně rovnice, se jedná spíše o osobní preferenci, která není ovlivněna pořadím informací v zadání úlohy.

Dalším zkoumaným aspektem řešení sady úloh 9C je způsob, jakým byla rovnice sestavena. Jak již bylo uvedeno v oddíle 3.4.2, dají se předpokládat dva různé přístupy k sestavení rovnice při řešení úlohy. Zatímco jednou možností je zvlášť vypočítat celkový počet provedených výprav a v rovnici poté pracovat přímo s tímto údajem, druhou variantou je sestavit rovnici ze všech poskytnutých údajů najednou. První zmíněný přístup se jeví jako jednodušší, předpokládalo se tedy, že bude využit častěji. Tento předpoklad se potvrdil pouze u úlohy 9C3, jak je patrné v tabulce 23.

Tabulka 23 – Způsoby řešení jednotlivých variant úloh 9C

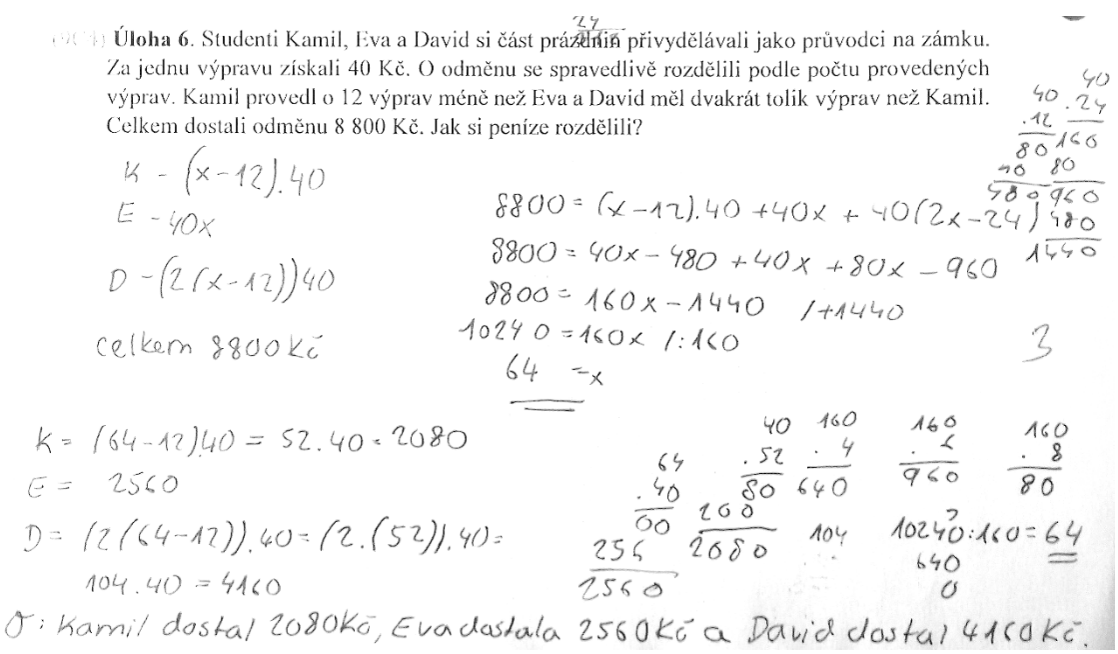
	9C1	9C2	9C3	9C4
Oddělený výpočet výprav	11	12	19	14
Řešení přes jednu rovnici	24	16	10	16
Rovnice nebyla vytvořena	8	13	15	10
Úloha neřešena	2	5	2	5

Někteří z žáků, kteří úlohu řešili pomocí jedné rovnice, zakomponovali výši odměny za jednu výpravu přímo do vyjádření celkové vydělané částky každého ze studentů, jiní ji zohlednili až následně při sestavení rovnice. De facto tak také počítali počet výprav, jen ho provedli v rámci řešení samotné rovnice (viz obr. 10).


(9C4) **Úloha 6**. Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Za jednu výpravu získali 40 Kč. O odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Celkem dostali odměnu 8 800 Kč. Jak si peníze rozdělili?

Obrázek 10 – Sestavení rovnice s využitím výše odměny za jednu výpravu a celkovou vydělanou částkou

Žáci z první zmíněné skupiny řešitelů postupovali stejným způsobem, jako je uvedeno v předpokládaném řešení č.8 (viz obr. 11).


Úloha 6. Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Za jednu výpravu získali 40 Kč. O odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Celkem dostali odměnu 8 800 Kč. Jak si peníze rozdělili?

