Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Strategie řešení slovních úloh v závislosti na aktuálnosti kontextu

Solving strategies of word problems depending on the context topicality

Bc. Kateřina Hejdrychová

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy - matematika

2018

Odevzdáním této diplomové práce na téma Strategie řešení slovních úloh v závislosti na aktuálnosti kontextu potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za vstřícný a ochotný přístup a nekonečnou trpělivost v průběhu tvorby mé diplomové práce. Velmi si cením rad, doporučení i připomínek, kterými přispěla k napsání této práce.

Dále bych ráda poděkovala své rodině, zejména svému manželovi, za podporu v průběhu celého studia.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá slovními úlohami řešitelnými pomocí lineárních rovnic. Cílem práce je ukázat, zda má kontext, ve kterém se slovní úloha odvíjí, vliv na to, jak žáci, kteří se zúčastnili šetření, úlohu řeší, a ověřit, zda formulace slovní úlohy a použití moderního jazyka žákům při řešení slovní úlohy pomohou. Toho je dosaženo zadáním sady různorodých slovních úloh žákům a vyhodnocením jejich řešení. Další výsledky byly získány vyhodnocením dotazníků týkajících se kontextu počítaných slovních úloh. Druhým cílem diplomové práce je seznámení s různými definicemi pojmu slovní úloha, zasazení pojmu slovní úloha do kontextu školské matematiky a stručné shrnutí historického vývoje matematiky se zaměřením na slovní úlohy.

Práce je rozdělena na tři části. V první části jsou definovány pojmy úloha a slovní úloha a je ukázáno, jak jsou slovní úlohy zařazeny v rámcovém vzdělávacím programu. Slovní úlohy jsou zasazeny do historického kontextu.

Ve druhé části je ukázáno pojetí slovních úloh o pohybu, slovních úloh o společné práci a slovních úloh o dělení celku na části v současných učebnicích matematiky na druhém stupni základní školy a v nižších třídách víceletého gymnázia.

Třetí část práce obsahuje sadu slovních úloh, zařazených do dotazníkového šetření, a jejich vzorové řešení, popis průběhu experimentu a jeho vyhodnocení.

Výsledky šetření naznačují, že formulace slovní úlohy a použití moderního jazyka žákům při řešení slovní úlohy nepomohou. Potvrzují, že historické úlohy jsou sice zajímavé a jako osvěžení v průběhu hodiny jistě užitečné, ale pro samostatné řešení, díky své obtížnosti zejména v rovině jazykové, použitelné jen omezeně.

KLÍČOVÁ SLOVA

Slovní úlohy, řešení pomocí lineárních rovnic, historické souvislosti, kontext slovní úlohy, rešerše učebnic, aktuální a historické úlohy.

ABSTRACT

The thesis deals with word problems solvable by linear equations. The aim of the work is to show if the context, on which the word problem depends, influences how pupils participating in the research solve it and verify if word problem phrasing and modern language usage help pupils solve the word problem. It is accomplished by assigning pupils a set of varied word problems and assessing their solutions. More results were gained by assessing questionnaires related to the context of the word problems being calculated. The second aim of the thesis is to explain various definitions of word problems, putting the term into the context of school mathematics and a brief summary of the historical development of mathematics focusing on word problems.

The work consists of three parts. In the first part, problems and word problems are defined and it is shown how word problems are included in the Framework educational programme. Word problems are put into historical context.

The second part shows the conception of motion word problems, word problems on joint work and word problems on dividing a whole into parts in the present-day mathematical textbooks in the second stage of elementary schools and in the lower classes of secondary grammar schools (gymnázia).

The third part of the work comprises a set of word problems included in the questionnaire survey and their model solutions, the description of the course of the experiment and its evaluation.

The results of the survey imply that word problem phrasing and modern language usage do not help pupils solve the word problem. They confirm that historical word problems are interesting and surely useful for enlivening the lesson, yet they are useful only partially for the individual solution because of their difficulty (especially in the language level).

KEYWORDS

Word problems, solutions using linear equations, historical connections, the context of a word problem, textbook research, current and historical word problems.

Obsah

1 Teoretická část

1.1 Motivace

Proč se ve své práci zabývám právě řešením slovních úloh a vlivem jejich kontextu na žákovská řešení? Myslím, že slovní úlohy jsou jednou z nejzásadnějších složek školské matematiky. Jsou pádným argumentem na věčné stížnosti žáků, kteří se pravidelně s otráveným výrazem v obličeji dotazují po smyslu aktuálně probírané látky. „A k čemu nám to bude?“ Věta, kterou jistě mnohokrát slyšel každý učitel. Věta, která je ovšem málokdy opodstatněná. Zejména v případě matematiky. Někdy se mi velmi těžko žákům v hodinách českého jazyka zdůvodňuje, k čemu jim v běžném životě bude dobré, že rozliší přístavek od postupně rozvíjejícího přívlastku. Takovou situaci v matematice zažiji málokdy. Právě matematika je na základní škole postavena na základech reálných situací. Většina probíraných témat svoji praktičnost demonstruje zařazením právě slovních úloh.

Právě proto, že kromě matematiky učím také český jazyk, je pro mě jazyková stránka v matematice (nejen u slovních úloh) velmi důležitá. Snažím se do výuky zařazovat úlohy, které považuji za srozumitelné, jednoznačné a žákům přínosné.

Již v bakalářské práci (Hejdrychová, 2014) jsem se zabývala řešením některých typů slovních úloh. Vyslovila jsem myšlenku, že aktuální kontext úlohy napomáhá žákům s jejím úspěšným řešením. Jsem přesvědčená, že dnešním dětem je jistě bližší prostředí obyčejné letní brigády než třeba plnění brigády socialistické práce v celoročním plánu družstevníků JZD. Proto jsem se rozhodla v předchozí práci některé úlohy přepracovat.

