Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Strategie řešení úloh o dělení celku na nestejné části

Solving strategies for problems dealing with the division of a whole into unequal parts

Štěpánka Hrachovcová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2018

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *„Strategie řešení úloh o dělení celku na nestejné části"* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. 4. 2018

Ráda bych na tomto místě poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné vedení bakalářské práce, poskytování podnětných rad a cenných připomínek.

Abstrakt

Práce se zabývá strategiemi řešení slovních úloh o dělení celku na nestejné části. Cílem práce je zjistit, jaké strategie při řešení těchto slovních úloh spontánně volí žáci tříd, ve kterých učím matematiku, jakých nejčastějších chyb se tito žáci dopouštějí a jak lze tyto chyby odstranit nebo alespoň zmírnit. Toto zkoumání se týká žáků 6. – 9. ročníku.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První dvě teoretické kapitoly se zaměřují na obecné vymezení pojmů učební úloha, slovní úloha, pak na význam slovních úloh a na typologii slovních úloh. Dále je součástí teoretické části popis procesu řešení slovních úloh a popis očekávaných strategií u žáků základní školy.

Třetí a čtvrtá kapitola je zaměřena prakticky a věnuje se přímo slovním úlohám o dělení celku na nestejné části. Třetí kapitola obsahuje různé varianty těchto slovních úloh rozdělených podle počtu dělených částí a podle typu vztahů mezi částmi. Každá varianta je ilustrována konkrétní slovní úlohou. Z těchto úloh byl vybrán testovací soubor pro žáky. Každá z těchto úloh je následně vyřešena pomocí různých strategií.

V poslední kapitole je popsán způsob zadávání testu žákům a analýza žákovských řešení. Součástí analýzy je popis nejčastějších správných a chybných postupů spolu s ukázkami žákovských řešení. Výsledky testování jsou zde kvantitativně vyhodnoceny. Závěr čtvrté kapitoly shrnuje největší potíže žáků při řešení úloh a některé možnosti odstranění nebo zmírnění potíží.

Klíčová slova

analýza řešení, obtíže žáků, slovní úlohy, strategie řešení

Abstract

The theses deal with solving strategies for problems dealing with the division of a whole into unequal. The goal is to find out which of these solving strategies are spontaneously chosen by the pupils from the classes I teach mathematics in as well as which most common mistakes they make and how to avoid or at least minimize them. This research concerns pupils from classes 6 to 9.

The theses is devided into four chapters. The first two theoretical ones are focused on general definition of terms "learning task" and "problem solving" and then on the importance of problem solving and its typology. Further on the theoretical part invovles description of the problem solving process and expected strategies of basic school pupils.

Chapters three and four are focused practically and deal with solving strategies for problems dealing with the division of a whole into unequal itself. The third chapter consists of different variants of this problem solving sorted according to the number of devisions and according to the types of relations among the parts. Each variant is represented by a problem solving out of which a set of tests for pupils was made of. Each of the problems is then solved by means of different strategies.

In the last chapter the process of assesing the test to pupils and the analysis of their solutions are described. The analysis includes description of most frequent right and wrong pupils steps with examples of pupils' solutions. The results of testing are quantitatively evaluated. The cocnclusion of the fourth chapter sumarizes the greatest pupils' difficulties with problem solving and some suggestions of their removing or minimazing.

Key Words

problem solving, pupils difficulties, solving strategies, solution analysis

Obsah

Úvod

Pro zpracování bakalářské práce jsem si vybrala téma *„Strategie řešení úloh o dělení celku na nestejné části“*. Toto téma jsem si vybrala proto, že z vlastní zkušenosti vím, jak je pro většinu žáků řešení slovních úlohy obtížné, a proto patří tyto úlohy mezi méně oblíbené. Chci zjistit, zda mě studium této problematiky profesně posune a pomůže mi tuto oblast lépe didakticky zvládnout.

Jedním z cílů práce je určit, jaké strategie při řešení úloh používají žáci, s jakými obtížemi se mohou setkat a jak tyto obtíže odstranit nebo alespoň zmírnit. Dalším cílem je zjistit, zda po seznámení s různými strategiemi řešení budou žáci při řešení úloh úspěšnější.

Práce je rozdělena na dvě teoretické a na dvě praktické kapitoly. První úvodní kapitola je zaměřena na vymezení pojmu učební nebo problémová úloha podle přístupu různých autorů.

Druhá kapitola je věnována slovním úlohám obecně. Obsahuje vymezení pojmu slovní úloha, význam a typologii slovních úloh. Dále se v ní čtenář seznamuje s tím, jak chápou strukturu řešení úlohy různí autoři, kteří se touto problematikou zabývali. Poslední část druhé kapitoly charakterizuje pojem strategie, zahrnuje přehled různých heuristických strategií, které se dají použít při řešení úloh, a na vybraných strategiích ukazuje, na jakém principu fungují.

Třetí kapitola je již plně zaměřena na slovní úlohy o dělení celku na nestejné části, konkrétně na typy, rozdělení a příklady těchto úloh. Z těchto příkladů je vytvořen soubor sedmi úloh pro testování žáků. Každá úloha je doplněna o různé způsoby řešení pomocí více strategií.

Ve čtvrté kapitole je popsán způsob zadávání testu žákům a analýza žákovských řešení. Testování bylo provedeno ve dvou etapách. V první etapě řešili úlohy žáci 6. – 9. třídy. Ve druhé etapě řešili tytéž úlohy žáci 9. třídy po seznámení s různými heuristickými strategiemi. Součástí analýzy je popis nejčastějších správných a chybných postupů spolu s ukázkami žákovských řešení. Dále jsou zde výsledky prvního a druhého testování kvantitativně vyhodnoceny. V závěru čtvrté kapitoly jsou shrnuty největší potíže žáků při řešení úloh a možnosti, jak tyto potíže odstranit nebo alespoň zmírnit.

1 Uvedení do problematiky

Stěžejním tématem této práce je pojem slovní úloha a strategie řešení slovních úloh. Termín slovní úloha vychází z obecnějších pojmů, a to matematická úloha a učební úloha. V této části se tedy zaměřím na obecnější vymezení těchto termínů a na to, v jakém kontextu jsou využívány v oborově didaktické, obecně didaktické, pedagogicko-psychologické či psychologické literatuře.

Pojem úloha je některými autory zaměňován za pojem problémová úloha, problémová situace nebo jen problém (z angl. problem), cvičení. Případy použití jednotlivých pojmů se liší podle přístupu autora k dané problematice.

J. Mareš definuje učební úlohu takto: *„Učební úlohou rozumíme promyšleně připravenou práci pro žáka či skupinu žáků, která se zadává proto, aby zajistila u žáků dosažení stanoveného učebního cíle.“* (Mareš, 2013, s. 365)

Podobnou definici nabízí pedagogický slovník, kde je uvedeno: *„Učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle.“* (Průcha a kol., 2001, str. 258)

D. Tollingerová popisuje učební úlohu jako *„jazykový útvar nebo promluvu, která se výslovně, verbálně, nebo svým kontextem, neverbálně stává nositelem signálu – teď musím něco udělat, na rozdíl od prosté zprávy, která je nositelem signálu – teď se něco dozvím.“* (Tollingerová, 1976, s. 156)

Při vymezení pojmu úloha vychází L. M. Fridman ve své teorii učebních úloh z problémové situace. *„Problémová situace vzniká tehdy, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit. Právě popsanou situaci nazývá autor problémovou situací. Jakmile tuto situaci navodíme záměrně, „uměle“, rodí se úloha*.“ Pojem úloha vymezuje jako „*požadavek (přednesený v přirozeném či umělém jazyce) na provedení určitého explicitně či implicitně uvedeného operátoru (tj. posloupnosti operací) vzhledem k zadané podmínce.“* (cit. z Mareš, 1980, s. 596 – 597)

Naopak J. Maňák popisuje problém jako *„druh specifické úlohy, kterou žák – subjekt není schopen rozřešit na základě své aktuální zásoby vědomostí.“* (Maňák, 2003, s. 115)

Z hlediska psychologů je problém *„situace, v níž se nacházíme v určitém výchozím stavu a chceme dosáhnout jiného cílového stavu“* (Plháková, 2004, s. 271.), nebo „*situace, v níž je známý cíl, ale zatím není známý prostředek, jak jej dosáhnout. Navíc rozdíl je v tom, jak každý jednotlivec vnímá a hodnotí náročnost problémové situace: co je problémem pro jednoho člověka, nemusí být problém pro jiného*.“ (Vágnerová, 2016, s. 193)

J. Kopka použil definici problému didaktika matematiky J. Kilpatricka, který chápe problém jako *„situaci, v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta je k němu zablokována. Aby byl problém matematický, pak bychom při hledání odpovědi měli užívat matematické pojmy a principy.“* (cit. z Kopka, 2013, s. 15)

Dále J. Kopka (2013, s. 15 – 16) rozděluje problémy do tří skupin podle tří složek (výchozí situace, cíl, cesta od výchozí situace k cíli):

- cvičení (rutinní problémy) – výchozí situace je popsána, cesta je známa, cíl je daný,
- úlohy (nerutinní problémy) – výchozí situace je popsána, cesta není známa, cíl je daný,
- zkoumání – výchozí situace je popsána, cesta není známa, cíl není přesně daný nebo není zadán vůbec.

F. Kuřina úlohou rozumí *„obvykle jakoukoliv výzvu k činnosti. Matematická úloha vyzývá řešitele k matematické činnosti.“* (Kuřina, 2011, s. 185)

Úlohy rozděluje podle náročnosti řešení pro studenta na:

- cvičení – postup je v podstatě určen textem úlohy, žáci aplikují naučený algoritmus,
- úlohy (v užším slova smyslu) – řešitel kombinuje více algoritmů, což je podstatou řešení úlohy, jde v nich o obvyklou aplikaci teorie,
- problémy – vyžadují při řešení tvořivý přístup, postup řešení není znám.

(Kuřina, 2011, s. 187)

Podle rolí, které mají hrát ve vzdělávacím procesu, rozlišuje:

- úlohy motivační,
- úlohy ilustrační (příklady),
- úlohy procvičovací,

- úlohy diagnostické,
- úlohy kontrolní.

(Kuřina, 2011, s. 186)

Z uvedených výkladů a přístupů různých autorů je zřejmé, že ať už je učební úloha nazývána úlohou, problémem či cvičením, sjednocujícím znakem všech pojmů je konkrétní činnost ze strany žáka, která ho má naučit novým poznatkům nebo ho zdokonalit v tom, co již umí a zná, a tím pomocí této činnosti naplnit didaktický cíl.

2 Slovní úlohy

2.1 Vymezení pojmu slovní úloha

Slovní úlohy jsou často nástrojem, který má ukázat uplatnění matematiky v běžném životě a rovněž to, zda je žák schopen při jejich řešení aplikovat teoretické znalosti. Ve výuce matematiky je žáci tradičně řadí mezi nejméně oblíbené a mezi učiteli patří k didakticky nejnáročnějším. Problematikou slovních úloh se zabývalo i zabývá mnoho českých i zahraničních autorů. Pro srovnání uvádím autory starších a současnějších publikací. Jak někteří z nich vymezují pojem slovní úloha?

Podle J. Vyšína *„bývají slovními úlohami zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoliv matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy.“* (Vyšín, 1962, s. 104)

K. Hruša ve své publikaci Metodika počtů uvádí toto vymezení: *„Slovní úloha je početní úloha, ve které je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a ve které je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, které početní výkony musíme s danými čísly provést, abychom dospěli k číslu, jež máme vypočítat.“* (Hruša, 1968, s. 162)

Jako poslední definici ze starší literatury uvádím vymezení G. Knížete, jehož uchopení pojmu slovní úloha je odlišné od výše uvedených autorů*: „Slovní úlohou v aritmetice nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou sledovanou.“* (Kníže, 1966, s. 5). G. Kníže dále tvrdí, že *„slovní úlohy uvádějí životní situace kvantitativní povahy s úkolem zjistit řešením nové kvantitativní údaje a získat tak nové informace, které jsou v úloze skryty.“* (Kníže, 1966, s. 6)

Z novějších předkládám výklad pojmu O. Šedivého, jehož terminologie se značně shoduje s terminologií K. Hruši: *„Úlohy, ve kterých je závislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací, nazýváme slovní úlohy. Ve slovních úlohách je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, jaké početní operace musíme s danými čísly provést, abychom našli čísla, která máme vypočítat. Úlohy, kde jsou početní operace předepsané, nezahrnujeme mezi slovní úlohy.“* (Šedivý, 1990, s. 117)

O. Odvárko charakterizuje pojem slovní úlohy jako *„matematické úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace z nejrůznějších mimomatematických oblastí. Tyto oblasti* *zahrnují běžnou denní praxi, různé vědní disciplíny mimo samostatnou matematiku, technickou praxi různého druhu apod.“* (Odvárko, 1996, s. 337)

Obecně popisuje slovní úlohy F. Kuřina: *„Slovní úlohou obvykle rozumíme slovy popsanou situaci z běžného života nebo určité oblasti poznání, v níž hledáme odpověď na položenou otázku.“* (Kuřina, 2011, s. 65)

Mezi uvedenými výklady lze najít určité odlišnosti, ale jsou to odlišnosti spíše v jazykové formulaci než v samotném obsahu vymezení pojmu.

Společné znaky uvedených definic shrnuji následujícím způsobem:

- úlohy z praxe, popisují reálnou situaci,
- formulované slovy, nikoliv matematickými symboly,
- hledáme v nich vztahy mezi zadanými a hledanými objekty,
- matematizujeme v nich reálnou situaci a hledáme řešení.

2.2 Význam slovních úloh (aplikační úlohy, pseudoaplikace)

„Řešení úloh je jedna z mála oblastí ve školské matematice, která vyžaduje matematizaci slovně popsaných situací a návrat do kontextu po vyřešení příslušné matematické úlohy.“ (Novotná, 2004, s. 367)

Didaktický význam slovních úloh lze stručně vymezit takto:

- ukazují žákům, jak lze matematiku využít v praktickém životě,
- zvyšují motivaci žáků pro rozvoj zájmu o matematiku (Odvárko, 1996, s. 337),
- rozvíjí schopnost vybírat podstatné informace a čtenářskou gramotnost,
- při řešení slovních úloh se upevňuje uvědomělé používání početních operací a početních dovedností,
- jsou prostředkem pro rozvoj kognitivních funkcí, myšlení a pozornosti,
- objasňují základní matematické pojmy, podporují hlubší pochopení matematických poznatků,
- rozvíjí tvořivost a heuristické postupy (Novotná, 2004, s. 368).

Matematika je žáky chápána jako užitečná a významná zvláště tehdy, pokud úlohy, které jsou jim předkládány, vychází z reálné situace a řešení jsou smysluplná. Tyto úlohy nazývá

O. Odvárko *aplikační*.[1] Pokud jsou úlohy umělé a příliš vykonstruované, nejsou pro žáky zajímavé a tím se motivace k jejich řešení významně snižuje. V tomto případě je O. Odvárko nazývá *pseudoaplikační*. Tyto úlohy jsou sestavovány tak, že se k danému matematickému obsahu až posléze dotváří mimomatematický obsah. (Odvárko, 1996, s. 338 – 339)

Příkladem aplikační úlohy podle autora je např. úloha: *„Paní Kavanová si vybírá ve spořitelně 4 400 korun. Chce jednu tisícikorunu, dvě pětisetkoruny a zbytek ve stokorunách. Kolik dostane stokorun"?* (Odvárko, 1996, s. 339)

Naopak za pseudoaplikační považuje tuto úlohu: *„Při reorganizaci závodu plně zautomatizovali druhou ze tří dílen závodu. Pracovníky z této dílny převedli z poloviny do první dílny, třetinu z nich převedli do třetí dílny a šest jich ponechali ve druhé dílně. Před reorganizací bylo v první dílně o dvacet zaměstnanců více než ve druhé a ve třetí byla polovina počtu zaměstnanců druhé dílny. Kolik bylo pracovníků v každé dílně před i po reorganizaci?"* (Odvárko, 1996, s. 339)

V první úloze je popisována situace, se kterou se žák v životě osobně jistě může setkat, a má tedy smysl takovou úlohu řešit. V druhé úloze nebude pro žáky zvolený mimomatematický obsah – reorganizace závodu – zřejmě nijak zajímavý. V životě se takto formulovaný úkol nevyskytuje. Problémové situace z praxe obsahují smysluplná zadání s počty, procenty či zlomky. Navíc podle mého názoru je text úlohy nadmíru dlouhý a málo srozumitelný. Myslím si, že tento typ úloh není pro žáky příliš motivační a odrazuje od řešení při pouhém čtení.

Ze své zkušenosti vím, že motivaci žáků řešit slovní úlohu umocňuje fakt, že s tématem mají nějakou osobní zkušenost a že se obsah dotýká např. jejich zájmů. Když jsem vybírala testové úlohy pro analýzu[2], snažila jsem se podobnou úlohu sestavit.[3] Žáci se v úloze po přečtení poznali a neskrývali zájem.[4]

---

[1]Učitelům matematiky doporučuji sbírku úloh: ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro každý den: [učebnice pro základní školy] : sbírka úloh nejen pro žáky 5. až 9. ročníků základních škol*. 3. vyd. Praha: Prospektrum, 1995. 154 s. ISBN 80-85431-31-9.

[2] Kapitola 3.2.

[3] Úloha č. 10.

[4] Pouze můj subjektivní dojem.

2.3 Typologie slovních úloh

Autoři publikací, které jsem prostudovala, volí různá kritéria, podle kterých se dají slovní úlohy dělit. Například R. Blažková (2007, s. 4) dělí úlohy podle počtu matematických operací na:

- Jednoduché – k řešení stačí jedna početní operace.

  Např.: *Synovi je pět let. Otec je šestkrát starší. Kolik let je otci?*

- Složené – k řešení je třeba více než jedna operace.