K - $(x-12).40$
E - $40x$
D - $(2(x-12))40$
celkem 8800 Kč

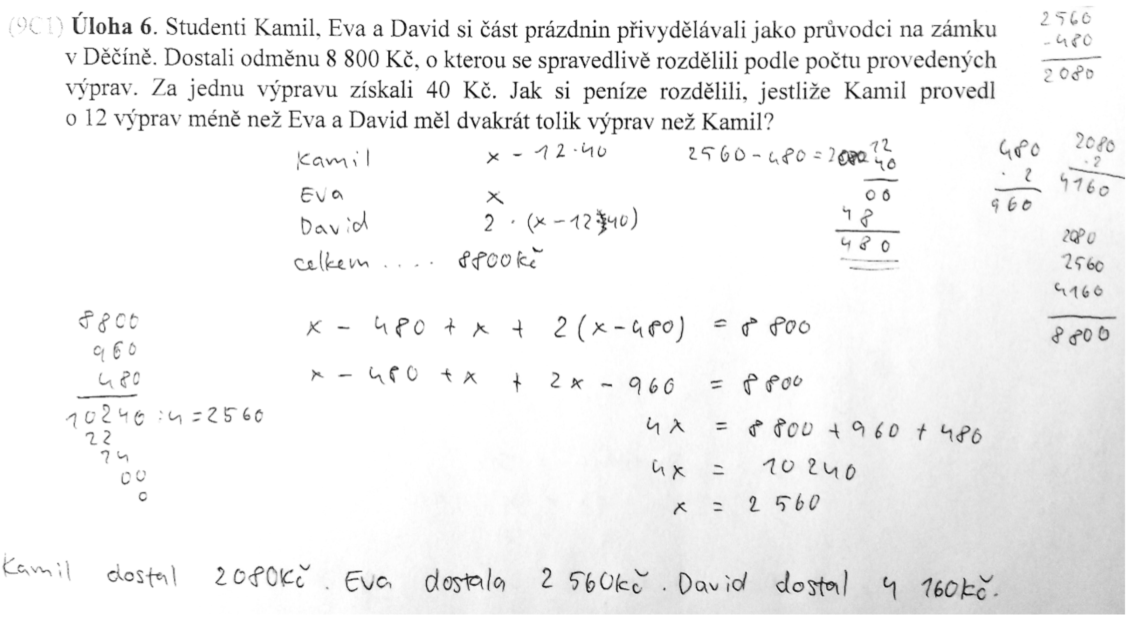
$8800 = (x-12).40 + 40x + 40(2x-24)$
$8800 = 40x - 480 + 40x + 80x - 960$
$8800 = 160x - 1440 \quad /+1440$
$10240 = 160x \quad /:160$
$64 = x$

$K = (64-12)40 = 52.40 = 2080$
$E = 2560$
$D = (2(64-12)).40 = (2.(52)).40 = 104.40 = 4160$

O: Kamil dostal 2080Kč, Eva dostala 2560Kč a David dostal 4160Kč.

Obrázek 11 – Výpočet počtu Kamilových výprav, bez vyjádření celkového počtu výprav

Případně promítli cenu za jednu výpravu pouze do údaje o rozdílném počtu výprav jako v řešení na obr. 12.


Úloha 6. Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku v Děčíně. Dostali odměnu 8 800 Kč, o kterou se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Jak si peníze rozdělili, jestliže Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil?

Kamil $x - 12 \cdot 40$
Eva x
David $2 \cdot (x - 12 \cdot 40)$
celkem .... 8800 Kč

$x - 480 + x + 2(x-480) = 8800$
$x - 480 + x + 2x - 960 = 8800$
$4x = 8800 + 960 + 480$
$4x = 10240$
$x = 2560$

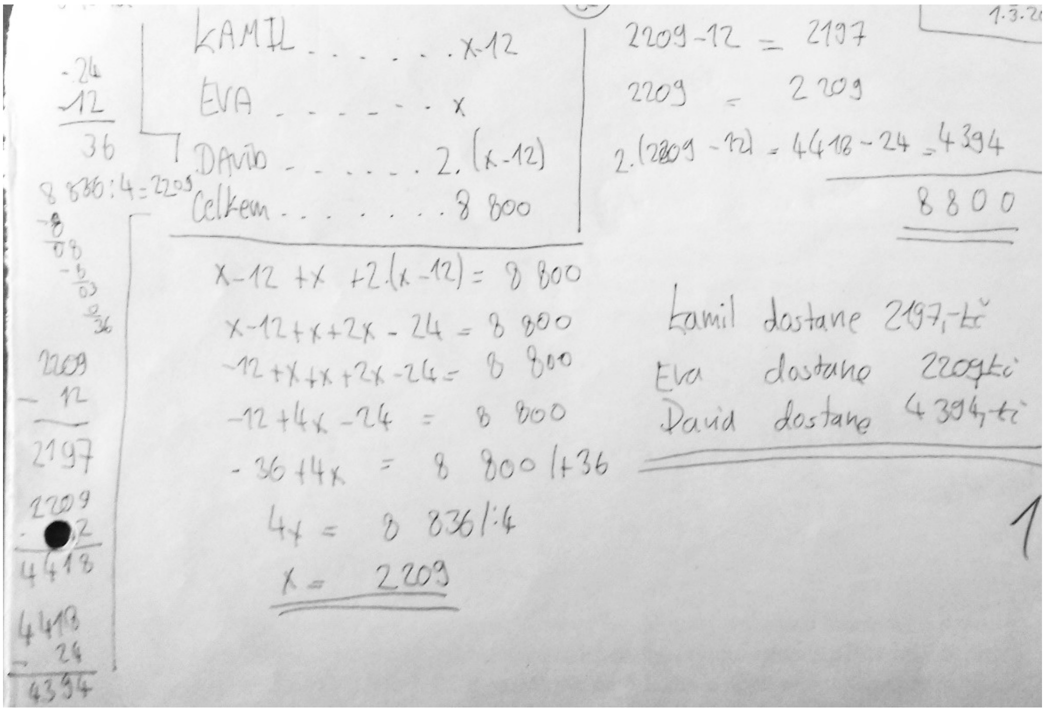
$2560 - 480 = 2080$

Kamil dostal 2080Kč. Eva dostala 2560Kč. David dostal 4160Kč.