Cílem mé bakalářské práce byla nejen prezentace různých strategií řešení vybraných slovních úloh a stručný nástin jejich historického vývoje, ale také vytvoření sbírky slovních úloh. Použila jsem slovní úlohy o pohybu, o společné práci, o směsích a o dělení celku na části. Tuto sbírku jsem se rozhodla vytvořit, protože řada učebnic, které jsem v té době používala během výuky v zaměstnání, neobsahovala podle mne dostatečné množství příkladů k procvičení dané tématiky. Často jsem tedy sahala po starých učebnicích i sbírkách úloh. Ty mám schované ještě z dob vlastního studia na základní škole, ale i poděděné po mnoha učitelích, kteří mě od začátku mé profesní dráhy provázeli. V těchto svazcích jsem narazila na problémy se zastaralým kontextem úloh. Jinak užitečné úlohy měly omezení v tom, že žáci často některým obratům vůbec nerozuměli. Jindy jim přišly kontexty jen úsměvné. Jako zásadní problém zastaralé úlohy vidím to, že žák nemůže intuitivně kontrolovat alespoň odhadem správnost svého řešení. Například, když jim v úloze vyjde, že za 8 Kčs šla do kina čtyřčlenná rodina, nedokáží z vlastní zkušenosti vyvodit, zda je to možné. Naopak, když jim vyjde, že lístky do kina stály čtyřčlennou rodinu 8 000 Kč, automaticky zbystří a hledají chybu.

Trochu jiná je situace u úloh historických, které jsou v některých učebnicích prezentovány jako zpestření, ale asi ani autoři nepředpokládají, že je žáci budou schopni sami vyřešit. V těchto úlohách se počítá s dopomocí učitele na pozici jakéhosi překladatele.

Když jsem se ohlížela za svou bakalářskou prací, jako jednu z možností dalšího rozvoje dané problematiky jsem uvedla absenci výzkumu, který by tyto mé domněnky buď potvrdil, nebo vyvrátil. Proto, když jsem vybírala téma své diplomové práce, ráda jsem se ke slovním úlohám, se kterými jsem již dříve pracovala, vrátila.

Vybrala jsem tedy ze zmiňované sbírky zástupce úloh aktuálních, zastaralých i historických. Zvolila jsem úlohy s různými typy řešení. A na vzorku žáků gymnázia i základní školy jsem se rozhodla ukázat, že je, případně není aktuálnost kontextu pro řešení úlohy důležitá.

V praktické části vycházím z myšlenek, zařazených v části teoretické. V teoretické části práce se zabývám nejen vymezením použitých pojmů nebo stručnou historií matematiky, zaměřenou na slovní úlohy, ale také rozborem kontextu slovních úloh v aktuálních řadách učebnic.

Cílem diplomové práce je seznámení s různými definicemi pojmu slovní úloha, zasazení pojmu slovní úloha do kontextu školské matematiky, nástin historického vývoje slovních úloh. Dalším cílem je ukázat pojetí slovních úloh o pohybu, slovních úloh o společné práci a slovních úloh o dělení celku na části v současných učebnicích matematiky na druhém stupni základní školy. V praktické části práce si kladu za cíl ukázat, zda má kontext, ve kterém se slovní úloha odvíjí, vliv na to, jak žáci, kteří se zúčastnili šetření, úlohu řeší. A ověřit, zda formulace slovní úlohy a použití moderního jazyka žákům při řešení slovní úlohy pomohou.

1.2 Definice pojmu slovní úloha

1.2.1 Úloha

Protože celá diplomová práce se zabývá problematikou slovních úloh, považuji za velmi důležité vymezit pojem slovní úloha. Nejprve předkládám několik definic významných matematiků, se kterými jsem se seznámila v průběhu studia matematiky. Potom formuluji vlastní definici, aby bylo jasné, jak pojem vnímám a budu ve své práci prezentovat já.

Jak uvádí Novotná (2000), nejprve je třeba vymezit pojem *úloha.* Ve své publikaci uvádí dvě definice úlohy v matematice podle Schoenfelda. První definice říká, že úloha je v matematice cokoli, co vyžaduje být uděláno, nebo vyžaduje, aby bylo uděláno. Druhá potom označuje jako úlohu otázku, která je komplikovaná nebo obtížná.

Jiný pohled na danou otázku uvádí Fridman (1977). Ve své teorii vychází z problémové situace. Tato situace vzniká, když se subjekt ve své činnosti setkává s určitou překážkou. Tu si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit. Pokud tuto situaci navodíme úmyslně, uměle, získáme úlohu.

S tím svým způsobem souhlasí i práce Heluse a kol. (1979), kde je uvedeno, že učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle, a je zaměřena na všechny aspekty učení: *obsahový, operační i motivační.*

Protože zastávám názor, že řešení slovních úloh je činnost, kterou provádíme v běžném životě každodenně, je mi velmi blízká definice G. Polya (1966), který uvádí, že řešení úloh je činnost pro člověka charakteristická. Řešit úlohu znamená hledat vědomě vhodný postup, abychom našli jasně koncipovaný cíl, který ale nemusí být dosažitelný okamžitě. Polya rozlišuje dva základní typy úloh: *určovací úlohy*, jejichž cílem je nalézt určitý objekt, neznámou problému, a *úlohy důkazové,* jejichž cílem je rozhodnout o pravdivosti tvrzení, případně ho dokázat nebo vyvrátit.

Tyto definice, přestože vznikaly v různých dobách a v různých částech světa, mají hodně společného. Pro potřeby své práce, charakterizuji úlohu jako **úmyslně navozenou problémovou situaci, kterou je třeba řešit, a tím dosáhnout u žáků určitého učebního cíle**. Samozřejmě všechny výše uvedené pohledy mají mnohem širší pozadí a zasloužily by více prostoru, shrnout je v takto stručném textu je velmi složité.