  Např.: *Martin si koupil koláč za 8 Kč a dvě koblihy, jedna stála 6 Kč. Kolik Kč dostal nazpět, jestliže platil padesátikorunou?*

Další možné hledisko – oblast matematiky – nabízí O. Odvárko (1990), rozlišuje:

- Slovní matematické úlohy – nejsou vyjádřeny pomocí matematických symbolů, řešitel musí nejprve zadání úlohy převést na úlohy, které budou matematické symboly obsahovat, tyto úlohy dále dělí na:
  - Aritmetické – např.: *Které číslo je třeba odečíst od čísla 98, abychom dostali číslo 56?*
  - Algebraické – např.: *Součet neznámého čísla a jeho druhé mocniny je číslo šest. Určete neznámé číslo.*
  - Geometrické – např.: *Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různých bodů.*
- Slovní úlohy s nematematickým obsahem – úlohy s textem, ve kterém se vyskytuje alespoň jeden pojem, který nepatří do žádné matematické teorie. Např.: *„Do pokoje tvaru obdélníku, jehož podlaha má rozměry 4 metry a 6 metrů, kupujeme koberec o šířce 4 metry. Jeden metr koberce stojí 1 540 Kč. Kolik za koberec zaplatíme?“*(Odvárko, 1995, s. 83)

Podle požadavků na řešení J. Vyšín (1962) uvádí toto dělení:

- Určovací – jde o určení (výběr) množiny objektů z dané množiny, které mají požadovanou vlastnost. Např.: *Nalezněte všechna řešení nerovnice* $2 + x < 20$ *v množině přirozených čísel.*
- Existenční – zjišťujeme, zda množina objektů, které mají určitou vlastnost, je prázdná, či neprázdná. Např.: *Existuje sudé prvočíslo?*

- Důkazové – obsahují tvrzení, jehož pravdivost nebo nepravdivost máme dokázat. Např.: *Dokažte, že součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je přímý úhel.*

F. Kuřina shrnul nejběžnější typy úloh ve školské matematice i s odpovídajícími otázkami do tabulky (tab. 1).

Tab. 1: Typy úloh

Úloha	Výzva	Otázka
Kalkulativní	Vypočítejte . . .	Kolik?
Rozhodovací	Rozhodněte . . .	Zda?
Určovací	Určete . . .	Který?
Konstrukční	Sestrojte . . .	Jak?
Důkazová	Dokažte . . .	Proč?

Zdroj: Kuřina, 2011, s. 186 (vlastní zpracování)

Typologii z hlediska metakognice[5] rozumí D. Jirotková takto:

- úlohy seznamovací – řešitel získává první zkušenost s jistým pojmem,
- úlohy objevné – řešení vede k odhalení jistého objektu, procesu, vztahu, schématu, situace nebo vlastnosti,
- úlohy komunikační – vyvolávají komunikační problém,
- úlohy konstrukční – řešením je najít konstrukci již známého objektu,
- úlohy mapovací – řešením je nalézt všechny objekty či procesy dané vlastnosti,
- úlohy optimalizační – úkolem je najít v jistém kontextu optimální prvek v souboru daných objektů, procesů, vztahů, vlastností,
- úlohy vyhledávací – cílem je najít prvek předepsaného typu v souboru objektů, procesů, vztahů, situací, vlastností,
- úlohy revizní – řešitel prověřuje, zda daný objekt, proces, vztah, situace, vlastnost, soubor splňuje předepsané kritérium,
- úlohy argumentační – zdůvodňujme nebo vyvracíme, zda daný objekt, proces, vztah, situace, vlastnost splňuje předepsaný požadavek,
- úlohy na hledání strategií – jsou prostoupeny v každém typu úloh, význam mají myšlenkové procesy, při nichž dochází ke změně strategie,

[5] Způsobilost člověka plánovat, monitorovat, vyhodnocovat postupy, jichž sám používá, když se učí a poznává. Jde o činnost vědomou, která vede člověka k poznání „jak já sám postupuji, když poznávám svět." (Průcha, Walterová, Mareš, 2003, s. 122)

- úlohy nácvikové[6] – cílem je upevňovat nebo automatizovat již známé matematické postupy.

(Jirotková, 2010, s. 213 – 230)

Autorka uvádí, že tato typologie je výsledkem práce s úlohami v prostředí čtverečkovaného papíru, ale má univerzální platnost a lze ji vztáhnout na úlohy z jakékoliv oblasti.

Ve většině sbírek a učebnic, které jsem měla k dispozici, převládá dělení slovních úloh podle kontextu. Nejčastěji to bývá dělení na slovní úlohy:

- o pohybu,
- o směsích,
- o společné práci,
- o dělení celku na části.

V (Czudek, 2005) jsou rozlišeny i další typy úloh, např. úlohy, ve kterých hledáme neznámé číslo, úlohy na určování věku osob, úlohy s procenty.

2.4 Postup řešení slovních úloh

„Matematická úloha je výzva. Řešitel na ni může reagovat trojím způsobem:"

- přímo – úlohu začne řešit,
- úhybně – úlohu sám neřeší, například se snaží řešení opsat,
- rezignací – úlohu odmítne řešit.

(Hejný, 1995, s. 386)

Z. Helus (1979, s. 230) reakci žáka „*přímo*" nazývá přijetím úlohy. Žák je motivován k tomu, aby se pokusil úlohu řešit. Předpokládáme, že tato situace nastane a žák vnitřně úlohu přijme, pak nastupují fáze procesu řešení slovní úlohy. Uvádím zde pro srovnání několik autorů, kteří se problematikou procesu řešení zabývali.

G. Polya (2016) rozpracoval proces řešení na tyto základní fáze:

- porozumění úloze – řešitel se seznamuje s úlohou, snaží se o lepší porozumění,

[6] U těchto úloh Jirotková dodává, že pokud ve vyučování převažují, snižuje se tak hodnota matematického poznávání.

- sestavení plánu řešení – řešitel promýšlí postup řešení a jeho jednotlivé kroky,
- realizace plánu – řešitel uskutečňuje svůj postup, kontroluje každý krok,
- pohled zpět – řešitel kontroluje výsledek podle podmínek zadání. (Polya, 2016, s. xx – xxi)

K jednotlivým fázím G. Polya navíc přidává otázky a návodné pokyny, které by mohly řešiteli pomoci.

Téměř identický pohled na strukturu řešení má L. M. Fridman (1980). Uvádí tyto čtyři etapy:

- analýza úlohy,
- hledání plánu řešení,
- uskutečnění plánu,
- kontrola činnosti při řešení.

Podle L. M. Fridmana jsou tyto fáze jen obecné etapy procesu. Je důležité vyčlenit elementární kroky (rozumové operace) při řešení úlohy. Elementárním krokem je spojování prvků řešitele (subjektu), které patří do jedné ze čtyř etap. Celou činnost při řešení úlohy pak vytváří posloupnost těchto elementárních kroků. (cit. z Mareš, 1980, s. 604)

R. Blažková (2007, s. 6 – 7) chápe proces řešení úlohy jako posloupnost následujících kroků:

- porozumění textu – orientace v textu a jeho pochopení, stručný zápis,
- rozbor – co je dáno, co máme vypočítat, které údaje jsou potřebné a které nadbytečné, pochopení vztahů mezi podmínkami v úloze a otázkou, případné grafické znázornění vztahů,
- matematizace reálné situace – zápis vztahů mezi zadanými a hledanými údaji pomocí matematických výrazů,
- odhad výsledku,
- řešení matematické úlohy – pomocí aritmetických, algebraických nebo grafických metod,
- zkouška – provést jednak zkoušku matematické úlohy a následně vlastní úlohy podle podmínek v zadání,
- odpověď na otázku slovní úlohy.

Podle J. Novotné (2000, s. 21) lze proces řešení rozdělit na tři etapy:

- *„Etapa uchopování, která obsahuje:*
  - *uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“,*
  - *hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,*
  - *hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,*
  - *získání celkového vhledu do struktury problému.*
- *Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.*
- *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy.“*

J. Novotná dodává, že žáci vždy nepostupují tak, jak je uvedeno, některé etapy vynechávají, k některým se zpětně vracejí.

Z uvedených autorských pohledů je zřejmé, že struktura procesů se v jejich pracích shoduje, liší se pouze v počtu jednotlivých kroků a v pojmenování. Například fáze porozumění textu a fáze rozbor u R. Blažkové je u J. Novotné spojena do jedné etapy – etapa uchopování, u L. M. Fridmana je tento krok pojmenován jako analýza úlohy, u G. Polyi porozumění úloze. Etapa transformace u J. Novotné je sloučením tří kroků u R. Blažkové – matematizace reálné situace, odhad výsledku, řešení matematické úlohy.

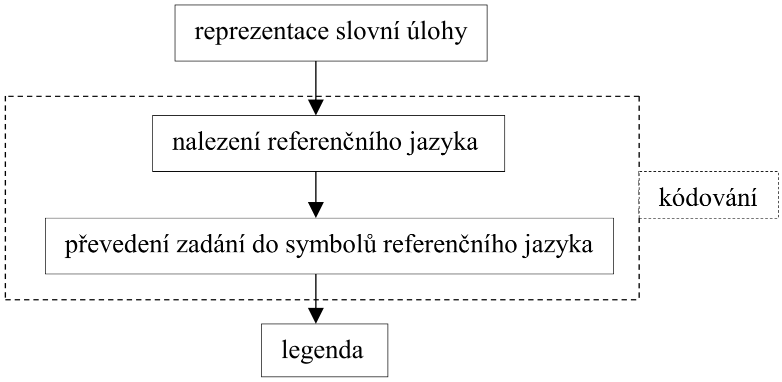
Správné uchopení slovní úlohy, podle M. Hejného (1995, s. 387) *„zmocnění se s porozuměním“*, je zcela zásadní pro úspěšné vyřešení slovní úlohy. Probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu úlohy. Pokud žák neporozumí vzájemným vztahům, nezíská *„vhled“* [7] do struktury problému, pak Hejný hovoří o *„protetickém zmocňování“*. V této souvislosti Hejný uvádí, že pokud žák vidí řešení ihned po přečtení úlohy, je pro něj uchopování nepotřebné a učitel by ho neměl vyžadovat. Naopak žák, který má problémy s porozuměním úloze, může pomocí správného uchopení cestu k řešení najít.

Podle J. Novotné (2000, s. 24) si řešitel první představu vytváří v hlavě. Toto první uchopení nazývá J. Novotná *reprezentací*. Pokud má řešitel potřebu první představu sdělit, převede ji pomocí vhodného znakového systému *(referenční jazyk)* písemnou formou. Tento

[7] Vhledem rozumíme ucelené pochopení vztahů mezi prvky vystupujícími v zadání slovní úlohy a uvědomění si souvislostí. (Novotná, 2000, s. 22)

proces se nazývá *kódování*. Písemný záznam, který řešitel při kódování vytvořil, je *legenda* (obr. 1)

Obr. 1: Vytváření legendy pro slovní úlohu



Zdroj: Novotná, 2000, s. 24 (vlastní zpracování)

Žáci mohou používat různé typy legend, podle toho jaký referenční jazyk využijí.

Typy legend (Novotná, 2000, s. 273 – 2):

- slovní – ve zkráceném záznamu jsou použita slova, případně doplněna jinými symboly (zvláštním případem slovní legendy je tabulková nebo šipková legenda),
- obrázková – vztahy v úloze jsou zachyceny pomocí obrázku nebo schématu, mohou být rovněž doplněny symboly nebo slovními poznámkami (do obrázkové legendy též patří geometrická legenda, referenční jazyk obsahuje geometrické útvary, např. úsečky),
- algebraická – vztahy jsou zapsány pomocí rovnic.

M. Tichá (1998, s. 133) uvádí, že vizualizace podmínek nemusí nutně vést ke správnému uchopení slovní úlohy a ke správnému výsledku. Někteří žáci nejprve řeší úlohu a pak doplní své řešení ilustrací. Rovněž konstatuje, že vizualizace není vhodná pro všechny žáky.

Etapa transformace zahrnuje matematizaci reálné situace a pomocí vhodné strategie vyřešení příslušné úlohy. Matematizace je vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem pomocí matematických výrazů. Podle D. Wheelera (cit. z Kuřina, 1985, s. 222) *„matematizace jako proces vzniku matematiky probíhá jak individuálně, neboť každý akt matematizace je duševní činnost prováděná individuem, jednak univerzálně, neboť* *schopnost matematizovat náleží každému člověku. Proto může být učitel optimistický a jeho úkolem není „vkládat" hotovou matematiku do žáků, ale podněcovat jejich schopnost matematiku vytvářet."*

V poslední fázi řešení bychom se měli vrátit do kontextu úlohy, provést zkoušku správnosti a formulovat odpověď na otázku slovní úlohy.

2.5 Strategie řešení slovních úloh

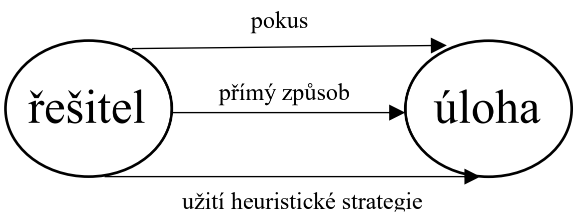
Obecné vymezení pojmu strategie: *„Strategie jsou nástroje, které nám pomáhají při hledání cesty k cíli."* (Kopka, 2013, s. 26)

Vymezení pojmu ve smyslu učení žáka: *„Strategie učení je posloupnost činností při učení, promyšleně řazených tak, aby bylo možné dosáhnout učebního cíle."* (Průcha, Walterová, Mareš, 2003, s. 230)

Vymezení pojmu při řešení slovních úloh: *„Strategií rozumíme řešitelovu odpověď na otázku „Jak úlohu řešit?". Řešitel vytváří souhrn pravidel (plán řešení) určujících způsob jeho dalšího postupu při řešení slovní úlohy."* (Novotná, 2000, s. 24)

J. Novotná, P. Eisenmann, J. Přibyl (2015) chápou řešení úlohy jako kognitivní proces, který lze uskutečnit pomocí tří cest (obr. 2).

Obr. 2: Kognitivní proces při řešení úlohy



Zdroj: (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 10) (vlastní zpracování)

První způsob je označen jako pokus. Řešitel se pokusí nějak úlohu vyřešit, ale bez dodatečné kontroly správnosti.

Cestou přímého způsobu řešitel aplikuje naučenou znalost nebo postup. Ví, že tento postup má použít, a ví, jakým způsobem.

Užitím heuristické strategie naopak řešitel hledá nějakou cestu k řešení. Přímým způsobem úlohu řešit neumí, nemá požadované znalosti nebo je neumí použít. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 10)

„Heuristika (z řec. heuréka = objevil jsem, nalezl jsem) je věda zkoumající tvůrčí myšlení, také heuristické činnosti, tj. způsob řešení problému.“ (Maňák, Švec, 2003, s. 113)

Heuristický znamená objevný nebo sloužící k objevování. (Polya, 2016, s. 114)

Heuristické strategie vedou žáka k tvořivému a originálnímu myšlení. Předem není znám jasný postup a většinou lze k výsledku dospět různými strategiemi. Vybrat tu správnou strategii je mnohdy velice komplikované. Volba účinné strategie v dané úloze závisí podle M. Hejného (2005, s. 24) na třech aspektech:

- na zkušenosti žáků s analogickými úlohami,
- na schopnosti vzájemně propojovat různé myšlenky,
- na schopnosti vyjádřit své vlastní myšlenky.

Nelze očekávat, že žáci sami začnou heuristické strategie spontánně používat, potřebují podporu učitele. Proto je vhodné zařazovat úlohy, které lze řešit rovněž pomocí heuristických strategií místo algoritmických, ve kterých učitel žákům předkládá hotové poznatky.

Jedno z možných dělení heuristických strategií předkládá J. Kopka (2013, s. 26 – 27):

- výchozí (základní) strategie,
  - systematické experimentování,
  - pokus – omyl,
  - odhad – ověření – oprava,
  - algebraická cesta (sestavení rovnice nebo soustavy rovnic),
  - geometrická cesta (načrtnutí obrázku),
- další obecné strategie,
  - konkretizace a zobecnění,
  - analogie,
  - přeformulování problému,
  - cesta zpět,
  - zavedení pomocného prvku,
  - vypuštění podmínek,

- specifické, např. rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku.

Podle autorů (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 11) je důležitým aspektem při řešení úloh nejen použití určité strategie, ale také to, jakým způsobem byla použita. Uvádí tři způsoby užití strategií:

- aritmetická cesta – řešitel nezavádí proměnnou, k řešení mu stačí pouze číselné objekty,
- algebraická cesta – řešitel zavádí proměnnou nebo více proměnných, úlohu řeší pomocí rovnice nebo pomocí soustavy rovnic,
- geometrická cesta – řešitel používá obrázky nebo jiné grafické znázornění, např. grafy funkcí.

Mezi základní objevitelské (neškolské) strategie J. Novotná, P. Eisenmann, J. Přibyl (2015) řadí:

- analogie,
- pokus – ověření – korekce,
- systematické experimentování,
- přeformulování problému,
- řešitelský obrázek,
- využití grafů funkcí,
- vypuštění podmínek,
- cesta zpět,
- zobecnění a konkretizace,
- zavedení pomocného prvku,
- rozklad na jednodušší případy,
- užití nesprávného předpokladu.

V uvedených dvou rozděleních najdeme společné znaky, ale i určité odlišnosti. J. Kopka neuvádí způsoby užití strategií (cesty), ale dělí je na základní, obecné a specifické. Metodu pokus – omyl řadí J. Kopka mezi strategie, J. Novotná, P. Eisenmann, J. Přibyl nikoliv. Strategie pokus – ověření – korekce a strategie odhad – ověření – oprava se liší jen pojmenováním, v principu fungují stejně. Strategie užití nesprávného předpokladu u Novotné, Eisenmanna a Přibyla (2015) se ve výčtu u Kopky nevyskytuje.

Rozdělení strategií podle tří způsobů užití (aritmeticky, algebraicky, geometricky) je použito v mé práci v další kapitole, kde popisuji, jakými strategiemi se dají řešit testové úlohy o dělení celku na nestejné části. Zaměřím se nyní pouze na ty heuristické strategie, které jsem užila při řešení těchto konkrétních úloh.

Strategie pokus – ověření – oprava

Principem této strategie je postupné přibližování se výsledku (postupná aproximace). Nejprve uděláme první náhodný odhad a zkontrolujeme podle zadání správnost řešení. Pokud odhad není správný, zjistíme, jak moc jsme se od výsledku vzdálili, a odhad upravíme. Celý proces opakujeme tak dlouho, dokud nenalezneme správný výsledek. Je výhodné pokusy zaznamenávat např. do tabulky, kde v posledním sloupci tabulky můžeme na základě výsledku uvádět, zda odhad potřebujeme zvětšit či zmenšit.

Strategie systematické experimentování

Výslednou hodnotu se snažíme najít pomocí jednotlivých experimentů, které mají určitý systém. Podle tohoto systému objevíme pravidlo, jak volit hodnotu pro následující experiment. Následně systematicky měníme vstupní hodnoty tak dlouho, dokud nenajdeme správné řešení.

Řešitelský obrázek

Pomocí obrázku graficky znázorníme, co je dáno, i to, co chceme vypočítat, popřípadě vztahy mezi objekty v zadání. S obrázkem můžeme různě manipulovat, dokreslovat další pomocné prvky. Pomocí tohoto znázornění úlohu vyřešíme.

Využití grafů funkcí

Při formulaci vztahů mezi objekty v zadání zjistíme, že pomocí těchto vztahů lze zavést funkce a sestrojit grafy těchto funkcí. Nalezené grafy mohou významně přispět k řešení úlohy.

Užití nesprávného předpokladu

Při této strategii volíme nějakou vstupní hodnotu a podle zadání zkontrolujeme nejen to, zda se námi určený výsledek liší, ale hlavně kolikrát se liší. Následně neprovedeme další odhad, ale na základě zjištění, kolikrát je požadovaná hodnota jiná než náš odhad, provedeme výpočet vedoucí k výsledku. Tato strategie je specifická v tom, že ji lze použít jen na určitý typ úloh. Jsou to úlohy, ve kterých jsou vstupní hodnoty lineárně závislé na výstupních hodnotách. Pokud tuto závislost objevíme a specifikujeme, získáme údaj, podle kterého změníme předpokládanou hodnotu výsledku, kterou jsme provedli na začátku.

(Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 11 – 18)

3 Slovní úlohy o dělení celku na nestejné části

3.1 Typy, rozdělení slovních úloh

Slovní úlohy o dělení celku na nestejné části je možné rozdělit pomocí tří různých charakteristik, kde každá z nich má několik variant (Novotná, 2000, s. 50):

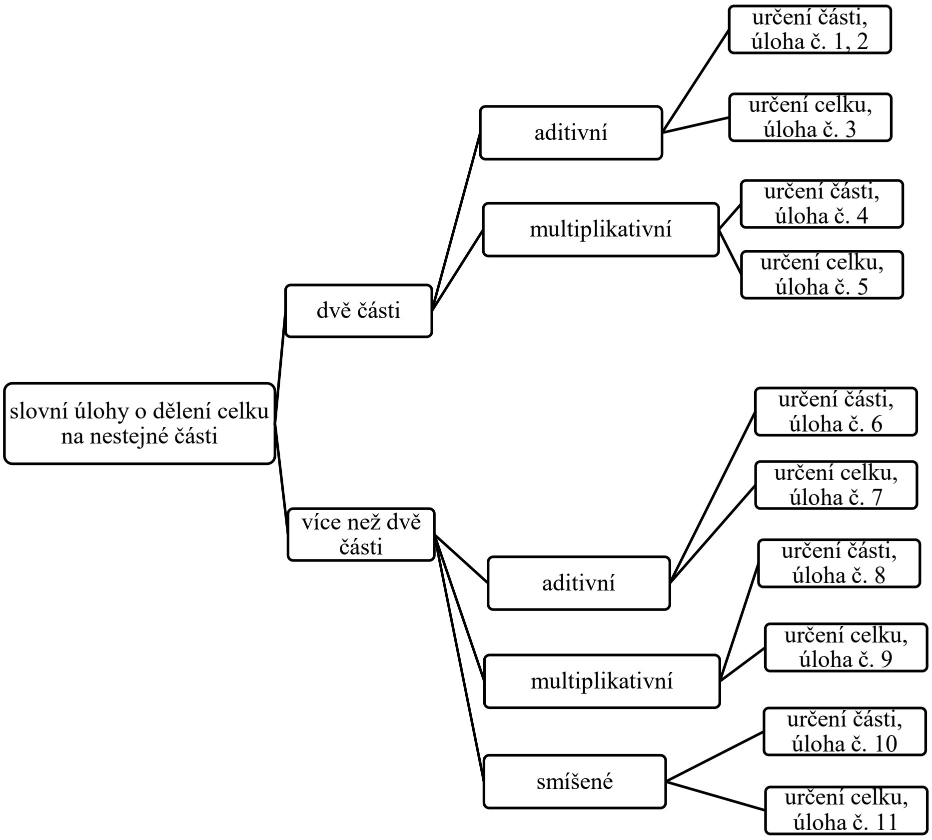
- počet částí,
  - dvě části,
  - více než dvě části,
- typ vztahů mezi částmi,
  - aditivní,
  - multiplikativní,
  - smíšené,
- modifikace zadání úlohy,
  - je dána velikost celku a vztahy mezi jednotlivými částmi, hledáme velikosti částí,
  - je dána jedna, nebo více částí a vztahy mezi nimi, hledáme velikost celku.

Jednotlivé části mohou být zadány pomocí celých, desetinných čísel, procent nebo zlomků.

Uvedené rozdělení[8] je využito v této práci a zpracováno do přehledu (obr. 3). U každé varianty je uveden příklad slovní úlohy. Složitost úlohy ovlivňuje jednak počet částí, na které je celek v úloze rozdělen, ale také struktura vztahů mezi částmi. Z tohoto souboru byly vybrány testovací slovní úlohy pro žáky.

[8] Existuje jistě více variant, jak dělit tento typ slovních úloh. Např. u skupiny úloh, ve které je celek rozdělen na více než dvě části, lze zadávat součet dvou nebo více částí a nikoliv celku.

Obr. 3: Varianty slovních úloh o dělení celku na nestejné části



Zdroj: Vlastní zpracování

Úloha č. 1

„Josef a Matěj odevzdali v hájovně celkem 161 kg kaštanů. Josef odevzdal o 9 kg více než Matěj. Kolik kg odevzdal každý zvlášť?" (Ženatá, 1999, s. 63, upraveno[9])

Úloha č. 2

„Tomáš a Jana dostali dohromady od babičky 350 Kč. Jana dostala o třetinu více než Tomáš. Kolik Kč dostal každý z nich?" (Půlpán, Čihák, Trejbal, 2009, s. 18, upraveno[10])

[9] Upraveno autorkou práce
[10] Upraveno autorkou práce

Úloha č. 3

„Kdyby bylo na škole o 457 žáků více, chyběl by jeden do tisíce. Kolik žáků je ve škole?“ (Kindl, 1971, s. 143)

Úloha č. 4

„Obdélníková zahrada má šířku 3,2krát kratší než délku. Obvod zahrady je 126 m. Jaká je délka a šířka zahrady?“ (Cihlář, Zelenka, 2013, s. 88)

Úloha č. 5

„Na školní výlet dostala Šárka od své babičky kapesné na drobné vydání. První den z něj utratila 20 % a zbylo jí 320 Kč. Vypočítej výši Šárčina kapesného.“ (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009, s. 97)

Úloha č. 6

*„Obvod trojúhelníku ABC je 104 cm. Strana **a** je o 6 cm delší než strana **b** a zároveň o 8 cm kratší než strana **c**. Určete délky stran trojúhelníku.“* (Bobok a kolektiv autorů, 1983, s. 28)

Úloha č. 7

„Eva má ušetřeno 300 Kč, Pavel o jednu šestinu více než Eva a Jirka o 10 % méně než Eva. Kolik Kč mají dohromady ušetřeno?“ (vlastní tvorba)

Úloha č. 8

„Turisté ušli za tři dny celkem 45 km. Druhý den ušli dvakrát více než první den. Třetí den ušli třikrát více než druhý den. Kolik km ušli první, druhý a třetí den?“ (Czudek a kolektiv autorů, 2005, s. 29)

Úloha č. 9

„Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ celé ryby, její ocas váží $\frac{1}{4}$ a její tělo váží 30 uncí. Kolik váží celá ryba?“ (Kopka, 2013, s. 11)

Úloha č. 10

„Dan, Honza a David jsou parkouristé a ve volném čase natáčí videa, která dávají na YouTube. Za uplynulý rok natočili celkem 120 videí. Honza o 20 % méně než David. David jich natočil pětkrát více než Dan. Kolik videí za uplynulý rok natočil každý z nich?“ (vlastní tvorba)

Úloha č. 11

„Paní Stuchlíková pěstuje na zahrádce tři druhy zeleniny. Mrkev má na jedné třetině zahrádky, cibuli na ploše 10 m², petržel na ploše o 2 m² menší než mrkev. Jak velkou má zeleninovou zahrádku?“ (Novotná, Kubínová, Sýkora, 1998, s. 184)

3.2 Soubor slovních úloh pro analýzu

Pro další zkoumání a jako testovací úlohy pro žáky byly vybrány úlohy č. 1, 2, 6, 8, 9, 10, 11. Vybírala jsem úlohy tak, aby se v nich vyskytovala celá a desetinná čísla, zlomky a procenta a aby se všechny úlohy daly řešit i bez pomocí rovnic.

3.3 Různé strategie řešení slovních úloh ze souboru

Strategie jsou rozděleny podle toho, jakým způsobem byly použity (aritmeticky, algebraicky, geometricky). U každé úlohy je odpověď uvedena pouze u prvního způsobu řešení. U ostatních způsobů je odpověď identická.

Úloha č. 1 – řešení:

„Josef a Matěj odevzdali v hájovně celkem 161 kg kaštanů. Josef odevzdal o 9 kg více než Matěj. Kolik kg odevzdal každý zvlášť?“

1. způsob: aritmeticky (bez použití obrázku)

Pokud by Matěj i Josef odevzdali stejné množství, celková hmotnost kaštanů by se zmenšila o 9 kg, tedy na 152 kg. Každý by odevzdal polovinu, tedy 76 kg. Podle podmínek v zadání odevzdal Matěj 76 kg a Josef 85 kg.

Odpověď: Matěj odevzdal 76 kg a Josef 85 kg.

2. způsob: aritmeticky (systematické experimentování)

Každý z nich nasbíral průměrně 80,5 kg kaštanů. Za počáteční hodnotu[11] zvolíme celé číslo blízké průměru, např. 81 kg, potom Josef nasbíral 90 kg, celkem by nasbírali 171 kg. Ze součtu je vidět, že u Matěje musíme hodnotu zmenšovat a hledat součet 161. Postup zapisujeme do tabulky (tab. 2).

Tab. 2: Systematické experimentování v úloze č. 1 (údaje v tabulce jsou v kg)

Matěj	Josef	celkem
81	90	171
80	89	169
79	88	167
…	…	…
76	85	161

Zdroj: vlastní zpracování

3. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

Provedeme první odhad[12] u Matěje, např. 50 kg, a dopočítáme podle podmínek ostatní hodnoty, údaje zapisujme do tabulky (tab. 3). Podle posledního sloupce hodnoty upravujeme, dokud nezískáme řešení.

Tab. 3: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 1 (údaje v tabulce jsou v kg)

Matěj	Josef	celkem	Je součet 161?
50	59	109	Není. Musíme přidat.
51	60	119	Není. Musíme přidat.
70	79	149	Není. Musíme přidat.
80	89	169	Není. Musíme ubrat
73	82	155	Není. Musíme přidat.
74	83	157	Není. Musíme přidat.
75	84	159	Není. Musíme přidat.
76	85	161	Ano.

Zdroj:vlastní zpracování

[11] Zahajovací hodnotu můžeme volit i jinak. To se týká všech použití této strategie. Zpočátku můžeme volit celá čísla. Pokud by nám stále nevycházel požadovaný výsledek, museli bychom omezit experimentování na menší interval a volit desetinná čísla.

[12] Podobně jako u strategie systematické experimentování můžeme zahajovací hodnotu volit jinak. To se týká opět všech použití této strategie. Na začátku můžeme volit čísla celá. V případě, že nám výsledek nebude vycházet, omezíme se na čísla desetinná.

4. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Pokud zvětšíme hodnotu u Matěje o 1 kg, zvětší se hodnota u Josefa také o 1 kg, celková hmotnost se zvětší o 2 kg. Linearita vztahů mezi vstupními údaji a mezi výstupními je zde zaručena, proto lze tuto metodu použít. Předpokládáme, že Matěj nasbíral 10 kg, potom Josef 19 kg a celkem nasbírali 29 kg. Potřebujeme se dostat k hodnotě 161 kg, rozdíl činí 132 kg (132 : 2 = 66). Matěj nasbíral 76 kg (10 + 66), Josef nasbíral 85 kg (19 + 66), celkem oba nasbírali 161 kg (2 · 66).

5. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

Matěj ….... x [kg]

Josef …… $x + 9$ [kg]

celkem ….. 161 kg

$x + x + 9 = 161$

$2x = 152$

$x = 76$ Matěj …. 76 kg, Josef …. 85 kg (76 + 9).

6. způsob: algebraicky (pomocí soustavy dvou rovnic)

Matěj …. x [kg]

Josef …. y [kg]

celkem .. 161 kg

$x + y = 161$

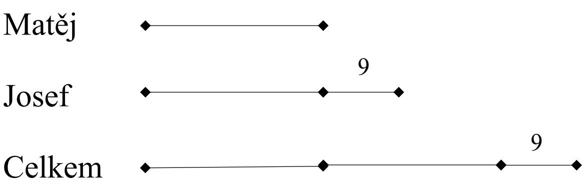
$y - x = 9$

$y = x + 9$

$x + x + 9 = 161$

$x = 76$ $y = 161 - 76 = 85$

<u>7. způsob:</u> geometricky (užití obrázku)



Nákres ukazuje, že když od 161 odečteme 9, dostaneme dvě stejné části.

161 – 9 = 152, 152 : 2 = 76, Matěj nasbíral 76 kg a Josef 85 kg.

<u>8. způsob:</u> geometricky (pomocí grafu lineární funkce)

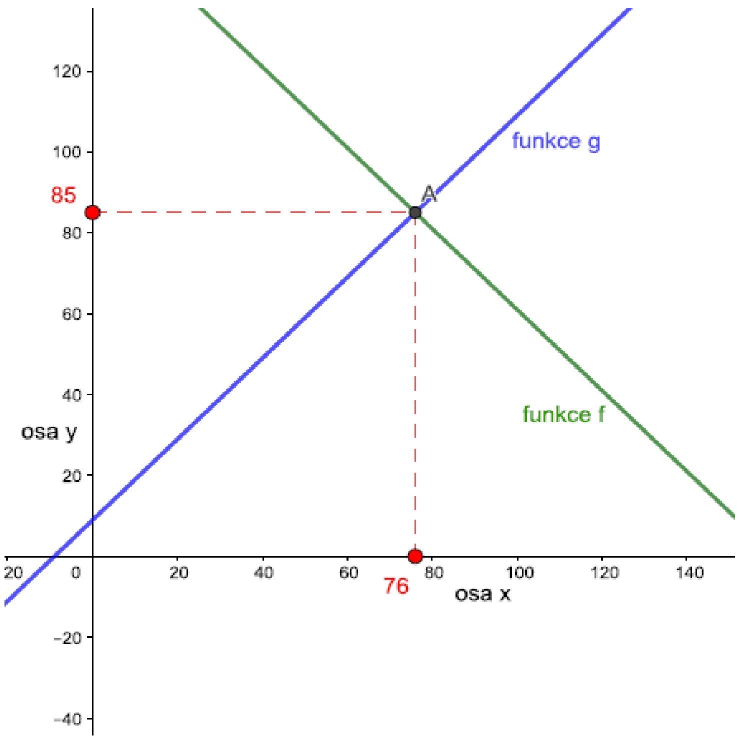
Ze vztahů v 6. způsobu řešení vyjádříme hodnotu *y* a dostaneme dvě lineární funkce.

$$x + y = 161 \implies f\colon y = -x + 161$$

$$y - x = 9 \implies g\colon y = x + 9$$

Sestrojíme v jedné soustavě souřadnic oba grafy funkcí a souřadnice průsečíku těchto grafů jsou hledané hodnoty: A [76, 85] (viz obr. 4).

Obr. 4 : Grafy funkcí $f\colon y = -x + 161$, $g\colon y = x + 9$



Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra

Úloha č. 2 – řešení:

„Tomáš a Jana dostali dohromady od babičky 350 Kč. Jana dostala o třetinu více než Tomáš. Kolik Kč dostal každý z nich?“

1. způsob: aritmeticky (úsudkem)

Tomáš dostane tři třetiny z určitého celku Jana čtyři třetiny ze stejného celku, celkem dostanou sedm třetin.

$\frac{7}{3}$ z určitého celku je 350, $\frac{1}{3}$ ze stejného celku je 50 Kč. Tomáš dostane 150 Kč ($3 \cdot 50$) a Jana 200 Kč ($4 \cdot 50$).

Odpověď: Tomáš dostal od babičky 150 Kč, Jana dostala 200 Kč.

2. způsob: aritmeticky (systematické experimentování)

Každý z nich dostane průměrně 175 Kč (350 : 2). Jako počáteční hodnotu[13] u Tomáše zvolíme nejbližší číslo číslu 175, které je dělitelné třemi, tj. 174, třetina z čísla 174 je 58. Jana dostane 232 Kč (174 + 58), celkem oba dostanou 406 Kč. Hodnotu u Tomáše musíme tedy zmenšovat vždy o tři. Postup opakujeme, dokud nevyjde součet 350. Postup zapíšeme do tabulky (tab. 4).

Tab. 4: Systematické experimentování v úloze č. 2

Tomáš (Kč)	Jana (Kč)	Celkem (Kč)
174	232	406
171	228	399
168	224	392
165	220	385
…	…	…
150	200	350

Zdroj: vlastní zpracování

[13] Opět bychom mohli počáteční hodnotu volit jinak, ale je vhodné volit vždy násobek tří (ve druhém sloupci počítáme třetinu hodnoty v prvním sloupci).

3. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

Provedeme odhad u Tomáše, počítáme částku u Jany a částku celkem, zapisujeme do tabulky a podle celkové hodnoty upravujeme první sloupec tabulky (tab. 5). Postup opakujeme do té doby, než nalezneme správné řešení.

Tab. 5: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 2

Tomáš (Kč)	Jana (Kč)	Celkem (Kč)	Je součet 350 Kč?
3	4	7	Není. Musíme hodně přidat.
60	80	140	Není. Musíme přidat.
87	116	203	Není. Musíme přidat.
120	160	280	Není. Musíme přidat.
132	176	308	Není. Musíme přidat.
159	212	371	Není. Musíme ubrat.
153	204	357	Není. Musíme ubrat.
152	202,67	354,67	Není. Musíme ubrat.
151	201,33	352,33	Není. Musíme ubrat.
150	200	350	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

4. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Kolikrát zvětšíme nebo zmenšíme hodnotu u Tomáše, tolikrát se zvětší nebo zmenší hodnota u Jany a tolikrát se zvětší nebo zmenší výsledný součet obou hodnot. Vstupní hodnoty jsou přímo úměrné výstupním hodnotám, a proto lze tuto metodu použít. Kdyby Tomáš dostal 3 Kč, Jana dostane 4 Kč, celkem dostanou 7 Kč. Ve skutečnosti dostali 350 Kč, tedy 50krát více. Musíme 50krát zvětšit částku Tomáše i Jany. Tomáš dostane 150 Kč (50 · 3), Jana dostane 200 Kč (50 · 4).

5. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

Tomáš … x [Kč]

Jana …… $x + \frac{x}{3}$ [Kč]

celkem … 350 Kč

$$x + x + \frac{x}{3} = 350$$

$3x + 3x + x = 1\,050$

$7x = 1\,050$

$x = 150$ Tomáš … 150 Kč, Jana … 200 Kč (150 + 150 : 3).

<u>6. způsob:</u> algebraicky (pomocí soustavy dvou rovnic)

Tomáš … x [Kč]

Jana …… y [Kč]

<u>celkem … 350 Kč</u>

$x + y = 350$

$\underline{y = \mathrm{x} + \frac{x}{3}}$

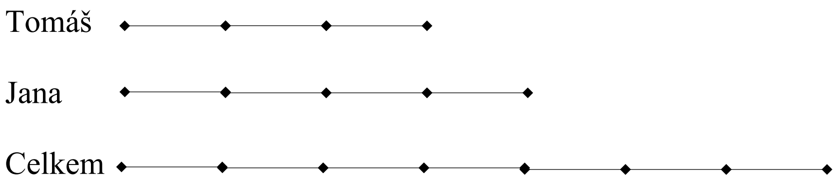
$x + x + \frac{x}{3} = 350$

$3x + 3x + x = 1\,050$

$7x = 1\,050$

$x = 150$ $\mathrm{y} = 150 + \frac{150}{3} = 200$

<u>7. způsob:</u> geometricky (užití obrázku)



Na obrázku vidíme, že Tomáš dostal tři stejné díly a Jana čtyři stejné díly. Celkem dostali sedm stejných dílů. Celkovou částku rozdělíme na sedm stejných dílů, jeden díl je 50 Kč (350 : 7). Tomáš dostane tři díly, tedy 150 Kč a Jana čtyři díly, tedy 200 Kč.

8. způsob: geometricky (pomocí grafu lineární funkce)

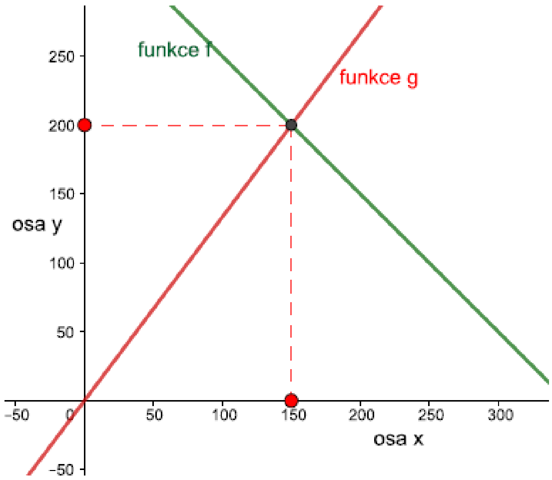
Ze vztahů ve způsobu řešení č. 6 vyjádříme hodnotu y a dostaneme dvě lineární funkce.

$$x + y = 350 \quad \Longrightarrow \quad f\colon\; y = -x + 350$$

$$y = x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x \quad \Longrightarrow \quad g\colon\; y = \frac{4}{3}x$$

Sestrojíme v jedné soustavě souřadnic oba grafy funkcí a souřadnice průsečíku těchto grafů jsou hledané hodnoty: [150, 200] (obr. 5).

Obr. 5 : Grafy funkcí f: $y = -x + 350$, g: $y = \frac{4}{3}x$



Zdroj: vlastní zpracování v programu GeoGebra

Úloha č. 8 – řešení:

„Turisté ušli za tři dny celkem 45 km. Druhý den ušli dvakrát více než první den. Třetí den ušli třikrát více než druhý den. Kolik km ušli první, druhý a třetí den?“

1. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

První odhad volíme např. 1 km, zbylé dny dopočítáme podle podmínek v zadání a sledujeme součet ve třetím sloupci (tab. 6), postup opakujeme, dokud nezískáme součet 45 km.

Tab. 6: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 8 (údaje v tabulce jsou v km)

1. den	2. den	3. den	celkem	Je součet 45?
1	2	6	9	Není. Musíme přidat
2	4	12	18	Není. Musíme přidat.
3	6	18	27	Není. Musíme přidat.
4	8	24	36	Není. Musíme přidat.
5	10	30	45	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

Odpověď: Turisté ušli první den 5 km, druhý den 10 km a třetí den 30 km.

2. způsob: aritmeticky (systematické experimentování)

Průměrně za jeden den ušli 15 km. Jako počáteční hodnotu volíme číslo blízké průměru, hledáme součet 45. Hodnoty v prvním sloupci (tab. 7) snižujeme po pěti. Mohli bychom hodnoty v prvním sloupci snižovat vždy o 1 km. Ve třetím sloupci by se nám celkový počet kilometrů snižoval pomalu, pro urychlení experimentu můžeme tedy volit zmenšování např. po pěti kilometrech.

Tab. 7: Systematické experimentování v úloze č. 8 (údaje v tabulce jsou v km)

1. den	2. den	3. den	celkem
15	30	90	135
10	20	60	90
5	10	30	45

Zdroj: vlastní zpracování

3. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Úloha splňuje podmínky pro použití této metody: kolikrát změníme vstupní hodnoty, tolikrát se změní výstupní hodnoty. Předpokládáme, že první den ušli 1 km, pak druhý den ušli 2 km a třetí den 6 km, to je celkem 9 km. Podle zadání však ušli 45 km, což je 5krát více než původní předpoklad. Předpokládané hodnoty u jednotlivých dnů tedy 5krát zvětšíme, tj. 5 km, 10 km, 30 km.

4. působ: algebraicky (pomocí rovnice)

1. den … x [km]

2. den … $2x$ [km]

3. den … $6x$ [km]

celkem … 45 km

$x + 2x + 6x = 45$

$9x = 45$

$x = 5$ 1. den … 5 km, 2. den … 10 km, 3. den … 30 km.

5. způsob: algebraicky (pomocí soustavy tří rovnic)

1. den … x [km]

2. den … y [km]

3. den … z [km]

celkem … 45 km

$x + y + z = 45$

$y = 2x$

$z = 3y$

$\frac{y}{2} + y + 3y = 45$

$y + 2y + 6y = 90$

$9y = 90$

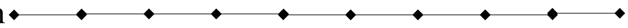
$y = 10$ $z = 30$ $x = 45 - 10 - 30 = 5$

6. způsob: geometricky (pomocí obrázku)

1. den

2. den

3. den 

Celkem 

Obrázek ukazuje, že na první den připadne jeden díl, na druhý dvakrát více, tedy dva stejné díly a na třetí den třikrát více než na druhý den, tj. šest stejných dílů. Celkem na tři dny připadne devět stejných dílů. Na jeden dílek připadne 5 km (45 : 9). První den ušli 5 km, druhý 10 km, třetí 30 km.

Úloha č. 9 – řešení:

„Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ *celé ryby, její ocas váží* $\frac{1}{4}$ *a její tělo váží 30 uncí. Kolik váží celá ryba?"*

<u>1. způsob:</u> aritmeticky (úsudkem)

hlava a ocas … $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ celé ryby

tělo … 30 uncí, což je $\frac{5}{12}$ celé ryby, $\frac{1}{12}$ je tedy 6 uncí, $\frac{12}{12}$ je 72 uncí

Odpověď: Celá ryba váží 72 uncí.

<u>2. způsob:</u> aritmeticky (systematické experimentování)

V prvním sloupci volíme odhad celkové hmotnosti ryby. Musí to být číslo větší než 30 (30 uncí váží tělo bez hlavy a ocasu) a dělitelné dvanácti (třemi i čtyřmi). Zvolíme první číslo požadovaných vlastností, tj. číslo 36, a počítáme hmotnost hlavy a ocasu podle zadání. V prvním řádku tabulky (tab. 8) vidíme, že pokud by hmotnost celé ryby byla 36 uncí, na tělo by zbylo 15 uncí, což neodpovídá zadání. Musíme hmotnost celé ryby zvětšovat, až se dostaneme na hmotnost těla 30 uncí. Postup zapíšeme do tabulky.

Tab. 8: Systematické experimentování v úloze č. 9 (údaje v tabulce jsou v uncích)

celá ryba	hlava	ocas	tělo
36	12	9	15
48	16	12	20
60	20	15	25
72	24	18	30

Zdroj: vlastní zpracování

3. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

V tabulce (tab. 9) postupně volíme hmotnost celé ryby a zkoumáme, kolik vyjde hmotnost těla. Podle výsledku ve čtvrtém sloupci upravujeme první sloupec. Postup opakujeme, dokud nevyjde hmotnost těla 30 uncí.

Tab. 9: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 9 (údaje v tabulce jsou v uncích)

celá ryba	hlava	ocas	tělo	Je hmotnost těla 30?
40	13,33	10	16,67	Není. Přidáme.
44	14,67	11	18,33	Není. Přidáme.
50	16,67	12,5	20,83	Není. Přidáme.
68	22,67	17	28,33	Není. Přidáme.
69	23	17,25	28,75	Není. Přidáme.
70	23,33	17,5	29,17	Není. Přidáme.
71	23,67	17,75	29,58	Není. Přidáme.
72	24	18	30	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

4. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu) (Kopka, 2013, s. 11)

Vstupní hodnoty jsou přímo úměrné výstupním hodnotám, lze tedy metodu použít. Kdyby ryba vážila 12 uncí, hlava by vážila 4 unce, ocas 3 unce a na tělo by zbylo 5 uncí. Tělo váží ve skutečnosti 30 uncí, tedy šestkrát více. Hlava i ocas musí vážit také šestkrát více, tj. 24 uncí a 18 uncí. Celá ryba váží 72 uncí.

5. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

hlava … $\frac{x}{3}$ uncí

tělo ….. 30 uncí

ocas …. $\frac{x}{4}$ uncí

celkem .. x uncí

$$\frac{x}{3} + 30 + \frac{x}{4} = x$$

$$4x + 360 + 3x = 12x$$

$$5x = 360$$

$$x = 72$$

6. způsob: algebraicky (pomocí soustavy tří rovnic)

hlava … x uncí

tělo ….. 30 uncí

ocas …. y uncí

celkem .. z uncí

$x + 30 + y = z$

$$x = \frac{z}{3}$$

$$y = \frac{z}{4}$$

$$\frac{z}{3} + 30 + \frac{z}{4} = z$$

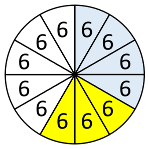
$$4z + 360 + 3z = 12z$$

$$5z = 360$$

$$z = 72$$

7. způsob: geometricky (pomocí obrázku)

Kruh[14] si rozdělíme na dvanáct stejných dílků.



hlava … 4 dílky – modře

ocas …. 3 dílky – žlutě

Tělo váží 30 uncí, což je 5 dílků, jeden dílek je 6 uncí.

Dvanáct dílku je tedy 72 uncí, což je hmotnost celé ryby.

Úloha č. 6 – řešení:

„Obvod trojúhelníku ABC je 104 cm. Strana a je o 6 cm delší než strana b a zároveň o 8 cm kratší než strana c. Určete délky stran trojúhelníku."

1. způsob: aritmeticky (úsudkem)

Pokud by strana *b* byla stejně dlouhá jako *a*, obvod by byl o 6 cm větší, tedy 110 cm.

Kdyby strana *c* byla stejně dlouhá jako strany *a* i *b*, musel by být obvod o 8 cm menší, tedy 102 cm (110 – 8).

Nyní jsou všechny tři strany stejně dlouhé jako strana *a*, měří 34 cm (102 : 3), potom *a* = 34 cm, *b* = 28 cm (34 – 6), *c* = 42 cm (34 + 8).

Odpověď: Délky stran trojúhelníku jsou 34 cm, 28 cm a 42 cm.

2. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

V tabulce (tab. 10) postupně volíme délku strany *a* a zkoumáme, kolik vyjde obvod trojúhelníku. Podle výsledku ve čtvrtém sloupci upravujeme první sloupec. Postup opakujeme, dokud nevyjde obvod trojúhelníku 104 cm.

[14] Místo kruhu lze zvolit obdélník nebo úsečku.

Tab. 10: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 6 (údaje v tabulce jsou v cm)

strana *a*	**strana *b***	**strana *c***	**obvod**	**Je obvod 104 cm?**
7	1	15	23	Není. Musíme hodně přidat.
15	9	23	47	Není. Musíme přidat.
18	12	26	56	Není. Musíme přidat.
23	17	31	71	Není. Musíme přidat.
26	20	34	80	Není. Musíme přidat.
29	23	37	89	Není. Musíme přidat.
30	24	38	92	Není. Musíme přidat.
40	34	48	122	Není. Musíme ubrat.
31	25	39	95	Není. Musíme přidat.
32	26	40	98	Není. Musíme přidat
33	27	41	101	Není. Musíme přidat.
34	28	42	104	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

<u>3. způsob:</u> aritmeticky (systematické experimentování)

Kdyby byly všechny strany stejně dlouhé, délka jedné strany by byla přibližně 34,667 cm. První volbou může být např. strana a = 35 cm. Podle podmínek v zadání dopočítáme délky stran b, c a obvod trojúhelníku a podle výsledného obvodu zmenšíme nebo zvětšíme délku strany a. Jednotlivé pokusy zapisujeme do tabulky (tab. 11). V tomto případě byl náš odhad velmi blízký.

Tab. 11: Systematické experimentování v úloze č. 6 (údaje v tabulce jsou v cm)

strana *a*	**strana *b***	**strana *c***	**obvod**	**Je obvod 104 cm?**
35	29	43	107	Není. Musíme ubrat.
34	28	42	104	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

<u>4. způsob:</u> aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Pokud všechny tři délky stran zvětšíme o 1 cm, obvod se musí zvětšit o 3 cm. Opět je zde zaručena linearita vztahů a metodu můžeme použít. Předpokládáme, že strana a měří 9 cm, pak b = 3 cm, c = 17 cm, O = 29 cm. Podle zadání musí být obvod trojúhelníku 104 cm. Rozdíl zadaného obvodu a obvodu s předpokládanou délkou strany a = 9 cm je 75 cm. Potřebujeme obvod zvětšit o 75 cm, což je 25krát 3 cm. Jednotlivé strany tedy musíme zvětšit 25krát vždy o 1 cm. Pak a = 34 cm (9 + 25), b = 28 cm (3 + 25), c = 42 cm (17 + 25).

5. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

strana a … $x + 6$ [cm]

strana b … x [cm]

strana c … $x + 6 + 8$ [cm]

obvod … 104 cm

$x + 6 + x + x + 6 + 8 = 104$

$3x = 104 – 20$

$3x = 84$

$x = 28$ Strana b měří 28 cm, strana a měří 34 cm, strana c měří 42 cm.

6. způsob: algebraicky (pomocí soustavy tří rovnic)

strana a … x [cm]

strana b … y [cm]

strana c … z [cm]

obvod … 104 cm

$x + y + z = 104$

$y = x – 6$

$z = x + 8$

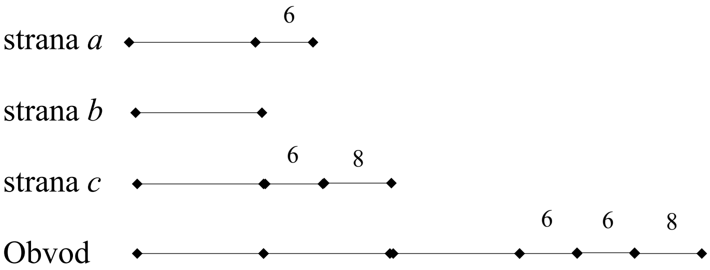
$x + x – 6 + x + 8 = 104$

$3x = 104 + 6 – 8$

$3x = 102$

$x = 34$, $y = 34 – 6 = 28$, $z = 34 + 8 = 42$

7. způsob: geometricky (pomocí obrázku)



Podle grafického znázornění musíme od čísla 104 odečíst 20 (6 + 6 + 8) a dostaneme tři stejné díly, tj. 104 – 20 = 84. Jeden díl je 84 : 3 = 28. Strana *a* = 28 cm, strana *b* = 34 cm (28 + 6), strana *c* = 42 cm (28 + 6 + 8).

Úloha č. 10 – řešení:

„Dan, Honza a David jsou parkouristé a ve volném čase natáčí videa, která dávají na YouTube. Za uplynulý rok natočili celkem 120 videí. Honza o 20 % méně než David. David jich natočil pětkrát více než Dan. Kolik videí za uplynulý rok natočil každý z nich?“

1. způsob: aritmeticky (úsudkem – užití zlomků)

David … $\frac{5}{5}$ … 1 celek

Dan … $\frac{1}{5}$ celku

Honza … $\frac{4}{5}$ celku

celkem … 2 celky

2 celky jsou 120 videí, 1 celek je 60 videí, $\frac{1}{5}$ ze 60 je 12, $\frac{4}{5}$ ze 60 je 48.

Odpověď: Za uplynulý rok natočil Dan 12 videí, David 60 videí a Honza 48 videí.

2. způsob: aritmeticky (úsudkem – užití procent)

David … 100 %

Dan … 20 %

Honza … 80 %

celkem … 200 %

200 % je 120, 100 % je 60 (David), 1 % je 0,6, 20 % je 12 (Dan), 80 % je 48 (Honza).

3. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

Volíme počet videí u Davida a ostatní hodnoty počítáme podle podmínek v zadání. Sledujeme počet celkem a podle této hodnoty upravujeme hodnoty v prvním sloupci tabulky (tab. 12). V této úloze je zřejmé, že experiment omezíme pouze na celá čísla. Postup opakujeme, dokud nenalezneme řešení.

Tab. 12: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 10

David	Dan	Honza	celkem	Je součet 120?
1	5	4	10	Není. Musíme přidat.
5	25	20	50	Není. Musíme přidat.
20	100	80	200	Není. To je moc.
8	40	32	80	Není. Musíme přidat.
9	45	36	90	Není. Musíme přidat.
10	50	40	100	Není. Musíme přidat.
11	55	44	110	Není. Musíme přidat.
12	60	48	120	Není. Musíme přidat.
60	12	48	120	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

4. způsob: aritmeticky (systematické experimentování)

Průměrně každý natočil 40 videí (120 : 3). Volíme počet u Davida a ostatní hodnoty dopočítáme podle podmínek v zadání a hledáme součet 120. První hodnota u Davida nemůže být 40, protože ostatní mají méně než David (to je zřejmé ze zadání) a součet by vyšel určitě menší než 120. Zkoušíme tedy pouze celá čísla (počet videí) větší než 40 a zároveň dělitelná pěti (20 % je pětina z celku). Postup zapíšeme do tabulky (tab. 13).

Tab. 13: Systematické experimentování v úloze č. 10

David	Dan	Honza	celkem
45	8	36	90
50	10	40	100
55	11	44	110
60	12	48	120

Zdroj: vlastní zpracování

5. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Vstupní hodnoty jsou přímo úměrné výstupním hodnotám. Úloha splňuje podmínky pro použití této metody. Předpokládáme, že Dan natočil pouze 1 video, potom David jich natočil 5 a Honza 4. Celkem natočili 10 videí. Ve skutečnosti natočili 120 videí, tedy 12krát více. Ostatní hodnoty zvětšíme 12krát. David natočil 12 videí ($1 \cdot 12$), David natočil 60 videí ($5 \cdot 12$) a Honza 48 videí ($4 \cdot 12$).

6. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

Dan … x videí

David … $5x$ videí

Honza … $4x$ (o 20 % méně než David, což je 80 % hodnoty u Davida, tj. $0{,}8 \cdot 5x$) videí

celkem … 120 videí

$x + 5x + 4x = 120$

$10x = 120$

$x = 12$

Dan natočil 12 videí, David natočil 60 videí ($5 \cdot 12$) a Honza 48 videí ($4 \cdot 12$).

7. způsob: algebraicky (pomocí rovnice s procenty)

Dan … x %

David … $5x$ %

Honza … $4x$ %

celkem … 100 % (je 120)

$x + 5x + 4x = 100$

$10x = 100$

$x = 10$

Dan natočil 10 % ze 120, což je 12 videí. David natočil 50 % ze 120, tj. 60 videí. Honza natočil 40 % ze 120, tedy 48 videí.

8. způsob: algebraicky (pomocí soustavy tří rovnic)

Dan … x videí

David … y videí

Honza … z videí

celkem … 120 videí

$x + y + z = 120$

$y = 5x \Longrightarrow x = \frac{y}{5}$

$z = y - \frac{y}{5}$

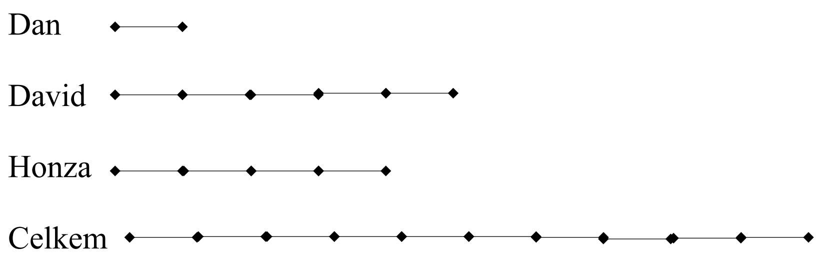
$\frac{y}{5} + y + y - \frac{y}{5} = 120$

$y + 5y + 5y - y = 600$

$10y = 600$

$y = 60$ $\qquad$ $x = 60 : 5 = 12$ $\qquad$ $z = 60 - 12 = 48$

9. způsob: geometricky (pomocí obrázku)



Podle zadání připadne na Dana jeden díl, na Davida pět dílů (natočil pětkrát více), na Honzu čtyři díly (o 20 % méně než David, 20 % je pětina z celku, o pětinu méně než David, tj. o jeden díl méně). Každý díl určuje stejný počet natočených videí. Na celek připadne 10 dílů. Na jeden díl připadne 12 videí (120 : 10). Dan natočil 12 videí, David 60 videí (5 · 12) a Honza natočil 48 videí (4 · 12).

Úloha č. 11 – řešení:

„Paní Stuchlíková pěstuje na zahrádce tři druhy zeleniny. Mrkev má na jedné třetině zahrádky, cibuli na ploše 10 m², petržel na ploše o 2 m² menší než mrkev. Jak velkou má zeleninovou zahrádku?“

1. způsob: aritmeticky (úsudkem)

Pokud plochu petržele zvětšíme o 2 m², budou plochy mrkve a petržele shodné. Aby se nezměnila celá plocha zahrady, tyto 2 m² ubereme od plochy cibule. Plocha cibule bude tedy 8 m² a petržel a mrkev budou každá na třetině zahrady a na zbylé třetině bude cibule.

$\frac{1}{3}$ z plochy celé zahrady je 8 m², plocha celé zahrady je 24 m².

Odpověď: Zahrádka paní Stuchlíkové má plochu 24 m².

2. způsob: aritmeticky (pokus – ověření – oprava)

Začneme v tabulce (tab. 14) volit plochu zahrady, např. 11 m², a sledujeme ve třetím sloupci plochu cibule. Podle třetího sloupce pak upravujeme první sloupec, dokud nenalezneme řešení.

Tab. 14: Pokus – ověření – oprava v úloze č. 11 (údaje v tabulce jsou v m²)

celá zahrada	mrkev	petržel	cibule	Je plocha cibule 10
11	3,67	1,67	5,66	Není. Musíme přidat.
12	4	2	6	Není. Musíme přidat.
18	6	4	8	Není. Musíme přidat.
25	8,33	6,33	10,34	Není. Musíme ubrat.
21	7	5	9	Není. Musíme přidat.
22	7,33	5,33	9,34	Není. Musíme přidat.
23	7,67	5,67	9,66	Není. Musíme přidat.
24	8	6	10	Ano.

Zdroj: vlastní zpracování

3. způsob: aritmeticky (systematické experimentování)

Volíme plochu zahrady a dopočítáváme plochy mrkve, petržele a cibule podle podmínek v zadání. Plocha cibule je 10 m², první hodnotu volíme u plochy zahrady. Musí to být číslo větší než 10 a zároveň je výhodné volit číslo dělitelné třemi (třetina celé plochy zahrady). Postup zapíšeme do tabulky (tab. 15).

Tab. 15: Systematické experimentování v úloze č. 11 (údaje v tabulce jsou v m²)

celá zahrada	mrkev	petržel	cibule
12	4	2	6
15	5	3	7
18	6	4	8
21	7	5	9
24	8	6	10

Zdroj: vlastní zpracování

4. způsob: aritmeticky (metoda nesprávného předpokladu)

Pokud zvětšíme plochu mrkve o 1 m², zvětší se o 1 m² plocha petržele i cibule. Celá plocha zahrady se zvětší o 3 m². Linearita vztahů je zaručena a metodu můžeme použít. Kdyby plocha zahrady byla 30 m², plocha mrkve by byla 10 m², plocha petržele 8 m² a plocha cibule 12 m². Ve skutečnosti je plocha cibule 10 m², tj. o 2 m² méně. Musíme o 2 m² zmenšit plochu mrkve, tj. 8 m², a plochu petržele, tj. 6 m². Celou plochu zahrady zmenšíme o 6 m² (2 · 3). Plocha zahrady je 24 m² (30 – 6).

5. způsob: algebraicky (pomocí rovnice)

mrkev … $\frac{x}{3}$ [m²]

cibule … 10 m²

petržel … $\frac{x}{3} - 2$ [m²]

celkem … x [m²]

$$\frac{x}{3} + 10 + \frac{x}{3} - 2 = x$$

$$x + 30 + x - 6 = 3x$$

$$x = 24$$

6. způsob: algebraicky (pomocí soustavy tří rovnic)

mrkev … x [m²]

cibule … 10 m²

petržel … y [m²]

celkem … z [m²]

$$x + 10 + y = z$$

$$x = \frac{z}{3}$$

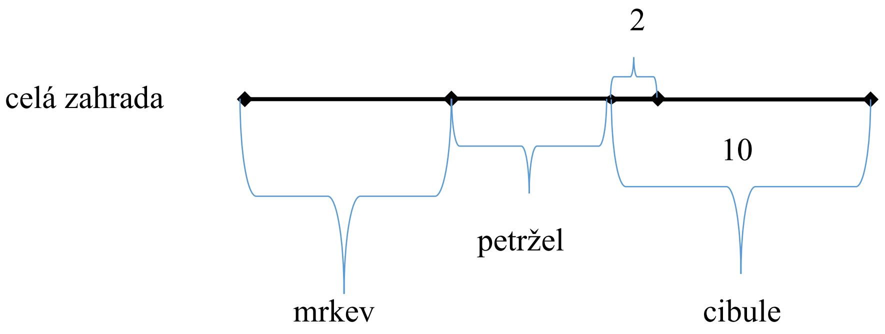
$$y = \frac{z}{3} - 2$$

$$\frac{z}{3} + 10 + \frac{z}{3} - 2 = z$$

$$z + 30 + z - 6 = 3z$$

$z = 24$ $\quad$ $x = 24 : 3 = 8$ $\quad$ $y = 8 - 2 = 6$

7. způsob: geometricky (pomocí obrázku)



Pokud plochu petržele zvětšíme o 2 m², celá zahrada se rozdělí na tři stejné díly, z nichž poslední díl představuje plochu 8 m². Celá zahrada má plochu 24 m².

4 Analýza žákovských řešení testových úloh ze souboru

4.1 Způsob zadání testu

Sedm testových úloh bylo zadáno ve dvou etapách. V první etapě řešili žáci 6. třídy[15] úlohy č. 1, 6, 8 (jednu vyučovací hodinu), žáci 7. třídy[16] úlohy č. 1, 2, 6, 8, 9, 11 (dvě vyučovací hodiny), žáci 8. a 9. třídy[17] všechny úlohy ze souboru (č. 1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, na test měli rovněž dvě vyučovací hodiny). Testováno bylo celkem 57 žáků[18]. Každý žák pracoval samostatně, k dispozici měl papír a psací potřeby.

U každé úlohy byly sledovány tyto jevy:

- počet správných řešení, počet chybných řešení, počet neřešených nebo nedořešených úloh,
- strategie, které žáky vedly ke správnému řešení,
- nejčastější chybné postupy.

Každá úloha je doplněna o ukázky žákovských řešení.

Ve druhé etapě řešili stejné úlohy žáci 9. třídy (15 žáků). Časové rozmezí mezi první a druhou etapou bylo přibližně měsíc a půl. V tomto rozmezí jsme s žáky 9. třídy řešili úlohy stejného typu. Ukazovali jsme si použití různých heuristických strategií. Výsledky úloh v prvním testování ani postupy řešení testových úloh jsme se žáky neprobírali. Žáci nevěděli, že po určité době dostanou tentýž test.

Cílem tohoto testování bylo zjistit:

- jaké strategie žáci 9. třídy zvolí při řešení jednotlivých úloh po seznámení s heuristickými strategiemi (srovnání s testem v první etapě),
- zda se zvýší počet úspěšných řešitelů v 9. třídě u jednotlivých úloh (srovnání s testem v první etapě).

[15] Se zlomky a procenty, které se objevují v ostatních úlohách, se žáci dosud důkladně neseznámili. (Úlohy č. 2, 9, 10, 11)
[16] Žáci 7. třídy neznají procenta. (Úloha č. 10)
[17] Žáci 8. třídy nemají zvládnutou problematiku rovnic, žáci 9. třídy zatím řeší rovnice jen s jednou neznámou.
[18] Počet se lišil podle typu úlohy a podle absence některých žáků při testování.

4.2 Analýza řešení jednotlivých úloh ze souboru

Úloha č. 1

<u>1. testování</u>

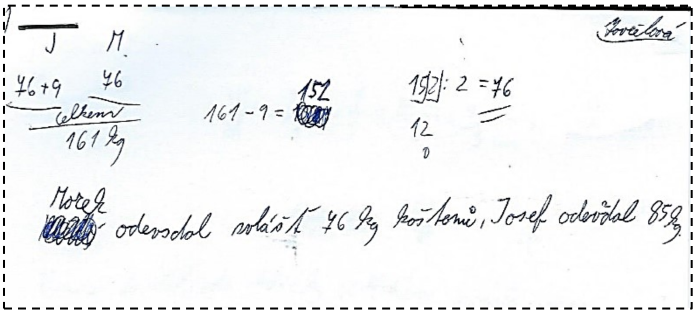
Tab. 16: Výsledky žáků 6. – 9. třídy v prvním testování

	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	14	39	4	57
relativní (%)	24,6	68,4	7	100

Nejpoužívanější správný postup bylo řešení úsudkem aritmetickou cestou, kde žáci hledali velikost jednoho dílu (obr. 6):

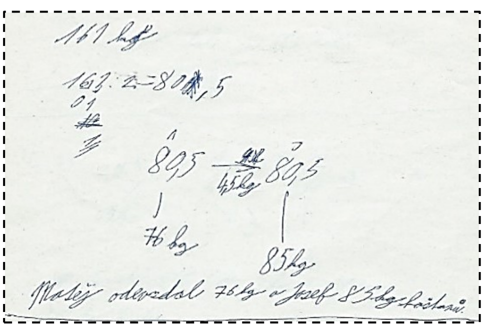
161 – 9 = 152, 152 : 2 = 76, 76 + 9 = 85

Obr. 6: Michaelino řešení

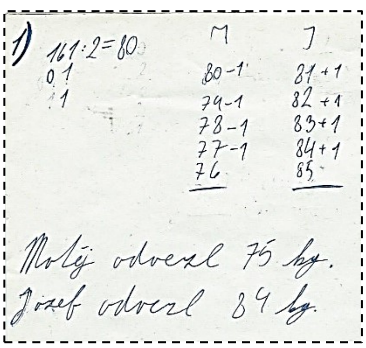


František zvolil rovněž řešení úsudkem, ale použil jinou strategii než většina žáků, dělil celek podle počtu částí. Celek nejprve rozdělil na poloviny a pak správně usoudil, že pokud má být rozdíl mezi částmi devět, musí od jedné poloviny odečíst 4,5 a k druhé polovině celku přičíst 4,5 (obr. 7).

Obr. 7: Františkovo řešení



Obr. 8: Lucčino řešení

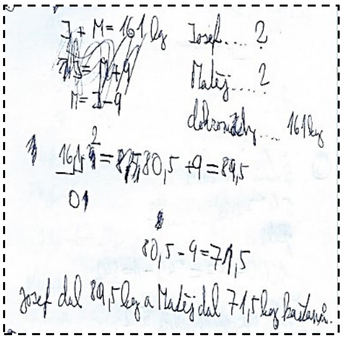


Strategii systematického experimentování zvolila Lucka (obr. 8). Celek rozdělila na dvě přibližně stejné části tak, aby jí součet vyšel 161. Od jedné části postupně odečítala 1 a ke druhé přičítala 1. Postup ukončila čísly 76 a 85, tím došla ke správnému výsledku, který ale do odpovědi nenapsala. Zřejmě si neověřila, jestli součet částí je 161.

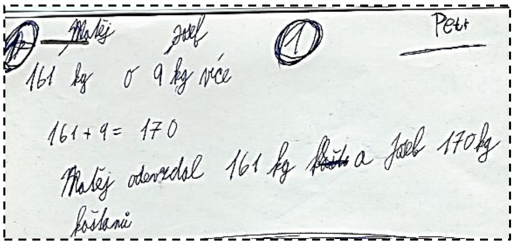
Nejčastější chybný postup:

Řešitel rozdělil celek podle počtu částí, stejně jako František, ale k jedné části přičetl číslo 9 a od druhé části odečetl číslo 9, tím došlo ke zdvojnásobení rozdílu (obr. 9).

Obr. 9: Honzovo řešení



Obr. 10: Petrovo řešení



U nesprávných řešení většinou chyběla kontextová zkouška nebo byla provedena jen částečně. Některým žákům vycházel součet částí 161, ale nevycházel rozdíl 9, nebo naopak. U Petrova řešení (obr. 10) je patrné, že neporozuměl textu úlohy a zaměnil celek za část. V zadání úlohy v první větě úplně vypustil slovo „celkem“. Zadání si zřejmě chybně přeformuloval na to, že Josef a Matěj nasbírali určité množství a Matěj nasbíral 161 kg.

2. testování

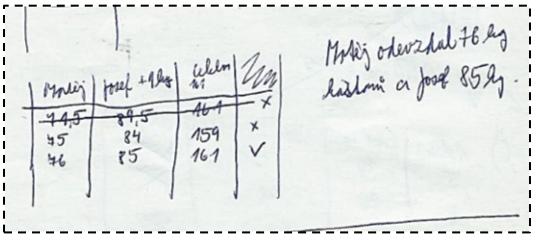
Tab. 17: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	správné řešení		chybné řešení		neřešeno[19]		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	5	33,3	10	66,7	0	0	15
2. testování	13	86,7	2	13,3	0	0	15

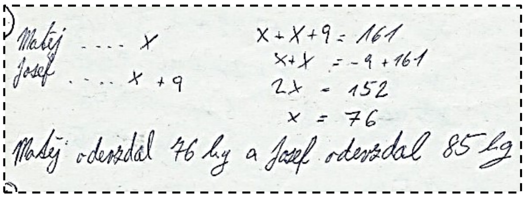
Z 13 úspěšných řešitelů zvolili 4 žáci strategii úsudkem, 3 žáci strategii pokus – ověření – oprava (obr. 11), 6 žáků řešení algebraicky, pomocí rovnice (obr. 12).

[19] Počet neřešených nebo nedořešených úloh. Platí ve všech tabulkách druhého testování.

Obr. 11: Alexandřino řešení



Obr. 12: Honzovo řešení



Úloha č. 2

1. testování

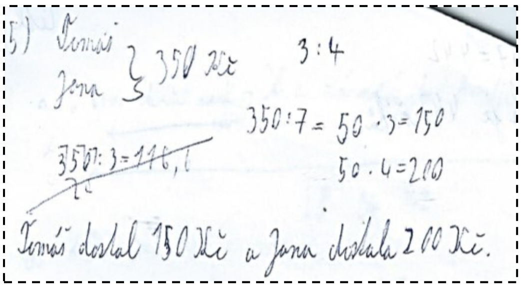
Tab. 18: Výsledky žáků 7. – 9. třídy v prvním testování

	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	6	23	13	42
relativní (%)	14,3	54,8	30,9	100

Kromě jednoho u všech ostatních správných řešení nejsou úplně zřejmé myšlenkové postupy. Někteří žáci prováděli nějaké výpočty, ale většinou je přeškrtali, a pokud ne, bylo nepochybné, že k výsledku je nevedly. Nakonec napsali správnou odpověď, ale není zřejmé, jak na výsledky přišli. Mohu pouze odhadovat, zda jen tipovali, nebo řešení proběhlo správně, ale pouze v hlavě řešitele. Kontextové zkoušky v záznamech také nebyly.

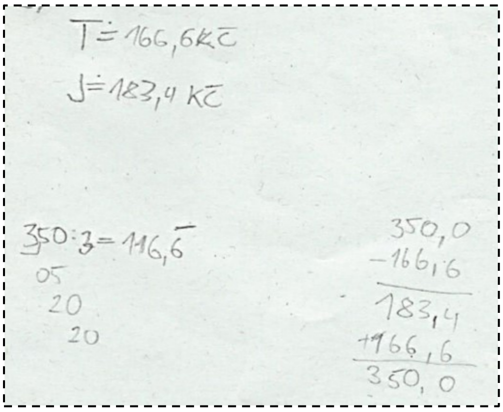
Výjimkou je řešení Davida (obr. 13). David použil aritmetický úsudek pomocí poměru. Nejprve celek dělil třemi, tento postup zavrhl. Uvědomil si, že jednotlivé díly jsou v poměru 3:4. Celek dělil na 7 dílů (3 + 4) a tím vypočítal, kolik připadne na jeden díl. Podle poměru pak zjistil velikost obou dílů.

Obr. 13: Davidovo řešení



Ostatní žáci, kteří úlohu řešili chybně, použili stejný postup jako zpočátku David. Celek dělili třemi. Výsledek poté odečetli od celku. Oba díly jim sice daly správný součet, ale vztahy mezi jednotlivými díly neodpovídaly zadání (obr. 14). Domnívám se, že se k této strategii uchýlili vlivem nesprávného uchopení vztahů mezi částmi v zadání úlohy. Aditivní vztah mezi díly „jeden díl je o třetinu větší než druhý“ zaměnili za vztah multiplikativní „jeden díl je třetina z celku, druhý zbytek“.

Obr. 14: Lubošovo řešení



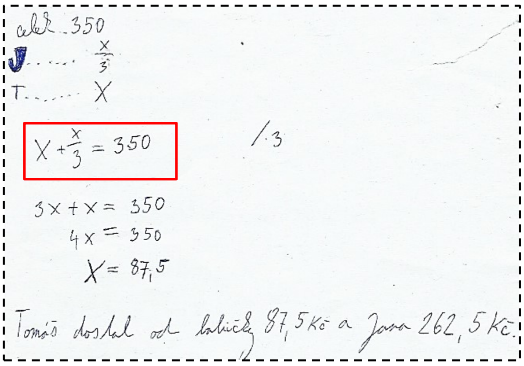
2. testování

Tab. 19: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

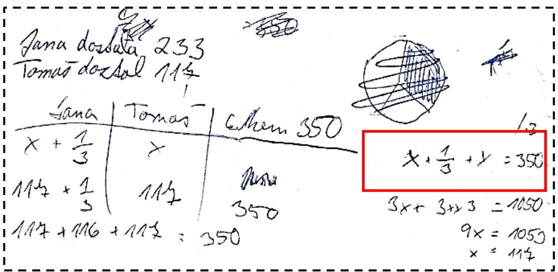
	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	1	6,7	9	60	5	33,3	15
2. testování	5	33,3	5	33,3	5	33,4	15

Tři žáci řešili úlohu algebraickou cestou pomocí rovnice a dva žáci zvolili strategii pokus – oprava – ověření. Na obrázcích 15 a 16 můžeme vidět dvě modifikace chyb při pokusech o matematizaci úlohy (v červeném rámečku). Chyby pramení z nesprávného pochopení vztahů mezi částmi. Na obrázku 17 je správně sestavená rovnice (v zeleném rámečku).

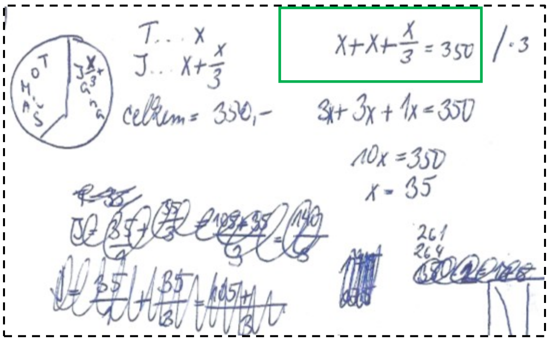
Obr. 15: Kristýnino řešení



Obr. 16: Honzovo řešení



Obr. 17: Adélino řešení



Úloha č. 6

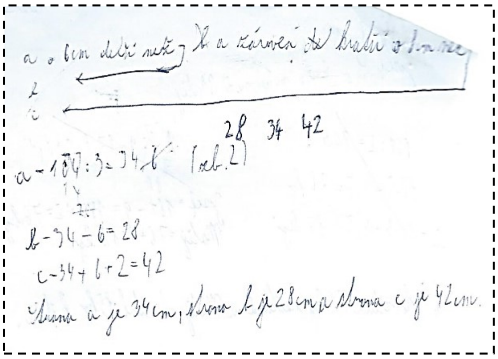
<u>1. testování</u>

Tab. 20: Výsledky žáků 6. – 9. třídy v prvním testování

	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	8	26	23	57
relativní (%)	14	45,6	40,4	100

Nejčastější způsob řešení byl úsudek aritmetickou cestou, hledání velikosti jednoho dílu (obr. 18).

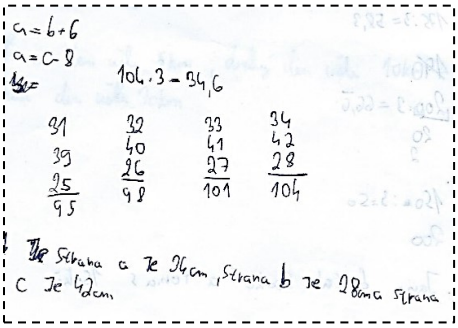
Obr. 18: Davidovo řešení



David dělil celek na tři části. Zjistil přibližně velikost jednoho dílu a tento údaj volil jako velikost první strany. Velikosti zbylých stran vypočítal podle podmínek v zadání. Z písemného řešení není patrné, zda zkontroloval, že součet velikostí stran je 104 cm. Stejným způsobem řešili úlohu ostatní žáci, rovněž není zřejmé z jejich písemného záznamu, zda sečetli výsledné velikosti stran a tím ověřili, že obvod trojúhelníků je 104 cm. Pokud by stejný postup použili s jinými číselnými údaji v zadání nebo s jinou počáteční hodnotou a nezkontrolovali, že obvod trojúhelníku je 104 cm, je pravděpodobné, že by úlohu správně nevyřešili. Při dělení celku třemi tady vychází výsledek přibližně 34 (pokud nezaokrouhlujeme a počítáme se zbytkem) a právě délka strany a = 34 cm.

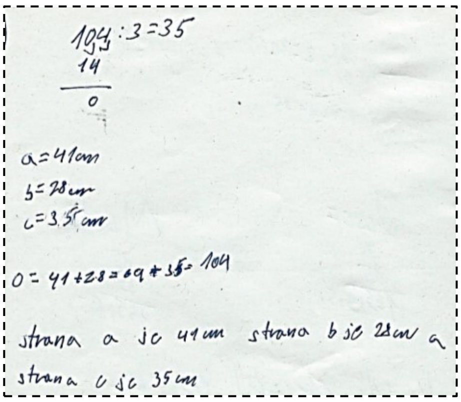
Michal jako jediný použil strategii pokus – ověření – oprava (obr. 19). Celek si také rozdělil na tři díly, ale jako odrazové číslo volil celé číslo 31. Dopočítal zbylé délky stran podle podmínek v zadání a ihned ověřil, zda součet velikostí stran je 104 cm. Tato strategie mu umožnila získat vhled do problému a úlohu správně vyřešit.

Obr. 19: Michalovo řešení

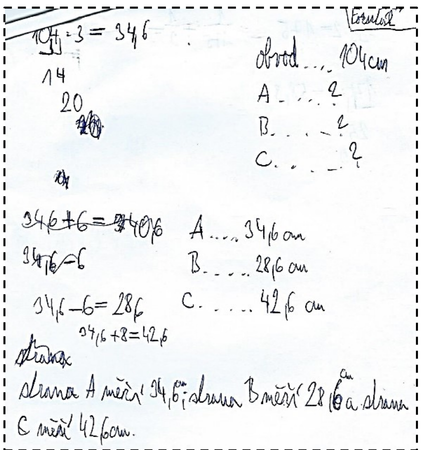


Chybné postupy byly téměř identické. Žáci dělili celek třemi. Nevolili ovšem délku strany 34 cm, ale 35 cm nebo 34,6 cm. Následně ke zvolené délce strany různě přičítali 8 cm nebo 6 cm nebo stejné hodnoty odčítali. Kontextovou zkoušku prováděli částečně. Některým žákům vyšel součet délek stran správně, ale vztahy mezi délkami stran neodpovídaly zadání (obr. 20), nebo naopak vztahy mezi jednotlivými délkami odpovídaly zadání, ale součet délek stran byl chybný (obr. 21).

Obr. 20: Terezino řešení



Obr. 21: Honzovo řešení



2. testování

Tab. 21: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

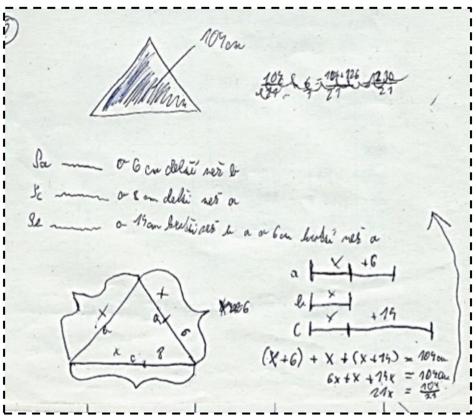
	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	1	6,7	4	26,7	10	66,6	15
2. testování	9	60	4	26,7	2	13,3	15

V druhém testování zvolilo 6 žáků 9. třídy strategii pokus – ověření – oprava, 2 žáci vyřešili úlohu algebraicky pomocí rovnice a 1 žák použil úsudek aritmeticky.

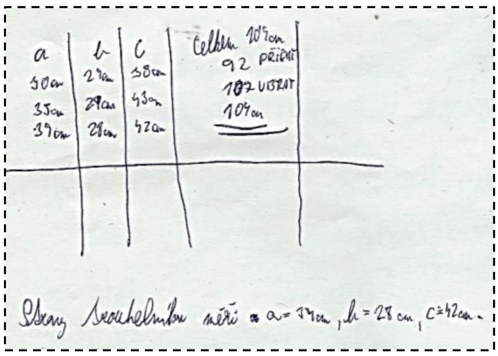
Na obr. 22 můžeme vidět několik typů legend, které se snažil žák vytvořit při uchopování úlohy. Domnívám se, že Josef nejprve vytvořil slovní legendu (usuzuji tak podle pořadí zápisů), kde správně popsal vztahy mezi stranami. Další vizualizace pomocí trojúhelníku, doplněná o jakýsi zápis vztahů mezi částmi, mu zřejmě nepomohla k řešení úlohy. Vytvořil si úsečkovou legendu, kde správně pomocí neznámé a čísel zaznamenal vztahy mezi stranami, a následně pomocí rovnice vztahy matematizoval. Při řešení rovnice udělal chybu a vyšel mu výsledek, který zavrhl (přeškrtnutím). Chybu v řešení rovnice neobjevil. Přesto řešení úlohy nevzdal a zvolil strategii pokus – ověření – oprava (obr. 23). Tento postup ho dovedl ke správnému řešení.

Obrázek 24 znázorňuje chybný zápis aditivních vztahů mezi délkami stran. Rovnice je podle těchto vztahů zapsaná správně i správně vyřešená, ale řešení neodpovídá podmínkám v zadání. Naprosto stejný postup se objevil ještě u dvou žáků.

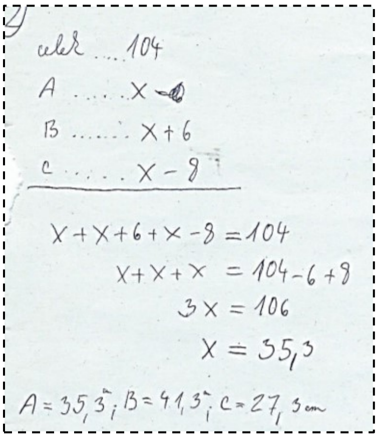
Obr. 22: Josefův první pokus vyřešit úlohu



Obr. 23: Josefův druhý pokus vyřešit úlohu



Obr. 24: Kristýnino řešení



Úloha č. 8

1. testování

Tab. 22: Výsledky žáků 6. – 9. třídy v prvním testování

	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	14	25	12	51
relativní (%)	27,5	49	23,5	100

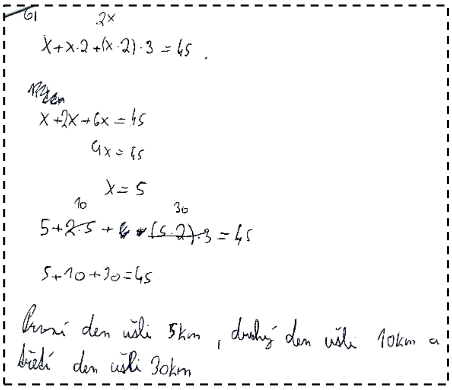
Úspěšní řešitelé se mohou rozdělit na dvě skupiny:

- 1. skupina (6 žáků) – žáci rozdělili celek na tři části (45 : 3 = 15), následně napsali správnou odpověď,
- 2. skupina (6 žáků) – napsali pouze správnou odpověď.

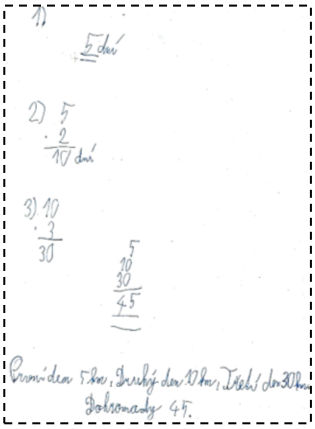
Je možné, že se pokusili náhodně nebo s nějakou vazbou na podmínky v zadání výsledky uhodnout. Kontextové zkoušky chyběly.

Kromě u výše uvedených úspěšných řešitelů, lze myšlenkový postup vyčíst u dvou žáků. Michal řešil úlohu rovnicí (obr. 25). Adam (obr. 26) zřejmě provedl nejprve odhad, který byl správný, a následně dopočítal zbylé části podle podmínek v zadání. Oba nakonec provedli zkoušku tím, že sečetli všechny části.

Obr. 25: Michalovo řešení



Obr. 26: Adamovo řešení

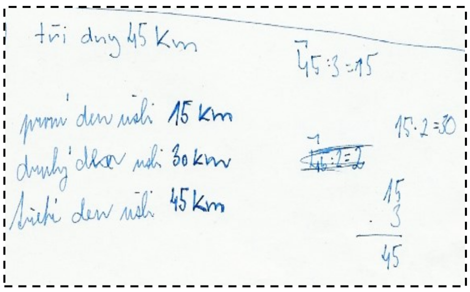


Žáky, kteří úlohu vyřešili chybně, je možné rozdělit na tři skupiny:

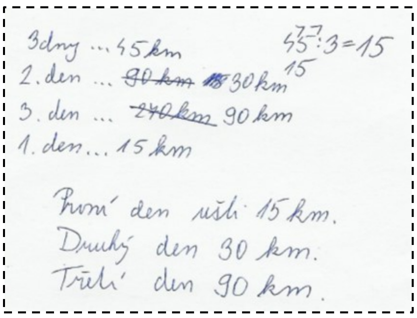
- 1. skupina (11 žáků) – žáci napsali pouze odpověď s chybnými výsledky.
- 2. skupina (6 žáků) – žáci dělili celek na tři části (45 : 3 = 15), tím vypočítali první část, následně dopočítávali druhou a třetí část (obr. 27 a obr. 28).
- 3. skupina (8 žáků) – žáci dělili celek na tři části (45 : 3 = 15), tento výsledek ještě rozdělili na dvě části (15 : 2 = 7,5), tím určili první část a dopočítávali druhou a třetí část (obr. 29).

Kontextové zkoušky jsou ve všech skupinách prováděny částečně nebo vůbec. U Davidova řešení vychází správný součet, ale chybné vztahy mezi částmi. Petra a Ondra (obr. 27, 28) součet zřejmě vůbec nekontrolovali, dokonce jim jedna z částí vychází větší nebo stejně velká jako celek.

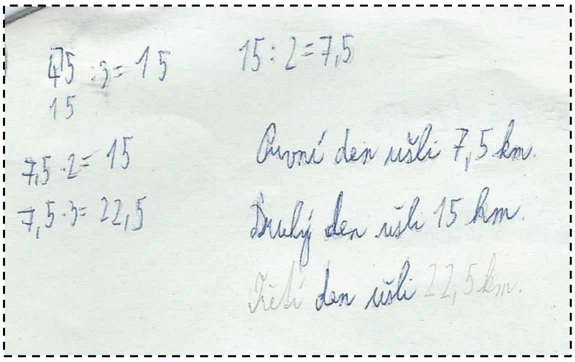
Obr. 27: Ondrovo řešení



Obr. 28: Petřino řešení



Obr. 29: Davidovo řešení



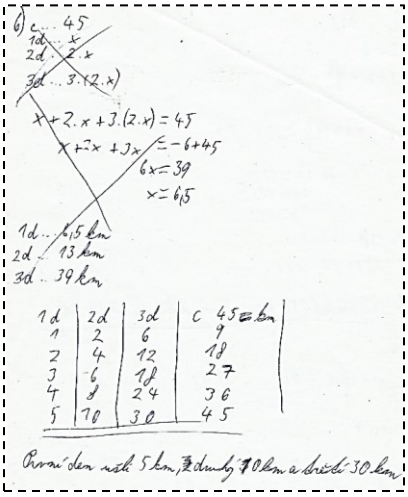
2. testování

Tab. 23: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	5	33,3	9	60	1	6,7	15
2. testování	10	66,7	5	33,3	0	0	15

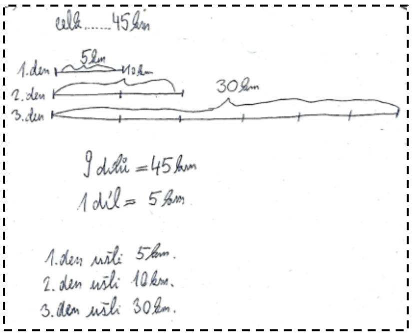
V této úloze použilo 7 žáků strategii pokus – ověření – oprava (obr. 30), dva žáci řešili úlohu geometrickou cestou pomocí obrázku (obr. 31) a jeden žák algebraicky pomocí rovnice.

Obr. 30: Filipovo řešení



Filip (obr. 30) se pokusil zpočátku o řešení rovnicí. Vztahy mezi částmi správně uchopil a správně matematizoval pomocí rovnice. Rovnici vyřešil a podle podmínek v zadání dopočítal části. Pravděpodobně zjistil, že mu nevychází součet částí, a celé řešení přeškrtnul. V řešení rovnice zřejmě chybu neodhalil a změnil strategii řešení, úlohu úspěšně vyřešil.

Obr. 31: Davidovo řešení



Obr. 31 ukazuje správné zakódování vzájemných vztahů mezi jednotlivými částmi pomocí úsečkové legendy.

Úloha č. 9

1. testování

Tab. 24: Výsledky žáků 7. – 9. třídy v prvním testování

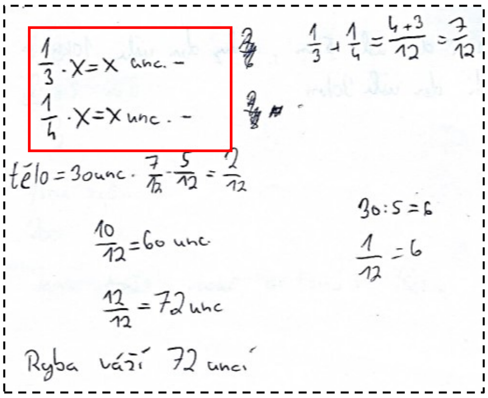
	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	3	24	13	40
relativní (%)	7,5	60	32,5	100

Úlohu č. 9 vyřešili pouze tři žáci. Každý z nich použil jinou strategii. Michal řešil aritmeticky úsudkem (obr. 32), Dan částečně aritmeticky úsudkem a částečně geometricky pomocí obrázku (obr. 33), Lucie také geometricky pomocí obrázku, ale použila úsečkovou metodu (obr. 34).

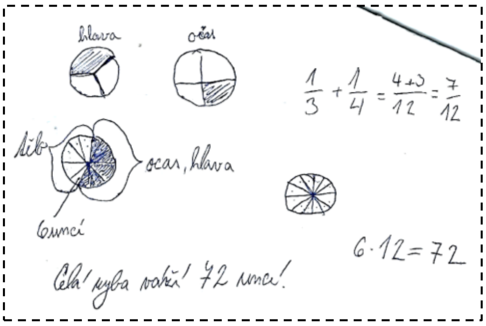
Zpočátku se Michal (obr. 32) zřejmě pokusil zapsat vztahy mezi částmi a celkem (v červeném rámečku). Neznámá x pravděpodobně představuje hmotnost celé ryby. Zápis v kontextu úlohy nemá smysl. Dále zjistil sečtením $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, jakou část hmotnosti ryby představuje hlava s ocasem a jaká část zbyde na tělo, tj. $\frac{5}{12}$. Úvahou pak spočítal hmotnost celé ryby.

Dan (obr. 33) rovněž zjistil, jaká část celku připadne na hlavu s ocasem. Pak pomocí kruhu (kruh rozdělil na dvanáctiny) znázornil, kolik dílů připadne na hlavu s ocasem a kolik dílů připadne na tělo, což mu umožnilo zjistit, že jeden dílek kruhu představuje 6 uncí. Dvanáct dílků pak hmotnost celé ryby.

Obr. 32: Michalovo řešení

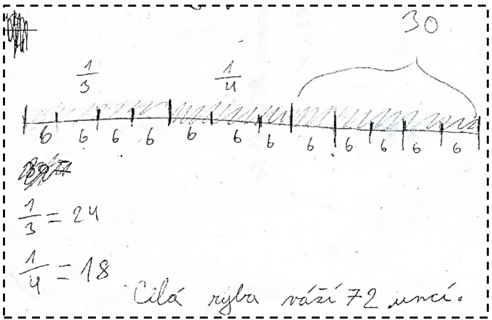


Obr. 33: Danovo řešení



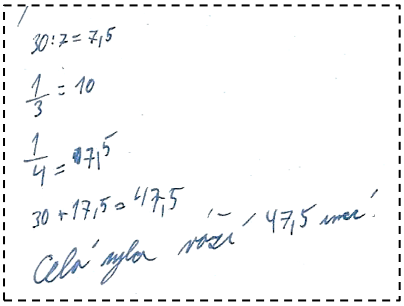
Lucie (obr. 34) rozdělila úsečku na dvanáct dílků a pak oddělila třetinu (4 dílky) a čtvrtinu (3 dílky), zbytek dílků (5) připadl na tělo ryby, což ji dovedlo k úvaze, že každý dílek představuje 6 uncí. Ke každému dílku připsala 6. Zápis pod úsečkou není matematicky správný, ale Lucie si tímto způsobem zapsala, že hlava ryby (třetina celé hmotnosti) má hmotnost 24 uncí a ocas (čtvrtina celé hmotnosti) 18 uncí. Sečtením všech částí pak zjistila hmotnost ryby.

Obr. 34: Lucčino řešení

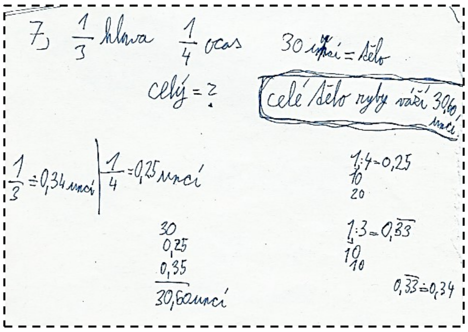


Nejčastější chybná řešení se dají rozdělit do dvou skupin. První skupina žáků řešila úlohu stejným postupem jako Ondra (obr. 35). Jako vstupní údaj vzal Ondra číslo 30 (hmotnost těla ryby bez hlavy a ocasu) a počítal třetinu a čtvrtinu ze třiceti, což neodpovídá zadání. Celek je rozdělen na třetinu, čtvrtinu a zbytek představuje 30 uncí. Část zaměnil za celek. Neodhalil vzájemné vztahy mezi částmi a celkem a nezískal tak celkový vhled do struktury úlohy.

Obr. 35: Ondrovo řešení



Obr. 36: Davidovo řešení



Druhá skupina žáků postupovala jako David (obr. 36). Třetinu a čtvrtinu, relativní údaj (nevíme, kolik váží celá ryba), zaměnil za absolutní údaj (hmotnost hlavy a hmotnost ocasu). Zlomky vyjádřil desetinnými čísly a přiřadil je k velikostem jednotlivých částí celku. Tyto části přičetl ke třiceti a zjistil tak chybně hmotnost celé ryby.

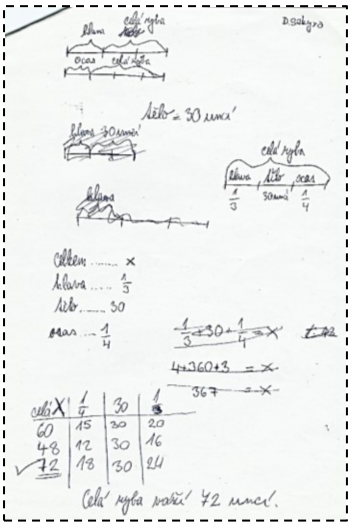
2. testování

Tab. 25: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	2	13,3	5	33,3	8	53,4	15
2. testování	4	26,7	6	40	5	33,3	15

Ze čtyř úspěšných řešitelů tři žáci řešili úlohu rovnicí a jeden žák zvolil strategii pokus – ověření – oprava (obr. 37).

Obr. 37: Danovo řešení



Dan zvolil nejprve grafické řešení pomocí úsečky. Tuto strategii zavrhl a zkusil algebraické řešení pomocí rovnice. Opět neúspěšně. Nakonec řešil úlohu volbou strategie pokus – ověření – oprava, která ho vedla ke správnému řešení.[20] U neúspěšných řešitelů se objevovaly stejné chyby jako u Davida v prvním testování (obr. 36).

[20] Dan v prvním testování stejnou úlohu vyřešil graficky. Použil zde kruhové znázornění (obr. 33).

Úloha č. 10

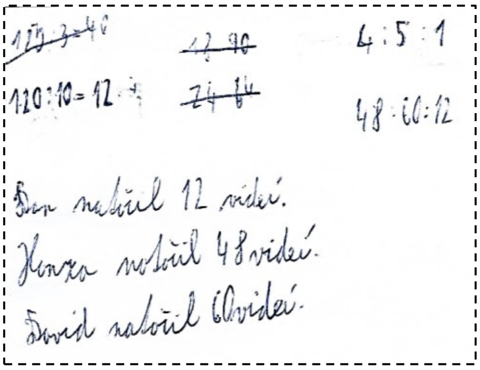
1. testování

Tab. 26: Výsledky žáků 8. – 9. třídy v prvním testování

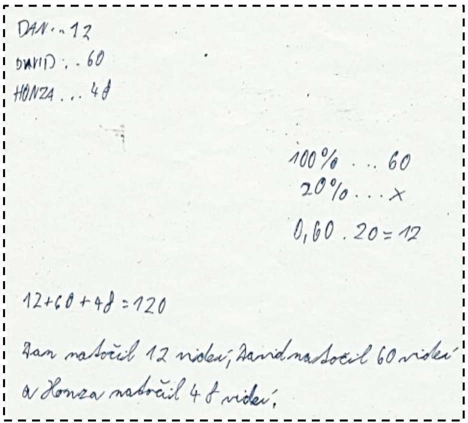
	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	2	19	4	25
relativní (%)	8	76	16	100

Úlohu č. 10 vyřešili pouze dva žáci. Oba ji řešili aritmeticky úsudkem, ale každý volil jiný postup. David (obr. 38) pomocí poměru a Filip (obr. 39) pomocí procent.

Obr. 38: Davidovo řešení

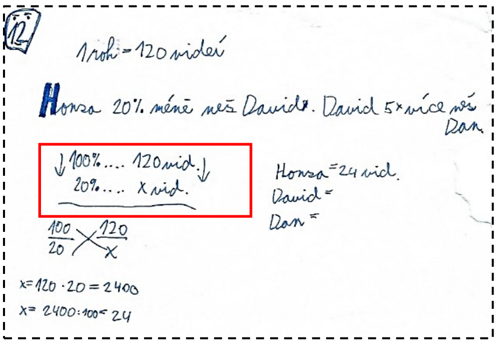


Obr. 39: Filipovo řešení



U chybně vyřešených nebo nedořešených úloh se velmi často objevilo řešení pomocí trojčlenky (obr. 40). Použití trojčlenky je označeno červeným rámečkem. Žáci si podmínku ze zadání „Honza natočil o 20 % méně než David“ chybně přeformulovali na podmínku „Honza natočil 20 % z celkového počtu natočených videí“. Zřejmě si pamatovali, že nějaké úlohy s procenty v minulosti řešili pomocí trojčlenky, zde ji tedy aplikovali, ale bez hlubšího pochopení vztahů mezi částmi.

Obr. 40: Lubošovo řešení



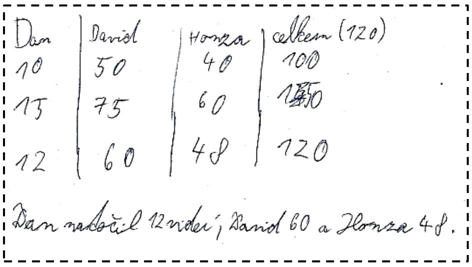
2. testování

Tab. 27: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	1	6,7	3	20	11	73,3	15
2. testování	4	26,7	1	6,7	10	66,6	15

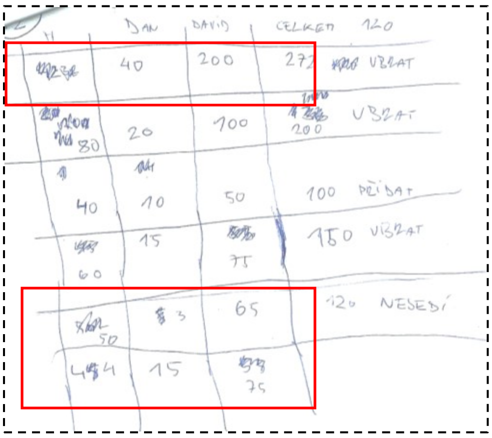
Ze čtyř úspěšných řešitelů jeden volil řešení algebraicky rovnicí a tři zvolili strategii pokus – omyl – oprava. Na obr. 41 a obr. 42 je srovnání dvou řešení pomocí strategie pokus – omyl – oprava. Domnívám se, že Filip (obr. 41) si jako odrazové číslo volil 10 (počet videí, které natočil Dan) a ostatní údaje správně dopočítal podle podmínek v zadání. Podle součtu v posledním sloupečku se rozhodnul, zda následující číslo v prvním sloupečku zmenší, či zvětší. Tento proces opakoval do nalezení správného součtu 120.

Obr. 41: Filipovo řešení



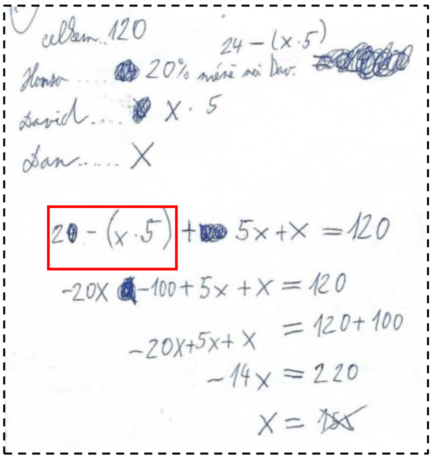
U Martina (obr. 42) není zcela jasné, ve kterém sloupečku si čísla volil a která dopočítával. Některé údaje jsou přeškrtané a nečitelné. Navíc výsledky v řádcích označených červeným rámečkem jsou chybně dopočítané. Myslím si, že Martin vztahům mezi částmi porozuměl, pouze numericky chyboval. Nakonec řešení ukončil předčasně. Je možné, že z časových důvodů.

Obr. 42: Martinovo řešení

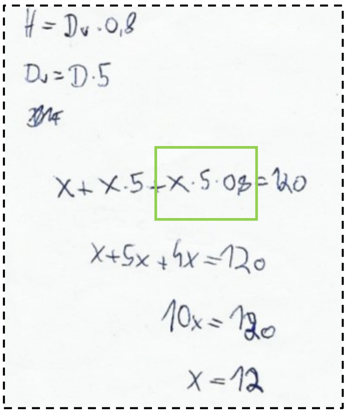


Obr. 43 a obr. 44 ukazují chybný a správný zápis matematických vztahů mezi částmi. Konkrétně mám na mysli matematické vyjádření vztahu „o 20 % méně“. U Kristýny je chybný zápis označen červeným rámečkem. Michalův správný zápis je označen zeleným rámečkem. Zbylé vztahy mají oba správně. Michal řešení úspěšně dokončil (neuváděla jsem celé řešení). Kristýna ukončila řešení tak, jak je vidět na obrázku. Pravděpodobně zjistila, že řešením není celé číslo (navíc by vyšlo záporné číslo, což nezaznamenala), proto výsledek škrtnula. Rovnice je nejen chybně sestavená, ale i chybně vyřešená.

Obr. 43: Kristýnino řešení



Obr. 44: Michalovo řešení



Úloha č. 11

1. testování

Tab. 28: Výsledky žáků 7. – 9. třídy v prvním testování

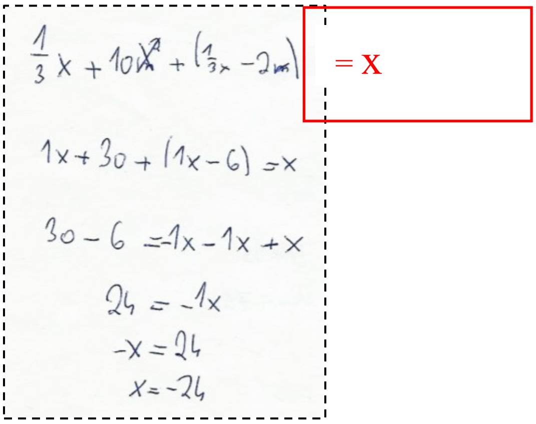
	správné řešení	chybné řešení	neřešeno nebo nedořešeno	celkový počet žáků
absolutní	0	14	26	40
relativní (%)	0	35	65	100

V této úloze nebyl nikdo úspěšný. Žákovské pokusy shrnu takto:

- pouze chybná odpověď bez postupu řešení,
- odpověď typu „nevím“, „nerozumím“,
- provádění nějakých výpočtů bez porozumění a chybná odpověď.

V řešení na obr. 45 je zřejmé, že žák porozuměl vztahům mezi částmi, ale nepodařilo se mu vztahy správně matematizovat a sestavit rovnici úplně bezchybně. Na levé straně rovnice je součet částí (algebraicky správně), pravá strana rovnice chybí (červený rámeček).

Obr. 45: Michalovo řešení



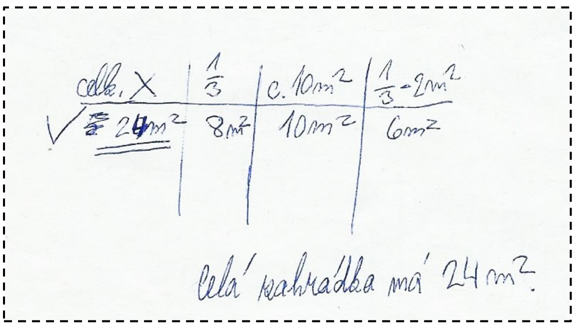
2. testování

Tab. 29: Srovnání výsledků žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	správné řešení		chybné řešení		neřešeno		celkem žáků
	počet	%	počet	%	počet	%	
1. testování	0	0	2	13,3	13	86,7	15
2. testování	2	13,3	5	33,3	8	53,4	15

Úspěšná řešení byla dvě. Michal řešil úlohu rovnicí stejně jako v prvním testování (obr. 45). V tomto případě sestavil rovnici správně a dokončil řešení. Dan (obr. 46) počítal metodou pokus – omyl – oprava.

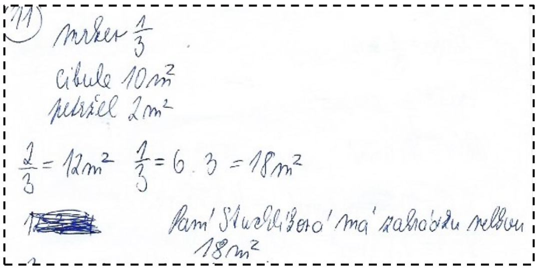
Obr. 46: Danovo řešení



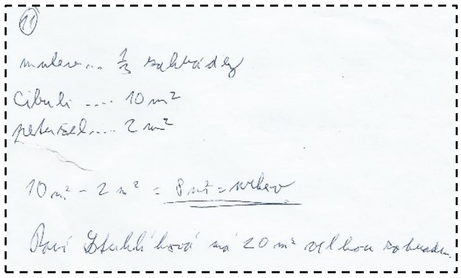
Na obrázku je vidět, že původně volil Dan jiné číslo, domnívám se, že číslo 20. V dalším sloupečku počítal třetinu ze zvoleného čísla (třetina z dvaceti). Třetina z dvaceti mu nevycházela „hezky“, přepsal číslo 20 na 24. Mohl si zvolit bližší číslo 20 dělitelné třemi (např. 21). Zřejmě první nápad bylo číslo 24. Vyřešil tak úlohu prvním pokusem.

Na obr. 47 a 48 jsou patrné stejné chyby při vytváření legendy. Chybí zápis celku, chybně jsou rovněž zapsané vztahy mezi částmi a celkem. Např. ve třetím řádku legendy by měl být místo 2 m² vyjádřen vztah „o 2 m² menší než . . .“ Obě úlohy jsou vyřešeny chybně.

Obr. 47: Eliščino řešení

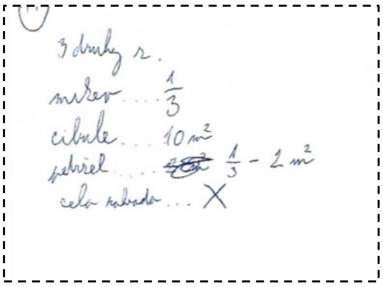


Obr. 48: Dominikovo řešení



Na obr. 49 je rovněž chybná legenda. Na rozdíl od předchozích, zde je celek zapsán, ve třetím řádku je vztah „o 2 méně než . . .“ zaznamenán, ale chybně je vyjádřen vztah mezi částmi a celkem v prvním a ve třetím řádku. Úloha nebyla dál řešena.

Obr. 49: Kristýnino řešení



Celkové zhodnocení testování

Tab. 30: Použití různých strategií žáků 6. – 9. třídy v prvním testování

	úvaha	rovnice	obrázek	poo[21]
1. testování	43	1	2	1

V prvním testování žáci ve většině případů volili řešení úvahou (tab. 30). Spontánní použití heuristických strategií se objevilo pouze ve třech řešeních.

[21] Strategie pokus – omyl – oprava

Tab. 31: Srovnání použití různých strategií žáků 9. třídy v prvním a ve druhém testování

	úvaha	rovnice	obrázek	poo[22]
1. testování	12	1	1	1
2. testování	5	17	2	23

V prvním testování žáci 9. třídy nejčastěji volili řešení úvahou, při druhém testování strategii pokus – omyl – oprava (tab. 31).

Tabulka 32 ukazuje srovnání celkové úspěšnosti jednotlivých žáků 9. třídy při řešení úloh v prvním a ve druhém testování. V prvním sloupečku je počet správně vyřešených úloh při prvním testu, ve druhém sloupečku počet správně vyřešených úloh při druhém testování. Z patnácti testovaných žáků u dvanácti došlo ke zlepšení, jeden žák vyřešil v každém testu jednu úlohu a dva žáci nevyřešili úlohu ani v jednom z testů.

Tab. 32: Úspěšnost žáků 9. třídy při prvním a druhém testu

	1. test	2. test
Martin	0	4
Filip	3	6
Honza	0	2
Josef	0	4
Honza 1	1	3
Dominik	1	3
Michal	4	7
Kristýna	0	1
Adéla	1	3
David	0	0
Dominik 1	0	0
Eliška	1	3
Dan	2	7
Alexandra	1	3
Michala	1	1

V prvním i ve druhém testování zvládli žáci nejlépe úlohy č. 1 a č. 8 (tab. 33 a tab. 34). V obou úlohách je zadán celek a úkolem je zjistit velikost jeho částí. V úloze č. 1 je celek rozdělen na dvě části (vztahy mezi částmi jsou aditivní), v úloze č. 8 na tři části (vztahy mezi částmi jsou multiplikativní). Největší problémy měli žáci s úlohami č. 10, 11. V obou úlohách je celek rozdělen na tři části. Vztahy mezi částmi jsou smíšené, zadány pomocí zlomků, procent a celých čísel.

[22] Strategie pokus – omyl – oprava

Tab. 33: Pořadí úloh podle počtu úspěšných žákovských řešení (6. – 9. třída)

1. testování	úloha č. 1	úloha č. 8	úloha č. 6	úloha č. 2	úloha č. 9	úloha č. 10	úloha č. 11
celkem žáků	17	14	8	6	3	2	0

Tab. 34: Pořadí úloh podle počtu úspěšných žákovských řešení (9. třída)

2. testování	úloha č. 1	úloha č. 8	úloha č. 6	úloha č. 2	úloha č. 9	úloha č. 10	úloha č. 11
celkem žáků	13	10	9	5	4	4	2

4.3 Potíže žáků při řešení úloh

Obecně lze potíže žáků typické pro řešení slovních úloh shrnout do několika bodů:

- žák nevidí souvislost mezi kontextem úlohy a jejím řešením,
- žák nezíská potřebné informace o struktuře úlohy ze zadání, příčinou může být např. délka textu, nedostatečně rozvinuté čtení s porozuměním, přemíra zadávaných informací,
- žák není schopen najít vhodný matematický model, který by mu pomohl úlohu vyřešit,
- žák najde příslušný matematický model, ale neumí ho vyřešit.

(Novotná, 2004, s. 368)

Ve třídách, v nichž jsem provedla experiment, shrnuji specifické potíže takto:

- žák nepochopí vztahy mezi částmi celku a následně chybně vztahy matematizuje.

Na základě výsledků testování lze říci, že pokud jsou úlohy zadány jen aditivními nebo jen multiplikativními vztahy, a to pomocí celých čísel, dělají žákům nejmenší potíže. Tyto potíže spočívají v tom, že žáci ve většině případů číslo, které v zadání představuje celek, dělí číslem, které určuje počet částí daných v úloze. S tímto výsledkem následně provádějí početní operace podle toho, jak porozumí signálnímu slovu (o „něco“ více, o „něco“ méně, několikrát více či méně) v zadání. Výsledky, ke kterým žáci dojdou, v takovém případě většinou neodpovídají podmínkám v zadání.

Největší potíže mají žáci při řešení úloh se smíšenými vztahy mezi částmi, které jsou zadané pomocí zlomků nebo procent, např. „o pětinu více než…“ nebo „o 20 % méně než…“. Často nerozlišují mezi vztahy „o pětinu více než…“ a „pětina z …“. Pětina je pro ně signálem „dělit pěti“. Operaci „děleno“ pak použijí na číslo, které v textu najdou, ale nerozlišují, zda číslo představuje celek nebo část.

- žák neprovádí kontextovou zkoušku nebo ji provede částečně.

U většiny úloh chyběly zkoušky, které ověřují, zda výsledky vyhovují podmínkám a vztahům mezi částmi a celkem. V některých případech si žáci ověřili pouze vztahy mezi částmi, ale neověřili si, zda součet jednotlivých částí odpovídá celku. Vyskytly se i takové odpovědi, kde část byla větší než celek. V jiných případech žákům součet částí vyšel správně, ale vztahy mezi jednotlivými částmi neodpovídaly zadání.

- žák nenalezne cestu, která by ho vedla k řešení úlohy, a odevzdá „prázdný papír“ nebo se pokusí výsledek uhodnout (kontextovou zkoušku neprovede).

Taková řešení obsahovala jen odpověď (i správnou) bez jakéhokoliv náznaku řešení nebo myšlenkového postupu žáka. V takových případech lze těžko poznat, jestli žák tipoval nebo řešení proběhlo s porozuměním v hlavě řešitele.

4.4 Možnosti odstranění nebo zmírnění potíží

Pro odstranění nebo alespoň zmírnění potíží, které mají žáci při řešení slovních úloh, doporučuje J. Novotná (2000) a M. Tichá (1998) zaměřit se s žáky na tyto činnosti:

- Při čtení textu slovní úlohy požádat žáka, aby vlastními slovy zopakoval zadání úlohy a podmínky v úloze. Číst text s důrazem na informace, které jsou podstatné pro správné uchopení úlohy a porozumění vztahům, např. předložky a spojky „o“, „na“, „než“.
- Zaznamenávat důležité údaje ve zkrácené a přehledné formě, využívat různá grafická znázornění. Vizualizovat strukturu úlohy pomocí schémat, využívat různé obrázkové legendy.
- Zadávat žákům nejprve úlohy s jednodušší strukturou (zpočátku dělit celek na dvě části, nahrazovat zlomky a procenta přirozenými čísly), měnit kontext úlohy, následně zadávat řadu gradovaných úloh.
- V úlohách, kde se vyskytují zlomky nebo procenta, klást důraz na pochopení vztahů „část – celek“, na rozlišení mezi „změnou o $\frac{x}{y}$“ (popř. „změnou o x %“)

a „změnou na …“ nebo „určení $\frac{x}{y}$ z …“. K tomuto pochopení využívat různá grafická znázornění v diskrétním i v kontinuálním prostředí.

- Nepředkládat žákům hotové algoritmy řešení, ale nechat žáky řešit úlohy vlastními postupy. Společně s žáky objevovat jiné vhodné strategie, které jim pomůžou úlohu vyřešit.

Závěr

V bakalářské práci jsem se zabývala strategiemi řešení slovních úloh o dělení celku na nestejné části. V teoretické části jsem uvedla různé pohledy na problematiku slovních úloh a jejich řešení. V praktické části jsem více pozornosti věnovala právě slovním úlohám o dělení celku na nestejné části. Předložila jsem různé varianty těchto slovních úloh a každou variantu jsem ilustrovala konkrétní slovní úlohou. Z těchto slovních úloh jsem sestavila testovací soubor pro žáky 6. – 9. třídy, které učím matematiku. Testovací soubor obsahoval sedm slovních úloh. Každou úlohu jsem nejprve sama vyřešila pomocí více strategií. V další praktické části práce jsem provedla analýzu žákovských řešení u jednotlivých úloh. Dále jsem shrnula nejčastější potíže žáků při řešení úloh. Nakonec jsem podle prostudované literatury vybrala doporučené činnosti, na které by se učitel mohl se žáky zaměřit a které by mohly vést k odstranění nebo ke zmírnění potíží, na které žáci narazili při řešení testových úloh.

Prvním cílem mé práce bylo zjistit, jaké strategie žáci 6. – 9. třídy použijí při řešení sedmi vybraných úloh, s jakými obtížemi se setkají a jak tyto obtíže odstranit nebo zmírnit. Druhým cílem bylo zjistit, zda po seznámení se s různými strategiemi řešení úloh žáci některé z nich při dalším řešení použijí a jestli budou v testu úspěšnější. Prostředkem k naplnění vytýčených cílů byl již zmíněný testovací soubor složený ze sedmi úloh o dělení celku na nestejné části různých typů. Test jsem zadávala ve dvou etapách.

První testování probíhalo s žáky 6. – 9. třídy. Ve většině případů žáci volili řešení úvahou. Spontánní použití heuristických strategií se objevilo jen u čtyř žáků. Jednou se objevila strategie systematického experimentování, jednou pokus – omyl – oprava a dva žáci volili strategii pomocí obrázku.

Po přibližně měsíci a půl proběhlo druhé testování jen s žáky 9. třídy. V období mezi oběma testy jsme si s žáky ukazovali použití různých heuristických strategií na typově stejných úlohách. Zajímalo mě, zda budou žáci upřednostňovat řešení pomocí rovnic, nebo budou volit spíše jinou strategii. V ostatních třídách jsme rovnice neprobírali. Z toho důvodu jsem zadávala druhý test jen žákům 9. třídy. Ve druhém testu žáci řešili tytéž úlohy jako v prvním testu. V této souvislosti se nabízí otázka, zda nemohli být žáci ovlivněni tím, jak postupovali v prvním testu, nebo zda si nemohli výsledky sdělit. Řešení úloh z prvního testu ani správné výsledky jsme s žáky nijak neprobírali. Žáci nevěděli, že druhý test proběhne. Domnívám se, že ovlivněni nebyli.

Z analýzy prvního a druhého testování vyplynulo, že se výrazně změnilo složení zvolených strategií a zároveň došlo k nárůstu úspěšně vyřešených úloh u 12 žáků. Žáci nejčastěji volili strategii pokus – omyl – oprava a následně algebraický způsob řešení pomocí rovnic. Myslím si, že jedním z důvodů, proč právě metoda pokus – omyl – oprava vedla žáky k úspěšnosti, je fakt, že lze celkem snadno pochopit, na jakém principu tato metoda funguje, a lze ji naučit i za krátké časové období. Dalším důvodem by mohl být reálný základ této strategie v praktickém životě. Malé dítě často experimentuje tímto způsobem. Druhý nejčastější způsob řešení, který žáci volili, bylo řešení rovnicí. Někteří žáci zkoušeli řešit úlohy různými strategiemi, než dospěli ke správnému řešení, většinou ta správná cesta byla právě metoda pokus – omyl – oprava. Z výsledků druhého testování žáků 9. třídy vyplynulo, že pokud žáci měli možnost vybrat si z různých strategií ty, které jim nejvíce vyhovují, úspěšnost vyřešených úloh se zvýšila.

Psaní této práce pro mě bylo obrovským didaktickým přínosem. Dospěla jsem k závěru, že „naučit“ žáky řešit slovní úlohy nemusí znamenat těžko řešitelný nebo dokonce neřešitelný problém.

Náměty k dalšímu zkoumání této problematiky by mohly být např. rozhovory s vybranými žáky o jejich řešeních. Zjištění by mohla přinést další zajímavé a doplňující informace a posunout tak proces poznání žákových myšlenek do větší hloubky. Mohla bych také zadat žákům po delším časovém období test s jinými úlohami a zkoumat, zda žáci budou schopni aktivně užívat heuristické strategie.

Seznam použitých informačních zdrojů

Tištěné zdroje

BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 108 s. ISBN 80-210-3022-4.

HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, ed. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, Milan. Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika*. 1995, **45**(4), s. 387-399.

HELUS, Zdeněk. *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. 1. vyd. Praha: SPN, 1979. 264 s.

HRUŠA, Karel. *Metodika počtů pro pedagogické fakulty*. 2., opr. vyd. Praha: SPN, 1968. 194 s.

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2010. 330 s. ISBN 978-80-7290-399-3.

KNÍŽE, Gustav. *Vztah celku a části při řešení slovních úloh*. 1. vyd. Praha: SPN, 1966.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. 1. vyd. Praha: HAV, 2013. 212 s. ISBN 978-80-903625-5-0.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. 210 s. ISBN 978-80-7394-307-3.

KUŘINA, František. Řešení úloh a vyučování matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1985, **30**(4), s. 220-226.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. 1. vyd. Brno: Paido, 2003. 219 s. ISBN 80-7315-039-5.

MAREŠ, Jiří. Fridmanova teorie učebních úloh. *Pedagogika*, 1980, **30**(5), s. 596-610.

MAREŠ, Jiří. *Pedagogická psychologie*. 1. vyd. Praha: Portál, 2013. 704 s. ISBN 978-80-262-0174- 8.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. 126 s. ISBN 80-7290-011-0.

ODVÁRKO, Oldřich, Jaroslav Šedivý a Emil Calda. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990. 261 s. ISBN 80-04-20434-1.

ODVÁRKO, Oldřich. Slovní úlohy, aplikační úlohy a pseudoaplikace. *Matematika – fyzika – informatika*, 1996a, **5**(7), s. 337-340.

PLHÁKOVÁ, Alena. *Učebnice obecné psychologie*. 1. vyd. Praha: Academia, 2004. 472 s. ISBN 978-80-200-1499- 3.

PÓLYA, György. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. Přeložil Oldřich KOWALSKI. 1. vyd. Praha: MatfyzPress, 2016. 253 s. ISBN 978-80-7378-325-9.

PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003. 488 s. ISBN 80-7178-772-8.

ŠEDIVÝ, Ondrej a Karol KRIŽALKOVIČ. *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva 1. stupňa ZŠ.* 1. vyd. Bratislava: SPN, 1990. 272 s. ISBN 80-08-00378-2.

TOLLINGEROVÁ, Dana. *K teorii učebních činností*. Praha: SPN, 1987. 240 s.

VÁGNEROVÁ, Marie. *Obecná psychologie: dílčí aspekty lidské psychiky a jejich orgánový základ*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2016. 412 s. ISBN 978-80-246-3268- 1.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: SPN, 1962. 172 s.

Tištěné zdroje dostupné online

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In: VONDROVÁ, Naďa. *Dva dny s didaktikou matematiky*. [online] Praha: PedF UK, 2015, s. 9-22 [cit. 2018-03-31]. ISBN 978-7290-843-1. Dostupné z:

http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2015.pdf

TICHÁ, Marie. Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. [online] 1998, s. 133-138 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z:

http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/SetkaniUMVTASS/SetkaniUM1998.pdf

HEJNÝ, Milan. Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu. In: *Letná škola z teorie vyučovania matematiky* PYTAGORAS 2005. [online] 2005, s. 19-31 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z:

http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2005/019_hejny_rozmanitost.pdf

Učebnice a sbírky

BOBOK, Ján a kol. *Matematika 8 pro 8. ročník základní školy: cvičebnice*. 4. vyd. Praha: SPN, 1983. 72 s.

CZUDEK, Pavel a kol. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ : 555 úloh*. 3. vyd. Praha: HAV, 2005. 153 s. ISBN 80-903625-0-8.

CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. *Matematika 8: učebnice*. 2. vyd. Ústí nad Labem: AOS Publishing, 2013. 191 s. ISBN 978-80-87624-20-3.

NOVOTNÁ, Jarmila, Václav SÝKORA a Marie KUBÍNOVÁ. *Matematika s Betkou 3 pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Scientia, pedagogické nakladatelství, 1998. 205 s. ISBN 80-7183-148- 4.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro každý den: [učebnice pro základní školy] : sbírka úloh nejen pro žáky 5. až 9. ročníků základních škol*. 1. vyd. Praha: Prospektrum, 1995. 168 s. ISBN 80-85431-31-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN, 2009. 168 s. ISBN 978-80-7235-419-1.

ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Blug, 1999. 131 s. ISBN 80-7274-926-9.

KINDL, Karel. *Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy*. 3., upr. vyd. Praha: SPN, 1971. 204 s.