Obrázek 12 – Sestavení rovnice se zohledněním odměny za jednu výpravu pouze v rozdílu mezi výdělky jednotlivých studentů

Tímto způsobem si oproti řešení č. 8 usnadnili práci, protože nemuseli pracovat s tak vysokými koeficienty u neznámé a zachovali si výhodu, že při zpětném dosazení do vztahu dostanou přímo celkový výdělek každého ze studentů.

Při tomto způsobu řešení však často docházelo k nesprávnému sestavení rovnice. Nejčastěji spočívala chyba v tom, že žáci dali do rovnosti vyjádření počtů výprav jednotlivých studentů s výší jejich celkového výdělku. Řešení těchto žáků pak vypadala tak, jak ukazuje obr. 13.



Obrázek 13 – Chybné sestavení rovnice, v němž není zohledněna výše odměny za jednu provedenou výpravu

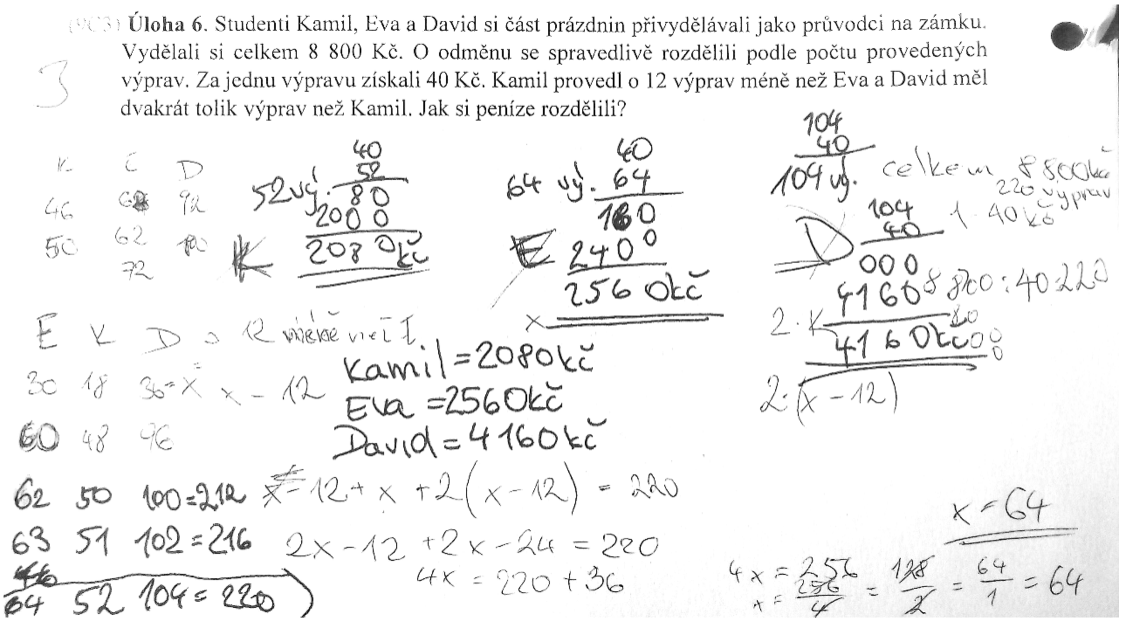
V tomto konkrétním případě dokonce žák provedl i zkoušku správnosti řešení rovnice, která mu samozřejmě vyšla, protože rovnici řešil pomocí ekvivalentních úprav. Výsledek ale správný není, protože žák položil do rovnosti vyjádření celkového počtu výprav všech studentů a celkový výdělek. Žák tedy provedl pouze první část páté fáze řešení podle Jimeneze a Verschaffela (2014), zhodnocení správnosti výpočtu vedoucího k matematickým výsledkům, ale vynechal druhou část této fáze, kterou je ověření relevance matematických výsledků.

V případě chyby, při níž žáci nevyužívají údaj o výši odměny za jednu provedenou výpravu, je již možné pozorovat určitou souvislost mezi její četností a pořadím informací v zadání úlohy.

Tabulka 24 – Četnost chyby typu uvedeného na obrázku 13 u jednotlivých úloh

9C1	9C2	9C3	9C4
11	16	7	12

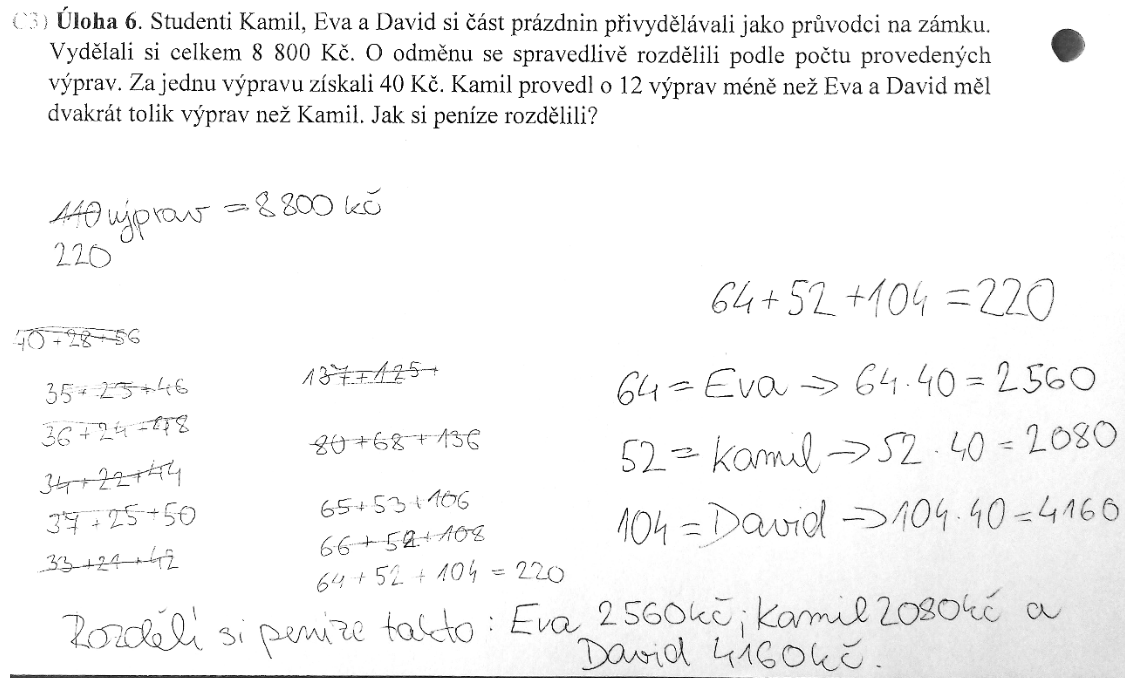
V úlohách 9C1 a 9C3, ve kterých žáci tuto chybu neudělali tak často, je informace o výši odměny za jednu výpravu uvedena hned za informací o tom, kolik si studenti celkově vydělali peněz. Ve zbylých úlohách, tedy 9C2 a 9C4, je výše odměny za jednu výpravu uvedena hned jako první z údajů, které jsou nezbytné k vyřešení úlohy, ale od celkového výdělku všech studentů je tato informace oddělena vyjádřením vzájemných vztahů mezi počty výprav jednotlivých studentů. Vzhledem k tomu, že celkový výdělek a výše odměny za jednu výpravu jsou údaje, s nimiž je potřeba pracovat společně, zdá se, že jejich vzájemná blízkost v zadání snižuje riziko opomenutí jednoho z nich při sestavování rovnice.



Obrázek 14 – Metoda postupné aproximace

Celkem osm žáků se úlohu pokusilo vyřešit metodou pokus omyl, z toho pět z nich bylo úspěšných. Pět z těchto osmi žáků využilo stejnou strategii i při řešení předchozí sady úloh. Je tedy možné, že tito žáci nepochopili, jak se dá využít rovnice při řešení slovních úloh, nebo jim byla metoda pokus omyl bližší. To je patrné na příkladu jednoho z žáků (viz obr. 14), který se uchýlil k využití metody postupné aproximace, navzdory správnému vyjádření vzájemných vztahů počtů výprav jednotlivých studentů, které byl nakonec schopen využít pro správné sestavení rovnice. Ze způsobu, jakým je zapsáno jeho řešení, není jasně patrné, v jakém sledu byly kroky řešení provedeny, avšak lze předpokládat, že správně vyřešená rovnice sloužila pouze jako kontrola pro ověření výsledku získaného metodou postupné aproximace, jinak by nebylo nezbytné tuto metodu aplikovat. Řešení tohoto žáka je příkladem vhodně využité metody pokus omyl, při které řešitel využívá průběžných výsledků k upravení svého odhadu (obr. 14).

Na uvedeném řešení je možné pozorovat další zajímavou skutečnost. Žák si nejprve zvolil jako základní neznámou Kamilův počet výprav, později však svou volbu upravil na počet výprav Evy. Důvod pro tuto změnu není jasný, možná chtěl žák mít hodnoty v takovém pořadí, aby mohl postupně přecházet z jednoho počtu výprav na druhý. V novém pořadí by tedy mohl přejít z počtu výprav Evy na počet výprav Kamila pouhým odečtením dvanácti a poté přímo z počtu výprav Kamila dojít na počet výprav Davida pouhým vynásobením dvěma, a nemusel by se tedy pro prvního činitele vracet k první zvolené hodnotě, jako tomu bylo u předchozího výběru základní neznámé. Toto vysvětlení je však čistě spekulativní. Dále je možno si povšimnout, že po nové volbě základní neznámé začíná žák řešit úlohu úplně od začátku a nevyužívá průběžné výsledky, které prozatím dostal, k úpravě svých dalších odhadů.


(3) **Úloha 6**. Studenti Kamil, Eva a David si část prázdnin přivydělávali jako průvodci na zámku. Vydělali si celkem 8 800 Kč. O odměnu se spravedlivě rozdělili podle počtu provedených výprav. Za jednu výpravu získali 40 Kč. Kamil provedl o 12 výprav méně než Eva a David měl dvakrát tolik výprav než Kamil. Jak si peníze rozdělili?

~~110~~ výprav = 8 800 kč
220

~~40 + 28 + 56~~
~~35 + 23 + 46~~
~~36 + 24 + 48~~
~~34 + 22 + 44~~
~~37 + 25 + 50~~
~~33 + 21 + 42~~

~~137 + 125 +~~
~~80 + 68 + 136~~
~~65 + 53 + 106~~
~~66 + 52 + 108~~
64 + 52 + 104 = 220

64 + 52 + 104 = 220
64 = Eva → 64 · 40 = 2560
52 = kamil → 52 · 40 = 2080
104 = David → 104 · 40 = 4160

Rozdělí si peníze takto: Eva 2560kč; kamil 2080kč a David 4160kč.

Obrázek 15 – Metoda pokus omyl bez zjevného systému

Mezi žáky řešícími úlohu metodou pokus omyl byli však i někteří, kteří tipovali hodnoty zdánlivě bez jakéhokoliv systému, a nakonec se jim povedlo dobrat se správného výsledku (viz obr. 15).

Na tomto řešení je vidět, že žák neupravoval své odhady po každém pokusu, pouze po několika pokusech zkusil změnit počet Eviných výprav o větší hodnotu. Až ke konci řešení, od uspořádané trojice (137;125;250), je patrné, že se žák postupně blíží ke správnému řešení.

Počty žáků, kteří udělali chybu v dané části řešení, jsou zaznamenány v tabulce 25.

Tabulka 25 – Počty žákovských řešení obsahujících chybu v daném kroku řešení u sady úloh 9C

	Počet řešení s danou chybou
Chybný výpočet počtu výprav	3
Chybná matematizace vztahu základní neznámé a druhého údaje	24
Chybná matematizace vztahu základní neznámé a třetího údaje	36
Chybné sestavení rovnice, či jiného vyjádření vzájemných vztahů	82
Chybně provedená úvaha v případě řešení bez využití rovnice	7
Chybné vyřešení sestavené rovnice	4
Chybné dosazení při výpočtu výsledku druhého údaje	0
Chybné dosazení při výpočtu výsledku třetího údaje	1
Chybné dopočítání odměny studenta, k němuž jsou vztahováni ostatní	1
Chybné dopočítání odměny druhého studenta	1
Chybné dopočítání odměny třetího studenta	1
Jiná chyba	24

Nejproblematičtějším krokem řešení se ukázalo být sestavení rovnice vyjadřující vzájemné vztahy všech údajů uvedených v zadání úlohy. Tento krok nečinil problémy žákům, kteří předem vypočítali celkový počet výprav, ale byl velmi problematický pro ostatní. Nejčastěji docházelo, jak je uvedeno výše, k situaci, kdy žáci dali do rovnosti vyjádření počtů výprav jednotlivých studentů s výší jejich celkového výdělku, viz obr. 13. Další částí řešení, v níž žáci často chybovali, bylo matematizování vzájemných vztahů mezi počty výprav/výdělky jednotlivých studentů. Vzhledem k tomu, že žáci téměř výlučně volili jako základní neznámou počet výprav Evy, docházelo často k chybě při vyjádření počtu Davidových výprav, a to nepoužitím závorky ve výrazu $2 \cdot (y - 12)$.

Způsob prezentace dosažených výsledků při řešení úlohy je uveden v tabulce 26.

Tabulka 26 – Počty řešení sady úloh 9C s ohledem na formu odpovědi na slovní úlohu

	Počet řešení
Správná slovní odpověď	33
Nesprávná slovní odpověď	32
Chybí odpověď, ale výsledek je jednoznačně vyznačen	29
Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který je považován za konečný	12
Ukončení výpočtu dílčím výsledkem, který není považován za konečný	52

Dalších 24 žáků, kteří nejsou v tabulce 26 uvedeni, nedosáhlo ve svých řešeních ani dílčího výsledku. Nejčastěji byl výsledek opět uveden ve formě slovní odpovědi, avšak oproti sadě úloh 9A, popsané v oddíle 4.2., se zvýšil počet nesprávných odpovědí, což koresponduje s nižší úspěšností u sady 9C. Narostl i počet případů, kdy žák výsledek pouze jednoznačně vyznačil ve svém řešení, ale slovní odpověď nepoužil. Tato skutečnost by mohla být způsobena vyšší náročností sady úloh 9C, avšak o skutečném důvodu lze jen spekulovat. K navýšení došlo i u počtu případů, kdy žák prohlásil dílčí výsledek za konečný. To je pravděpodobně také zapříčiněno větší komplexností řešení této sady úloh. V ní je totiž nezbytné, alespoň při některých způsobech řešení, vynásobit počty výprav jednotlivých studentů, získaných řešením rovnice, výší odměny za jednu provedenou výpravu, což je krok, který se v sadě 9A nevyskytoval.

5 Diskuse a závěr

Hlavním cílem této práce bylo odhalit vliv parametru pořadí informací na řešení slovních úloh u žáků 9. ročníků základních škol, a to jak z hlediska obtížnosti úlohy, tak s ohledem na použité metody řešení u žáků a chyby, jichž se dopustili. U úloh lišících se v pořadí informací byla očekávána vyšší úspěšnost v případě těch úloh, u nichž pořadí údajů v zadání odpovídá pořadí, ve kterém jsou dané údaje použity při řešení. Tento předpoklad byl založen na předchozích studiích, které tento jev popisují, například (Wilkins, Baroody & Tiilikainen, 2001; Vicente, Orrantia & Verschaffel, 2008; Daroczy et al., 2015).

Pokud jde o rozdíly v úspěšnosti dvojic slovních úloh, lišících se pouze v pořadí informací, tyto nebyly shledány statisticky významnými. A to i přesto, že na první pohled jsou rozdíly v průměrné úspěšnosti při řešení těchto úloh značné. Z hlediska odlišností v metodách řešení v závislosti na parametru také nebyly odhaleny významné rozdíly.

Předpoklad týkající se volby neznámé jakožto prvního objektu zmíněného v zadání úlohy se také nepotvrdil. Téměř všichni žáci, konkrétně 141 ze 144 u sady úloh 9A a 118 ze 134 u sady úloh 9C, zvolili za neznámou objekt, vyskytující se na druhém místě ve větě. V tomto ohledu se zdá, že větší roli než pořadí informací, hraje větná struktura. Tato volba je v rozporu s aktuálním větným členěním, na jehož základě by se dalo očekávat, že údaj uvedený v tématické části bude volen jako základní neznámá a údaje v rématické části budou vyjadřovány ve vztahu k němu. Tento rozpor by bylo vhodné podrobit důkladnému lingvistickému zkoumání.

Očekávaný rozdíl ve straně rovnice, na které se bude vyjadřovat údaj o celku, se v rámci testování také neprojevil. Pouze zlomek žáků, kteří v rámci řešení úlohy sestavili rovnici, uvádí údaj o celku na její levé straně, 16 ze 130 u sady 9A a 13 ze 122 u sady 9C. Většina žáků tak uvádí neznámou na levé straně rovnice, a to nezávisle na pořadí, v jakém je v zadání uvedena informace týkající se celku, což odpovídá tradičnímu způsobu zápisu rovnic, který se používá při výuce matematiky.

Většina žáků si zvolila předpokládanou metodu řešení úlohy, tedy přes matematický model rovnice, a jediná další metoda řešení, která se u těchto sad úloh objevila, byla metoda pokus omyl. Tu použilo pouze 9 žáků u sady 9A a 8 žáků u sady 9C. Zkoumaný parametr se tedy do volby metody řešení také neprojevil.

Jediný zaznamenaný vliv zkoumaného parametru na podobu řešení úlohy se vyskytl u sady úloh 9C, a týká se chyby spočívající v nevyužití údaje o výši odměny za jednu provedenou výpravu. V úlohách 9C1 a 9C3, kde je informace o výši odměny za jednu výpravu uvedena hned za údajem o celkovém výdělku studentů, se tato chyba nevyskytuje tak často. Vzhledem k tomu, že s celkovým výdělkem a výší odměny za jednu výpravu je potřeba pracovat společně, zdá se, že jejich vzájemná blízkost v zadání snižuje riziko opomenutí jednoho z nich při sestavování rovnice.

Skutečnost, že se předpokládaný vliv parametru pořadí informací u zkoumané dvojice sad úloh nepotvrdil v očekávaném rozsahu, neznamená, že tento parametr nemůže v jiných případech řešení ovlivňovat. Jedním z důvodů, proč vliv tohoto parametru nevyšel statisticky významný, může být nedostatečná velikost vzorku. Dalším vysvětlením může být nedostatečný vliv tohoto parametru ve zvolené podobě. V sadách úloh 9A a 9C, které byly předmětem této práce, se tento parametr projevil pouze ve změně pořadí jednoho matematického údaje. Také se ani u jedné ze sad nejednalo o typ úlohy, v níž je nezbytné zjišťovat postupné mezivýpočty v určitém pořadí, pro který byla potvrzena významnost parametru pořadí informací v předchozích studiích (Wilkins, Baroody & Tiilikainen, 2001; Daroczy et al. 2015). V rámci zmíněného projektu GAČR je zjišťován vliv pořadí informací i u úloh určených žákům dalších ročníků základní školy. Je možné, že vliv tohoto parametru se zmenšuje s věkem. Výše zmíněné studie, ve kterých se vliv tohoto parametru potvrdil, se totiž zabývaly mladšími dětmi. Například Wilkins et al. zkoumali děti ve věku pět až šest let a Vicente et al. ve své studii analyzovali řešení žáků čtvrtých a pátých ročníků. Důvodem pro absenci vlivu tohoto parametru tedy může být skutečnost, že schopnost tvorby situačního modelu je u žáků devátých ročníků již na dostatečně vysoké úrovni.

Vliv doplňkových parametrů, které nebyly hlavní náplní této práce, tedy přítomnost známého, nebo neznámého kontextu u sady úloh 9A a přítomnost nepravé implikace v položené otázce u sady úloh 9C, se neukázal být statisticky významný.

Pokud jde o přítomnost nepravé implikace, nenašel jsem žádné studie, které by se tímto parametrem v českém prostředí zabývaly. Vzhledem k jeho podstatě je rovněž nepravděpodobné, že by byl v dané podobě zkoumán v zahraničních studiích. Bylo předpokládáno, že otázky, v nichž se nepravá implikace vyskytuje, budou pro žáky složitější na pochopení, což povede k nižší úspěšnosti žáků při řešení úlohy. I přesto, že se užití implikace v otázkách slovních úloh prokazatelně liší od logického významu implikace jako takové, zdá se, že tento rozpor úspěšnost žáků při řešení slovních úloh neovlivňuje. Je možné, že vliv tohoto parametru je pouze slabý a projevil by se v obsáhlejší studii. Pravděpodobně jsou však žáci na způsob, jakým se implikace v otázkách slovních úloh používá, natolik zvyklí, že je její přítomnost v pochopení úlohy nijak neovlivňuje.

V případě úloh lišících se v kontextu byla očekávána vyšší úspěšnost u úloh se známým kontextem oproti neznámému, jak vyplývá například z metastudie Hembree (1992) a výzkumu Palm (2008). Rozdíl mezi úlohami se však neukázal statisticky významný. Tato skutečnost může opět být důsledkem poměrně malého vzorku. Úlohy zasazené do známého kontextu zájmových kroužků řešilo 92 žáků a úlohy s neznámým kontextem poslaneckých klubů řešilo 90 žáků. Dalším z možných důvodů, proč bylo dosaženo výsledků v rozporu s předchozím zkoumáním, mohou být odlišnosti mezi vzorky zkoumaných žáků. Zatímco Palm se zabýval žáky čtvrtých až šestých tříd, řešení analyzovaná v rámci této práce pocházejí od žáků devátých ročníků. Je možné, že vliv parametru kontext slovních úloh se snižuje s tím, jak žáci nabývají dalších zkušeností s řešením slovních úloh. Hembree zase srovnával úlohy, u nichž se kontext lišil od sady úloh 9A ve větší míře. Je možné, že kontext poslaneckých klubů není již pro žáky 9. ročníků natolik neznámý, aby jim způsobil potíže při řešení.

U obou zkoumaných sad úloh se žáci dopouštěli chyb při vyjadřování vztahů mezi objekty matematickým modelem. Nejčastěji se jednalo o chyby při vyjádření třetího údaje v pořadí, u nějž lze na základě provedených dodatečných rozhovorů předpokládat, že byl matematizován až jako poslední. Především u sady 9C docházelo často ke špatnému využití závorek při vyjadřování vztahu násobku. Na problémy s použitím závorek v českém prostřední upozorňuje např. Žalská (2015). U sady úloh 9C převládala chyba spočívající ve špatném sestavení rovnice vyjadřující vzájemné vztahy všech objektů uvedených v zadání. Tuto chybu udělalo celkem 82 žáků. Důvodem pro tuto chybu byla povaha číselných údajů v zadání, které patřily do dvou různých vrstev. Jednalo se o vrstvu údajů týkajících se počtu výprav jednotlivých studentů a vrstvu peněz, které studenti za výpravy dostali. Pro přechody mezi údaji v jednotlivých vrstvách bylo zapotřebí využít informace o výši odměny za jednu provedenou výpravu, což však někteří žáci neudělali. Alarmující počet 122 z celkových 182 žáků nevyužil u sady 9C všechny potřebné údaje ze zadání.

Vzhledem k omezenému rozsahu této práce byl analyzován poměrně malý vzorek žáků, celkem 182, na dvou sadách úloh. Pro prokázání, či vyvrácení vlivu zkoumaných parametrů na úspěšnost či metody řešení je nezbytné provést podstatně rozsáhlejší šetření. Takové právě probíhá v rámci výzkumu, z něhož byla použita data pro analýzu provedenou v této práci. Vliv zkoumaných parametrů bude detailně rozpracován v připravované knize (Vondrová et al., v tisku).

Dalším omezením byla forma žákovských řešení, z níž byla prováděna analýza. Jednalo se o psané zápisy žáků, u nichž se předpokládalo, že se snaží o správné vyřešení úlohy, což nemuselo být u všech pravdivé. Tato forma prezentace řešení také do jisté míry znemožňuje určit pořadí prováděných kroků řešení. Předpokládalo se, že posloupnost kroků řešení koresponduje se způsobem psaní v českém jazyce, tedy že žák průběžné kroky řešení píše zleva doprava a shora dolů. S chaotičtějších způsobů zápisu řešení, viz obrázek 14, však tento předpoklad selhával.

Právě pořadí, v jakém jsou kroky řešení prováděny, se ukázalo být zásadní pro určení způsobu volby základní neznámé. Ke zjištění, že žáci přepisují vztahy mezi objekty v zadání úlohy do matematického modelu, aniž by celé zadání přečetli, se došlo až při dodatečných rozhovorech s žáky. Přitom tato skutečnost by nemohla být vypozorována jen z psaného zápisu řešení. Vzhledem k těmto skutečnostem by bylo při dalším zkoumání vhodné provést více rozhovorů s žáky, neboť se ukázalo, že i přes jejich omezený počet byly pro pochopení uvažování žáků velmi přínosné.

Při dalším zkoumání by bylo dále vhodné porovnat úlohy, v nichž by se lišilo pořadí, v němž jsou uvedeny údaje týkající se počtu dětí navštěvujících různé kroužky/poslanců různých klubů u sady 9A a studentů u sady 9C. Tak by se mohla potvrdit závislost volby základní neznámé na větné struktuře v první větě souvětí, která byla pozorována při dodatečných rozhovorech s žáky. Dalším případným doporučením pro sestavování podobných úloh je zajistit, aby se žádný z výsledků nerovnal jinému číselnému údaji, který se vyskytuje v zadání úlohy. Tímto způsobem by se eliminoval jeden ze způsobů, jakým mohli dojít k výsledku žáci s řešením uvedeným na obrázku 7.

Parametry slovních úloh, u kterých již je (či teprve bude) prokázán jejich vliv na řešení, je nutné míti na paměti především při sestavování slovních úloh, jež mají být použity v učebnicích matematiky nebo ve výuce jako takové. Aby se v co největší míře dosáhlo cíle, za nímž se slovní úlohy ve výuce matematiky využívají, tedy naučit žáky řešit problémy s pomocí jejich dosavadních znalostí, je nezbytné využívat úlohy, jež procházejí celé spektrum rozdílů v podobě jednotlivých parametrů. Jen tak bude možné jejich vliv na úspěšnost řešení snižovat a žáci budou dosahovat lepších výsledků.

6 Literatura

Artelt, C., & Schlagmüller, M. (2004). Der Umgang mit literarischen Texten als Teilkompetenz im Lesen? Dimensionsanalysen und Ländervergleiche. In U. Schiefele, C. Artelt, W. Schneider, & P. Stanat (Eds.), *Struktur, Entwicklung und Förderung von Lesekompetenz* (169–196). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathematiques*. Paris: Seuil.

Bassok, M., & Olseth, K. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem–solving transfer. *Memory & Cognition*, 23(3), 354–367.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: An examination of the evidence for benefits of 'contextualised' tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367–390.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects? State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.

Boaler, J. (1993). Encouraging the transfer of „school" mathematics to the „real world" through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 341–373.

Boaler, J. (1994). When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to 'realistic' mathematic contexts. *British Educational Research Journal*, 20(5), 551–564.

Capraro, M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*, 27(2–3), 147–164.

Cooper, B., Harries, T. (2002) Children's responses to contrasting 'realistic' mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 1–23.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W., & Nuerk, H. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6, 1–13.

Davis–Dorsey, J., Ross, S., & Morrison, G. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology*, 83(1), 61–68.

de Corte, E., Verschaffel, L., & de Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77(4), 460–470.

Hejný, M. (2003). Anatómia slovnej úlohy o veku. *Disputaciones Scientificae*, 3(3), 21–32.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: a meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242–273.

Jerman, M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 5(2), 109–123.

Jiménez, L., & Verschaffel, L. (2014). Development of children's solutions of non–standard arithmetic word problem solving / El desarrollo de las soluciones infantiles en la resolución de problemas aritméticos no estándar. *Revista De Psicodidactica / Journal of Psychodidactics*, 19(1), 93–123.

Jurdak, M. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world, situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283–301.

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(2), 66–74.

Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 225–250.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha.

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role of the situation Model in mathematical modelling-task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematik–Didaktik*, 31(1), 119–141.

Martin, S., & Bassok, M. (2005). Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word-problem solving and equation construction tasks. *Memory & Cognition*, 33(3), 471–478.

Mattarella-Micke, A., & Beilock, s. (2010). Situating math word problems: The story matters. *Psychonomic Bulletin & Review*, 17(1), 106–111.

Mellone, M., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interaction on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 1–12.

Moreau, S., & Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth–grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, 73(1), 109–121.

Nesher, P., Hershkovitz, S., & Novotná, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 151–176.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Novotná, J., & Vondrová, N. (2017). Parameters influencing word problems difficulty. In D. Szarková, P. Letavaj, D. Richtáriková, & M. Prášilová (Eds.), *16th conference on applied mathematics APLIMAT 2017 Proceedings* (pp. 1136–1145). Bratislava: Vydavatel´stvo Spektrum STU

Odvárko, O. et al. (1990). *Metody řešení matematických úloh*. Praha.

Paige, J. M., & Simon, H. A. (1966). *Cognitive processes in solving algebra word problem*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58.

Pape, S. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology*, 28(3), 396–421.

Pape, S., & Wang, C. (2003). Middle school children’s strategic behavior: Classification and relation to academic achievement and mathematical problem solving. *Instructional Science*, 31(6), 419–449.

Rendl, M., Vondrová, N. et al. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, (6), 418–421.

Taylor, N. (1989). Let them eat cake, desire, cognition and culture. In C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, & E Gerdes (Eds.), *Mathematics Education and Society* (161–163). Paris: United Nations Educational Scientific.

Thevenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P., & Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? A situation model account. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60(1), 43–56.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9–35.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 9–29.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2008). Influence of situational and mathematical information on situationally difficult word problems. *Studia Psychologica*, 50(4), 337–356.

Vondrová, N. et al. (V tisku.) *Vliv parametrů slovní úlohy na její obtížnost v řešení žáků základní školy*. Praha: Karolinum.

Wagner, S., & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In *Research ideas for the classroom: high school mathematics* (119–139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wiest, L. (2001). The role of fantasy contexts in word problems. *Mathematics Education Research Journal,* 13(2), 74–90.

Wilkins, J., Baroody, A., & Tiilikainen, s. (2001). Kindergartners' understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79(1), 23–36.

Winkelman, J. H., & Schmidt, J. (1974). Associative confusions in mental arithmetic. *Journal of Experimental Psychology*, 102, 734-736.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Vondrová, N. et al., *Kritická místa matematiky v řešeních žáků* (s. 319-399). Praha: Nakladatelství Karolinum.