1.2.2 Slovní úloha

V předchozím odstavci je definovaný pojem úloha. Co je tedy slovní úloha? Opět ukážu několik definic, vycházejících z různých publikací několika různých autorů, kteří jsou významnými kapacitami v teorii řešení slovních úloh. Tato otázka je však ještě rozsáhlejší než problém definice obecné úlohy. Přesto problematiku stručně nastíním.

Co je tedy slovní úloha? Vyšín (1962, str. 104-105) dělí slovní úlohy do dvou skupin. *V první řadě jsou to matematické úlohy, které jsou vysloveny z větší části slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů. Do této skupiny patří, např. geometrické konstruktivní úlohy. Druhou kategorii tvoří úlohy matematického charakteru, jejichž témata jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd. Z každé takové úlohy je třeba matematickou teprve vytvořit. To je často možné několika způsoby. Do této skupiny patří většina školních úloh řešených v aritmetice a algebře na střední škole, např. úlohy o směsi, o pohybu apod. Rozhraní mezi oběma skupinami úloh ovšem není přesné.*

V (Hruša a kol., 1968) je slovní úloha prezentována jako početní úloha, ve které je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a ve které je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, které početní výkony musíme s danými čísly provést, abychom dospěli k číslu, jež máme vypočítat. Každá slovní úloha obsahuje podmínky a otázku.

V (Blažková a kol., 2002) jsou slovní úlohy prezentovány jako modely reálných situací ve výuce matematiky. Jsou velmi důležité pro logické osvojení si učiva a jeho uvědomělé využívání při řešení situací z reálného života.

Odvárko a kol. (1990) uvádí, že slovní úloha má širší rozsah, než se obvykle připouští. Zahrnuje sem např. slovní matematické úlohy. Slovní úlohy jsou chápány jako prostředek k popisu vztahu matematiky k realitě a využívané zejména k řešení úloh s nematematickým obsahem matematickými prostředky. Zvláštní pozornost tu autor věnuje pojmu matematický model reálné situace.

Najít odpověď na otázku: *Co je slovní úloha?* je velmi složité. Různí autoři ve svých pracích vyslovují různé definice. Nelze než se všemi souhlasit. Každý vidí slovní úlohu z trochu jiného pohledu, každý vstupuje do problematiky z trochu jiné strany. Já se ve své práci budu zabývat úlohami matematického charakteru, které se zakládají na reálném kontextu. Nebudu pracovat s úlohami, které jsou podle označení některých autorů čistě matematické, tzn. uvozené slovy *vypočítej, uprav, odvoď* atd.

1.2.3 Rozdělení slovních úloh

Abychom se mohli pustit do práce s kontextem slovních úloh, je třeba celé téma smysluplně rozdělit. Tato oblast je tak rozsáhlá, že není možné v jedné práci obsáhnout všechny typy úloh. Proto opět nastíním, k jakému rozdělení došli ostatní autoři, a v závěru shrnu, jaké dělení jsem použila já a kterou oblast jsem si pro své zkoumání vybrala.

Blažková a kol. (2002) stejně jako Hruša a kol. (1968) dělí slovní úlohy na *jednoduché*, k jejichž řešení stačí pouze jedna početní operace, a *složené*, které je třeba řešit více než jednou početní operací. V jednoduchých slovních úlohách jsou obvykle zadány dva údaje a je třeba dopočítat zbylý, třetí údaj, díky kterému můžeme zodpovědět otázku položenou v úvodu. Ve složených slovních úlohách je třeba použít několik dílčích jednoduchých úloh, z nichž každá vede jen k jedné početní operaci. Toto dělení je poměrně přesné a jednoduché, ale hodí se spíše pro potřeby slovních úloh řešených na prvním stupni základní školy. Předpokládám, že na druhém stupni základní školy nebo na nižším gymnáziu už se žáci s mnoha jednoduchými úlohami nesetkají.

Z docela jiné strany přistupuje k dělení slovních úloh Odvárko a kol. (1990). Dělí slovní úlohy do tří základních skupin. První část nazývají *Slovní úlohy s aritmetickým a algebraickým obsahem.* Další část nazývají *Slovní úlohy s geometrickým obsahem,* poslední, třetí část jmenují autoři *Slovní úlohy s nematematickým obsahem.* Toto dělení není pro moji diplomovou práci nijak přínosné. Již v definici slovních úloh jsem se rozhodla, že první dvě části, které autoři zmiňují, nebudu nepovažovat za slovní úlohy. Další dělení úloh s nematematickým obsahem je v (Odvárko a kol., 1990). pouze naznačeno výčtem několika možností. Uvažuje se zde o úlohách ekonomické povahy, fyzikálních nebo úlohách s geometrickými objekty.

Detailněji je tato problematika zpracována v publikaci Vondrová, Rendl a kol. (2015), kde autoři nabízejí hned několik možných úhlů pohledu na rozdělení slovních úloh. Nejen že připouštějí již výše zmiňované dělení na úlohy *jednoduché* a *složené* nebo na úlohy s *matematickým* a *nematematickým kontextem,* ale dále nabízejí i jiné varianty. Například jednoduché úlohy dále dělí na přímé a nepřímé. V nepřímých úlohách vystupuje antisignál; slovo, které je ve slovní úloze pro řešitele zavádějící.

Dále Vondrová, Rendl a kol. (2015) uvádějí dělení používané již od 70. let 20. století. Úlohy jsou zde děleny na tři typy:

- úlohy na změnu stavu v čase, obsahující dynamickou situaci,
- úlohy na součet množství, obsahující statickou situaci,
- porovnávací úlohy.

Jako další mohou být doplněny úlohy, které mají charakteristiku jak úloh na změnu stavu, tak porovnávacích úloh. V dalších pracích pak někteří autoři např. (Smidt, Weiser, 1995) doplňují přehled např. o úlohy na násobení (*n*-tý násobek množství, násobení operátorů, násobení ve vzorci atd.).

Další možností je třídění podle tzv. sémantického ukotvení čísla, které můžeme najít v práci Hejného a Kuřiny (2001). Při tomto dělení je zohledněno, v jaké roli číslo v úloze vystupuje. Existují tři základní kategorie: *číslo jako kvantita* (např. 9 minut, 15 hrušek), *číslo jako identifikátor* (např. pokoj číslo 35, tramvaj číslo 9) a *číslo jako symbol* (např. číslo 3 je v pohádkách číslo magické). Role čísel mají vliv na obtížnost slovní úlohy. Úloha, kde vystupují všechna čísla jako stavy, je pro žáky jednodušší než ta, kde jsou čísla pouze v roli operátorů.

Novotná (2000) nabízí dvě nejčastěji využívané varianty dělení slovních úloh:

- dělení podle oblasti matematiky (opět se jedná o úlohy s matematickým nebo s nematematickým obsahem)
- dělení podle kontextu slovní úlohy (sem patří např. slovní úlohy o dělení celku na části, slovní úlohy o pohybu, slovní úlohy o společné práci, slovní úlohy o směsích)

Slovní úlohy lze podle kontextu dělit do několika skupin. První skupinu tvoří **slovní úlohy o dělení celku na části**. Podle J. Novotné je několik typů vztahů celku a jeho částí:

- je zadaný celek, chceme zjistit velikosti jeho částí
- známe velikosti částí a máme zjistit velikost celku
- z textu známe velikost celku a některé z částí, počítáme velikosti zbylých částí

- je známa velikost celku i jeho částí, zajímá nás počet daných částí.

Jiným typem úloh jsou **slovní úlohy o pohybu.** Jsou to úlohy specifické zadáním rychlostí, délky dráhy a času jednoho nebo více objektů. I ty můžeme rozdělit podle popsané situace:

- nejjednodušší fyzikální úlohy, kdy dopočítáváme rychlost, dráhu nebo čas pouze jednoho objektu,
- situace, kdy se objekty pohybují po stejné dráze ve stejném směru,
- situace, kdy objekty se pohybují po stejné dráze proti sobě.

Další typy jsou již pouze rozšířením výše zmíněných typů, např. pohyb po kruhové dráze nebo pohyb v pohybujícím se prostředí. Různé obtížnosti řešení dosáhneme také posunutím času startu jednotlivých objektů, nebo zadáním více než dvou objektů.

Jiný, v učebnicích samostatně uváděný, typ úloh jsou **slovní úlohy o společné práci.** V takových úlohách vystupuje zpravidla několik (dva a více) subjektů vykonávajících stejnou práci s různou výkonností. Jsou to nejčastěji úlohy o dělnících, zednících, přítocích a odtocích různých vodních ploch, strojích apod.

Poslední velkou součástí skupiny, kterou se budu v práci zabývat, jsou **slovní úlohy o směsích.** Zčásti jsou to úlohy využitelné v chemii (chemické roztoky různých koncentrací) a ve fyzice (směsi kapalin o různých teplotách), dále pak míchání různých směsí potravin, krmiv, lístků atd.

Tomuto dělení jsem se věnovala podrobněji, protože se jedná o rozdělení slovních úloh, které budu ve své práci používat i já. Třídění úloh podle kontextu je diskutabilní, má svoje zastánce i odpůrce a obě strany mají pádné argumenty. Nicméně pro zkoumání vlivu kontextu na řešení slovních úloh považuji právě rozdělení podle tohoto kritéria za nejvhodnější. Protože úlohy jsou již podle kontextu rozděleny, mohu se soustředit pouze na aktuálnost kontextu a ne na odlišnosti řešení jednotlivých typů úloh.

1.3 Ukotvení slovních úloh v rámcových vzdělávacích programech[1]

Ve školské matematice je pojem slovní úloha vnímán jako jedna z jejích velmi důležitých částí. Tak jsou slovní úlohy vnímány i v rámcovém vzdělávacím programu (RVP). Tady je konkrétně důležitost řešení slovních úloh prezentována v charakteristice vzdělávací oblasti.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.[2]

Proč jsou právě slovní úlohy pro rozvoj žáků a jejich aplikaci matematických dovedností tak důležité a nezbytné? Novým trendem v přípravě na vyučování je stanovování nejen cílů, ale také konkretizace kompetencí a dovedností, které by si žáci měli v průběhu vyučování, v každém předmětu, ale i v konkrétní hodině osvojit. Obecně sem na úrovni základního vzdělávání patří: **kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, sociální a personální, občanské a pracovní kompetence**. Podle rámcového vzdělávacího programu by žáci v hodinách matematiky měli být směrováni k osvojení a rozvíjení některých kompetencí. Zde vybírám z RVP pouze ty, které se nejvíce dotýkají problematiky slovních úloh:

- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů,*

[1] 1.3, 1.4 převzato z (Hejdrychová 2014, str. 15-18)

[2] http://www.nuv.cz/t/rvp

- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu,*
- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely,*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému,*
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu,*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby.*[3]

Pro naplnění těchto cílů jsou slovní úlohy naprosto nepostradatelné, protože se v nich všechny potřebné dovednosti spojují a prolínají.

1.4 Matematická gramotnost

Gramotnost je termín, který je v současné době hodně používaný. Nicméně význam termínu gramotnost se v pedagogických kruzích hodně změnil. *„Dříve byl za gramotného považován ten, kdo uměl na základní úrovni číst, psát a počítat. V současné společnosti znalostí získal tento pojem jiný význam a pod gramotností určité oblasti se skrývá nejenom znalost pojmů*

[3] http://www.nuv.cz/t/rvp

dané oblasti, jejich porozumění a pochopení v souvislostech, ale i dovednost využít je všestranně v praktickém životě. (Faltýn, Němečková, Zelendová, 2010, str. 4)

Rozlišujeme několik typů gramotností: kromě již zmíněné čtenářské je tu ještě **matematická, přírodovědná, finanční a ICT gramotnost.**

Pro matematiku je mezi těmito typy nejdůležitější vymezení a podporování matematické gramotnosti, ale v případě slovních úloh, kterým se v práci věnuji, se jeví jako velmi důležitá i gramotnost čtenářská a finanční. Právě čtení s porozuměním je základním kamenem správného řešení slovních úloh. Bohužel stále častěji se setkávám s tím, že žáci úlohu sice přečtou, ale nedokáží aplikovat správné matematické postupy. I když nějaký postup řešení najdou, nedokáží správně formulovat odpověď, protože ani neví, co vlastně vyřešili. Také finanční gramotnost je ve velké míře rozvíjena pomocí řešení slovních úloh. Právě v kontextu této gramotnosti nejčastěji narážíme na zastaralé úlohy, které svojí neaktuálností pohled žáků spíš zkreslují, než by finanční rozhled rozšiřovaly a upevňovaly.

Jak tedy vymezit pojem **matematická gramotnost**? Nejobecnější definice, kterou jsem našla, říká: *„Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.“*[4]

Mně osobně je bližší a srozumitelnější definice, kterou přednesl na konferenci O škole a vzdělávání F. Kuřina. *„Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter. K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické*

[4] Definice matematické gramotnosti podle PISA 2003, Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA. Praha: ÚIV, 2003 in: Faltýn J., Němčíková K., Zelendová E. (eds): Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele, Praha 2010 (str. 22).

gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy.“[5]

Matematická gramotnost se dá rozdělit do několika složek:

- situace a kontexty, do nichž jsou zasazeny problémy, které mají žáci řešit, a aplikovat tak získané vědomosti a dovednosti,
- kompetence, které se uplatňují při řešení problémů: matematické uvažování, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů,
- matematický obsah tvořený strukturami a pojmy nutnými k formulaci matematické podstaty problémů: kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost.

Pro dokreslení systému gramotností ještě v krátkosti uvádím vymezení pojmů čtenářská a finanční gramotnost.

Čtenářská gramotnost je celoživotně se rozvíjející vybavenost člověka vědomostmi, dovednostmi, schopnostmi, postoji a hodnotami potřebnými pro užívání všech druhů textů v různých individuálních i sociálních kontextech. Ve čtenářské gramotnosti se prolíná několik rovin, z nichž žádná není opominutelná:

- vztah ke čtení,
- doslovné porozumění,
- vysuzování a hodnocení,
- metakognice,
- sdílení,
- aplikace.

[5] Kuřina, F. Problémy matematického vzdělávání. In Bečvářová, M. (eds.) *Sborník materiálů konference O škole a vzdělávání.* Praha: MATFYZPRESS, 2007 in: Faltýn J., Němčíková K., Zelendová E. (eds): Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele, Praha 2010 (str. 21).

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace.

Definice finanční gramotnosti je strukturovaná. Finanční gramotnost jako správa osobních/rodinných financí zahrnuje **tři složky**: gramotnost peněžní, cenovou a rozpočtovou.

Tolik jen ve stručnosti k pojmu gramotností jako důležité složky řešení slovních úloh v hodinách matematiky. Zdůrazňuji, že dané gramotnosti jsou zároveň vstupní podmínkou pro řešení úloh, ale jejich rozvoj je také jedním z cílů, které řešením slovních úloh v matematice sledujeme. Proto myslím, že tvoří neopominutelnou složku této problematiky a je na místě je alespoň stručně připomenout.

1.5 Slovní úlohy v historických souvislostech[6]

„V naší literatuře existují hlasy, které svědčí o tom, že neznalost dějin vyučování matematice vede na jedné straně k opakování dřívějších chyb a na druhé straně k výzkumům, objevujícím již dávno praxí prověřené úspěšné postupy a metody, k nedostatečnému využívání dobrých zkušeností, a to jak v tvorbě osnov, učebnic, metodických prací, tak i v samotné vyučovací praxi. A to je jeden z důvodů užitečnosti historie vyučování matematice, potřeba samotné praxe vyučování matematice. Je žádoucí analyzovat různé matematické a metodické přístupy k jednotlivým tématům, vyzdvihnout jejich klady, poukázat na zápory, zavrhnout vývojem překonané přístupy pro poučení budoucím" (Mikulčák, 2010, str. 9).

Protože se v práci věnuji slovním úlohám, které jsou značně ovlivněné právě dobou svého vzniku, myslím, že je vhodné také připomenout, jak se vyvíjelo pojetí matematiky v průběhu historického vývoje. Historie matematiky je velmi obsáhlá. Čím více jsem o jejím vývoji

[6] 1.5 zpracováno podle: (Hejdrychová 2014, str. 19-29)

v průběhu historie našla a přečetla, tím více dalších informací jsem si potřebovala doplnit. Celé dějiny matematiky nejsou pro mou práci podstatné. Vybrala jsem si tedy jen malé úryvky, týkající se právě slovních úloh a rovnic, jejichž použití je při řešení slovních úloh, kterým se v práci věnuji, zásadní. Zde je nástin historických souvislostí v různých obdobích matematiky.

1.5.1 Vývoj matematiky ve starověku a středověku[7]

Podle většiny pramenů, patří k nim i A. Kolman (1969), spadají úplné počátky matematiky do starší doby kamenné, paleolitu. Až do 6. tisíciletí př.n.l. se utvářely první matematické pojmy, symboly a operace.

Podstatnější je ale období raně otrokářské společnosti, 6. tisíciletí př.n.l. až do vzniku otrokářské demokracie ve starověkém Řecku. Nejstarší období Egypta, Mezopotámie, Čína, Indie. Podle toho, na jaký materiál se informace zapisovaly, máme celkem jasnou představu o matematice egyptské a mezopotámské. Dochovaly se hliněné destičky a papyrus. **Z Egypta** pocházejí nejstarší dochované psané památky, mj. **Rhindův papyrus** a **Moskevský papyrus.** Zde dochází k prvnímu setkání s rovnicemi, nebo spíš hned se slovními úlohami. Již ve starověkém Egyptě se mluví o úlohách typu ´h´, které vedly k řešení lineární rovnicí ve tvaru $ax + bx + cx + \ldots + nx = p$. Jinak se jim říká úlohy o hromadách a prezentují první abstraktní úlohy řešené jednotnou metodou. Nejčastěji metodou **regula falsi** neboli falešný předpoklad. Příklad úlohy: „Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15." (V tomto zadání nás zarazí už to, že vlastně autor nepokládá žádnou otázku a předpokládá, že řešitel sám úlohu doplní.) **V Mezopotámii** se používala šedesátková soustava, v té již poměrně složitější výpočty na úrovni „malé" násobilky. V 5. stol. př. n. l. se zde poprvé objevil znak pro nulu. Zaujaly mě úlohy, které se řešily pomocí soustavy více

[7] Použité zdroje: Balda F.: Z dějin elementární matematiky, Praha 1959;
Kolman A.: Dějiny matematiky ve starověku, Praha 1969;
Konforovič A. G.: Viznačni matematični zadači, Kijev 1981;
Struik D. J.: A Concise History of Mathematics, London 1956.
Folta J., Horský Z., Nový L., Seidlerová I., Smolka J., Teich M.: Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století, Praha 1961;
Juškevič A. P.: Dějiny matematiky ve středověku, Praha 1978;

lineárních nebo kvadratických rovnic o více neznámých. Příklad úlohy: „Máme dva kruhy. Součet sedminy hmotnosti prvního kruhu a jedenáctiny hmotnosti druhého kruhu se rovná 1. Rozdíl hmotnosti prvního kruhu a její sedminy se rovná rozdílu hmotnosti druhého kruhu a její jedenáctiny. Určete hmotnost každého kruhu."

Zatímco v Egyptě nebo Mezopotámii se vývoj matematiky v podstatě ustálil a zastavil, ve starověkém **Řecku,** 8.-6. stol. př.n.l. až 4. stol. př.n.l., se matematika začala rychle rozvíjet a obohacovat. Přetvořila se v deduktivní vědu, odvozovala logické vztahy z axiomů a vět již dokázaných. Forma důkazů, se kterými Řekové přišli, se užívá dodnes. Bádání a vývoj matematiky byl postaven na osobnostech (Thales z Milétu, Pythagoras ze Samu, Aristoteles) a školách (Milétská, Pythagorejská). Matematika se zabývala hlavně geometrií, aritmetické důkazy byly řešeny převážně geometrickými metodami.

Když Alexandr Makedonský válečnými výboji vytvořil ohromnou říši zahrnující Řecko, Egypt, Mezopotámii, Persii, Přední Asii a další, mluvíme o **období helénistickém** a pozdějším vzniku **Římského císařství**, datováno od 4. století př.n.l. do 1. stol. př.n.l. Mnoho vědeckých poznatků se rozšířilo z Řecka dál, vzdělanci se helénizovali. Největší význam měla **Alexandrijská škola,** poprvé se začaly vydělovat samostatné obory jako astronomie, matematika nebo mechanika, které vytvořily počátek exaktní a soustavné přírodovědy. Rozvoj matematiky byl vyvolán praktickými potřebami společnosti. Matematika byla v praxi využitelnější, nedala se zpochybnit její souvislost s filosofií. Stále více se však projevovalo dělení matematiky nejen na aritmetiku a geometrii, ale i na logistiku a geodézii. A toto dělení nepovažovalo užitou matematiku za vědu, řadilo ji k řemeslům. I když s tím např. Archimédes nebo Hérón nesouhlasili, názor dlouho přetrvával. I přes tento protiklad dospěla alexandrijská matematika na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký kdy ve starověku byl. **Římané** svými vpády zastavili rozvoj matematiky v mnoha dobytých zemích. V Alexandrii např. shořela roku 31 př.n.l. velká část knihovny Músea. Důležitým mezníkem rozvoje nauky o rovnicích byla **Diofantova Aritmetika.** Diofantos z Alexandrie v ní mj. vyslovil dvě pravidla pro počítání rovnic:

1. Přičíst záporné členy, aby na obou stranách rovnice byly členy kladné.
2. Stejné odečíst od stejného, aby na každé straně rovnice zůstal pouze jeden člen.

Dalším autorem, který se věnoval úlohám řešeným rovnicí, byl **Metrodoros.** Ten se proslavil úlohami psanými ve verších. I když nejznámějším z nich je Diofantův epitaf, uvedu jinou úlohu: „Ó přemoudrý znalče času, jaký díl dne prošel již?“ „Z toho, co už prošlo dnes, vezmi dvě třetiny, pro svůj volný čas budeš mít ještě dvakrát tolik.“

Již dlouho před rozpadem Římského císařství se rozvoj matematiky přesunul na Daleký východ a matematika se rozvíjela zejména v Číně a Indii, přes arabské země, Írán a Střední Asii se postupně dostala do Evropy, kde v 15.-16. století byl její vývoj v podstatě zastaven.

Podívejme se tedy na dějiny matematiky v těchto zemích2 V **Číně** se sice nedochovalo dost podkladů o počátcích matematického vývoje, ale **Matematika v devíti knihách** od matematika Čang Cchanga, pravděpodobně z 2. stol. n.l., je velmi důležitým dílem. Objevuje se zde souhrn všech tehdejších znalostí a poznatků o matematice. Pro nás je důležitý, protože se zabývá i soustavami rovnic. Konkrétně v šesté knize *Poměrná rozdělování* jsou lineární *Přebytku a nedostatku* jsou řešeny úlohy vedoucí na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. V osmé knize *Fang čcheng* pak najdeme obecný algoritmus řešení soustav pro využívání determinantů, kterou známe od Leibnize.

V **Indii** se nejstarší zmínky o matematice objevilyv nábožensko-filosofických knihách, Védách. Další významná díla byla napsána mezi 5. a 16.stol.n.l. Ve velké části z nich jsou veršované poučky, které se žáci učili nazpaměť a my je bez dodatečného výkladu dost těžko dobře pochopíme. Ale ve všech knihách z různých období můžeme najít úlohy vedoucí k řešení lineárních rovnic a jejich soustav. Příklad z rukopisu Bakchšálí: „Ze čtyř lidí, kteří obětovali v chrámu, druhý dal dvakrát více než první, třetí třikrát více než druhý a čtvrtý čtyřikrát více než třetí, a všichni dohromady dali 132. Kolik dal první?“ V Indii rozvedli a začali používat i záporná čísla. I když byla známá už z Číny, teprve indičtí matematici dokázali využít více jejich důležité vlastnosti. A základy názvosloví a symboliky převzaté z Indie do naší matematiky používáme dodnes.

Ve **středověké Evropě** díky neomezené nadvládě církve a silnému vlivu inkvizice nastal velký úpadek kultury i vědy, která svými objevy popírala, podle církve, existenci Boha. Knihy antických filosofů a matematiky se ale paradoxně zachovaly v klášterních knihovnách, byť v oddělení zakázaných knih. Z hlediska matematiky nedocházelo tedy k významnějším objevům. Jen britské ostrovy se vyhnuly vědeckému útlumu, kláštery se stávaly kulturními centry. Jedním z představitelů irské vzdělanosti byl mnich **Alcuin**. Proslavil se na dvoře Karla Velikého, kam byl pozván, aby šířil vzdělání mezi negramotnou feudální šlechtou. Díky němu vznikla na území Francie a Německa spousta škol. Jeho stěžejním dílem byla sbírka Úlohy pro bystření mladých lidí. Obsahuje hodně zajímavých úloh, například i slovní úlohy řešené rovnicí nebo soustavou rovnic, např. úlohy o plnění nádrže několika zdroji.

V Evropě začaly vznikat i první univerzity, ale vzhledem k tomu, že matematika byla brána tou dobou jako vedlejší věda, nemělo to pro její rozvoj větší význam.

Další vývoj matematiky se už opět věnoval složitějším matematickým problémům. Proto bych chtěla přejít od výkladu obecné historie matematiky (se zdůrazněním rovnic a úloh k nim vedoucích) k výkladu o vývoji matematiky v Českých zemích, zaměřeným k výuce rovnic na různých typech škol.

1.5.2 Vývoj vzdělávání v matematice v českých zemích[8]

V období **raného feudalismu** znali Slované základní matematické pojmy. Po příchodu křesťanství, které vyžadovalo k organizaci kněze ovládající čtení i psaní, byly **Konstantinem a Metodějem** založeny i první školy na našem území, kde se učila i aritmetika a prvky astronomie. Po zrušení slovanské liturgie školy vznikaly při klášterech školy latinské, kde se vzdělávali budoucí kněží i první úředníci státu. S rozvojem obchodu, ekonomickým rozvojem měst bylo třeba znát z matematiky stále víc. Vznikaly tedy i městské školy. Obchodníci a řemeslníci používali přepočty různých měr a mincí s nejrůznějšími měniteli. Významné místo mezi výpočetními praktikami měla **trojčlenka** (zlaté pravidlo aritmetiky). Vývoj školy a vyučování byl v souladu s celoevropským vývojem.

[8] Zpracováno podle: Mikulčák J.: Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918, Praha 2010;
Odvárko O.:Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ Matematika a její aplikace, Havlíčkův Brod 2006;
Kraemer E. (předseda komise): Učební osnovy základní školy Matematika 5.-8. ročník, Praha 1987;
Križalkovič K. a kol.: Metodická příručka k učebnici Cvičení z matematiky pro 8. ročník ZŠ, Praha 1983;
Bobok J. a kol.: Metodická příručka k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy, Praha 1983
Gabriel, V.: Obrázky ze školství českého a rakouského v XVIII. A XIX. století, Praha 1891.

Na Pražské univerzitě, založené Karlem IV. roku 1348, byla prý úroveň vyučování matematice podle mistrů, kteří přišli z ciziny, vyšší než na univerzitě pařížské. Pro potřebu studentů zde vznikla učebnice **Algoritmus prosaycus.** Byla nejspíš určena žákům partikulárních škol 4 a teprve v případě nedostatečné přípravy i studentům artistické fakulty univerzity. Učebnice obsahovala kapitoly odpovídající požadavkům na studenty bakalářského studia.

V **době předbělohorské**, v 15.století, se úroveň vyučování matematice v českých školách snížila. Na městských školách se nevyučovala vůbec, na univerzitě pouze čtyři základní početní výkony. V 16. století se řízení městských škol ujala univerzita. Rektor vydával školní řády s učebními osnovami, dosazoval učitele, neboť školy byly přípravkami pro univerzitní studium. Na matematiku ale čas většinou nezbýval. Proto vznikaly na vesnicích školy „dětinské“, ve městech školy „pokoutní“, kde se děti, budoucí obchodníci a řemeslníci, učily číst, psát a počítat česky. Proto od roku 1530 do roku 1615 vzniklo pět česky psaných učebnic. Velká pozornost se v nich věnuje **trojčlence** a metodě **regula falsi,** pomocí níž se řeší úlohy dnes řešené rovnicemi. Učebnice z roku 1567 obsahovala i oddíl věnovaný **cossu,** tj. metodě **řešení úloh rovnicemi,** zatím jen slovně, bez matematické symboliky. I v té době byl vývoj vyučování matematiky v našich zemích srovnatelný se zbytkem Evropy.

Po **třicetileté válce** museli všichni vzdělaní nekatolíci odejít do exilu a úroveň elementárních škol šla prudce dolů. Na jezuitských gymnáziích se matematika vůbec nevyučovala, na piaristických přípravkách pro vyšší latinskou školu, gymnázium, sice výuka matematiky probíhala, jenže na samotných latinských školách už zase ne. A na univerzitě se přednášela jen jediný rok.

Až **18. století** přineslo zlepšení. Války a vznik manufaktur, to byla příčina potřeby mít více důstojníků a úředníků s vyšším vzděláním. Rakousko-Uhersko, pod které české země správně patřily, bylo první v celé Evropě, kde se začalo školství řídit centrálně, pomocí celostátních nařízení. Na gymnáziích se matematika učila stále jen sporadicky. Vysokoškolské učebnice musely proto obsahovat úplné základy matematiky. Učivo se nedalo vzhledem k náročnosti ostatních předmětů zvládnout, proto se výuka matematiky posunula již na gymnázia. Protože ale učitelé sami postrádali jednotné vzdělání, bylo rozhodnuto o založení vzorových hlavních škol, ve kterých se zřizovaly přípravky pro budoucí učitele. Vznikaly také první metodické příručky. Zaujalo mě zejména doporučení pro výuku matematiky:

- Předvést první příklad na tabuli a obdobný příklad dát řešit některému žáku na tabuli, ostatní žáci mají totéž řešit na svých tabulkách;
- Nadiktovat žákům jinou úlohu téhož typu a nechat je samostatně řešit, procházet třídou a kontrolovat postup žáků; správný postup nekomentovat, nesprávný doprovodit jen slovy *chyba*, ale neukázat žáku, kde udělal chybu;
- Dbát na úpravnost zápisů na tabulkách, kontrolovat výpočty žáků hromadně, případně zajistit opravu souseda sousedu apod.

Zvýšení úrovně výuky matematiky umožnilo zvýšení úrovně i na gymnáziích a v konečném důsledku i na univerzitě.

Za **národního obrození**, v 19.stol., byla povinná školní docházka od šesti do dvanácti let. V politickém zřízení škol z roku 1805 bylo nařízeno „*Počty neprobírat příliš hluboko až do jemných úloh a početních druhů, ale vycvičit dovednost v tzv. počítání z hlavy neboli počítání zpaměti s čísly bez číslic…“* (Mikulčák, 2010, str. 100). Pokrokové bylo z dnešního pohledu individuální vyučování, kdy učitel žáky vzdělával podle úrovně, na jaké v matematice byli. V té době byla metoda řešení úloh **regula falsi** (předchůdce rovnic) vrcholem výuky. Tu ale podle V. Gabriela (1891) žáci ovládali pouze mechanicky, mírně změněné zadání je zmátlo tak, že úlohu nedokázali vyřešit. **J. H. Pestalozzi** se postavil proti mechanickému drilování, požadoval, aby se počty staly středem vyučování, aby se opíraly o názor a rozumové usuzování. V metodice pro vyučování z roku 1806 byla i část o rovnicích. V té bylo zdůrazněno, že zručnost při řešení rovnic získají žáci jen cvikem, proto musí mít učitel zásobu úloh. Pro řešení slovních úloh velí instrukce volit úlohy blízké praxi.

Roku 1848 vzniklo první ministerstvo školství. Co to znamenalo? Vydání oficiálních učebních osnov, učebnic i metodik. Ty doporučovaly, aby učitel k výuce používal dialog, nechal žákům dostatek času k rozmyšlení postupu, než jim začne pomáhat. A jak metodika 19. století definuje slovní úlohy? Jsou to problémy, které slovy popisují reálnou situaci a tím určují úlohu, která se má řešit. Často se využívají na počátku výuky jako motivace. Později pak jsou slovní úlohy vědomou aplikací získaných dovedností na řešení praktických problémů. Úlohy se dělí na pošty sousudkové (řešené úsudkem), pošty řetězové (které dnes řešíme trojčlenkou), počet spolkový (o dělení zisku v poměru vložených částek) a počet směšovací, který dnes řešíme pomocí rovnic. (Mikulčák, 2010).

Ve **dvacátém století** se osnovy ustálily, učivo rovnic i slovních úloh se přesouvalo mezi sedmým a osmým (resp. devátým) ročníkem. Protože docházelo ke změnám délky povinné školní docházky, bylo třeba učivo rozvolnit nebo stěsnat. Ve druhé polovině dvacátého století už byly slovní úlohy tematicky rozdělené a metody řešení se výrazně neměnily.

2 Slovní úlohy v učebnicích pro 2. stupeň základní školy a nižší třídy víceletého gymnázia

2.1 Úvod

Protože téma mojí diplomové práce inspirovalo to, že v učebnici, kterou jsem při práci učitelky používala, byl nedostatek procvičovacích úloh, rozhodla jsem se porovnat dostupné učebnice, v nichž se témata slovních úloh objevují. V diplomové práci se věnuji slovním úlohám o dělení celku na části, slovním úlohám o pohybu, slovním úlohám o společné práci a slovním úlohám o směsích. