Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Slovní úlohy s fyzikální tematikou

Word problems with physics topics

Petr Nádvorník

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2018

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Slovní úlohy s fyzikální tematikou potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Dolní Břežany; 2018-06-27

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za vstřícný a ochotný přístup, za trpělivost v průběhu tvorby mé práce a za ochotu kdykoliv mi poradit. Velmi si cením rad, doporučení a připomínek, kterými přispěla k napsání této práce. Poděkování patří také mé rodině za trpělivost a podporu po celou dobu mého studia.

ABSTRAKT

Práce se zabývá slovními úlohami s fyzikální tematikou. Cílem práce je sestavit slovní úlohy s fyzikální tematikou vhodné k zařazení do výuky na základní a střední škole. U každé úlohy je uvedeno také její řešení. Nedílnou součástí řešení je výčet fyzikálních pojmů a vzorců, které žáci mohou k řešení slovní úlohy využít.

V první části práce je ukázáno, jak důležité jsou slovní úlohy ve výuce matematiky.

Druhá část práce může sloužit pro inspiraci jako ukázka slovních úloh s fyzikální tematikou pro učitele matematiky, kteří nemají fyziku jako druhý aprobační předmět. V této části práce je na příkladu čtyřiceti jedna slovních úloh ukázáno, jak lze při výuce matematiky využívat slovní úlohy zasahující do fyzikální oblasti.

Druhá část práce je rozdělena na tři podkapitoly podle toho, na jakém typu škol je vhodné zařadit daný typ slovní úlohy. První podkapitola obsahuje dvacet osm slovních úloh vhodných pro použití na základní škole. Druhá podkapitola obsahuje deset úloh vhodných k užití na školách středních. Poslední podkapitola obsahuje tři ukázkové úlohy, které přesahují rozsah povinného učiva pro střední školy.

Všechny úlohy obsahují autorské řešení a náměty na doplňující a rozšiřující úlohy a možné propojení s jinými předměty v rámci mezipředmětových vztahů. Při řešení je pro lepší orientaci v textu zachována stejná struktura u všech úloh.

KLÍČOVÁ SLOVA

slovní úlohy, fyzikální témata, sbírka úloh, motivační úlohy

ABSTRACT

This Bachelor thesis is focused on word problems related to physics. The main aim is to create examples of word problems with their solutions suitable for teaching in elementary and secondary schools. An integral part of the solution of every task is also a list of physical terms and formulas which students may use to solve the problem.

The first part of the thesis shows the importance of word problems for teaching mathematics.

The second part may be used as an inspiration for mathematics teachers whose second teaching qualification is not physics. This part provides the reader with forty one word problems showing the use of word problems related to physics in the mathematics classes.

The second part is divided into three subchapters according to the type of school for which the particular category of word problems is appropriate. The first subchapter contains twenty eight word problems suitable for the use in elementary schools. The second subchapter contains ten word problems suitable for the use in secondary schools. The last subchapter contains three examples of tasks beyond the secondary education.

Every problem includes author`s solution and suggestions of additional tasks and possible combination with other subjects within the interdisciplinary relations. All the solutions have the same structure in order to ensure better orientation in the text.

KEY WORDS

word problems, problems related to physics, collection of problems, motivational problems

Obsah

Úvod

Slovní úlohy s fyzikální tematikou. Proč jsem si vybral právě toto téma? Již skoro dvacet pět let pracuji jako učitel matematiky a fyziky na různých typech škol. Po celou dobu své praxe se snažím žákům při hodinách ukazovat co nejvíce praktických příkladů, co nejvíce ukázek toho, kde se mohou s právě probíranou látkou potkat v běžném životě, nejen ve školních lavicích. Jednou z možných cest, jak žákům ukázat propojení matematiky s běžným životem, je podle mého názoru provázání matematiky s jinými předměty, které jsou praxi blíže, například s fyzikou, chemií, biologií či ekonomikou.

K tomuto propojení je vhodné využívat zejména slovní úlohy, i když právě slovní úlohy nepatří mezi žáky k nejoblíbenějším matematickým tématům. Nedávno mi jedna žákyně 8. ročníku na začátku hodiny, když jsem říkal, že začínáme probírat slovní úlohy řešené pomocí lineárních rovnic, řekla, že ona nechápe slovní úlohy již od třetí třídy a že se bojí zhoršení prospěchu. Samozřejmě jí okamžitě přitakávala více než polovina třídy. Rozproudila se velká diskuze o zbytečnosti slovních úloh, o jejich náročnosti, padaly otázky: „K čemu nám to bude? Co mám dělat, když ani moje máma to nepochopila? To já v žádném případě nepochopím! Hlavně nesmíme počítat slovní úlohy o pohybu, kvůli nim měl táta čtyřku z matematiky na vysvědčení, ty jsou strašné!“ Nechal jsem žáky se vypovídat a položil jsem jim zdánlivě jednoduchou otázku: „Na jak dlouho by každému z vás vystačila voda na pití ve vodou zcela zaplněné naší učebně (za předpokladu, že se voda nezkazí)?“ Žáci měli za úkol napsat svůj odhad – ty se lišily, nejkratší odhad byl půl roku, naopak nejdelší 25 let. Pak jsme tuto slovní úlohu (v práci použita jako 26. úloha pro ZŠ) společně vyřešili a došli k, pro žáky velmi překvapivému, výsledku. Netvrdím, že díky této úloze začali mít žáci rádi slovní úlohy, ale aspoň jsem vzbudil jejich zvědavost, co budeme dále dělat.

Cílem práce je sestavit příklady slovních úloh s fyzikální tematikou vhodných k zařazení do výuky na základní a střední škole včetně řešení těchto úloh. Nedílnou součástí řešení každé úlohy je také výčet fyzikálních pojmů a vzorců, které žáci mohou k řešení slovní úlohy využít.

Bakalářská práce je rozdělena na dvě části – teoretickou a praktickou. V teoretické části se zabývám vysvětlením pojmu slovní úloha, dělením slovních úloh a postupem řešení.

Zamýšlím se nad důležitostí slovních úloh a formuluji odpověď na otázku: „Proč jsou pro většinu žáků slovní úlohy tak obtížné? Na závěr teoretické části představuji svůj pohled na spolupráci matematiky a fyziky, na problémy, se kterými se učitelé mohou setkat.

Praktická část obsahuje sbírku úloh s fyzikální tematikou. U každé úlohy je zařazen rozbor, vhodný zápis, zjednodušený postup řešení a závěr. K většině úloh uvádím také vhodnou doplňující či rozšiřující úlohu (již bez řešení) a je-li to vhodné, pak i námět na další diskuzi se žáky. Praktická část je rozdělena na tři podkapitoly podle toho, na jakém typu škol je vhodné zařadit daný typ slovní úlohy.

1 Slovní úlohy

1.1 Co to je slovní úloha?

Jednoznačnou odpověď na otázku z názvu kapitoly „Co to je slovní úloha?“ není v odborné literatuře vůbec jednoduché nalézt. Mnoho didaktiků matematiky se snažilo a stále snaží pojem slovní úloha přesně definovat, ale jejich definice se různí. V následujícím textu uvedu několik definic z odborné literatury seřazených podle data publikování. Pro srovnání začínám citací definice slovní úlohy jednoho z autorů, který publikoval před listopadem 1989 (Vyšín). Dále jsem volil současné autory (Blažková, Kuřina, Novotná, Odvárko, Polák). Při výběru jsem upřednostnil autory, se kterými jsem se setkával při studiích na přednáškách (Odvárko, Novotná), a autory, jejichž literaturu rád využívám ve své učitelské praxi (Blažková, Kuřina, Novotná, Odvárko, Polák).

Vyšín (1962, s. 104) nazývá slovními úlohami „*úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozšíření aritmetické nebo algebraické. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy.*“

Kuřina (1990, s. 61) definuje slovní úlohy jako „*úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.*“

Blažková (1993, s. 35) vymezuje slovní úlohy jako „*úlohy, v nichž je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodných úvah zjistit, jaké operace je třeba provést s danými údaji, abychom došli k údajům, které máme určit.*“

Velmi podrobně odpověď na otázku z názvu kapitoly zpracovává Novotná (2000, s. 7). Nejdříve se věnuje pojmu úloha: „*Chceme-li charakterizovat pojem* ***slovní úloha****, musíme si nejprve ujasnit, co si budeme představovat pod pojmem* ***úloha*** *v matematice.*“ Dále Novotná (2000) uvádí definice pojmu úloha od dalších autorů:

- Podle Fridmana (1977) je úloha *„model problémové situace fixovaný v jistém jazyce“*. (Novotná, 2000, s. 8)

- Podle Heluse (1979) je učební úloha *„každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle, je zaměřena na všechny tři aspekty učení – obsahový (představující specifický obraz společensko-historické zkušenosti), operační (tvořený učebními, poznávacími a jinými činnostmi a operacemi žáka) a motivační (tvořený především zájmy, sklony, potřebami apod. žáka).“* (Novotná, 2000, s. 8)
- Podle Polyi (1962) *„řešit úlohu znamená hledat vědomě nějaký vhodný postup, abychom obdrželi jasně koncipovaný cíl, který však nemusí být dosažitelný okamžitě.“* (Novotná, 2000, s. 8)
- Podle Vyšína (1972) lze pojem úloha vyslovit následovně: *„Je dána množina M matematických objektů a je dána výroková forma f o jedné nebo více proměnných. Úkolem je nalézt a udat (způsobem blíže neurčeným) obor pravdivosti P formy f v množině M, tj. množinu všech objektů z M, pro něž dává f pravdivý výrok.“* (Novotná, 2000, s. 9 - 10)

Dále Novotná (2000, s. 10) uvádí dvě definice slovních úloh:

- Podle Odvárka (1995) *„slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších matematických oblastí.“*
- Druhou definici slovní úlohy, kterou autorka uvádí, je definice podle Kuřiny, kterou jsem citoval výše.

Blažková (2007, s. 4) popisuje slovní úlohy také takto: *„Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Pomocí vhodných úvah zjišťujeme, jaké početní operace je potřeba provést se zadanými údaji, abychom mohli odpovědět na otázku slovní úlohy. Principem řešení těchto úloh je vytvoření matematického modelu konkrétní situace vyjádřené textem úlohy. Přechod od reálné situace k příslušnému matematickému modelu se nazývá matematizace reálné situace. Tímto rozumíme vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce. Vyřešením získané matematické úlohy získáme výsledek, který musíme konfrontovat se zadáním slovní úlohy.“*

Poslední definici, kterou uvedu (nikoliv poslední existující), je definice Poláka (2014, s. 141): *„Slovními úlohami ve školské matematice se rozumí všechny takové úlohy, jejichž zadání i položené otázky nejsou vyjádřeny pomocí matematické symboliky, ale jsou vyjádřeny ve slovní formě.“*

Co to tedy z mého pohledu a pro účely této práce je slovní úloha? Slovní úlohou nazveme takovou úlohu (nejlépe z praxe, ale není to podmínkou), která není zadána pouze matematickými symboly, ale převážně slovy, a kterou lze pomocí vhodně zvolených matematických operací vyřešit. Nezbytnou podmínkou pro správné řešení je u slovních úloh porozumění textu.

1.2 Dělení slovních úloh

Slovní úlohy lze dělit podle mnoha různých kritérií. V následujícím textu představuji několik dělení, jak je uvádí odborná literatura. Při jejich výběru jsem postupoval obdobně jako v kapitole 1.1 (srov. výše).

Vyšín (1962, s. 104 - 105) dělí slovní úlohy do dvou skupin: *první skupinu tvoří* ***matematické úlohy****, které jsou vysloveny z větší části slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů. Do této skupiny patří např. geometrické konstruktivní úlohy.*[1] *Druhou kategorii tvoří* ***úlohy matematického charakteru****, jejichž témata jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd. Z každé takové úlohy je teprve třeba vytvořit matematickou úlohu, což je možné provést více způsoby. Do této skupiny patří většina slovních úloh, řešených v aritmetice a algebře na střední škole, např. úlohy o směsi, pohybu apod. Rozhraní mezi oběma skupinami úloh ovšem není přesné.“*

Odvárko a kolektiv (1990) uvádí následující dvě rozdělení slovních úloh. Prvním je dělení podle oblastí matematiky na slovní matematické úlohy a slovní úlohy s matematickým obsahem.

„Matematické úlohy, které nejsou vyjádřeny v příslušném symbolickém jazyce kalkulu, nazýváme slovní matematické úlohy.“ (Odvárko, 1990, s. 205)

[1] Zde si ovšem J. Vyšín odporuje se svojí definicí slovní úlohy – srovnej definice slovní úlohy na straně 9.

Tyto úlohy dále Odvárko a kolektiv dělí na slovní aritmetické úlohy, slovní algebraické úlohy a slovní úlohy s geometrickým obsahem.

„Úlohy s textem, ve kterém se zjevně vyskytuje aspoň jeden termín nepatřící do jazyka žádné matematické teorie“ nazývá Odvárko a kolektiv (1990, s. 216) slovními úlohami s nematematickým obsahem.

Odvárko a kolektiv (1990, s. 231) dále upozorňuje na zvláštnost při řešení slovních úloh s fyzikální tematikou. Tyto úlohy podle nich mají tu zvláštnost, že *„k matematické úloze se dostáváme přes fyzikální model situace, který už zajišťuje dostatečnou abstrakci z reálné situace. V odpovědích na otázky kladené v těchto úlohách se obvykle vyžadují číselné údaje v dekadickém zápisu (ne tedy s odmocninami, logaritmy, siny apod. jako v matematických určovacích úlohách).“* Dále Odvárko a kolektiv (1990) upozorňují na problémy se zaokrouhlováním a zkouškou, které takto mohou vzniknout. Fyzikální odpověď by stačila s přesností např. na 1 desetinné místo, ale zkouška pak nemusí vždy vycházet. Jedinou možností je dělat zkoušku s větší přesností a teprve v odpovědi výsledek zaokrouhlit tak, aby toto zaokrouhlení odpovídalo reálné situaci. Podrobně se této problematice věnuji v první úloze v části Slovní úlohy s fyzikální tematikou vhodné pro využití při výuce na střední škole.

Novotná (2000) ukazuje dělení slovních úloh podle kontextu tak, jak bylo prezentováno na 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v říjnu 1998 v sekci Učebnice a učební pomůcky. Podle tohoto kritéria lze rozdělit slovní úlohy na úlohy o pohybu, úlohy o společné práci, úlohy o směsích, úlohy o obsahu a úlohy o dělení celku na části.

Blažková (2007, s. 4) dělí slovní úlohy na jednoduché a složené. Jednoduché slovní úlohy jsou podle tohoto dělení takové, *„k jejichž řešení stačí pouze jedna početní operace“*. Naopak slovní úlohy složené jsou takové, *„k jejichž řešení je třeba více než jedna početní operace“*.

Polák (2014, s. 141 - 142) ve své knize uvádí následující dělení slovních úloh: *„Pro středoškolskou matematiku je vhodné základní rozdělení slovních úloh na* ***slovní úlohy s matematickým obsahem*** *a* ***slovní úlohy s nematematickým obsahem****, tj. úlohy z běžného života a z různých mimomatematických oborů (např. fyziky, chemie, technických oborů,* *ekonomie apod.), jež se nazývají* ***aplikační úlohy****.* ***Podle obsahového zaměření*** *se rozdělují* ***slovní aplikační úlohy*** *nejčastěji se vyskytující v učebnicích matematiky na úlohy těchto typů: (a) Úlohy o rozdělování celků na části; (b) Úlohy o rovnoměrných pohybech; (c) Úlohy o nerovnoměrných (zrychlených, resp. zpožděných) pohybech; (d) Úlohy o společné práci; (e) Úlohy o směsích.“*

Polák (2014, s. 142) zdůrazňuje nutnost upozorňovat žáky na nebezpečí formalismů při řešení slovních úloh: *„Při jeho využití ve výuce je ovšem třeba žákům zdůrazňovat, že nesmí svádět k pouhému formálnímu využití analogií a příslušných algoritmů v jednotlivých skupinách úloh, ale vždy je nutné vycházet z konkrétní situace a výsledky řešení matematického modelu z jejího hlediska prověřit.“*

1.3 Proč jsou slovní úlohy tak důležité?

Slovní úlohy mají v hodinách matematiky svoji nezastupitelnou roli. Při řešení slovních úloh rozvíjíme schopnost žáků získat z textu podstatné informace, zvyšujeme jejich čtenářskou gramotnost. Slovní úlohy, i když jsou v porovnání s běžným životem zjednodušené a upravené, pomáhají žákům pochopit důležitost matematiky v jejich budoucím životě. Řešení slovních úloh podporuje u žáků samostatnost myšlení, učí žáky pracovat tvořivě. Slovní úlohy najdeme ve všech učebnicích a v pracovních sešitech nejen v matematice, ale také ve fyzice, chemii, ekonomii a v mnoha dalších předmětech. Řešení slovních úloh by tedy mělo zcela jednoznačně patřit mezi hlavní cíle výuky matematiky.

V odborné literatuře najdeme například tato zdůvodnění, proč je důležité slovní úlohy se žáky všech typů škol řešit:

„Jedním z důležitých cílů vyučování matematice je ***naučit žáky matematiku aplikovat****. Ve školské matematice obvykle simulujeme aplikace matematiky* ***řešením úloh****. Na úrovni základní školy jsou důležité tzv.* ***slovní úlohy****.“* (Kuřina, 1990, s. 61)

Výhodou slovních úloh pro žáky podle Kubínové (1998, s. 153 - 154) je to, že *„jejich zadání bývá často formulováno jako popis skutečné reálné situace, se kterou se žáci běžně setkávají ve svém okolí. Tím je na první pohled pro žáka obtížné zadání prezentováno jako přijatelnější a srozumitelnější, protože žák vidí vzájemné vztahy a propojení mezi „normálním“ světem a „teorii“, která je předmětem školního vyučování. Tato vzájemná* *vazba mezi reálným a školním světem působí na žaky jako prvotní motivace ještě dříve, než je učitel seznámí s jednotlivými fázemi procesu řešeni slovních úloh. Ukazuje se však, že ani tato prvotní (vnější motivace) není natolik silná, aby slovní úlohy patřily ve vyučování mezi oblíbené.“*

Novotná (2000, s. 13) zmiňuje, že ze šesti cílů sledovaných při vyučování rovnic, které publikoval Hejný (1990, s. 193), jsou pro slovní úlohy platné tyto dva:

- *„prohloubit zájem žáka o matematiku, umět ho motivovat,*
- *rozvíjet jeho schopnost modelovat reálné situace.“*

Novotná ve svém příspěvku s názvem Zpracování informací při řešení slovních úloh publikovaném v (Hejný, 2004, s. 368) cituje Bluma a Nisse (1991), kteří shrnují důvody pro zařazování slovních úloh do vyučování.

„Slovní úlohy:

- *jsou vhodným prostředkem pro rozvíjení obecných kompetencí žáků a jejich postojů k matematice,*
- *umožňují žákům „vidět a posuzovat“ nezávisle, analyzovat a porozumět použití matematiky,*
- *rozvíjejí schopnost žáků aktivovat matematické znalosti a dovednosti v mimomatematických situacích,*
- *pomáhají žákům při poznávání, porozumění a uchování pojmů, metod a výsledků matematiky.“*

V RVP ZV (Jeřábek, 2017, s. 32 - 33) je mj. uvedeno, že vzdělávání v oblasti Matematika a její aplikace *„směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:*

- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů,*
- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu,*

- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely,*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému,*
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu,*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby,*
- *rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů.“*

Nedovedu si představit, že bych tyto klíčové kompetence utvářel a rozvíjel, aniž bych se žáky pravidelně řešil slovní úlohy. V dnešní době navíc většina žáků základních škol skládá povinné přijímací zkoušky na střední školy, ve kterých je více než polovina úloh zadána slovně. Proto považuji za nezbytné se žáky slovní úlohy pravidelně řešit.

Obdobně v RVP G (Hučínová, 2007, s. 22) je mj. uvedeno, že vzdělávání v oblasti Matematika a její aplikace *„směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:*

- *určování, zařazování a využívání pojmů, k analýze a zobecňování jejich vlastností,*
- *vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu,*

- *analyzování problému a vytváření plánu řešení, k volbě správného postupu při řešení úloh a problémů, k vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k zadaným podmínkám,*
- *práci s matematickými modely, k vědomí, že k výsledku lze dospět různými způsoby,*
- *rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů,*
- *pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva a k aplikaci matematických poznatků v dalších vzdělávacích oblastech,*
- *přesnému vyjadřování a zdokonalování grafického projevu, k porozumění matematickým termínům, symbolice a matematickému textu,*
- *zdůvodňování matematických postupů, k obhajobě vlastního postupu,*
- *rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (k činnostem, kterými se učí poznávat a nalézat situace, v nichž se může orientovat prostřednictvím matematického popisu), k vyhodnocování matematických modelů, k poznávání mezí jejich použití, k vědomí, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro více situací a jedna situace může být vyjádřena různými modely).“*

Taktéž v Rámcovém vzdělávacím programu pro obory středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0 v platném znění podle (Opatření č. 5 ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0, které jsou stanoveny v nařízení vlády č. 445/2016 Sb., ve znění nařízení vlády č. 71/2017 Sb., 2017) je mj. uvedeno, že: *„v odborném školství má matematické vzdělávání kromě funkce všeobecně vzdělávací ještě funkci průpravnou pro odbornou složku vzdělávání. Obecným cílem matematického vzdělávání je výchova přemýšlivého člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích (v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, budoucím zaměstnání, volném čase apod.). Matematické vzdělávání se zaměřuje především na metody řešení úloh, zejména ve vztahu k oboru vzdělání.*

Vzdělávání směřuje k tomu, aby žáci dovedli:

- *aplikovat matematické poznatky a postupy v odborné složce vzdělávání,*
- *využívat matematické poznatky a metody řešení v praktickém životě a v dalším vzdělávání,*
- *matematizovat jednoduché reálné situace, užívat matematický model a vyhodnotit výsledek řešení vzhledem k realitě,*
- *zkoumat a řešit problémy včetně diskuze řešení.“*

Stejně jako při výuce matematiky na základní škole si ani při výuce matematiky na škole střední nedovedu představit, že bych tyto klíčové kompetence utvářel a rozvíjel, aniž bych se žáky pravidelně řešil slovní úlohy. V zadání maturitní zkoušky z matematiky se také v ne zrovna zanedbatelném počtu vyskytují slovní úlohy. Proto i na středních školách je podle mého názoru nezbytné se řešením slovních úloh zabývat, pravidelně se k nim při hodinách vracet a se žáky je procvičovat.

1.4 Kdy se žáci se slovními úlohami při vyučování matematice potkávají?

Na základě své téměř pětadvacetileté praxe učitele matematiky a fyziky na různých typech škol mohu říci, že slovní úlohy provázejí žáky po celou dobu školní docházky.

Matematiku a fyziku jsem začal učit v roce 1995 na víceletém gymnáziu (od běžných hodin v tercii až po výběrové semináře pro žáky posledních dvou ročníků). Po několika letech jsem přešel na střední odbornou školu, kde jsem matematiku učil přibližně 10 let ve všech ročnících. Nyní učím již osmým rokem na základní škole matematiku od 5. do 9. ročníku a fyziku od 6. do 9. ročníku. V posledních dvou letech působím navíc jako lektor kurzu Matematická logika pro žáky od 1. do 5. ročníku tříd s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů. Na základě všech těchto svých zkušeností mohu zodpovědně říci, že se slovními úlohami se žáci setkávají již v prvním ročníku základní školy a „nezbaví“ se jich až do maturity, což řadě z nich činí velké obtíže.

Toto moje tvrzení dokládají očekávané výstupy vzdělávání z jednotlivých RVP.

V RVP ZV (Jeřábek, 2017, s. 31) je jedním z výstupů za první období na 1. stupni v oblasti Matematika a její aplikace výstup *„M-3-1-05 řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace“.*

V RVP ZV (Jeřábek, 2017, s. 32) jsou mezi výstupy za druhé období na 1. stupni v oblasti Matematika a její aplikace uvedeny výstupy *„M-5-1-04 řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel a M-5-4-01 řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“.*

V RVP ZV (Jeřábek, 2017, s. 34 - 36) jsou mezi výstupy na 2. stupni v oblasti Matematika a její aplikace uvedeny výstupy *„M-9-1-03 modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel; M-9-1-05 řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů; M-9-1-06 řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek); M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním; M-9-1-08 formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav; M-9-1-09 analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel; M-9-2-05 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů; M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů; M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles; M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu; M-9-4-01 užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací“.*

V RVP G (Hučínová, 2007, s. 23 - 25) jsou mezi očekávanými výstupy v oblasti Matematika a její aplikace uvedeny následující výstupy: *„analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav; řeší reálné problémy s kombinatorickým podtextem (charakterizuje možné případy, vytváří model pomocí kombinatorických skupin a určuje jejich počet); využívá kombinatorické postupy při výpočtu pravděpodobnosti, upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly; modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí; řeší aplikační úlohy s využitím* *poznatků o funkcích a posloupnostech; interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice; v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly; řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí".*

V Rámcovém vzdělávacím programu pro obory středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0 v platném znění podle (Opatření č. 5 ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0, které jsou stanoveny v nařízení vlády č. 445/2016 Sb., ve znění nařízení vlády č. 71/2017 Sb., 2017) jsou mezi očekávanými výstupy v oblasti Matematické vzdělávání uvedeny následující výstupy: „*řeší praktické úlohy za použití trojčlenky, procentového počtu a poměru ve vztahu k danému oboru vzdělání; řeší praktické úkoly s mocninami s racionálním exponentem a odmocninami; modeluje jednoduché reálné situace užitím výrazů zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání; pracuje s matematickým modelem reálných situací a výsledek vyhodnotí vzhledem k realitě; řeší reálné problémy s použitím uvedených funkcí zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání; užívá rovnic, nerovnic a jejich soustav k řešení reálných problémů, zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání; aplikuje poznatky o tělesech v praktických úlohách, zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání; užívá poznatků o posloupnostech při řešení úloh v reálných situacích, zejména ve vztahu k oboru vzdělání; provádí výpočty finančních záležitostí; změny cen zboží, směna peněz, danění, úrok, jednoduché úrokování, spoření, úvěry, splátky úvěrů; užívá poznatků z kombinatoriky při řešení úloh v reálných situacích*".

Žáci se zájmem o matematiku se mohou setkat se slovními úlohami nejen v hodinách matematiky, ale také se jimi bavit ve svém volném čase. V České republice existuje řada soutěží a korespondenčních seminářů pro žáky základních a také středních škol, ve kterých řeší různé slovní úlohy – zábavné, reálné i umělé, většinou složitější, než znají ze školních učebnic, sbírek a pracovních sešitů.

Níže uvádím příklady soutěží a seminářů, včetně doporučeného ročníku školní docházky soutěžících a internetových adres těchto soutěží a seminářů. Zde mohou zájemci získat zadání z aktuálního ročníku a většinou také ročníků minulých. Na některé z těchto soutěží pravidelně připravuji své žáky.

Pro základní školu (a odpovídající ročníky víceletých gymnázií):

- Matematická olympiáda – pro žáky 5. až 9. ročníku, mohou řešit i nadaní žáci z 3. a 4. ročníku – http://www.matematickaolympiada.cz/
- Logická olympiáda – pro žáky od 1. do 9. ročníku – https://www.logickaolympiada.cz/
- Pythagoriáda - pro žáky 5. až 8. ročníku, mohou řešit i nadaní žáci ze 4. ročníku – http://talentovani.cz/pythagoriada
- Matematický klokan – pro žáky od 2. do 9. ročníku – http://matematickyklokan.net/
- Pangea – pro žáky 4. až 9. ročníku, mohou řešit i nadaní žáci z 3. ročníku – http://www.pangeasoutez.cz/
- MaSo (MAtematická SOutěž) – pro žáky 6. až 9. ročníku – http://maso.mff.cuni.cz/
- Náboj Junior – pro žáky 6. až 9. ročníku – https://junior.naboj.org/
- Matematické putování – pro žáky 4. a 5. ročníku – http://kmdm.pedf.cuni.cz/soutez/
- Moravskoslezský matematický šampionát (MMŠ) – pro žáky 9. ročníku – http://www.wigym.cz/sampionat/
- GENIUS LOGICUS – pro žáky od 1. do 9. ročníku – https://www.geniuslogicus.eu/
- Brloh (BRněnská LOgická Hra) – pro žáky 5. až 9. ročníku – http://www.brloh.math.muni.cz/
- Pikomat – pro žáky 6. až 9. ročníku – http://pikomat.mff.cuni.cz/
- KOKOS (KOperníkův KOrespondenční Seminář) – pro žáky 6. až 9. ročníku – http://kokos.gmk.cz/

Pro střední školu:

- Matematická olympiáda – pro žáky 1. až 4. ročníku – http://www.matematickaolympiada.cz/
- Logická olympiáda – pro žáky 1. až 4. ročníku – https://www.logickaolympiada.cz/
- Matematický klokan – pro žáky 1. až 4. ročníku – http://matematickyklokan.net/
- Celostátní matematická soutěž žáků SOŠ – pro žáky 1. až 4. ročníku – http://www.oavm.cz/cms/index.htm
- Matematický náboj – pro žáky 1. až 4. ročníku – https://math.naboj.org/
- Turnaj měst – pro žáky 1. až 4. ročníku – http://www.kag.upol.cz/turnajmest/
- Moravskoslezský matematický šampionát (MMŠ) – pro žáky 3. ročníku – http://www.wigym.cz/sampionat/
- GENIUS LOGICUS – pro žáky 1. až 4. ročníku – https://www.geniuslogicus.eu/
- Matematický korespondenční seminář PraSe (PRAžský SEminář) – pro žáky 1. až 4. ročníku – https://mks.mff.cuni.cz/
- Matematický korespondenční seminář BRKOS (BRněnský KOrespondenční Seminář) – pro žáky 1. až 4. ročníku – http://brkos.math.muni.cz/
- M&M – mezioborový korespondenční seminář pro žáky 1. až 4. ročníku – https://mam.mff.cuni.cz/

1.5 Postup při řešení slovních úloh

Když jsem byl před mnoha lety já sám žákem základní školy a řešil jsem slovní úlohy, vždy když mi něco nešlo a já se vztekal, mi můj otec (vystudovaný strojní inženýr – konstruktér obráběcích strojů, nikoliv matematik) radil následující postup: „Pozorně si přečti zadání, nejlépe několikrát. Až si budeš jistý, že zadání rozumíš, udělej si zápis. Ze zápisu sestav rovnici, tu vyřeš. Než napíšeš odpověď, zkontroluj, jestli je výsledek reálný, popř. který z výsledků je reálný, a ověř, zda tvůj výsledek odpovídá zadání úlohy."

V literatuře bychom takto sepsaný návod hledali těžko, ale přesto lze najít mnoho společného s postupem řešení slovních úloh uváděných v odborné literatuře.

Vyšín (1962) popisuje následující etapy řešení slovní úlohy: sestavení matematické úlohy (nalezení neznámého matematického objektu, matematická formulace podmínek úlohy), řešení matematické úlohy, provedení zkoušky řešení.

Kuřina (1990) uvádí dvě možnosti řešení slovních úloh – experimentování v realitě a vhodné modelování. První možnost (experimentování) je podle něj často nemožný, vhodný spíše do jiných přírodovědných oblastí (fyzika, chemie,…). Za nejdůležitější typy modelů považuje modely činnostní, ikonické a symbolické.

„Důležité je, aby model vyjadřoval pro žáka přesvědčivě reálnou situaci, aby v modelu viděl přehlednější informaci o úloze než v původním slovním vyjádření.“

„Sestavení modelu úlohy vlastně znamená překlad jejího textu do jazyka, který umožňuje snáze úlohu řešit.“ (Kuřina, 1990, s. 62)

Novotná (2000) podrobně rozepisuje, jak někteří matematici popisovali proces řešení slovních úloh. Podle Novotné je *„základním rozdělením procesu řešení úloh do etap, z něhož vycházejí četní další autoři, je rozdělení, které publikoval Polya. Obsahuje tyto základní etapy procesu řešení: uchopování, stanovování strategie, realizace strategie, interpretace výsledků.“* (Novotná, 2000, s. 19)

Různé přístupy k analýze procesu řešení úloh Novotná (2000) ukazuje na postupech řešení slovních úloh podle Vyšína (1972) (rozbor, výsledek rozboru, zkouška), Fridmana (1977) (analýza úlohy, hledání plánu řešení, uskutečňování nalezeného plánu, kontrola a posouzení celé činnosti při řešení slovní úlohy) a Odvárka a kolektivu (1990) (matematizace situace, řešení matematické úlohy, návrat do kontextu zadání, dvojí zkouška – správnost řešení, kontextová správnost).

Novotná (2000) rozdělila postup řešení slovní úlohy do tří etap – etapa uchopování, etapa transformace a etapa návratu do kontextu zadání úlohy.

Blažková (2007) postup při řešení slovních úloh člení na tři základní fáze: matematizaci slovní úlohy, řešení matematické úlohy a konfrontaci výsledku matematické úlohy se zadáním slovní úlohy.

Podrobněji postup při řešení slovních úloh Blažková (2007, s. 6 - 7) rozčlenila takto: *„porozumění textu, rozbor – analýza podmínek ve vztahu k otázce úlohy, matematizace reálné situace vyjádřené textem úlohy, provedení odhadu výsledku, řešení matematické úlohy, zkouška správnosti, odpověď na otázku slovní úlohy.“*

Polák (2014, s. 141 - 142) popisuje řešení slovních úloh takto: *„U aplikačních úloh je zadán určitý reálný problém, jehož řešení se převádí na matematické tímto postupem:*

Provede se ***matematizace reálného problému****, tj. přechod od dané reálné situace k jejímu matematickému vyjádření neboli vytvoření* ***matematického modelu reálné situace****. Zpravidla je jím rovnice, nerovnice, resp. soustava rovnic či nerovnic.*

Řeší se takto získaná matematická úloha.

Ověří se, zda ***výsledky řešení matematické úlohy*** *splňují podmínky dané reálné situace, příp. se zjistí, které z výsledků je splňují.“*

V odborné literatuře se často vyskytují dvě základní metody řešení slovních úloh - metoda analytická a metoda syntetická. Vyšín (1962, s. 110) definuje obě metody takto:

*„****Analytická metoda*** *se obvykle charakterizuje tím, že vycházíme z otázky úlohy a pátráme po dalších údajích, které je třeba získat, abychom na otázku mohli odpovědět. Tak pokračujeme tak dlouho, až dospějeme k číslům, které lze vypočíst jedním početním výkonem z údajů daných v textu úlohy. Naproti tomu při tzv.* ***syntetické metodě*** *určujeme z daných údajů údaje další, až se dopracujeme k odpovědi na otázku úlohy.“*

Při řešení slovních úloh s fyzikální tematikou je kromě matematických znalostí a dovedností důležité, aby žák pochopil fyzikální podstatu zadání, dobře popsal fyzikální zákonitosti a jevy, které jsou v zadání zmíněny, v případě potřeby vhodně použil správné fyzikální vzorce a nakonec matematický výsledek správně fyzikálně interpretoval. Toto dělá úlohy s fyzikální (a nejen s fyzikální, ale například také s chemickou či ekonomickou) tematikou obtížnější než klasické slovní úlohy.

V této své práci rozdělím postup řešení slovní úlohy do tří fází:

- První fáze (v řešení ji budu značit F1) – porozumění textu, analýza zadání. Do této fáze patří: čtení textu s maximální pozorností, výběr důležitých bodů, správné pochopení fyzikální situace a porozumění fyzikálním termínům, zákonitostem a jevům. Dále sem patří vytvoření vhodného zápisu slovní úlohy (slovní, tabulka, obrázek, schéma, graf, …), převod jednotek (ne vždy je nutné použít hlavní jednotky soustavy SI), volba neznámé či neznámých a zápis vztahů mezi neznámými. Nejdůležitějším a současně nejobtížnějším krokem je zjistit, co vše můžeme využít z našich fyzikálních znalostí. Posledním krokem by měl být žákovský odhad výsledku, abychom žáky vedli k reálnému uvažování nad úlohami, nikoliv jen k „bezduchému" počítání. Tyto odhady jsou vždy velmi zajímavé, někdy se žáci přiblíží výsledku, jindy jsou mu velmi vzdáleni, o to je pro žáky řešení překvapivější.
- Druhá fáze (v řešení ji budu značit F2) – matematizace reálného problému. Do této fáze patří určení správné jednotky výsledku, volba analytické nebo syntetické metody řešení, je-li to vhodné, sestavení rovnice nebo soustavy rovnic, dále numerické řešení včetně správného zaokrouhlení (přesnost výsledku nesmí převyšovat přesnost, s jakou jsou zadány výchozí veličiny).
- Třetí fáze (v řešení ji budu značit F3) – verifikace. Do této fáze řadím kontrolu správnosti (rozboru úlohy, převodů, matematického postupu, jednotek, zaokrouhlení), diskuzi výsledků řešení (správná fyzikální interpretace získaných výsledků) a slovní odpověď (číselný výsledek a jednotka).

1.6 Proč jsou pro většinu žáků slovní úlohy tak obtížné?

Jak jsem již zmiňoval v úvodu své práce, slovní úlohy rozhodně nepatří pro většinu žáků mezi oblíbené oblasti matematiky. Nyní se zamyslím, proč tomu tak podle mého názoru je, co je na slovních úlohách pro žáky tak obtížné.

Podle Kubínové (1998, s. 154) *„řada výzkumů naopak prokázala, že právě slovní úlohy patři tradičně k úlohám obtížným pro žáky, mnohdy k úlohám, které žáky stresují ještě dříve, než je žáci začnou vůbec řešit. Často to bývá proto, že byly opominuty nebo* *podceněny některé z kroků, které je nutno uskutečnit, abychom úspěšně vyřešili danou obtíž. Tedy v našem případě se žáci při řešení slovních úloh:*

- *nejprve musí seznámit se zadáním slovní úlohy, uvědomit si, co hledají a jaké prostředky mají k dispozici, zda již takovou nebo podobnou úlohu řešili a jakým způsobem. Jedná se o rozbor úlohy (vybrání podstatných znaků, zařazení úlohy mezi typové úlohy);*
- *dalším (pro žaky asi nejobtížnějším) krokem je nahrazení složitého systému (zadání úlohy) adekvátní úrovní, která je jednodušší, přístupnější pro řešení úlohy. Jedná se o transformaci slovního zadání úlohy do jazyka příslušného vyučovacího předmětu (např. do jazyka matematiky, matematických znaků, symbolů a operací), který jim umožní využít vhodný algoritmus k vyřešení úlohy. Nedílnou součástí této fáze je také zkouška v rámci kontextu daného vyučovacího předmětu s ohledem na kontext původní úlohy;*
- *poslední částí řešení slovní úlohy je opačná transformace, kdy jsou výsledky vyjádřené prostředky daného vyučovacího předmětu interpretovány slovně.“*

Podle Novotné (2000, s. 15) mezi základní obtíže, které má žák při řešení slovních úloh, patří následující:

- *„Žák má nedostatečné předchozí zkušenosti a znalosti související s kontextem nebo s potřebným matematickým zázemím úlohy.*
- *Žák nečte zadání pozorně, s porozuměním.*
- *Žák nesprávně interpretuje jeden nebo více termínů použitých v zadání úlohy.*
- *Žák není schopen spojit oddělené informace a vztahy do jednoho komplexnějšího celku.“*

Kromě výše uvedených obtíží zmíním ještě další.

První z nich je podle mne nedostatečná motivace žáků. Vyučující žáky nenadchne pro řešení úloh. Toto zmínil ve své práci již Hejný (1990, s. 194). Podle něj slovní úloha „*má být pro žáka výzvou – hádankou. Musí provokovat, motivovat. Proto je třeba věnovat značnou pozornost správnému způsobu zadání textu.“*

Další problém vidím hlavně u dětí mladších – při čtení některé z nich po dvou řádcích textu zapomenou, čím úloha začínala, a musí text úlohy číst znovu a znovu. Po chvilce je to přestane bavit a je pro ně pohodlnější říci, že „tomu nerozumí“.

Mezi problémy také řadím nedostatečnou podporu nejen z rodiny, ale i ze širšího okolí. Na třídních schůzkách i konzultacích mě mnoho rodičů opakovaně upozorňuje, že „oni také matematiku neuměli“, že „oni také na matematiku neměli hlavu“, že jim také „slovní úlohy nikdy nešly, hlavně ty o pohybu“. Jestliže se toto žák od svých rodičů dozví, pak je pro něj o hodně těžší se se slovními úlohami zdárně poprat. Mohu uvést i další příklad ze své praxe. Ve škole, kde jsem dříve učil, přišel majitel školy do jedné z mých prvních hodin matematiky v prvním ročníku a mj. žákům řekl, že on neudělal jedinou zkoušku na vysoké škole (studoval ekonomický směr na Vysoké škole zemědělské v Praze) na první pokus – zkoušku z matematiky, a že je chápe, že je matematika pro ně obtížná. Po jeho proslovu jsem měl celé tři roky problémy žáky motivovat ke studiu, protože si mysleli, že je majitel školy v případě neúspěchu podpoří.

V případě slovních úloh s fyzikální, ale i chemickou, ekonomickou apod. tematikou je dalším velkým problémem neznalost potřebných fyzikálních, chemických, ekonomických jevů, pojmů a vzorců, případně dalšího potřebného aparátu a souvislostí. Mezi oblíbené žákovské výmluvy patří věty „To se probíralo dávno.“, „To si nepamatuji.“, případně podle žáků nejsilnější argument „To jsme vůbec neprobírali.“.

Jedním z dalších problémů je, jak jsem již zmiňoval v úvodu, přístup žáků ke slovním úlohám a k jejich řešení. Oblíbená otázka žáků při řešení slovních úloh z učebnic nebo pracovních sešitů bývá: „K čemu mi to v životě bude?“ Bohužel je pravdou, že v některých případech na tuto otázku učitel nemá pro žáky akceptovatelnou odpověď. Učitelé by se měli snažit, aby slovní úlohy, které žákům zadávají, byly reálné a aby nepoužívali úlohy, kterým žáci nemohou rozumět. Vyskytne-li se ve slovní úloze pojem, kterému žáci nerozumí, je nutné jim ho vysvětlit, jinak se výrazně snižuje motivace žáků tuto úlohu řešit (např. úlohy z historie v rámci mezipředmětových vztahů). Dále musí učitelé dbát na to, aby výsledky, které žákům při řešení slovní úlohy vyjdou, byly reálné, aby je žáci mohli „odhadnout“ a výpočtem svůj odhad ověřit (např. cena 1 rohlíku by měla být okolo 2 Kč a nikoliv 30 haléřů).

Je tedy na nás, učitelích a učitelkách matematiky, abychom žáky dokázali namotivovat tak, aby se slovních úloh nebáli.

1.7 Slovní úlohy s fyzikální tematikou

Mezi tento typ úloh řadím všechny slovní úlohy, ve kterých žáci musí kromě znalostí matematiky využít také další znalosti z oblasti fyzikální.

Pro mne jako učitele matematiky bylo, je a vždy také bude výhodnější, když mohu ve stejné třídě učit nejenom matematiku, ale také fyziku. Mnohem lépe pak mohu využívat mezipředmětové vztahy, oba předměty mohu lépe vzájemně propojovat, mohu v matematice (nebo naopak ve fyzice) plynule navázat na učivo probrané v druhém předmětu. Nemusím se nutně ohlížet na kolegu, jestli požadované učivo ve fyzice (matematice) již probral, žáci se mohou hůře vymlouvat, že požadované učivo s nimi nikdo neprobíral. Žáci pak nemají pocit, že matematika a fyzika spolu nesouvisí.

Velmi zajímavě mají tento problém vyřešen na ZŠ Londýnská v Praze 2. Tam od 6. do 9. ročníku neučí zvlášť předměty matematika a fyzika, ale vytvořili si v rámci ŠVP svůj vlastní předmět Matematicko-fyzikální základ, ve kterém jeden vyučující učí matematiku a fyziku v jedné třídě jako jeden předmět. Tímto žákům jasně ukazují, že fyzika potřebuje matematiku a také že fyzikální znalosti jsou užitečné i v hodinách matematiky.

Ze své zkušenosti vím, že žákům základní školy dělají velké problémy převody jednotek. Vždy, když se tato látka v matematice či fyzice aktuálně probírá, ji zvládají, ale jakmile se probírá něco jiného, někteří velmi rychle zapomenou. Proto by při řešení slovních úloh s fyzikální tematikou měli učitelé zvlášť hodnotit správný postup a zvlášť převody jednotek.

U slovních úloh s fyzikální tematikou je nutná správná fyzikální interpretace matematického výsledku. Ne vždy všechna matematická řešení jsou fyzikálně správná (reálná), jak je vidět v některých úlohách z druhé kapitoly (například ZŠ 14, SŠ 1, 2, 4, 8). Naopak někdy se může stát, že vyjdou matematicky dva různé výsledky, ale fyzikálně se jedná o stejný případ (například úloha SŠ 3).

Při výuce fyziky (na základní, střední a občas také vysoké škole) naráží učitelé fyziky na základní problém – žáci nemají dostatečný matematický aparát k tomu, aby mohli řešit fyzikální úlohy. Problémy začínají již v 6. ročníku při výuce hustoty. Žáci si neumí vyjádřit neznámou ze vzorce. Učitelé fyziky to mohou nahradit dvěma způsoby. Buď žákům napíši tři samostatné vzorce (pro výpočet hmotnosti, objemu a hustoty) nebo je naučí využívat tzv. trojúhelník, ze kterého si žáci vzorce sami odvodí. Já patřím ke druhé skupině, až do 9. ročníku, kdy se již žáci naučí vyjadřovat neznámou ze vzorce, u každého fyzikálního vzorce se žáky sestavíme trojúhelník. Čím jsou žáci starší, tím jsou při tvorbě trojúhelníku samostatnější a tím více ho vyžadují. Dalším podobným problémem je úprava výrazů a rovnic – než se toto žáci naučí v matematice, je v 7. a 8. ročníku při výuce fyziky málo prostoru pro výpočty. Například při výuce tepla a tepelné výměny není možné řešit kalorimetrické rovnice, při výuce kinematiky je problémem s žáky počítat složitější úlohy na rovnoměrné pohyby. Proto v matematice v 9. ročníku zařazuji slovní úlohy na teplo a vracíme se ke slovním úlohám o pohybu.

Podobné problémy se řeší také na střední škole – žákům 1. ročníků chybí ve fyzice např. znalosti goniometrických funkcí.

2 Sbírka úloh

Cílem této kapitoly je vytvoření uceleného přehledu ukázek slovních úloh s fyzikální tematikou vhodných pro využití při výuce matematiky. Tyto úlohy mohou sloužit pro inspiraci kolegům – učitelům matematiky, kteří nemají fyziku jako druhý aprobační předmět. U každé úlohy ukazuji možný postup řešení s důrazem na fyzikální problematiku. Některé úlohy jsou záměrně voleny s neúplným zadáním, aby si žáci museli chybějící údaje změřit, najít v tabulkách nebo na internetu.

Kapitolu jsem rozdělil na 3 podkapitoly – úlohy pro využití při výuce na základní škole, úlohy pro využití při výuce na střední škole a úlohy, které svojí náročností přesahují učivo střední školy. Není-li uvedeno jinak, autorem slovní úlohy jsem já. Postup řešení všech úloh je můj vlastní.

V této kapitole používám následující značení (v souladu s matematickým i fyzikálním značením):

fyzikální veličina včetně jednotky .... s = 150 km;

číselná hodnota fyzikální veličiny (bez jednotek, pro výpočty) .... $\{s\}$ = 150;

rozměr fyzikální veličiny (tzn. její jednotky) .... $[s]$ = km.

2.1 Slovní úlohy s fyzikální tematikou vhodné pro využití při výuce na základní škole

Úlohy jsem vybíral tak, aby pokud možno pokryly všechny základní oblasti učiva matematiky na základní škole. Úlohy jsou seřazeny přehledně podle tematických celků tak, jak jsou uvedeny v RVP ZV (Jeřábek, 2017) a v Metodických komentářích k oboru Matematika a její aplikace (Fuchs, 2015). Samozřejmě je možné tyto úlohy zařadit i při výuce na školách středních.

2.1.2 Tematický okruh Číslo a proměnná

Celá čísla

Úloha ZŠ 1

Vašek dostal za úkol určit průměrnou denní teplotu. Ve škole mu pan učitel poradil, aby použil metodu „mannheimských hodin“ – změřit teplotu v 7, 14 a 21 hodin místního času. Naměřil tyto hodnoty: ráno v 7:00 byla teplota -7 °C, ve 14:00 naměřil 5 °C a večer ve 21:00 na teploměru odečetl hodnotu -2 °C. Jaká byla průměrná denní teplota?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látky a tělesa, konkrétně části o teplotě a jejím měření.

Důležité fyzikální pojmy: teplota, průměrná denní teplota.

Určení průměrné denní teploty je pro žáky nejjednodušší s využitím „mannheimských hodin“. *„"Mannheimské hodiny" – vzorec pro výpočet průměrné denní teploty je* $\frac{t(7)+t(14)+2\cdot t(21)}{4}$*. Tento postup byl odvozen empiricky – porovnáním údajů z kontinuálního grafického záznamu na termografu se zjistilo, že tento vzorec v našich klimatických podmínkách nejlépe odpovídá naměřeným hodnotám. Například v jiných částech světa odpovídá skutečné průměrné denní teplotě vzorec* $\frac{t(7)+t(14)+t(21)}{3}$*. Jedná se tedy o postup, který byl odvozen ze skutečně pozorovaných hodnot. Informačním zdrojem byli v případě tohoto dotazu kolegové z Katedry meteorologie a ochrany přírody MFF UK.“* (Průměrná denní teplota, 2014)

Průměrnou denní teplotu může učitel pro srovnání změřit např. pomocí systému měření Pasco, kdy nechá 24 hodin systém měřit a se žáky potom průměrnou denní teplotu z grafu pomocí programu odečtou.

teplota v 7:00 .... $t(7)$ = -7 °C;

teplota ve 14:00 ..... $t(14)$ = 5 °C;

teplota ve 21:00 ..... $t(21)$ = -2 °C;

průměrná teplota .... $t_p = ?$;

$[t_p] = °C$.

K výpočtu žáci využijí vzorec $t_\mathrm{p} = \frac{t(7)+t(14)+2\cdot t(21)}{4}$.

F2:

$\{t_\mathrm{p}\} = \frac{-7+5+2\cdot(-2)}{4}$;

$\{t_\mathrm{p}\} = -1{,}5$;

$t_\mathrm{p} = -1{,}5$ °C.

F3:

Průměrná denní teplota byla -1,5 °C. Vhodná rozšiřující úloha by byla: „V sobotu změřte průměrnou denní teplotu v místě svého bydliště.“ S žáky pak můžeme diskutovat, jak se lišila jejich vypočtená teplota v závislosti na místě měření (jiná část vesnice, sousední vesnice, jiné umístění teploměru) a kolik vyšla změřená průměrná teplota změřená např. systémem Pasco ve škole.

Desetinná čísla

Úloha ZŠ 2 inspirováno z (Hermochová, 2014, s. 34)

Anička letí na studijní pobyt na Maltu. Její prázdný kufr váží 3,5 kg. Sbalila si s sebou 25 kusů oblečení, přičemž každý váží průměrně 20 dag. Přibalila si ještě 2 600 g kosmetiky, ručník o hmotnosti 70 dag a přikoupila pět triček stejné váhy jako předchozí kusy oblečení a šátek o hmotnosti 15 dag. Málem zapomněla na boty – dobalila si žabky o hmotnosti 250 g a jedny běžecké boty, které vážily 550 g. Vejde se kufr do povoleného limitu 15 kilogramů?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látky a tělesa, konkrétně části o hmotnosti a jejím měření.

Důležité fyzikální pojmy: hmotnost a její jednotky, převody jednotek hmotnosti.

kufr .... m_1 = 3,5 kg;

1 ks oblečení .... m_2 = 20 dag = 0,2 kg;

počet kusů oblečení ..... p_2 = 25;

kosmetika .... m_3 = 2 600 g = 2,6 kg;

ručník .... m_4 = 70 dag = 0,7 kg;

1 ks tričko .... m_5 = 20 dag = 0,2 kg;

počet triček .... p_5 = 5;

1 ks šátek .... m_6 = 15 dag = 0,15 kg;

1 ks žabky .... m_7 = 250 g = 0,25 kg;

1 ks běžecké boty .... m_8 = 550 g = 0,55 kg;

celková hmotnost .... m = ?;

$[m]$ = kg.

Výpočet: Nejdříve žáci převedou všechny hmotnosti na stejnou jednotku, pak vynásobí počet kusů hmotností jednoho kusu a vše sečtou.

$$m = m_1 + m_2 \cdot p_2 + m_3 + m_4 + m_5 \cdot p_5 + m_6 + m_7 + m_8$$

F2:

$$\{m\} = 3{,}5 + 0{,}2 \cdot 25 + 0{,}7 + 2{,}6 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}55;$$

$$\{m\} = 13{,}75;$$

$m = 13{,}75$ kg.

F3:

Anička se do váhového limitu vejde, protože celková hmotnost všech jejích zavazadel je 13,75 kg. Vhodná doplňující otázka by byla: „Kolik kilogramů nebo gramů Aničce do limitu pro zavazadlo zbývá?“ Na závěr můžeme s žáky diskutovat, které věci podle nich v seznamu chybí.

Přímá a nepřímá úměrnost, poměr, měřítko mapy

Úloha ZŠ 3

Vašek s tátou pokusem (u moře si do PET lahve nabrali mořskou vodu a doma na pekáči nechali odpařit) zjistili, že vypařením 1,5 kg mořské vody se získá 51,7 g soli. Kolik soli se získá z 1 q mořské vody a kolik mořské vody je potřeba k získání 1 kg soli?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látky a tělesa, konkrétně části o hmotnosti a jejím měření.

Důležité fyzikální pojmy: hmotnost a její jednotky, převody jednotek hmotnosti.

hmotnost mořské vody v kg	hmotnost soli z ní získané v g
1,5	51,7
100	$\{m_S\}$
$\{m_V\}$	1 000

Protože množství soli získané odpařováním je přímo úměrné použitému množství mořské vody (vezmeme-li vodu ze stejného moře ve stejném čase), žáci použijí pro výpočet trojčlenku.

F2:

Výpočet hmotnosti soli:

$\frac{\{m_S\}}{51{,}7} = \frac{100}{1{,}5};$

$\{m_S\} = \frac{51{,}7 \cdot 100}{1{,}5};$

$\{m_S\} = 3\,446{,}7;$

$m_S = 3\,446{,}7$ kg;

Výpočet hmotnosti vody:

$\frac{\{m_V\}}{1{,}5} = \frac{1\,000}{51{,}7};$

$\{m_V\} = \frac{1{,}5 \cdot 1\,000}{51{,}7};$

$\{m_V\} = 29{,}013\,5;$

$m_V \doteq 29$ kg.

F3:

Z 1 q mořské vody se odpařením získá 3 446,7 g soli, vhodnější by bylo zaokrouhlení na 3,45 kg soli (vzhledem k přesnosti měření). Na získání 1 kg soli je potřeba odpařit 29,014 kg mořské vody, opět vhodnější odpověď přibližně 29 kg mořské vody. Vhodná doplňující otázka by byla: „Jaký objem mořské vody je potřeba pro získání 1 kg / 1 t soli?“ Na závěr můžeme s žáky diskutovat, jestli by jim při použití vody z jiného moře vyšel stejný výsledek (a vyzvat je k uvedení příkladů – např. Mrtvé moře).

Úloha ZŠ 4

V plánu obce s měřítkem 1:1 500 je zakreslena zahrada. Její rozměry na plánu jsou 22 mm a 32 mm. Urči skutečnou výměru zahrady v metrech čtverečných a v arech. Vypočítej tržní hodnotu pozemku, víš-li, že cena 1 m^2 pozemku je 2 100 Kč.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látky a tělesa, konkrétně části o obsahu a jeho měření.

Důležité fyzikální pojmy: obsah a jeho jednotky, převody jednotek obsahu.

Před započetím práce je vhodné zjistit, zda žáci rozumí slovu výměra, případně tento pojem vysvětlit.

1. strana obdélníku na plánu .... $a_\mathrm{p} = 22\ \mathrm{mm}$;

2. strana obdélníku na plánu .... $b_\mathrm{p} = 32\ \mathrm{mm}$;

1. strana obdélníku ve skutečnosti .... $a_\mathrm{r} = ?$;

$[a_\mathrm{r}] = \mathrm{m}$;

2. strana obdélníku ve skutečnosti .... $b_\mathrm{r} = ?$;

.... $[b_\mathrm{r}] = \mathrm{m}$;

výměra zahrady .... $S = ?$;

$[S] = \mathrm{m}^2$.

výměra zahrady v m^2	cena v Kč
1	2 100
$\{S\}$	$\{c\}$

Měřítko mapy (plánu) udává, v jakém poměru jsme změnili délky stran. V našem příkladu říká, že 1 mm na plánu měří ve skutečnosti 1 500 mm = 1,5 m.

Pro výpočet tržní ceny pozemku žáci využijí přímou úměrnost (kolikrát větší pozemek, tolikrát více korun dostaneme při prodeji).

$\frac{1}{1\,500} = \frac{a_\mathrm{p}}{a_\mathrm{r}}$ pro a_r v mm;

resp. $a_\mathrm{r} = 1{,}5 \cdot a_\mathrm{p}$ pro a_r v m;

$\frac{1}{1\,500} = \frac{b_\mathrm{p}}{b_\mathrm{r}}$ pro b_r v mm;

resp. $b_\mathrm{r} = 1{,}5 \cdot b_\mathrm{p}$ pro b_r v m;

$S = a_\mathrm{r} \cdot b_\mathrm{r}$.

F2:

Výpočet délky strany *a* ve skutečnosti:

$\{a_\mathrm{r}\} = 1{,}5 \cdot 22$;

$\{a_\mathrm{r}\} = 33$;

$a_\mathrm{r} = 33$ m.

Výpočet délky strany *b* ve skutečnosti:

$\{b_\mathrm{r}\} = 1{,}5 \cdot 32$;

$\{b_\mathrm{r}\} = 48$;

$b_r = 48$ m.

Výpočet skutečné výměry zahrady:

$\{S\} = 33 \cdot 48$;

$\{S\} = 1\,584$;

$S = 1\,584\ \mathrm{m}^2 = 15{,}84$ a.

Výpočet tržní ceny zahrady:

$\{c\} = 1\,584 \cdot 2\,100$;

$\{c\} = 3\,326\,400$;

$c = 3\,326\,400$ Kč.

F3:

Výměra zahrady je 1 584 m^2, v arech to činí 15,84 a. Tržní hodnota pozemku činí 3 326 400 Kč. Vhodná doplňující úloha by byla: „Zjisti skutečnou tržní cenu pozemku v místě svého bydliště.“ Na závěr můžeme s žáky diskutovat, na čem všem podle nich závisí tržní cena pozemku a kdy je vhodné využít jako jednotky výměry m^2, kdy ary a kdy jiné (a jaké). Žáci by měli uvádět příklady z praxe, své tvrzení mohou doložit ukázkami inzerátů z tisku nebo z internetu.

Procenta

Úloha ZŠ 5

Jaký je výkon rychlovarné konvice s účinností 85 %, jestliže její příkon je 2,2 kW? Kolik Kč stojí uvaření 0,5 l vody na čaj v této konvici, jestliže za 1 kWh elektrické energie zaplatíš přibližně 5,12 Kč. Vodu ohříváš z pokojové teploty (21 °C). Další potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o přeměnách energie a do nauky o teple.

Důležité fyzikální pojmy: teplo a jeho jednotky, výpočet tepla, měrná tepelná kapacita, vztah práce a energie, účinnost a výpočet účinnosti.

účinnost .... $\eta = 85\ \%$;

příkon .... $P_0 = 2{,}2\ \text{kW} = 2\,200\ \text{W}$;

objem vody .... $V = 0{,}5\ \text{l}$;

hmotnost vody .... $m = ?$;

$[m] = \text{kg}$;

počáteční teplota .... $t_0 = 21\ °\text{C}$;

výkon rychlovarné konvice .... $P = ?$;

$[P] = \text{W}$;

práce potřebná k ohřátí vody .... W = ?;

$[W] = \text{J}$;

teplo dodané vodě .... Q = ?;

$[Q] = \text{J}$;

doba ohřevu vody .... t = ?;

[t] = s;

odebraná elektrická energie .... E = ?;

[E] = J.

Žáci dohledají následující informace:

teplota varu vody .... t_1 = 100 °C;

měrná tepelná kapacita vody .... $c = 4{,}18\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot °C}} = 4\ 180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot °C}}$;

hustota vody .... $\rho = 1\ 000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$.

spotřeba elektrické energie v J	cena v Kč
3 600 000	5,12
$\{E\}$	$\{c\}$

Převod jednotek elektrické energie: 1 kWh = 3 600 000 Ws = 3 600 000 J.

První část slovní úlohy je z fyzikálního hlediska jednodušší, žákům stačí ze vzorce pro účinnost $\eta = \frac{P}{P_0}$ vyjádřit výkon $P = \eta \cdot P_0$. Nesmí ale zapomenout na vyjádření účinnosti desetinným číslem.

Ve druhé části je potřeba provést několik výpočtů a správných fyzikálních úvah. Ze vztahu $m = \rho \cdot V$ zjistí žáci hmotnost 0,5 l vody. Nejdříve vypočítají teplo potřebné k ohřátí vody z 21 °C na 100 °C podle vzorce $Q = c \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$. Toto teplo se rovná práci, kterou rychlovarná konvice vykoná při ohřevu vody ($Q = W$). Z definice výkonu $P = \frac{W}{t}$ vypočítají čas t potřebný k ohřátí vody $\left(t = \frac{W}{P}\right)$. Dále vypočítají potřebnou elektrickou energii E, kterou jsme odebrali ze sítě ($E = t \cdot P_0$). Na závěr pomocí trojčlenky a převodů vypočítají cenu (c), za kterou uvaříme 0,5 l vody.

F2:

Výpočet výkonu:

$\{P\} = 0{,}85 \cdot 2\,200;$

$\{P\} = 1\,870;$

$P = 1\,870$ W.

Výpočet hmotnosti vody:

$\{m\} = 1\,000 \cdot 0{,}5;$

$\{m\} = 0{,}5;$

$m = 0{,}5$ kg.

Výpočet tepla a práce:

$\{Q\} = 4\,180 \cdot 0{,}5 \cdot (100 - 21);$

$\{Q\} = 165\,110;$

$Q = 165\,110$ J.

$W = Q;$

$\{W\} = 165\,110;$

$W = 165\,110$ J.

Výpočet času a odebrané elektrické energie:

$\{t\} = \frac{165\,110}{1\,870};$

$\{t\} \doteq 88{,}3;$

$t \doteq 88{,}3$ s.

$\{E\} = 88{,}3 \cdot 2\,200;$

$\{E\} = 194\,260;$

$E = 194\,260$ J.

Výpočet ceny:

$\{c\} = \frac{5{,}12 \cdot 194\,260}{3\,600\,000};$

$\{c\} \doteq 0{,}28;$

$c \doteq 0{,}28$ Kč.

F3:

Výkon rychlovarné konvice je 1 870 W. Za uvaření 0,5 l vody zaplatíme přibližně 0,28 Kč. Vhodná doplňující úloha (ale již v rámci mezipředmětových vztahů s fyzikou) by byla: „Zjisti průměrnou účinnost vaší rychlovarné konvice.“ Na závěr můžeme s žáky diskutovat, jak mohou doma ušetřit za elektrickou energii.

Úloha ZŠ 6

Který z vysavačů má vyšší účinnost: Rowenta RO6477EA o příkonu 750 W a sacím výkonu 250 W nebo Electrolux ZSPGREEN s příkonem 700 W a sacím výkonem 230 W? Údaje převzaty z https://www.arecenze.cz/recenze-vysavacu/rowenta-ro6477ea/ a z https://www.arecenze.cz/recenze-vysavacu/electrolux-zspgreen/.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o přeměnách energie.

Důležité fyzikální pojmy: účinnost, výpočet účinnosti.

Na počátku je vhodné žákům vysvětlit rozdíl mezi příkonem (na vysavači musí být vždy uveden) a sacím výkonem (zjednodušeně řečeno „síla vysavače“, ne vždy ho výrobce uvádí). Případně si mohou tyto informace najít na internetu.

Vysavač Roventa:

příkon .... $P_0 = 750$ W;

sací výkon .... $P = 250$ W;

účinnost .... $\eta_R = ?$;

$[\eta_R]$ bezrozměrná.

Vysavač Electrolux:

příkon .... $P_0 = 700$ W;

sací výkon .... $P = 230$ W;

účinnost .... $\eta_E = ?$;

$[\eta_E]$ bezrozměrná.

Pro každý z uvedených vysavačů žáci vypočítají účinnost podle vzorce $\eta = \frac{P}{P_0}$ a výsledné hodnoty porovnají.

F2:

Vysavač Roventa:

$\{\eta_R\} = \frac{250}{750}$;

$\eta_R \doteq 0{,}333 = 33{,}3\ \%$.

Vysavač Electrolux:

$\{\eta_E\} = \frac{230}{700}$;

$\eta_E \doteq 0{,}329 = 32{,}9\ \%$.

F3:

Vysavač Roventa (33,3 %) má vyšší účinnost než vysavač Electrolux (32,9 %). Na závěr můžeme s žáky diskutovat o správném zaokrouhlování a přesnosti výsledků. Vhodná doplňující úloha by byla: „Zjisti účinnost vašeho vysavače.“

Mocniny s přirozeným mocnitelem

Úloha ZŠ 7

Urči hmotnost molekuly kyslíku. Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látka a těleso, konkrétně části o částicovém složení látek a stavbě atomu.

Důležité fyzikální pojmy: atom a jeho složení, molekula.

Molekula kyslíku se skládá ze dvou atomů kyslíku, každý atom kyslíku má v jádře 8 protonů a 8 neutronů, v obalu 8 elektronů.

hmotnost molekuly kyslíku ...... m = ?;

$[m]$ = kg.

Žáci dohledají následující informace:

hmotnost protonu .... $m_{\mathrm{p}} = 1{,}672\ 62 \cdot 10^{-27}$ kg;

hmotnost neutronu .... $m_{\mathrm{n}} = 1{,}672\ 62 \cdot 10^{-27}$ kg;

hmotnost elektronu .... $m_{\mathrm{e}} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Hmotnost molekuly kyslíku vypočítáme podle vzorce:

$$m = 2 \cdot \left(8 \cdot m_{\mathrm{p}} + 8 \cdot m_{\mathrm{n}} + 8 \cdot m_{\mathrm{e}}\right) = 16 \cdot (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{e}}).$$

F2:

$\{m\} = 16 \cdot (1{,}672\,62 \cdot 10^{-27} + 1{,}672\,62 \cdot 10^{-27} + 9{,}1 \cdot 10^{-31})$;

$\{m\} = 5{,}353\,843 \cdot 10^{-26}$;

$\{m\} \doteq 5{,}354 \cdot 10^{-26}$;

$m \doteq 5{,}354 \cdot 10^{-26}$ kg.

F3:

Hmotnost molekuly kyslíku je přibližně $5{,}354 \cdot 10^{-26}$ kg. Vhodná doplňující úloha by byla: „Hmotnost elektronu je asi 1 840 krát menší než hmotnost protonu i neutronu. Můžeme tedy zanedbat hmotnost elektronů? Jak velkou chybu bychom udělali?“. Na závěr můžeme žákům v rámci mezipředmětových vztahů ukázat rychlejší výpočet hmotnosti molekuly kyslíku přes relativní atomovou hmotnost a atomovou hmotnostní konstantu.

Úloha ZŠ 8 (Půlpán, 2009, s. 21)

Vzdálenost Země – Měsíc je přibližně 380 000 km. Jak velké je zpoždění při komunikaci mezi kosmickou lodí na Měsíci a řídícím centrem na Zemi? Radiový signál se šíří rychlostí světla. Zpomalení rychlosti šíření radiového signálu v atmosféře neuvažuj. Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitol fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o pohybech rovnoměrných, a Elektromagnetické a světelné děje, konkrétně části o vlastnostech světla.

Důležité fyzikální pojmy: rychlost šíření světla, rovnoměrný pohyb.

vzdálenost Země – Měsíc .... $s \doteq 380\,000\ \text{km} = 3{,}8 \cdot 10^{8}$ m;

zpoždění signálu .... t = ?;

$[t]$ = s.

Žáci dohledají následující informace:

rychlost šíření světla .... $c \doteq 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Při výpočtu doby zpoždění signálu žáci využijí vztah $t = \frac{s}{v}$.

F2:

$\{t\} = \frac{3{,}8 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}$;

$\{t\} \doteq 1{,}3$;

$t \doteq 1{,}3$ s.

F3:

Zpoždění při komunikaci mezi kosmickou lodí na Měsíci a řídícím centrem na Zemi je 1,3 s. Vhodná doplňující otázka by byla: „Je možné tuto úlohu řešit i v jiných jednotkách tak, abychom nemuseli počítat s čísly ve tvaru $a \cdot 10^n$?“ Na závěr můžeme s žáky v rámci mezipředmětových vztahů diskutovat o složení atmosféry a vlivu atmosféry na rychlosti šíření rádiového signálu.

Úloha ZŠ 9

Urči průměrnou hustotu naší planety. Na internetu si zjisti potřebné chybějící údaje.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látka a těleso, konkrétně části o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty.

Důležité fyzikální pojmy: hustota, jednotky hustoty, výpočet hustoty.

průměrná hustota planety Země .... $\rho = ?$;

$[\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$;

objem planety Země .... $V = ?$;

$[V] = \mathrm{m}^3$.

Žáci dohledají následující informace:

hmotnost planety Země .... $m \doteq 5{,}973\,6 \cdot 10^{24}$ kg;

poloměr planety Země .... R = 6 378 km = $6{,}378 \cdot 10^6$ m.

Při výpočtu průměrné hustota planety Země žáci využijí vztah $\rho = \frac{m}{V}$. Objem si vypočtou pomocí vzorce pro objem koule $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

F2:

Výpočet objemu planety Země:

$\{V\} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}378 \cdot 10^6)^3$;

$\{V\} = 1{,}086 \cdot 10^{21}$;

$V = 1{,}086 \cdot 10^{21}$ m^3.

Výpočet průměrné hustoty planety Země:

$\{\rho\} = \frac{5{,}973\,6 \cdot 10^{24}}{1{,}086 \cdot 10^{21}}$;

$\{\rho\} = 5{,}5 \cdot 10^3$;

$\rho = 5{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

F3:

Průměrné hustota planety Země je $5{,}5 \cdot 10^3$ kg. Vhodná doplňující úloha by byla: „Na internetu najdi objem a hustotu planety Země a tyto údaje porovnej se svými výpočty. Zdůvodni, proč se liší vypočtený objem planety Země s objemem, který jsi nalezl na internetu.“ Na závěr můžeme s žáky v rámci mezipředmětových vztahů diskutovat o složení planety Země a důležitosti slova „průměrná“ v zadání úlohy.

Slovní úlohy o pohybu

Tento typ slovních úloh, jak jsem se již zmínil v úvodu své práce, vzbuzuje u většiny žáků již předem obavy. V učebnicích, sbírkách i pracovních sešitech je velké množství slovních úloh o pohybu, snazších i obtížnějších. Podrobně se různým typům těchto úloh věnuje ve své bakalářské práci např. Havel (2009). V této části jsem zařadil úlohy základní, úlohy obtížnější jsou zařazeny v části pro střední školy.

Úloha ZŠ 10

Vašek vyjel z domova v Dolních Břežanech na kole na návštěvu k Tondovi do Cholupic. V polovině cesty si uvědomil, že doma zapomněl ovladač ke dronu, se kterým chtějí s Tondou létat. Protože již neměl čas se vracet, zatelefonoval tátovi a poprosil ho, aby mu ovladač dovezl autem. Jakou rychlostí by musel táta jet, aby Vaška dohonil, ještě než dojede k Tondovi, jestliže Vašek jel na kole polní cestou průměrnou rychlostí 16 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$? Cesta na kole je dlouhá 3,2 km, autem jedeme po silnici 4,9 km. Nalezení ovladače a nasednutí do auta tátovi trvalo 1 minutu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: rovnoměrný pohyb, dráha, čas, průměrná rychlost a vztah mezi těmito veličinami při rovnoměrném pohybu, převody jednotek času.

Vašek

dráha .... $s_{\mathrm{v}} = 3{,}2$ km;

polovina dráhy .... $s_{\mathrm{v}} = 1{,}6$ km;

průměrná rychlost .... $v_{\mathrm{v}} = 16\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$;

čas, za který dojede k Tondovi po zavolání tátovi .... $t_{\mathrm{v}} = ?$;

$[t_{\mathrm{v}}] = \mathrm{h}$, po provedení výpočtu převést na minuty.

táta

dráha .... $s_{\mathrm{t}} = 4{,}9$ km;

čas, za který musí dojet k Tondovi .... $t_{\mathrm{t}} = t_{\mathrm{v}} - 1$ minuta, pro výpočet převést na hodiny;

průměrná rychlost .... $v_{\mathrm{t}} = ?;$

$$[v_{\mathrm{t}}] = \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Při výpočtu doby jízdy Vaška k Tondovi žáci využijí vztah $t = \frac{s}{v}$. Při výpočtu tátovy průměrné rychlosti žáci využijí vztah $v = \frac{s}{t}$. Při výpočtech ze vzorce je nutné pracovat s časem uvedeným v hodinách, pro odečtení minuty je naopak vhodnější čas převést na minuty.

F2:

Výpočet doby, za kterou Vašek dojede k Tondovi po zavolání tátovi:

$\{t_{\mathrm{V}}\} = \frac{1{,}6}{16};$

$\{t_{\mathrm{V}}\} = 0{,}1;$

$t_{\mathrm{V}} = \frac{1}{10}\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{min}.$

Výpočet tátovy průměrné rychlosti:

$\{t_{\mathrm{t}}\} = 6 - 1;$

$t_{\mathrm{t}} = 5\ \mathrm{min} = \frac{1}{12}\ \mathrm{h};$

$\{v_{\mathrm{t}}\} = \frac{4{,}9}{\frac{1}{12}};$

$\{v_{\mathrm{t}}\} = 58{,}8;$

$v_{\mathrm{t}} = 58{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

F3:

Táta musel jet průměrnou rychlostí nejméně 59 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, aby Vaška dostihl před jeho příjezdem k Tondovi. Vhodná doplňující otázka by byla: „Je možné, aby táta jel tebou vypočtenou průměrnou rychlostí, jestliže Dolní Břežany a Cholupice spolu téměř sousedí? Jaká je nejvyšší povolená rychlost v obci a mimo obec?“

Úloha ZŠ 11

Novákovi a Kropáčkovi jsou přátelé. Domluvili se, že si pronajmou na 14 dnů chatu u Nové Bystřice. První týden v ní budou Kropáčkovi, druhý týden Novákovi. Protože Kropáčkovi v den střídání museli odjet z chaty dříve, než bylo původně domluveno, předávali si klíče cestou. Novákovi vyjeli z Dolních Břežan v 9:30 průměrnou rychlostí $70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Kropáčkovi vyjeli z Nové Bystřice v 10:15. Protože spěchali, jeli průměrnou rychlostí $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Urči, kdy a kde se potkali, jestliže vzdálenost Dolních Břežan a Nové Bystřice je 150 km a ani jedna z rodin si neudělala žádnou přestávku a ani jedna z rodin se nedostala do dopravní zácpy.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: rovnoměrný pohyb, dráha, čas, průměrná rychlost a vztah mezi těmito veličinami při rovnoměrném pohybu, převody jednotek času.

	Novákovi		Kropáčkovi
čas odjezdu	9:30		10:15
doba jízdy	$t_N = \left(x + \frac{3}{4}\right)$ h		$t_K = x$ h
průměrná rychlost	$v_N = 70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$		$v_K = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
ujetá dráha v km	s_N		s_K

vzdálenost Dolních Břežan a Nové Bystřice .... $s = 150$ km.

Při výpočtu dráhy, kterou ujela každá z rodin, žáci využijí vztah $s = v \cdot t$. Při výpočtech ze vzorce je nutné pracovat s časem uvedeným v hodinách, pro určení času setkání je naopak vhodnější čas převést na minuty.

Při řešení slovní úlohy si žáci musí uvědomit, že součet drah, které ujedou obě rodiny, se rovná vzdálenosti Dolních Břežan a Nové Bystřice. Sestaví tedy rovnici $s = s_{\mathrm{N}} + s_{\mathrm{K}}$, kde $s_{\mathrm{N}} = v_{\mathrm{N}} \cdot t_{\mathrm{N}}$;

$s_{\mathrm{N}} = 70\left(x + \frac{3}{4}\right)$ km;

$s_{\mathrm{K}} = v_{\mathrm{K}} \cdot t_{\mathrm{K}}$;

$s_{\mathrm{K}} = 80x$ km.

F2:

$150 = 70\left(x + \frac{3}{4}\right) + 80x.$

Vyřeší-li tuto rovnici, dostávají výsledek $x = \frac{13}{20}$.

Tudíž $t_{\mathrm{N}} = \frac{7}{5}$ h $= 84$ min a $t_{\mathrm{K}} = \frac{13}{20}$ h $= 39$ min.

Dosazením do $\{s_{\mathrm{N}}\} = 70\left(x + \frac{3}{4}\right)$ získávají žáci $s_{\mathrm{N}} = 98$ km. Dosazením do $\{s_{\mathrm{K}}\} = 80x$ dostávají $s_{\mathrm{K}} = 52$ km.

F3:

Zkouška: $s_{\mathrm{N}} + s_{\mathrm{K}} = 150$ km.

Rodiny se tedy setkají v 10:54, 98 km od Dolních Břežan a 52 km od Nové Bystřice. Vhodné rozšiřující úlohy by byly: „Jak by se změnilo řešení, jestliže by se Novákovi cestou do Nové Bystřice zdrželi 30 minut v dopravní zácpě? Jak by se změnilo řešení, když by se průměrné rychlosti obou rodin vyměnily?“

Úloha ZŠ 12

Vašek i Anička si během dovolené plní tréninkový plán, který dostali od trenérů na prázdniny. Oba mají mj. trénovat vytrvalost. V lese si našli okruh o délce 250 metrů, po kterém běhají. Anička hraje basketbal, proto běhá rychleji než Vašek, který hraje stolní tenis. Anička uběhne jedno kolo za 1 minutu a 10 sekund, Vašek za 1 minutu a 24 sekund. Za jak dlouho Anička Vaška znovu dohoní, jestliže vyběhli ve stejném okamžiku a běží stejným směrem?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: rovnoměrný pohyb, dráha, čas, průměrná rychlost a vztah mezi těmito veličinami při rovnoměrném pohybu, převody jednotek času.

	Anička		Vašek
doba běhu v s	$\{t_\mathrm{A}\} = x$		$\{t_\mathrm{V}\} = x$
průměrná rychlost v $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$\{v_\mathrm{A}\}$		$\{v_\mathrm{V}\}$
uběhlá dráha v m	$\{s_\mathrm{A}\}$		$\{s_\mathrm{V}\}$

Při výpočtu průměrné rychlosti Aničky a Vaška žáci využijí vztah $v = \frac{s}{t}$.

Při řešení slovní úlohy si žáci musí uvědomit, že Anička uběhne o jedno kolo (250 m) více. Sestaví tedy rovnici $s_\mathrm{A} = s_\mathrm{V} + 250$ m.

Z informací, za jak dlouho každé z dětí uběhne jedno kolo, získají žáci průměrné rychlosti dětí: $v_\mathrm{A} = \frac{25}{7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a $v_\mathrm{V} = \frac{125}{42}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

F2:

Dosazením do rovnice pro dráhy získají rovnici $\frac{25}{7}x = \frac{125}{42}x + 250$.

Řešením této rovnice je $x = 420$.

F3:

Zkouška: $s_\mathrm{A} = \frac{25}{7} \cdot 420\ \mathrm{m} = 1\,500\ \mathrm{m}$, $s_\mathrm{V} = \frac{125}{42} \cdot 420\ \mathrm{m} = 1\,250\ \mathrm{m}$. Anička opravdu uběhla o 1 kolo více.

Anička Vaška znovu dohoní za 7 minut (420 s). Vhodná rozšiřující úloha by byla: „Za jak dlouho by se děti potkaly, jestliže by Anička běžela opačným směrem než Vašek?“

Úloha ZŠ 13 (Půlpán, 2010, s. 18)

Vzdálenost mezi dvěma městy je 60 km. Pomalejšímu vozidlu trvá ujetí této vzdálenosti o půl hodiny déle než rychlejšímu, které jede rychlostí o 50 % větší. Jakou rychlostí jedou jednotlivá vozidla?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: rovnoměrný pohyb, dráha, čas, průměrná rychlost a vztah mezi těmito veličinami při rovnoměrném pohybu, převody jednotek času.

	pomalejší vozidlo		rychlejší vozidlo
doba jízdy v h	$\{t_\mathrm{P}\} = x + 0{,}5$		$\{t_\mathrm{R}\} = x$
průměrná rychlost v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$\{v_\mathrm{P}\}$		$\{v_\mathrm{R}\}$
ujetá dráha v km	$\{s_\mathrm{P}\} = 60$		$\{s_\mathrm{R}\} = 60$

Při výpočtu průměrné rychlosti obou vozidel žáci využijí vztah $v = \frac{s}{t}$. Mezi rychlostmi obou vozidel platí vztah $v_\mathrm{R} = \frac{3}{2} v_\mathrm{P}$.

Pro průměrné rychlosti vozidel platí: $v_\mathrm{R} = \frac{60}{x}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $v_\mathrm{P} = \frac{60}{x+0{,}5}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

F2:

Dosazením do vztahu mezi rychlostmi obou vozidel získají žáci rovnici $\frac{60}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{60}{x+0{,}5}$.

Řešením této rovnice je $x = 1$.

F3:

Pomalejší vozidlo jede 1,5 hodiny rychlostí 40 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, rychlejší vozidlo 1 hodinu rychlostí 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Vhodná rozšiřující úloha by byla: „Jak by se změnilo řešení, jestliže by rychlejší vozidlo jelo rychlostí např. pouze o 40 % vyšší?"

Úloha ZŠ 14

Vašek s Aničkou jdou po navzájem kolmých cestách. Oba vyšli ze stejného místa, ve stejnou dobu a jdou od sebe. Vašek jde průměrnou rychlostí 3 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, Anička průměrnou rychlostí 4 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Vypočítej, za jak dlouhou dobu budou od sebe vzdáleni 7,5 km.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: rovnoměrný pohyb, dráha, čas, průměrná rychlost a vztah mezi těmito veličinami při rovnoměrném pohybu, převody jednotek času.

	Anička		Vašek
doba chůze v h	$\{t_\mathrm{A}\} = x$		$\{t_\mathrm{V}\} = x$
průměrná rychlost v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$\{v_\mathrm{A}\} = 4$		$\{v_\mathrm{V}\} = 3$
dráha v km	$\{s_\mathrm{A}\}$		$\{s_\mathrm{V}\}$

vzdálenost dětí .... s = 7,5 km

Při výpočtu dráhy, kterou každé dítě ujde, žáci využijí vztah $s = v \cdot t$. Platí tedy $s_\mathrm{A} = 4x$ km a $s_\mathrm{V} = 3x$ km.

Pro výpočet vzdálenosti obou dětí musí žáci využít Pythagorovu větu: $s^2 = {s_\mathrm{A}}^2 + {s_\mathrm{V}}^2$.

F2:

Dosazením do vztahu mezi dráhami obou dětí získají žáci rovnici $7{,}5^2 = (4x)^2 + (3x)^2$.

Tato rovnice má 2 řešení $x = \pm 1{,}5$.

F3:

Anička s Vaškem budou od sebe vzdáleni 7,5 km za 1,5 hodiny. Záporný výsledek nemá z fyzikálního hlediska smysl. Vhodná rozšiřující úloha by byla: „Stejnou úlohu zkuste vyřešit s využitím podobnosti trojúhelníků.“

Slovní úlohy na teplo

Úloha ZŠ 15

Spěchám ráno do školy. Uvařil jsem si 3 dl horkého čaje (98 °C). Kolik mléka právě vyndaného z chladničky (4 °C) musím přilít do čaje, abych mohl čaj s mlékem hned vypít (50 °C až 60 °C, pro potřeby úlohy počítej s hodnotou 60 °C)? Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu. Tepelnou výměnu s okolím i s hrnečkem zanedbej.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o přeměnách energie a do nauky o teple.

Důležité fyzikální pojmy: teplo a jeho jednotky, výpočet tepla, měrná tepelná kapacita, tepelná výměna, výpočet hmotnosti tělesa ze známého objemu a hustoty, převody jednotek objemu a hustoty.

čaj:

objem .... $V_C = 3$ dl $= 300$ ml;

počáteční teplota .... $t_C = 98$ °C;

mléko:

počáteční teplota .... $t_M = 4$ °C;

objem .... V_M = ?;

$[V_M]$ = ml;

teplota po ukončení tepelné výměny t = 60 °C;

teplo odebrané čaji .... Q_C = ?;

$[Q_C]$ = J;

teplo dodané mléku .... Q_M = ?;

$[Q_M]$ = J.

Žáci dohledají následující informace (pro čaj bereme stejné hodnoty jako pro vodu):

měrná tepelná kapacita čaje .... $c_C = 4{,}18\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot °C}} = 4{,}180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g \cdot °C}}$;

hustota čaje .... $\rho_C = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$;

měrná tepelná kapacita mléka .... $c_M = 3{,}5\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot °C}} = 3{,}5\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g \cdot °C}}$;

hustota mléka .... $\rho_C = 1{,}03\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$.

Při řešení této úlohy žáci využijí znalosti o tepelné výměně – teplo přijaté mlékem se rovná teplu odevzdaného čajem $Q_C = Q_M$. Teplo vypočítají pomocí vzorce $Q = c \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$, kde t_1 je teplota po ukončení tepelné výměny a t_0 je teplota na počátku tepelné výměny při přijímání tepla, resp. t_0 je teplota po ukončení tepelné výměny a t_1 je teplota na počátku tepelné výměny při odevzdávání tepla. Takto žáci vyřeší fyzikální problém se znaménky u tepla (teplo přijaté – teplo odevzdané). Hmotnost čaje i mléka určí žáci ze vztahu $m = \rho \cdot V$.

teplo odevzdané čajem: $Q_C = c_C \cdot \rho_C \cdot V_C \cdot (t_C - t)$;

teplo přijaté mlékem: $Q_M = c_M \cdot \rho_M \cdot V_M \cdot (t - t_M)$.

F2:

Po dosazení do vztahu $Q_\mathrm{C} = Q_\mathrm{M}$ a úpravě získají objem mléka V_M

$\{V_\mathrm{M}\} = \frac{4{,}18 \cdot 1 \cdot 300 \cdot (98-60)}{3{,}5 \cdot 1{,}03 \cdot (60-4)}$;

$\{V_\mathrm{M}\} = 236$;

$V_\mathrm{M} = 236$ ml.

F3:

Abych mohl čaj ihned pít, musím k 3 dl čaje přilít 2,36 dl mléka. Vhodné doplňující otázky by byly: „Kolik mléka bych musel přilít do čaje, jestliže dokážu pít tekutinu teplou 50 °C (65 °C)?“ S žáky můžeme dále v rámci mezipředmětových vztahů diskutovat, jak by se změnil výsledek, když bychom ochlazovali čaj studenou vodou. Tuto úlohu může navíc učitel i demonstrovat v rámci pokusu tak, že si čaj s mlékem uvaří přímo na hodině a provede příslušné měření.

Úloha ZŠ 16

Do dětského bazénku s kruhovou podstavou o průměru 1,5 metru chceme připravit dětem koupání. Vodu chceme mít do výšky 40 cm. K dispozici máme vodu ze studny o teplotě 13 °C a bojler, ve kterém je voda ohřátá na teplotu 63 °C. Kolikrát musíme jít s desetilitrovým kbelíkem horké vody, abychom připravili dětem vodu na koupání o teplotě nejméně 23 °C? Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu. Ochlazování teplé vody cestou zanedbej. Počítej, že kbelík je naplněn celými 10 litry po celou dobu cesty.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o přeměnách energie a do nauky o teple.

Důležité fyzikální pojmy: teplo a jeho jednotky, výpočet tepla, měrná tepelná kapacita, tepelná výměna, výpočet hmotnosti tělesa ze známého objemu a hustoty, převody jednotek objemu a hustoty.

průměr bazénku .... $d = 1{,}5\ \text{m} = 15\ \text{dm}$;

poloměr bazénku .... $r = 0{,}75\ \text{m} = 7{,}5\ \text{dm}$;

výška vody v bazénku .... $v = 40\ \text{cm} = 4\ \text{dm}$;

objem bazénku .... $V = ?$;

$[V] = \text{l}$;

objem kbelíku .... $V_K = 10\ \text{l}$;

teplota vody ze studny .... $t_S = 13\ °\text{C}$;

teplota vody z bojleru .... $t_B = 63\ °\text{C}$;

požadovaná teplota vody v bazénku .... $t = 23\ °\text{C}$;

teplo odebrané vodě z bojleru .... $Q_B = ?$;

$[Q_B] = \text{J}$;

teplo dodané vodě ze studny .... $Q_S = ?$;

$[Q_S] = \text{J}$.

Žáci dohledají následující informace:

měrná tepelná kapacita vody .... $c = 4{,}18\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot°\text{C}} = 4\ 180\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$;

hustota vody .... $\rho = 1\ 000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Při řešení této úlohy žáci využijí znalosti o tepelné výměně – teplo přijaté vodou ze studny se rovná teplu odevzdanému vodou z bojleru $Q_S = Q_B$. Teplo žáci vypočítají pomocí vzorce $Q = c \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$, kde t_1 je teplota po ukončení tepelné výměny a t_0 je teplota na počátku tepelné výměny při přijímání tepla, resp. t_0 je teplota po ukončení tepelné výměny a t_1 je teplota na počátku tepelné výměny při odevzdávání tepla. Takto žáci vyřeší fyzikální problém se znaménky u tepla (teplo přijaté – teplo odevzdané). Hmotnost vody určí žáci ze vztahu $m = \rho \cdot V$.

teplo odevzdané vodou z bojleru: $Q_\mathrm{B} = c \cdot \rho \cdot V_\mathrm{B} \cdot (t_\mathrm{B} - t)$;

teplo přijaté vodou ze studny: $Q_\mathrm{S} = c \cdot \rho \cdot (V - V_\mathrm{B}) \cdot (t - t_\mathrm{S})$.

Objem V vody v bazénku vypočteme pomocí vzorce pro objem válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$.

F2:

Objem vody v bazénku:

$\{V\} = \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 4$;

$\{V\} = 706{,}5$;

$V = 706{,}5\ \mathrm{dm}^3 = 706{,}5\ \mathrm{l}$.

Po dosazení do vztahu $Q_\mathrm{B} = Q_\mathrm{S}$ a úpravě žáci získají objem vody z bojleru

$\{V_\mathrm{B}\} = \frac{10 \cdot 706{,}5}{50}$;

$\{V_\mathrm{B}\} = 141{,}3$;

$V_\mathrm{B} = 141{,}3\ \mathrm{l}$.

Aby žáci zjistili počet cest s desetilitrovým kbelíkem, musí objem vody z bojleru vydělit 10 a výsledek zaokrouhlit na nejbližší vyšší celé číslo.

F3:

Pro naplnění bazénku musíme jít 15krát s desetilitrovým kbelíkem, zbytek vody dopustíme ze studny. Vhodná doplňující otázka by byla: „Jak mohu zařídit, abych nechodil s vodou tolikrát?“

Vyjádření neznámé ze vzorce

Pro žáky základní školy je tato část většinou velmi obtížná, při výuce fyziky by žáci potřebovali tyto dovednosti již od 7. ročníku, bohužel v matematice se naučí vyjádřit neznámou ze vzorce později (záleží na ŠVP konkrétní školy, většinou až v 8. nebo 9. ročníku). Pro učitele matematiky není problém vymyslet množství úloh, stačí si pouze vybrat ten správný fyzikální vzorec.

Úloha ZŠ 17

Jaká je hmotnost m tělesa, které se pohybuje rychlostí v a má pohybovou energii E_k.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o pohybové energii.

Důležité fyzikální pojmy: vzorec pro pohybovou energii.

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

F2:

Úpravou vzorce žáci dostanou $m = \frac{2 \cdot E_\mathrm{k}}{v^2}$.

F3:

Vhodná rozšiřující úloha by byla: „Ze stejného vzorce vyjádři rychlost pohybu tělesa."

Úloha ZŠ 18

Jaká byla konečná teplota t_2 tělesa o hmotnosti m, jestliže jsi mu dodal teplo Q a jeho teplota se zvýšila z teploty t_1 na teplotu t_2?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o teple.

Důležité fyzikální pojmy: teplo, vzorec pro výpočet tepla.

$$Q = c \cdot m \cdot (t_2 - t_1)$$

F2:

Úpravou vzorce žáci dostanou $t_2 = t_1 + \frac{Q}{c \cdot m}$.

F3:

Vhodná doplňující úloha by byla: „Ze stejného vzorce vyjádři počáteční teplotu tělesa t_1."

Úloha ZŠ 19

V elektrickém obvodu jsou zapojeny dva rezistory o odporech R_1 a R_2. Vypočítej celkový odpor R obou rezistorů zapojených paralelně (vedle sebe).

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Elektromagnetické a světelné děje, konkrétně části o elektrických obvodech.

Důležité fyzikální pojmy: rezistor, sériové a paralelní zapojení rezistorů, vzorec pro výpočet odporu rezistorů zapojených paralelně.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

F2:

Úpravou vzorce žáci dostanou $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

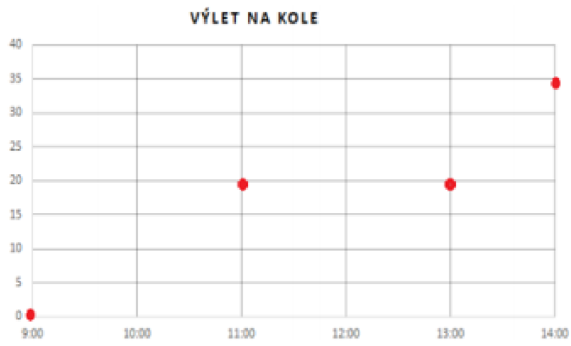
F3:

Vhodná rozšiřující úloha by byla: „Jak by se změnil vzorec, jestliže bychom zapojili vedle sebe 3 rezistory o odporech R_1, R_2 a R_3?“ V rámci mezipředmětových vztahů můžeme s žáky diskutovat, jaká je velikost celkového odporu R v porovnání s hodnotami R_1 a R_2.

2.1.3 Tematický okruh Závislosti, vztahy a práce s daty

Úloha ZŠ 20 (Fuchs, 2015, s. 66)

Karel si vyjel na kole na výlet. Během jízdy si udělal jen jednu delší přestávku. Na začátku přestávky si na tachometru zjistil počet ujetých km a čas, který na cestu potřeboval. Po příjezdu domů opět na tachometru zjistil počet ujetých km a odpovídající čas. Na facebooku zveřejnil nejen fotografie z výletu, ale také graf (Graf 1).



Graf 1

A)

a) Kolik kilometrů Karel ujel od začátku jízdy do 11 hodin?

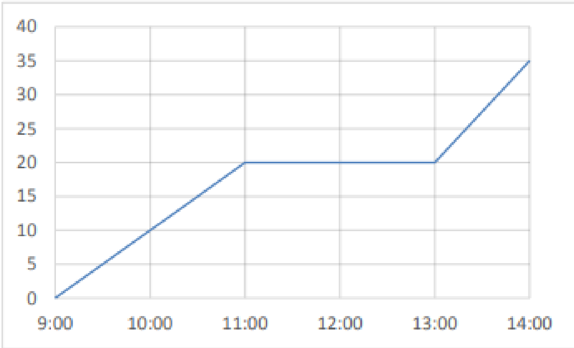
b) V kolik hodin přerušil jízdu a na jak dlouho?

c) Kolik kilometrů ujel celkem?

B) Karel body ve zveřejněném grafu spojil úsečkami (Graf 2).

a) Jakou rychlost by ukazoval Karlův tachometr během takto popsané jízdy v jednotlivých úsecích?

b) Zapiš funkční předpisy závislosti ujetých km na čase v jednotlivých úsecích výletu.



Graf 2

c) Jaká byla průměrná rychlost za celou dobu výletu?

d) Jaká by byla průměrná rychlost, kdyby v jednotlivých úsecích jel Karel stejně rychle, ale přestávku měl jen jednu hodinu?

C) Ve skutečnosti neprobíhala Karlova jízda podle výše uvedeného spojnicového grafu (Graf 2).

a) Popiš pomocí nového grafu jiný možný průběh jízdy Karla (při zachování původních zjištěných údajů). Jak mohl probíhat Karlův výlet?

b) Vymysli „příběh“, který by odpovídal prvním úseku v tebou vytvořeném grafu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: okamžitá a průměrná rychlost, pohyb rovnoměrný a nerovnoměrný (včetně vztahu pro průměrnou rychlost, je-li dána dráha a čas), graf závislosti dráhy na čase.

A) Pro řešení této části žáci využijí znalosti čtení z grafu. Na ose vodorovné (x) je vyjádřen čas, kdy Karel jel, na ose svislé (y) je vyjádřena dráha, kterou Karel ujel.

B) Pro řešení této části využijí fyzikálního vzorce $s = v.t$ a definice průměrné rychlosti pohybu $v_p = \frac{s}{t}$. Průměrná rychlost v_p je definována jako podíl celkové dráhy s, kterou těleso urazilo, a času t, za kterou tuto dráhu urazilo.

a)

1. úsek	2. úsek	3. úsek
(šikmo vzhůru):	(vodorovně):	(šikmo vzhůru):
$s = 20$ km;	$s = 0$ km;	$s = 15$ km;
$t = 2$ h;	$t = 2$ h;	$t = 1$ h;
$v_1 = ?$;	$v_2 = ?$;	$v_3 = ?$;
$[v_1] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	$[v_2] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	$[v_3] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) K zápisu žáci využijí vztah $s = v.t$ a výsledky předchozího úkolu.

c) $s = 35$ km;
$t = 5$ h;
$v_{p1} = ?$;
$[v_{p1}] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

d) $s = 35$ km;
$t = 4$ h;
$v_{p2} = ?$;
$[v_{p2}] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

C) Pro řešení této části žáci využijí fyzikální znalosti o nerovnoměrných pohybech a grafech těchto pohybů.

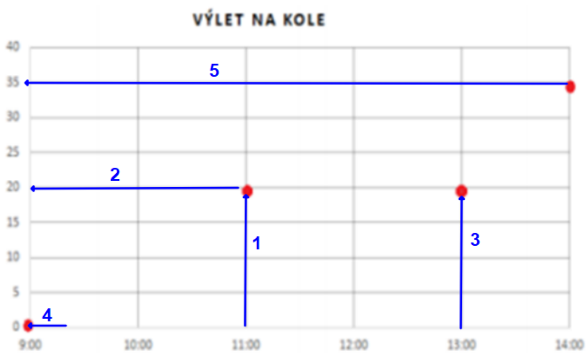
F2:

A)

a) 20 km (viz šipky 1 a 2 v Grafu 3)

b) v 11:00, na 2 hodiny – viz šipky 1 a 3 v Grafu 3, odečtu 13 – 11 = 2 (protože dráha byla konstantní)

c) 35 km – viz šipky 4 a 5 v Grafu 3, odečtu 35 – 0 = 35



Graf 3

B)

a) První úsek:

$\{v_1\} = \frac{20}{2};$

$\{v_1\} = 10;$

$v_1 = 10\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

Druhý úsek:

$\{v_2\} = \frac{0}{2};$

$\{v_2\} = 0;$

$v_2 = 0\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

Třetí úsek:

$\{v_3\} = \frac{15}{1};$

$\{v_3\} = 15\ ;$

$v_3 = 15\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

b) První úsek od 9:00 do 11:00: $\{s\} = 10\ \{t\}.$

Druhý úsek od 11:00 do 13:00: $\{s\} = 0\ \{t\}.$

Třetí úsek od 13:00 do 14:00: $\{s\} = 15\ \{t\}.$

c) $\{v_{\mathrm{p1}}\} = \frac{35}{5};$

$\{v_{\mathrm{p1}}\} = 7;$

$v_{\mathrm{p1}} = 7\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

d) $\{v_{\mathrm{p1}}\} = \frac{35}{4};$

$\{v_{\mathrm{p1}}\} = 8{,}75;$

$v_{\mathrm{p1}} = 8{,}75\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

C) Řešením je libovolný graf, ve kterém v úsecích 1 a 3 žák nakreslí **neklesající křivku**. Úsek 2 musí zůstat beze změny. Zdůvodnění: Karel určitě nejel celých 20 kilometrů, resp. 15 kilometrů konstantní rychlostí, někdy zrychlil (např. z kopce), jinde naopak zpomalil (do kopce, v zatáčkách), jinde dokonce mohl na chvilku zastavit (křižovatky, hledání cesty).

F3:

A)

a) Od začátku jízdy do 11 hodin ujel Karel 20 km.

b) Jízdu přerušil v 11 hodin, přestávka trvala 2 hodiny.

c) Celkem ujel 35 km.

B)

a) V prvním úseku by tachometr ukazoval rychlost 10 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, ve druhém úseku 0 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a ve třetím úseku 15 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

b) První úsek od 9:00 do 11:00: $\{s\} = 10\,\{t\}$.

Druhý úsek od 11:00 do 13:00: $\{s\} = 0\,\{t\}$.

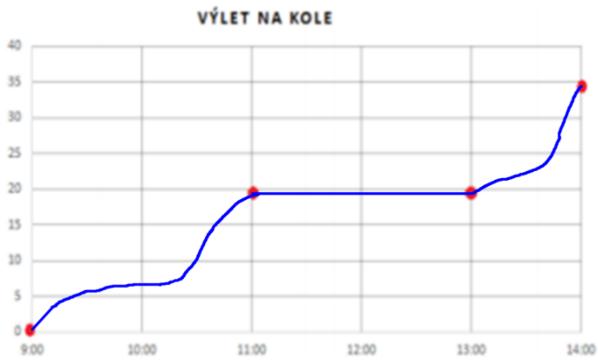
Třetí úsek od 13:00 do 14:00: $\{s\} = 15\,\{t\}$.

c) Průměrná rychlost za celou dobu výletu byla $7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

d) V tomto případě by se průměrná rychlost zvýšila na $8{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

C)

a) Karlův výlet by mohl vypadat třeba jako na Grafu 4.



Graf 4

b) Na začátku jel Karel po rovině (dokázal držet stejnou rychlost), poté stoupal do prudkého kopce (jel velmi pomalu), na kopci si chvilku odpočinul (stál), aby mohl jet z kopce velmi rychle. Před delším odpočinkem opět stoupal. Po dvouhodinové přestávce Karel opět šlapal do prudkého kopce (jel pomaleji), ke konci naopak sjížděl rychle dolů z kopce.

Úloha ZŠ 21

Sestav rovnici lineární funkce, která vyjadřuje převodní vztah mezi °C a °F a naopak.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly Látka a těleso, konkrétně části o teplotě a jejím měření.

Důležité fyzikální pojmy: Celsiova a Fahrenheitova teplotní stupnice, bod tání ledu a bod varu vody v jednotlivých teplotních stupnicích.

Pro žáky základní školy můžeme tuto úlohu interpretovat takto: bod tání ledu $0\,°C \sim 32\,°F$; bod varu vody $100\,°C \sim 212\,°F$ (vše za normálního tlaku), závislost hledáme ve tvaru lineární funkce $y = a\,x + b$.

$t_f = y$, je teplota ve stupních Fahrenheita

$t_c = x$, je teplota ve stupních Celsia

Do tabulky doplníme výše uvedené rovnosti teplot v různých stupnicích:

$\{x\}$	0	100
$\{y\}$	32	212

F2:

Z tabulky žáci sestaví soustavu 2 rovnic o 2 neznámých:

$32 = 0\,a + b$;

$212 = 100\,a + b.$

Řešením soustavy rovnic je $b = 32$; $a = 1{,}8$. Hledaná závislost ve tvaru lineární funkce je $\{y\} = 1{,}8\ \{x\} + 32$.

Při opačném převodu (zaměníme x a y) žáci získají soustavu rovnic

$0 = 32\,a + b$;

$100 = 212\,a + b.$

Řešením druhé soustavy pak je $b = -\frac{32.5}{9} = -\frac{160}{9}$; $a = \frac{5}{9}$. Hledaná závislost ve tvaru lineární funkce je $\{y\} = \frac{5}{9}\{x\} - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(\{x\} - 32)$.

F3:

$\{t_f\} = 1{,}8\ \{t_c\} + 32$, kde $\{t_f\}$ je číselná hodnoty teploty ve stupních Fahrenheita a $\{t_c\}$ je číselná hodnoty teploty ve stupních Celsia.

$\{t_c\} = \frac{5}{9}\{t_f\} - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(\{t_f\} - 32)$, kde $\{t_f\}$ je číselná hodnoty teploty ve stupních Fahrenheita a $\{t_c\}$ je číselná hodnoty teploty ve stupních Celsia.

Oba výsledky si žáci mohou ověřit vyhledáním převodních vztahů na internetu, např. na adrese http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/thermo/temper.html#c3.

Vhodná doplňující otázka by byla: „Kolika stupňům Celsia odpovídá 100 °F? Kdy se s touto teplotou žáci setkají?“

2.1.4 Tematický okruh Geometrie v rovině a v prostoru

V učebnicích, sbírkách i pracovních sešitech najdeme hodně úloh typu: Vypočítej hmotnost tělesa, jestliže znáš jeho tvar, rozměry a materiál, ze kterého je těleso vyrobeno. Podobná úloha je uvedena např. v (Trejbal, 2010, s. 50, 53). Já jsem do svého výběru zařadil slovní úlohy obtížnější – úlohy, ve kterých žáci musí použít více operací, aby došli ke správnému výsledku.

Úloha ZŠ 22

Stojíš na rovníku. Vypočítej, jakou rychlostí se pohybuješ pouze díky otáčení Země kolem její osy (vypočti obvodovou rychlost bodu během denní rotace planety Země). Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: okamžitá a průměrná rychlost, pohyb rovnoměrný (včetně vztahu pro průměrnou rychlost, je-li dána dráha a čas), obvodová rychlost bodu během denní rotace planety Země, siderická doba rotace planety Země.

rychlost pohybu bodu na rovníku .... v = ?;

$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

dráha, kterou urazí bod na rovníku za 1 otočku Země .... s = ?;

$[s]$ = m.

Žáci dohledají následující informace:

doba, za kterou se Země otočí 1x kolem své osy .... t = 23 h 56 min 4 s = 86 164 s;

rovníkový poloměr Země .... R = 6 378,135 km = 6 378 135 m.

Pro výpočet rychlosti pohybu použijí žáci vztah $v = \frac{s}{t}$. Dráhu, kterou urazí bod na rovníku za 1 otočku Země, vypočítají ze vzorce pro délku kružnice s poloměrem R.

F2:

Výpočet dráhy:

$s = 2 \cdot \pi \cdot R;$

$\{s\} = 2 \cdot \pi \cdot 6\,378\,135;$

$\{s\} = 40\,075\,004;$

$s = 40\,075\,004$ m.

Výpočet rychlosti:

$v = \frac{s}{t};$

$\{v\} = \frac{40\,075\,004}{86\,164};$

$\{v\} = 465{,}1;$

$v = 465{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,674{,}36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$

F3:

Jestliže stojím na rovníku, pak se pouze díky rotaci Země kolem její osy pohybuji rychlostí $465{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \left(1\,674{,}36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)$. U této úlohy je opravdu zajímavý žákovský odhad, pro většinu žáků jsou to nepředstavitelně veliké hodnoty. Pro srovnání – Usain Bolt při překonání světového rekordu na 100 m běžel průměrnou rychlostí $37{,}58\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a maximální rychlostí $44{,}72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (čerpáno z https://cs.wikipedia.org/wiki/Usain_Bolt). Pro ověření správnosti výpočtu mohou žáci využít internet. V rámci mezipředmětových vztahů mohou žáci zjistit, jakou nejvyšší rychlostí se pohybují např. zvířata.

Úloha ZŠ 23

Vypočítej, kolikrát se otočí přední kolo tvého jízdního kola při cestě do školy, jestliže jedeš průměrnou rychlostí 18 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a do školy dojedeš za 4 minuty? Chybějící údaje si změř (návod najdeš na internetu – např. na http://www.cyklistikakrnov.com/Clanky/08/nastaveni-obvodu-kola.html).

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyb těles; síly, konkrétně části o rovnoměrných a nerovnoměrných pohybech.

Důležité fyzikální pojmy: okamžitá a průměrná rychlost, pohyb rovnoměrný (včetně vztahu pro průměrnou rychlost, je-li dána dráha a čas), převody jednotek délky, času a rychlosti.

průměrná rychlost .... $v = 18\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

čas, za který dojedeš do školy .... t = 4 min = 240 s;

dráha, kterou ujedeš cestou do školy .... s = ?;

[s] = m;

obvod kola .... o = ?;

[o] = m.

Žáci změří následující hodnoty:

poloměr kola .... r = 33,2 cm = 0,332 m.

Pro výpočet dráhy, kterou ujedou do školy, žáci použijí vztah $s = v \cdot t$. Délku jedné otáčky kola (obvod kola) buď změří podle návodu, nebo vypočítají ze vzorce pro délku kružnice s poloměrem r. Počet otáček kola x získají vydělením dráhy obvodem kola.

F2:

Výpočet obvodu kola:

$o = 2 \cdot \pi \cdot r$;

$\{o\} = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}332$;

$\{o\} \doteq 2{,}085$;

$o \doteq 2{,}085$ m.

Výpočet délky cesty do školy:

$s = v \cdot t$;

$\{s\} = 5 \cdot 240$;

$\{s\} = 1\ 200$;

$s = 1\ 200$ m.

Výpočet počtu otáček kola:

$x = \frac{s}{o}$;

$x = \frac{1\ 200}{2{,}085}$;

$x \doteq 575{,}5$.

F3:

Kolo se při cestě do školy otočí 575,5krát. Vhodná doplňující otázka by byla: „Jak se změní počet otáček kola, jestliže na stejném kole nepojede žák, ale jeho učitel, který má dvakrát větší hmotnost než žák?“

Úloha ZŠ 24 (Boušková, 2008)

Betonový obrubník s průřezem tvaru rovnoramenného lichoběžníku má dole šířku 20 cm, nahoře 15 cm. Je vysoký 20 cm a jeho délka je 80 cm. Hustota betonu je $\rho = 2\,100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Kolik si jich může naložit pan Havlík na přívěsný vozík za auto, když vozík má nosnost 400 kg?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látka a těleso, konkrétně části o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty.

Důležité fyzikální pojmy: hustota, jednotky hustoty, výpočet hustoty, převody jednotek délky, objemu a hustoty.

hustota betonu .... $\rho = 2\,100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$;

rozměry podstavy obrubníku

větší základna .... $a = 20\ \mathrm{cm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$;

menší základna .... $c = 15\ \mathrm{cm} = 0{,}15\ \mathrm{m}$;

výška podstavy .... $v_{\mathrm{p}} = 20\ \mathrm{cm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$;

délka obrubníku (= výška tělesa) .... $v = 80\ \mathrm{cm} = 0{,}8\ \mathrm{m}$;

nosnost vozíku .... $n = 400\ \mathrm{kg}$;

objem 1 obrubníku .... $V = ?$;

$$[V] = \mathrm{m}^3;$$

hmotnost 1 obrubníku .... m = ?;

[m] = kg.

Při výpočtu hmotnosti obrubníku žáci využijí vztah $m = \rho \cdot V$. Objem obrubníku předtím vypočtou pomocí vzorce pro objem kolmého hranolu s podstavou ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku $V = \frac{a+c}{2} \cdot v_{\mathrm{p}} \cdot v$. Počet obrubníků x, které může pan Havlík naložit na vozík, získají žáci vydělením nosnosti vozíku hmotností jednoho obrubníku a zaokrouhlením na nejbližší celé číslo dolů.

F2:

Výpočet objemu obrubníku:

$\{V\} = \frac{0,2+0,15}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,8;$

$\{V\} = 0,028;$

$V = 0,028\ \mathrm{m}^3.$

Výpočet hmotnosti obrubníku:

$\{m\} = 2\,100 \cdot 0,028;$

$\{m\} = 58,8;$

$m = 58,8\ \mathrm{kg}.$

Výpočet počtu obrubníků: $x = \frac{400}{58,8} = 6,803.$

F3:

Pan Havlík může na vozík naložit pouze 6 kusů obrubníků, při naložení sedmého by překročil povolenou nosnost vozíku. Vhodná doplňující úloha by byla: „Zkuste řešit stejnou úlohu, ale s využitím jiných jednotek.“

2.1.5 Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Úloha ZŠ 25

Uneseš všechen vzduch, který je ve třídě, jestliže ho stlačíš do kufru? Změnu teploty neuvažuj. Potřebné údaje si změř a najdi na internetu nebo v Tabulkách pro základní školu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látka a těleso, konkrétně do částí o objemu, měření a výpočtu objemu a o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty.

Důležité fyzikální pojmy: délka a její měření, objem, jednotky a výpočet objemu, hustota, závislost hustoty vzduchu na teplotě vzduchu.

objem učebny .... V = ?;

$[V]$ = m^3;

hmotnost vzduchu v učebně .... m = ?;

$[m]$ = kg.

Žáci změří následující hodnoty:

délka učebny .... a = 842 cm = 8,42 m;

šířka učebny .... b = 720 cm = 7,2 m;

výška učebny .... c = 325 cm = 3,25 m.

Žáci dohledají následující hodnoty:

hustota vzduchu při 23 °C .... $\rho = 1{,}192\ 5\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Při výpočtu hmotnosti vzduchu žáci využijí vztah $m = \rho \cdot V$. Objem učebny předtím vypočtou pomocí vzorce pro objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c$. Případné nerovnosti (parapet, topení, tabule apod.) mohou zanedbat. Jestliže nebudeme zanedbávat, pak je výhodnější pracovat ve skupinkách s vhodnou dělbou práce.

Před započetím hledání hustoty vzduchu je nutné změřit teplotu, závislost hustoty vzduchu na teplotě není úplně zanedbatelná. U této úlohy je velmi zajímavý žákovský odhad výsledku, proto doporučuji nechat každého žáka napsat před započetím práce do sešitu jeho odhad.

F2:

Výpočet objemu učebny:

$\{V\} = 8{,}42 \cdot 7{,}2 \cdot 3{,}25;$

$\{V\} = 197{,}028;$

$V = 197{,}028\ \mathrm{m}^3.$

Výpočet hmotnosti vzduchu v učebně:

$\{m\} = 1{,}192\ 5 \cdot 197{,}028;$

$\{m\} = 234{,}956;$

$m \doteq 235$ kg.

F3:

Hmotnost vzduchu v učebně je 235 kg (při 23 °C). Vhodná doplňující úloha by byla: „Vypočti, jak se změní hmotnost vzduchu v učebně, jestliže se teplota vzduch sníží / zvýší o 3 °C.“ V rámci mezipředmětových vztahů můžeme dále s žáky diskutovat o nutnosti větrání (množství CO_2 ve vzduchu a jeho vliv na soustředění žáků).

Úloha ZŠ 26

Člověk by měl denně vypít 2,5 litrů tekutin. Na jak dlouho by ti vystačila voda na pití, kdyby byla vodou zcela zaplněna třída, ve které se právě učíme matematiku (za předpokladu, že se voda nezkazí)? Potřebné údaje si změř.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Látka a těleso, konkrétně do částí o objemu, měření a výpočtu objemu a o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty.

Důležité fyzikální pojmy: délka a její měření, objem, jednotky a výpočet objemu.

objem učebny .... $V = ?$;

$$[V] = \text{m}^3.$$

Žáci změří následující hodnoty:

délka učebny .... $a = 842\ \text{cm} = 8{,}42\ \text{m}$;

šířka učebny .... $b = 720\ \text{cm} = 7{,}2\ \text{m}$;

výška učebny .... $c = 325\ \text{cm} = 3{,}25\ \text{m}$.

Objem učebny si žáci vypočtou pomocí vzorce pro objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c$. Případné nerovnosti (parapet, topení, tabule apod.) mohou zanedbat. Jestliže nebudeme zanedbávat, pak je výhodnější pracovat ve skupinkách s vhodnou dělbou práce. Počet dní x, na které by vydržela zásoba vody, získají vydělením objemu průměrnou denní spotřebou.

U této úlohy je opět velmi zajímavý žákovský odhad výsledku, proto doporučuji nechat každého žáka napsat před započetím práce do sešitu jeho odhad.

F2:

Výpočet objemu učebny:

$\{V\} = 8{,}42 \cdot 7{,}2 \cdot 3{,}25;$

$\{V\} = 197{,}028;$

$V = 197{,}028\ \mathrm{m}^3 = 197\,028\ \mathrm{l}.$

Výpočet počtu dní:

$\{x\} = \frac{197\,028}{2{,}5};$

$x = 78\,811{,}2$ dní = 215,77 roků.

F3:

Voda v učebně by nám vydržela přibližně na 216 let. Vhodné doplňující úlohy by byly: „Vypočti, na jak dlouho by vydržela zásoba vody v učebně tvojí rodině / naší třídě, použiješ-li vodu pouze k pití. Na jak dlouho by ti vydržela zásoba vody ve třídě, budeš-li ji používat nejen na pití (počítej s průměrnou denní spotřebou 109 litrů).“ V rámci mezipředmětových vztahů můžeme dále s žáky diskutovat o nutnosti šetření vodou.

Úloha ZŠ 27

Kolik korun zaplatí navíc škola za elektrickou energii, jestliže necháme v učebně svítit zbytečně všechna světla celou vyučovací hodinu? V učebně máme 20 zářivek, každá má příkon 40 W, za 1 kWh elektrické energie zaplatí škola 3,50 Kč.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Energie, konkrétně části o elektrické energii.

Důležité fyzikální pojmy: příkon, elektrická energie.

počet zářivek .... $x = 20$;

příkon 1 žárovky .... $P_0 = 40$ W;

cena 1 kWh .... 3,50 Kč;

doba svícení .... $t = 45$ min = 0,75 h;

spotřeba elektrické 1 zářivky energie ..... $E_1 = ?$;

$[E_1] = \mathrm{kWh};$

celková spotřeba elektrické energie .... E = ?;

$[E]$ = kWh.

Ze vzorce $E_1 = P_0 \cdot t$ žáci vypočítají odebranou elektrickou energii 1 zářivky. Výsledek vynásobí počtem zářivek a získávají celkovou odebranou energii. Pomocí přímé úměrnosti dopočítají cenu svícení (y).

U této úlohy je opět velmi zajímavý žákovský odhad výsledku, proto doporučuji nechat každého žáka napsat před započetím práce do sešitu jeho odhad.

F2:

Výpočet spotřeby elektrické energie 1 zářivky:

$\{E_1\} = 40 \cdot \frac{3}{4}$;

$\{E_1\} = 40 \cdot \frac{3}{4}$;

$E_1 = 30$ Wh.

Výpočet ceny svícení:

$\{y\} = 0{,}6 \cdot 3{,}5$;

$y = 2{,}1$ Kč.

Výpočet spotřeby elektrické energie celé učebny:

$\{E\} = 30 \cdot 20$;

$\{E\} = 600$;

$E = 600$ Wh $= 0{,}6$ kWh.

F3:

Za každou vyučovací hodinu, kdy se v učebně svítí zbytečně, škola zaplatí 2,1 Kč. Vhodné doplňující úlohy by byly: „Kolik korun by stálo zbytečné svícení v učebně od pátku 13:30 do pondělí 7:30? Kolik korun by stálo školu, kdyby každá třída zapomněla jednu hodinu každý týden zhasnout (během celého školního roku)?“ V rámci mezipředmětových vztahů je možné s žáky diskutovat o používání zatemnění – jak moc je to nutné, kdy jim nedostatek světla škodí.

Úloha ZŠ 28

Vašek si chtěl domů koupit akvárium a postavit ho na skříňku. Než mu ho táta dovolil koupit, zadal mu následující úkol: „Vypočítej, kolik kilogramů bude hotové akvárium se všemi doplňky a s vodou vážit. Pak zkus zjistit (třeba se zeptej dědy), jak musíme skříňku upravit, aby všechno unesla a nepropadla se.“

Vašek si na stránkách specializovaného obchodu vybral akvarijní set o hmotnosti 24 kg a objemu 126 l. Do akvária na dno o rozměrech 35 cm x 80 cm nasypal do průměrné výšky 8 cm písek (hustota 1,7 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$), jako další dekorace vložil kameny o hmotnosti 1,5 kg a menší kamínky o hmotnosti 750 g. Po dohodě s tátou hmotnost rostlin, rybiček a také objem vody, který zateče mezi zrnka písku, zanedbal.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly Látka a těleso, konkrétně do částí o objemu, měření a výpočtu objemu, o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty a o hmotnosti a jejích jednotkách.

Důležité fyzikální pojmy: převody jednotek hmotnosti a objemu, vztah mezi hustotou, hmotností a objemem tělesa.

rozměry akvária

1. hrana .... $a = 35$ cm;

2. hrana .... $b = 80$ cm;

3. hrana (výška) .... $c = ?$;

$[c] = \mathrm{cm}$;

objem akvária .... $V = 126\ \mathrm{l} = 126\,000\ \mathrm{cm}^3$;

výška vody.. $v_\mathrm{v} = ?$;

$[v_\mathrm{v}] = \mathrm{cm}$;

hustota vody .... $\rho_\mathrm{v} = 1\,\frac{g}{cm^3}$;

objem vody .... $V_\mathrm{v} = ?$;

$[V_\mathrm{v}] = \mathrm{cm}^3$;

hmotnost vody .... m_{v} = ?;

$[m_{\mathrm{v}}]$ = g;

výška písku .... v_{p} = 8 cm;

hustota písku .... $\rho_{\mathrm{p}} = 1{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{cm^3}$;

objem písku .... V_{p} = ?;

$[V_{\mathrm{p}}] = \mathrm{cm}^3$;

hmotnost písku .... m_{p} = ?;

$[m_{\mathrm{p}}]$ = g.

Aby mohli žáci vypočítat objem vody, musí nejdříve ze vzorce pro objem kvádru určit výšku akvária. Potom od výšky akvária odečtou výšku písku a získají výšku vody. Pro výpočet hmotnosti vody a písku žáci vypočítají objem kvádru a následně použijí vztah $m = \rho \,.\, V$.

F2:

Výpočet výšky akvária:

$c = \frac{V}{a \cdot b}$;

$\{c\} = \frac{126\ 000}{35 \cdot 80}$;

$c = 45$ cm.

Výpočet výšky vody:

$v_{\mathrm{v}} = c - v_{\mathrm{p}}$;

$\{v_{\mathrm{v}}\} = 45 - 8$;

$v_{\mathrm{v}} = 37$ cm.

Výpočet objemu a hmotnosti vody:

$V_{\mathrm{v}} = a \cdot b \cdot v_{\mathrm{v}}$;

$\{V_{\mathrm{v}}\} = 35 \cdot 80 \cdot 37$;

$V_{\mathrm{v}} = 103\ 600\ \mathrm{cm}^3$;

$m_{\mathrm{v}} = V_{\mathrm{v}} \cdot \rho_{\mathrm{v}}$;

$\{m_{\mathrm{v}}\} = 103\ 600 \cdot 1$;

$m_{\mathrm{v}} = 103\ 600$ g = 103,6 kg.

Výpočet objemu a hmotnosti písku:

$V_{\mathrm{p}} = a \cdot b \cdot v_{\mathrm{p}}$;

$\{V_{\mathrm{v}}\} = 35 \cdot 80 \cdot 8$;

$V_{\mathrm{v}} = 22\ 400\ \mathrm{cm}^3$;

$m_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{p}} \cdot \rho_{\mathrm{p}}$;

$\{m_{\mathrm{v}}\} = 22\ 400 \cdot 1{,}7$;

$m_{\mathrm{v}} = 38\ 080$ g = 38,08 kg.

hmotnost akvarijního setu	24,0 kg;
hmotnost vody	103,6 kg;
hmotnost dekorace	2,25 kg;
hmotnost písku	38,08 kg;
celková hmotnost	167,93 kg.

F3:

Akvárium se všemi doplňky bude vážit přibližně 170 kg, skříňka musí mít tedy nosnost aspoň 200 kg. Na horní desku skříňky je vhodné položit např. laminodesku o tloušťce 18 mm tak, aby se horní deska neprohnula (hrozí deformace akvária a porušení lepených spojů – po nějaké době by akvárium mohlo začít téct) a akvárium položit přes obě postranice.

2.2 Slovní úlohy s fyzikální tematikou vhodné pro využití při výuce na střední škole

Této tematice se ve své diplomové práci podrobně věnuje Vrtílková (2016). Vrtílková sestavila sbírku 270 úloh vybraných z učebnic matematiky pro střední školy. U některých úloh v diplomové práci je uveden postup řešení, většina úloh je ale pouze s výsledkem.

Ve své práci jsem připravil jenom malý vzorek úloh. Úlohy jsem vybral takové, které jsou náročností vhodné pro žáky středních škol a které jsou většinou řešitelné pomocí rovnic či jejich soustav. Snažil jsem se volit, pokud to bylo možné a vhodné, úlohy podobné úlohám použitým v části pro základní školy, samozřejmě s vyšší obtížností. Pokud to je matematicky vhodné pro žáky střední školy, preferoval jsem obecné řešení a dosazení do výsledného vzorce. Také fyzikální jednotky zapisuji tak, jak je běžné na střední škole. K opakování látky ze základní školy je samozřejmě možné použít úlohy z minulé kapitoly.

Úloha SŠ 1

Vašek volně pustil z věže hradu kámen. Za 4 sekundy byl slyšet náraz kamene na skálu pod věží. Jak vysoká je hradní věž (odpor vzduchu zanedbejte)?

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně částí o pohybech těles v gravitačním poli Země a o zvuku.

Důležité fyzikální pojmy: volný pád, dráha a doba volného pádu, vzduch a jeho rychlost šíření.

doba od puštění kamene do zaregistrování nárazu .... $t = 4$ s;

výška věže .... $s = ?$;

$[s] = \mathrm{m}$;

doba volného pádu .... $t_1 = ?$;

$[t_1] = \mathrm{s}$;

doba šíření zvuku od skály k našemu uchu .... $t_2 = ?$;

$[t_2] = \mathrm{s}$.

Použité konstanty:

gravitační zrychlení .... $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$;

rychlost šíření zvuku ve vzduchu při 20 °C .... $v = 343\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Při řešení si musí žáci uvědomit, že celý pohyb se skládá ze dvou dílčích pohybů se stejnými drahami – volného pádu kamene z věže na skálu a šíření zvuku od skály k našemu uchu. Dráhu volného pádu vypočítají podle vztahu $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_1}^2$. Pro dráhu, kterou urazí zvuk, platí $s = v \cdot t_2$.

F2:

Sestavíme soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé, kterou pomocí dosazovací metody převedeme na kvadratickou rovnici s neznámou t_1.

$t_1 + t_2 = t$;

$\frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_1}^2 = v \cdot t_2$;

$g \cdot {t_1}^2 + 2 \cdot v \cdot t_1 - 2 \cdot v \cdot t = 0;$

$t_{1_{1,2}} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot v \cdot t}}{g}.$

Jeden kořen je vždy kladný, druhý záporný. Záporný kořen není z fyzikálního hlediska zajímavý, proto s ním dále nepracujeme.

F3:

Po dosazení dostáváme následující výsledky: t_1 = 3,794 14 s a t_2 = 0,205 86 s. Výška věže vyjde dosazením do vzorce pro dráhu volného pádu i do vzorce pro dráhu, kterou urazí zvuk, s = 70,610 m.

Jestliže chceme udělat zkoušku, musíme časy t_1 a t_2 zaokrouhlit. V níže uvedené tabulce jsem ukázal problém zaokrouhlování – s čím menší přesností počítáme, tím více se liší výsledná výška věže. Teprve s přesností zaokrouhlení časů na 5 desetinných míst získáváme shodné hodnoty výšky věže. Ovšem víme, že reakční doba člověka je přibližně 0,2 s, proto je naše určení výšky věže pouze přibližné – 70,6 metru.

t_1	3,8 s	3,79 s	3,794 s	3,794 1 s	3,794 14 s
t_2	0,2 s	0,21 s	0,206 s	0,205 9 s	0,205 86 s
s_1	70,83 m	70,46 m	70,60 m	70,61 m	70,610 m
s_2	68,6 m	72,03 m	70,66 m	70,62 m	70,610 m

Vhodná doplňující otázka by byla: „S jakou přesností můžeme počítat, jestliže vezmeme v úvahu naši reakční dobu?“ V rámci mezipředmětových vztahů můžeme s žáky diskutovat, na čem závisí výsledky našeho měření (např. přesnost stopek, teplota vzduchu, hmotnost a tvar kamene).

Úloha SŠ 2

Velikost výslednice dvou sil svírajících úhel 60° je F = 7 N. Vypočti velikosti sil, je-li jedna z nich o 2 N větší než druhá.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o skládání sil.

Důležité fyzikální pojmy: skládání sil, výslednice sil.

výslednice sil .... $F = 7$ N;

úhel, který síly svírají .... $\alpha = 60°$;

velikost 1. síly.. $F_1 = ?$;

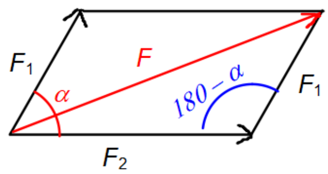
$[F_1] = \text{N}$;

velikost 2. síly.. $F_2 = ?$;

$[F_2] = \text{N}$.

Ke grafickému skládání sil žáci ve fyzice používají vektorový rovnoběžník, viz Obrázek 1 s vyznačenými údaji.

Matematický výpočet velikostí sil je možný s využitím kosinové věty $F^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos{(180° - \alpha)}$.



Obrázek 1

F2:

Protože obecné vyjádření není pro žáky SŠ snadné, dosadí do kosinové věty známé hodnoty a vztahy mezi jednotlivými silami. Dále používám označení $\{F_1\} = x$.

$7^2 = x^2 + (x+2)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+2) \cdot \cos 120°$.

Úpravami získají kvadratickou rovnici $3x^2 + 8x - 45 = 0$.

Tato rovnice má 2 kořeny: $x_1 = 3$ a $x_2 = -5$. Záporný kořen nevyhovuje, velikost síly musí být nezáporná.

F3:

Hledané velikosti sil jsou $F_1 = 3$ N a $F_2 = 5$ N. Vhodná doplňující úloha by byla: „Vypočti, jaké budou velikosti sil, jestliže síly budou svírat úhel 30°, 45° a 90°.“

Úloha SŠ 3

Urči, jak daleko je předmět od dutého kulového zrcadla, jestliže jeho obraz je od předmětu vzdálen 80 cm a zrcadlo má poloměr křivosti 60 cm.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Elektromagnetické jevy, světlo, konkrétně části o optickém zobrazování.

Důležité fyzikální pojmy: poloměr křivosti, ohnisková vzdálenost, zobrazovací rovnice dutého zrcadla.

vzdálenost vzoru a obrazu .... s = 80 cm;

poloměr křivosti zrcadla .... r = 50 cm;

ohnisková vzdálenost zrcadla .... f = ?;

[f] = cm;

vzdálenost vzoru od zrcadla .... a = ?;

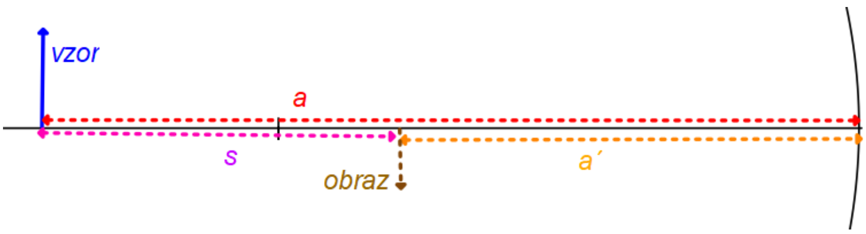
[a] = cm;

vzdálenost obrazu od zrcadla .... a' = ?;

[a'] = cm.

K řešení této úlohy žáci využijí vrcholovou zobrazovací rovnici pro zrcadla, která má tvar $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f}$. Předpokládáme, že ani jedna ze vzdáleností není rovna nule. V této rovnici platí následující znaménková konvence: všechny vzdálenosti, které se nacházejí před zrcadlem, mají znaménko kladné; všechny vzdálenosti, které se nacházejí za zrcadlem, mají znaménko záporné; ohnisková vzdálenost dutého zrcadla je kladná.

Pro poloměr křivosti platí vztah $r = 2 \cdot f$. Z Obrázku 2 vyjádří žáci vztah mezi vzdálenostmi vzoru a obrazu od vrcholu zrcadla a vzájemné vzdálenosti vzoru a obrazu: $a' = a - s$.



Obrázek 2

F2:

Dosazením do zobrazovací rovnice a upravením získávají žáci kvadratickou rovnici

$2a^2 - 2a(r + s) + rs = 0.$

Tato rovnice má po úpravách kořeny ve tvaru $a_{1,2} = \frac{(r+s)\pm\sqrt{r^2+s^2}}{2}$

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání získají žáci 2 řešení: $a_1 = 120$ cm, $a_1{}' = 40$ cm (vzor i jeho obraz před zrcadlem) a $a_2 = 20$ cm, $a_2{}' = -60$ cm (vzor před zrcadlem, obraz za zrcadlem). Vhodná doplňující úloha by byla: „Jak by se změnilo řešení, jestliže by zrcadlo nebylo duté, ale vypuklé?“ V rámci mezipředmětových vztahů je možné s žáky diskutovat o konstrukci obrazu a o vlastnostech obrazu.

Úloha SŠ 4

Parník potřeboval na cestu z Poděbrad do Kolína a zpět 2,5 hodiny. V Kolíně měl přestávku 50 minut. Jakou rychlostí by jel parník v klidné vodě, jestliže průměrná rychlost proudu Labe mezi Kolínem a Poděbrady je $4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Vzdálenost mezi Poděbrady a Kolínem po Labi je 16 km.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o pohybech rovnoměrných a nerovnoměrných.

Důležité fyzikální pojmy: skládání rychlostí, pohyb rovnoměrný.

vzdálenost Poděbrady – Kolín (po Labi).................... $s = 16$ km;

celkový čas plavby (včetně přestávky) .... $t = 2{,}5$ h;

délka trvání přestávky .... $t_0 = 50\ \text{min} = \frac{5}{6}$ h;

průměrná rychlost proudu Labe .... $v_p = 4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$;

rychlost parníku v klidné vodě .... v_{k} = ?;

$[v_{\mathrm{k}}] = \mathrm{km \cdot h^{-1}}$;

doba plavby parníku Poděbrady – Kolín .... t_{PK} = ?;

$[t_{\mathrm{PK}}]$ = h;

doba plavby parníku Kolín – Poděbrady................... t_{KP} = ?;

$[t_{\mathrm{PK}}]$ = h.

Pluje-li parník proti proudu (trasa Poděbrady – Kolín), získají žáci rychlost pohybu parníku tak, že od rychlosti parníku v klidné vodě odečtou rychlost proudu Labe. Pluje-li parník po proudu (trasa Kolín – Poděbrady), je jeho rychlost dána součtem rychlostí parníku v klidné vodě a rychlosti proudu. V úloze žáci dále využijí vztah $t = \frac{s}{v}$. Pro celkový čas, který parník včetně přestávky popluje, pak platí rovnice $t = t_{\mathrm{PK}} + t_{\mathrm{KP}} + t_0$.

F2:

Dosazením vyjádření časů t_{PK} a t_{KP} do rovnice $t = t_{\mathrm{PK}} + t_{\mathrm{KP}} + t_0$ získají žáci rovnici

$t = \frac{s}{v_{\mathrm{k}} - v_{\mathrm{p}}} + \frac{s}{v_{\mathrm{k}} + v_{\mathrm{p}}} + t_0$.

Po úpravě získají kvadratickou rovnici $(t - t_0){v_{\mathrm{k}}}^2 - 2sv_{\mathrm{k}} - (t - t_0){v_{\mathrm{p}}}^2 = 0$.

Tato rovnice má po úpravách kořeny ve tvaru $v_{\mathrm{k}_{1,2}} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + (t - t_0)^2 {v_{\mathrm{p}}}^2}}{(t - t_0)}$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání nám vyjdou 2 řešení: $v_{\mathrm{k}_1} = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a $v_{\mathrm{k}_2} = -0{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Druhé řešení nemá fyzikální smysl. Vhodná doplňující úloha by byla: „Bude parník rychlejší, jestliže obě cesty popluje v klidné vodě, nebo jestli jednu cestu popluje po proudu a druhou proti proudu řeky?“

Úloha SŠ 5 (Janeček, 1991, s. 80)

Po okruhu dlouhém 2 550 m jezdí 2 motocykly takovými průměrnými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě, a dohánějí se každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o pohybech rovnoměrných a nerovnoměrných.

Důležité fyzikální pojmy: skládání rychlostí, pohyb rovnoměrný.

délka okruhu .... s = 2 550 m;

doba, za kterou se potkají, jezdí-li motocykly proti sobě .... t_1 = 1 min = 60 s;

doba, za kterou se potkají, jezdí-li motocykly za sebou .... t_2 = 5 min = 300 s;

rychlost prvního motocyklu .... v_1 = ?;

$[v_1] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$;

rychlost druhého motocyklu .... v_2 = ?;

$[v_2] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Bez újmy na obecnosti žáci mohou předpokládat, že platí $v_1 > v_2$. Při řešení této úlohy mohou využít následující tvrzení: Jedou-li motocykly proti sobě, jejich vzájemná rychlost se získá jako součet jejich rychlostí $(v_1 + v_2)$; jedou-li motocykly za sebou, jejich vzájemná rychlost se získá jako rozdíl jejich rychlostí $(v_1 - v_2)$.

F2:

Se současným využitím vztahu pro průměrnou rychlost získají následující soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé:

$(v_1 + v_2) = \frac{s}{t_1}$;

$(v_1 - v_2) = \frac{s}{t_2}$.

Tato soustava rovnic má po úpravách řešení $\left[\frac{s(t_2+t_1)}{2t_1t_2}; \frac{s(t_2-t_1)}{2t_1t_2}\right]$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde řešení $[25{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}; 17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}]$. Rychlejší motocykl se pohyboval rychlostí $25{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pomalejší rychlostí $17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vhodná doplňující úloha by byla: „Zkuste stejnou úlohu řešit v jiných jednotkách, např. tak, aby rychlost vyšla v $\mathrm{km \cdot min^{-1}}$."

Úloha SŠ 6 (Janeček, 1991, s. 63)

V obvodu, ve kterém jsou zapojeny paralelně dva rezistory, prochází při napětí 24 V proud 4 A. Zapojíme-li tyto rezistory sériově, klesne proud na 0,75 A. Určete odpory obou rezistorů. Odpor zdroje a vodičů zanedbejte.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Elektromagnetické jevy, světlo, konkrétně části o výpočtech v elektrických obvodech.

Důležité fyzikální pojmy: sériové a paralelní zapojení rezistorů, Ohmův zákon.

napětí v obvodu .... $U = 24$ V;

proud při paralelním zapojení .... $I_{\mathrm{P}} = 4$ A;

proud při sériovém zapojení .... $I_{\mathrm{S}} = 0{,}75$ A;

odpor prvního rezistoru .... $R_1 = ?$;

$[R_1] = \Omega$;

odpor druhého rezistoru .... $R_2 = ?$;

$[R_2] = \Omega$;

celkový odpor rezistorů zapojených paralelně .... $R_{\mathrm{P}} = ?$;

$[R_{\mathrm{P}}] = \Omega$;

celkový odpor rezistorů zapojených sériově .... $R_{\mathrm{S}} = ?$;

$[R_{\mathrm{S}}] = \Omega$.

Ke správnému řešení úlohy potřebují žáci znát následující vztahy: Ohmův zákon pro část obvodu $\left(R = \frac{U}{I}\right)$, celkový odpor dvou rezistorů zapojených sériově $R_{\mathrm{S}} = R_1 + R_2$ a celkový odpor dvou rezistorů zapojených paralelně $\left(\frac{1}{R_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};\ \text{resp.}\, R_P = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right)$.

F2:

Z výše uvedených vztahů žáci sestaví soustavu rovnic:

$\frac{U}{I_{\mathrm{S}}} = R_1 + R_2;$

$\frac{U}{I_{\mathrm{P}}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$

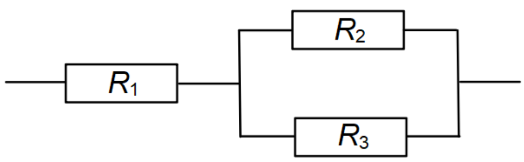
Po vhodně zvolené substituci (např. $\frac{U}{I_{\mathrm{P}}} = x$ a $\frac{U}{I_{\mathrm{S}}} = y$) pro jednodušší výpočty získají žáci kvadratickou rovnici ${R_1}^2 - yR_1 + xy = 0$. Jejím řešením je $R_{1_{1,2}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4xy}}{2}$. Řešením soustavy je pak $\left[\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4xy}}{2}; \frac{y \mp \sqrt{y^2 - 4xy}}{2}\right]$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjdou 2 fyzikálně rovnocenná řešení [24 Ω; 8 Ω] a [8 Ω; 24 Ω]. Hledané odpory rezistorů tedy jsou 24 Ω a 8 Ω. Vhodná doplňující úloha by byla: „Jak se změní hodnoty odporu rezistorů, jestliže napětí v obvodu zvýšíme na dvojnásobek / snížíme na polovinu při zachování stejných proudů?“

Úloha SŠ 7

V elektrickém obvodu jsou zapojeny tři rezistory o odporech R_1, R_2 a R_3. Vypočítej celkový odpor rezistorů zapojených podle Obrázku 3.



Obrázek 3

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Elektromagnetické jevy, světlo, konkrétně části o výpočtech v elektrických obvodech.

Důležité fyzikální pojmy: sériové a paralelní zapojení rezistorů.

odpor prvního rezistoru .... $R_1 = ?$;

$[R_1] = \Omega$;

odpor druhého rezistoru .... $R_2 = ?$;

$[R_2] = \Omega$;

odpor třetího rezistoru .... $R_3 = ?$;

$[R_3] = \Omega$;

celkový odpor rezistorů zapojených paralelně .... $R_P = ?$;

$[R_P] = \Omega$;

celkový odpor rezistorů .... $R = ?$;

$[R] = \Omega$.

Ke správnému řešení úlohy potřebují žáci znát následující vztahy: celkový odpor dvou rezistorů zapojených sériově $R_\mathrm{S} = R_1 + R_\mathrm{P}$ a celkový odpor dvou rezistorů zapojených paralelně $\left(\frac{1}{R_\mathrm{P}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};\ \text{resp.}\, R_\mathrm{P} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}\right)$.

F2:

Dosadí-li žáci z druhého vztahu do prvního a výraz upraví, získávají výsledný odpor ve tvaru $R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}$.

F3:

Vhodná doplňující úloha by byla: „Jak se změní odpor, zapojíme-li dva rezistory sériově a třetí k nim paralelně?“

Úloha SŠ 8 (Polák, 1996, s. 134)

Z otvoru nádrže umístěného 3 m nad zemí vytéká voda ve vodorovném směru rychlostí $5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Určete, v jaké vzdálenosti (měřeno vodorovně) voda dopadne na zem.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o pohybech těles v gravitačním poli Země.

Důležité fyzikální pojmy: vodorovný vrh, dráha a doba vodorovného vrhu.

rychlost, se kterou vytéká voda .... $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

výška otvoru, ze kterého vytéká voda .... $h = 3$ m;

doba, za kterou voda dopadne na zem .... $t = ?$;

$[t] = \mathrm{s}$;

vzdálenost, do které voda dopadne .... $s = ?$;

$[s] = \mathrm{m}$.

Použité konstanty:

gravitační zrychlení .... $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Při řešení si musí žáci uvědomit, že vrh vodorovný se rozkládá na dva dílčí pohyby se stejnými časy – volný pádu a pohyb rovnoměrný přímočarý. Dráhu volného pádu vypočítají podle vztahu $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Pro dráhu pohybu rovnoměrného přímočarého platí $s = v \cdot t$.

F2:

Z prvního vztahu žáci vyjádří čas t, dosadí do druhého a dopočítají.

$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$, záporná hodnota času nemá fyzikální smysl, proto dále řeší pouze pro $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$;

$s = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde, že voda dopadne na zem ve vzdálenosti $s = 3{,}91$ m od nádrže. Vhodná doplňující úloha by byla: „Jakou rychlostí by musela voda vytékat, aby dopadla do stejné vzdálenosti jako je výška, ze které vytéká?“ V rámci mezipředmětových vztahů můžeme s žáky diskutovat, jak zařídit, aby voda trvale vytékala z otvoru ve vodorovném směru rychlostí $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Úloha SŠ 9

Stojíš v Praze u křižovatky ulic Libušská a Kunratická spojka (prochází tudy padesátá rovnoběžka). Vypočítej, jakou rychlostí se pohybuješ pouze díky otáčení Země kolem její osy (vypočti obvodovou rychlost bodu během denní rotace planety Země). Potřebné údaje si najdi na internetu nebo v tabulkách.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o pohybech rovnoměrných a nerovnoměrných.

Důležité fyzikální pojmy: okamžitá a průměrná rychlost, pohyb rovnoměrný (včetně vztahu pro průměrnou rychlost, je-li dána dráha a čas), obvodová rychlost bodu během rotace Země, siderická doba rotace planety Země.

úhel padesáté rovnoběžky .... $\alpha = 50°$;

rychlost pohybu bodu na padesáté rovnoběžce .... $v = ?$;

$[v] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

poloměr otáčení bodu padesáté rovnoběžce .... $r = ?$;

$[r] = \mathrm{m}$;

dráha, kterou urazí bod na padesáté rovnoběžce za 1 otočku Země .... $s = ?$;

$[s] = \mathrm{m}$.

Žáci dohledají následující informace:

doba, za kterou se Země otočí 1x kolem své osy .... t = 23 h 56 min 4 s = 86 164 s;

rovníkový poloměr Země .... R = 6 378,135 km = 6 378 135 m.

Pro výpočet rychlosti pohybu použijí žáci vztah $v = \frac{s}{t}$. Dráhu, kterou urazí bod na rovníku za 1 otočku Země, vypočítají ze vzorce pro délku kružnice s poloměrem r. Poloměr otáčení bodu na padesáté rovnoběžce vypočítají z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou rovnou poloměru Země takto: $r = R\cos\alpha$.

F2:

$s = 2\pi R\cos\alpha$;

$v = \frac{2\pi R\cos\alpha}{t}$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde, že pokud stojím na padesáté rovnoběžce, pak se pouze díky rotaci Země kolem její osy pohybuji rychlostí $299\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ($1\,076{,}3\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$). U této úlohy je opravdu zajímavý žákovský odhad, pro většinu žáků jsou to nepředstavitelně veliké hodnoty. Pro srovnání – Usain Bolt při překonání světového rekordu na 100 m běžel průměrnou rychlostí $37{,}58\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a maximální rychlostí $44{,}72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ (čerpáno z https://cs.wikipedia.org/wiki/Usain_Bolt). Vhodná doplňující úloha by byla: „Jakou rychlostí by se žáci pohybovali, jestliže by stáli přímo na severním pólu?“ Pro ověření správnosti výpočtu mohou žáci využít internet. V rámci mezipředmětových vztahů mohou žáci stejnou úlohu řešit pomocí úhlové rychlosti otáčení Země.

Úloha SŠ 10

Vypočítej hmotnost ocelové matice. Matice má přibližně tvar pravidelného šestibokého hranolu s vyvrtaným otvorem tvaru rotačního válce. Průměr otvoru je 33 mm, výška matice je 25 mm, délka hrany podstavy je 29 mm, hustota oceli je $7{,}86\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Závity a zkosení zanedbej.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Fyzikální veličiny a jejich měření, konkrétně části o hustotě, jednotkách a výpočtu hustoty.

Důležité fyzikální pojmy: hustota, jednotky hustoty, výpočet hustoty, převody jednotek délky, objemu a hustoty.

hustota oceli .... $\rho = 7{,}86\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$;

rozměry matice:

délka hrany .... $a = 29\ \mathrm{mm} = 2{,}9\ \mathrm{cm}$;

výška .... $v = 25\ \mathrm{mm} = 2{,}5\ \mathrm{cm}$;

průměr vyvrtaného otvoru .... $d = 33\ \mathrm{mm} = 3{,}3\ \mathrm{cm}$;

objem matice .... $V = ?$;

$[V] = \mathrm{cm}^3$;

hmotnost matice .... m = ?;

$[m] = \mathrm{g}$.

Při výpočtu hmotnosti matice žáci využijí vztah $m = \rho \cdot V$. Objem matice vypočítají tak, že od objemu pravidelného šestibokého hranolu $\left(V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 v\right)$ odečtou objem válce $\left(V = \frac{\pi d^2}{4} v\right)$.

F2:

Výpočet objemu matice:

$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 v - \frac{\pi d^2}{4} v$;

$V = \frac{v}{2}\left(3\sqrt{3}a^2 - \frac{\pi d^2}{2}\right)$.

Výpočet hmotnosti matice:

$m = \rho \cdot V$;

$m = \rho \cdot \frac{v}{2}\left(3\sqrt{3}a^2 - \frac{\pi d^2}{2}\right)$.

F3:

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde hmotnost matice $m = 261{,}3$ g. Vhodná doplňující otázka: „Jak by se změnil výsledek, jestliže bychom všechny rozměry zmenšili v poměru 1:3?

2.3 Slovní úlohy s fyzikální tematikou, jejichž náročnost přesahuje rozsah učiva střední školy

Tyto úlohy byly v době mého studia na gymnáziu (1985 – 1989) běžnou součástí výuky matematiky ve čtvrtém ročníku, díky změnám v učebních osnovách, později ve výstupech podle RVP G, již mnoho let nepatří mezi úlohy, které by žák střední školy měl zvládat.

Úloha nad SŠ 1 (Bušek, 1985, s. 525)

Určete práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti 250 kg do výšky 300 km nad povrch Země. Při řešení úlohy neuvažujte kinetickou energii družice. Potřebné informace dohledejte v tabulkách nebo na internetu.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o gravitačním poli.

Důležité fyzikální pojmy: Newtonův gravitační zákon, práce potřebná k překonání gravitační síly.

hmotnost družice .... $m = 250$ kg;

konečná výška .... $h = 300$ km $= 3 \cdot 10^5$ m;

práce potřebná k vynesení družice .... $W = ?$;

$[W] = \text{J}$.

Žáci dohledají následující informace:

hmotnost planety Země .... $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

poloměr Země .... $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

gravitační konstanta .... $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Z hodin fyziky na střední škole žáci vědí, že sílu, kterou na sebe působí planeta Země a družice, lze podle Newtonova gravitačního zákona vyjádřit vzorcem $F = \kappa \frac{Mm}{r^2}$, kde r je vzdálenost středů planety Země a družice. Družici přemísťujeme z povrchu planety Země do výšky h nad povrchem planety Země, a proto proměnná r nabývá hodnot z intervalu $\langle R; R+h \rangle$. Práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti m do výšky h nad povrchem planety Země žáci vypočítají podle vzorce $W = \int_R^{R+h} F \, \mathrm{d}r$.

F2:

$$W = \int_R^{R+h} \kappa \frac{Mm}{r^2} \, \mathrm{d}r;$$

$$W = \kappa Mm \int_R^{R+h} r^{-2} \mathrm{d}r;$$

$$W = \kappa Mm \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h};$$

$$W = \kappa Mm \frac{h}{R(R+h)}.$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde práce potřebná k vynesení družice $W = 704{,}1 \cdot 10^6$ J.

F3:

Práce potřebná k vynesení družice o hmotnosti 250 kg do výšky 300 km nad povrch Země je přibližně 704 MJ.

Úloha nad SŠ 2 (Bušek, 1985, s. 526)

Určete velikost hydrostatické tlakové síly, která působí na plášť válce výšky v a poloměru r, zcela naplněného kapalinou o hustotě ρ; tíhové zrychlení je g.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Stavba a vlastnosti látek, konkrétně části o mechanice kapalin.

Důležité fyzikální pojmy: hydrostatický tlak, hydrostatická tlaková síla.

Z hodin fyziky žáci vědí, že jestliže na každý bod plochy *S* působí stejně velká tlaková síla *F*, pak tlak vypočítají podle vzorce $p = \frac{F}{S}$. V této úloze ovšem velikost tlakové síly působící kolmo na stěnu nádoby závisí na hloubce *h*, proto musí žáci volit takovou plochu d*S*, aby v každém jejím bodě mohli velikost tlakové síly považovat za konstantní. Potom tlak vypočítají podle vzorce $p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$.

Z tohoto vzorce jednoduše vyjádří tlakovou sílu působící kolmo na plochu $\mathrm{d}F = p \cdot \mathrm{d}S$. V této úloze mohou žáci za elementární plochu d*S* považovat plášť válce s poloměrem podstavy *r* a výškou d*h*. Platí tedy $\mathrm{d}S = 2\pi r \cdot \mathrm{d}h$.

Hydrostatický tlak *p* v hloubce *h* kapaliny o hustotě ρ je $p = h\rho g$.

S využitím těchto vztahů žáci získají $\mathrm{d}F = 2\pi r h \rho g \, \mathrm{d}h$. Hloubka h nabývá hodnot z intervalu $\langle 0; v \rangle$. Sílu *F* tedy vypočítáme takto: $F = \int_0^v \mathrm{d}F$.

F2:

$F = \int_0^v 2\pi r h \rho g \, \mathrm{d}h$;

$F = 2\pi r \rho g \int_0^v h \, \mathrm{d}h$;

$F = 2\pi r \rho g \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^v$;

$F = \pi r \rho g v^2$.

F3:

Velikost hydrostatické tlakové síly, která působí na plášť válce výšky *v* a poloměru *r*, zcela naplněného kapalinou o hustotě ρ je $F = \pi r \rho g v^2$.

Úloha nad SŠ 3

Cheopsova pyramida má tyto přibližné rozměry: výška 140 m, délka strany čtvercové základny 200 m. Hustota kamene, ze kterého je postavena, je přibližně $2{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Vypočítejte práci vynaloženou při její stavbě na překonání gravitační síly.

Řešení:

F1:

Jedná se o úlohu, která zasahuje do kapitoly fyziky Pohyby těles a jejich vzájemné působení, konkrétně části o práci v gravitačním poli Země.

Důležité fyzikální pojmy: Newtonův gravitační zákon, práce potřebná k překonání gravitační síly.

výška pyramidy .... $v = 140$ m;

délka strany čtvercové základny .... $a = 200$ m;

průměrná hustota kamene .... $\rho = 2{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$;

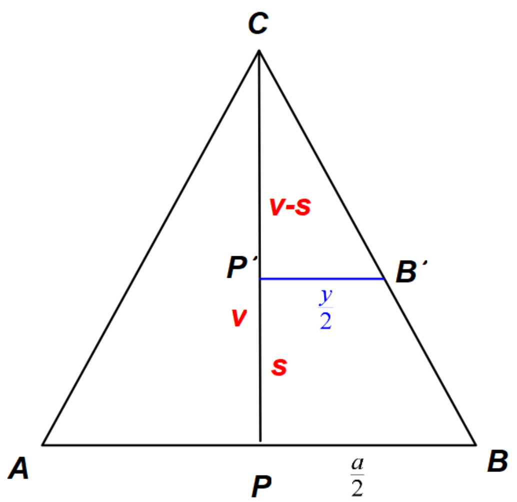
práce vynaložená při stavbě pyramidy .... $W = ?$

$[W] = \mathrm{J}$.

Žáci dohledají následující informace:

gravitační zrychlení .... $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Z hodin fyziky žáci znají vzorec pro výpočet práce, překonáváme-li působení gravitační síly $W = Fs = mgs = \rho V g s$. V tomto vzorci je s dráha, po které působíme silou, a V je objem přenášeného tělesa. Protože pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu, je pro výpočty nutné celou stavbu „rozřezat“ na elementární kvádry se čtvercovou podstavou a výškou ds.



Obrázek 4

Z podobnosti trojúhelníků CPB a $CP'B'$ v Obrázku 4 žáci vyjádří délku podstavy elementárního kvádru y v závislosti na výšce nad povrchem země s: $y = \frac{v-s}{v}a$. Práci potřebnou k vyzvednutí elementárního kvádru do výšky s vyjádří žáci například takto:

$\mathrm{d}W = \rho g s\,\mathrm{d}V$, kde $\mathrm{d}V = y^2\mathrm{d}s$;

$\mathrm{d}W = \frac{\rho g a^2}{v^2} s(v-s)^2\,\mathrm{d}s.$

F2:

$W = \int_0^v \frac{\rho g a^2}{v^2} s(v-s)^2\,\mathrm{d}s;$

$W = \frac{\rho g a^2}{v^2} \int_0^v (s^3 - 2vs^2 + v^2 s)\,\mathrm{d}s;$

$W = \frac{\rho g a^2}{v^2}\left[\frac{s^4}{4} - \frac{2vs^3}{3} + \frac{v^2 s^2}{2}\right]_0^v;$

$W = \frac{\rho g a^2 v^2}{12}.$

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyjde práce vynaložená ke stavbě Cheopsovy pyramidy $W = 1{,}602\,3 \cdot 10^{12}$ J.

F3:

Práce potřebná ke stavbě Cheopsovy pyramidy byla přibližně 1 602,3 GJ.

Závěr

Slovní úlohy jsou velmi důležitou metodou ve vyučování matematice. Rozvíjejí logické myšlení, kladou nároky na práci s textem, promítají matematické učivo do reálných situací. Toto své tvrzení jsem doložil na příkladech výstupů učiva z rámcových vzdělávacích plánů pro základní i střední vzdělávání. Stejně tak i jednotné státní přijímací zkoušky a státní maturitní zkouška vyžadují řešení slovních úloh.

V této práci na příkladu čtyřiceti jedna slovních úloh ukazuji, jak lze při výuce matematiky využívat slovní úlohy zasahující do oblasti fyzikální. Celkem třicet jedna úloh je mých vlastních, zbylých deset jsem převzal, případně upravil, z učebnic a sbírek. Řešení všech úloh je autorské, stejně tak náměty na doplňující a rozšiřující úlohy a možné propojení s jinými předměty v rámci mezipředmětových vztahů. Při řešení jsem pro lepší orientaci v textu zachoval stejnou strukturu u všech úloh. Nedílnou součástí řešení každé úlohy je také výčet fyzikálních pojmů a vzorců, které žáci mohou k řešení dané úlohy využít. Téměř všechny úlohy, které tato práce obsahuje, jsem již několikrát úspěšně použil ve svých vyučovacích hodinách.

Ačkoliv má práce přesáhla předepsaný minimální rozsah, nebylo možné vypracovat zcela vyčerpávající text k tomuto tématu, a to především vzhledem k nepřebernému množství různých možných slovních úloh s fyzikální tematikou. Z tohoto důvodu jsem se při zpracování soustředil více na úlohy pro základní školu, kde jsem pokryl všechny čtyři oblasti podle RVP ZV. Úlohy pro střední školy jsem volil tak, aby rozšiřovaly již vytvořené úlohy pro školy základní. Pro ilustraci jsem uvedl také tři úlohy na využití integrálního počtu, přestože toto učivo již přesahuje rozsah učiva podle RVP G.

Sbírku úloh mohou ve své práci využít všichni učitelé matematiky na základní i střední škole. Slovní úlohy v ní obsažené jsem vybral tak, aby žákům ukázaly propojení matematiky s reálným životem.

Jednou z možností pokračování této práce je výzkum, jakými metodami a postupy žáci řeší slovní úlohy s fyzikální tematikou. Toto téma bych rád v budoucnu zpracoval. Dalším z možných pokračování této práce je rozšíření příkladů slovních úloh tak, aby pokryly také učivo školy střední.

Seznam použitých zkratek

ŠVP................Školní vzdělávací program

RVP ....Rámcový vzdělávací program

RVP ZV ....Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

RVP G ....Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

ZŠ ....Základní škola

SŠ..................Střední škola

M...................Kategorie stupně dosaženého vzdělání M blíže v (Opatření č. 5 ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0, které jsou stanoveny v nařízení vlády č. 445/2016 Sb., ve znění nařízení vlády č. 71/2017 Sb., 2017, s. 2 - 3)

L0..................Kategorie stupně dosaženého vzdělání L0 blíže v (Opatření č. 5 ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0, které jsou stanoveny v nařízení vlády č. 445/2016 Sb., ve znění nařízení vlády č. 71/2017 Sb., 2017, s. 3)

F1..................1. fáze mého rozdělení postupu řešení slovní úlohy do tří fází

F2..................2. fáze mého rozdělení postupu řešení slovní úlohy do tří fází

F3..................3. fáze mého rozdělení postupu řešení slovní úlohy do tří fází

Seznam použitých informačních zdrojů

[1] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ, 1993. *Texty k didaktice matematiky: Pro studenty učitelství 1. stupně základní školy*. Dot. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-0468-1.

[2] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ, 2007. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 1. dotisk 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-3022-4.

[3] BLUM, W. a M. NISS, 1991. *Educational Studies in Mathematics: Applied mathematical problem solving, modelling, applocations, and links to other subject: State, treds and issues in mathematics instruction*. **1991**(22).

[4] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ a Josef TREJBAL, 2008. *Matematika 7 pro základní školy: geometrie*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-393-4.

[5] BUŠEK, Ivan, 1985. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

[6] FRIDMAN, L., 1977. *Logiko-psychologičeskij analiz školnych učebnych zadač*. Moskva: Pedagogika.

[7] FUCHS, Eduard, ed. a Eva ZELENDOVÁ, ed., 2015. Metodické komentáře k oboru Matematika a její aplikace. *Metodický portál RVP.CZ* [online]. Praha: NÚV [cit. 2018-06-03]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/20617/matematika.pdf

[8] HAVEL, Ondřej, 2009. *Modely řešení slovních úloh o pohybu*. Praha. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze , Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

[9] HEJNÝ, Milan, 1990. *Teória vyučovania matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

[10] HEJNÝ, Milan, ed., Jarmila NOVOTNÁ, ed. a Naďa VONDROVÁ, ed., 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-189-3.

[11] HELUS, Zdeněk, Vladimír HRABAL, Václav KULIČ a Jiří MAREŠ, 1979. *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Knižnice psychologické literatury.

[12] HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK et al., 2014. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia : v souladu s RVP ZV*. 1. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-87881-18-7.

[13] HUČÍNOVÁ, Lucie a Jaroslav JEŘÁBEK, ed., Stanislava KRČKOVÁ, ed., 2007. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. 1. vyd. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze. ISBN 978-80-87000-11-3.

[14] JANEČEK, František, 1991. *Algebraické výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy: Sbírka úloh k opakování a procvičování učiva matematiky střední školy*. 2., upravené a rozš. vyd. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků. ISBN 80-701-5300-8.

[15] JEŘÁBEK, Jaroslav, ed. a Jan TUPÝ, ed., 2017. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT [cit. 2018-06-27]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/41216/

[16] KUBÍNOVÁ, Marie, 1998. Slovní úlohy v učebnicích matematiky pro druhý stupeň základní školy. In: AUSBERGEROVÁ, Marie a Jarmila NOVOTNÁ. *6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: ZČU, s. 154 - 155.

[17] KUŘINA, František, 1990. *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha: SPN. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

[18] NOVOTNÁ, Jarmila, 2000. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta. ISBN 80-729-0011-0.

[19] ODVÁRKO, Oldřich, 1995. *Tvorba a řešení aplikačních úloh v matematice pro 11-15leté žáky: Vzdělávací program Iniciativa, Cyklus Jak tvořit se žáky v matematice*. Praha: PedF UK.

[20] ODVÁRKO, Oldřich., 1990. *Metody řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: SPN. ISBN 80-042-0434-1.

[21] Opatření č. 5 ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělávání kategorie stupně dosaženého vzdělání M a L0, které jsou stanoveny v nařízení vlády č. 445/2016 Sb., ve znění nařízení vlády č. 71/2017 Sb., 2017. In: *Http://www.msmt.cz/file/45315/*. Praha: MŠMT. Dostupné také z: http://www.msmt.cz/file/45315/

[22] POLÁK, Josef, 1996. *Středoškolská matematika v úlohách*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-719-6021-7.

[23] POLÁK, Josef, 2014. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. 1. vyd. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-449-5.

[24] POLYA, George, 1962. *Mathematical discovery*. New York: John Wiley &Sons.

[25] Průměrná denní teplota, 2014. In: *Ptejte se knihovny* [online]. Praha: Národní knihovna ČR [cit. 2018-06-06]. Dostupné z: https://www.ptejteseknihovny.cz/dotazy/prumerna-denni-teplota

[26] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ, 2010. *Matematika 9 pro základní školy: Pracovní sešit - geometrie*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-490-0.

[27] PŮLPÁN, Zdeněk, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ, 2009. *Matematika 8 pro základní školy: Pracovní sešit - geometrie*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-422-1.

[28] TREJBAL, Josef, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ, 2010. *Matematika 9 pro základní školy: Pracovní sešit - geometrie*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-490-0.

[29] VRTÍLKOVÁ, Jana, 2016. *Fyzikální úlohy v učebnicích matematiky* [online]. Brno [cit. 2018-06-08]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/kdtzo/prace_final.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce RNDr. Pavel Šišma, Dr.

[30] VYŠÍN, Jan, 1962. *Metodika řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: SPN. Na pomoc učiteli. ISBN 14-907-62.

[31] VYŠÍN, Jan, 1972. *Metodika řešení matematických úloh*. 2. dopl. vyd. Praha: SPN. Matematická knižnice.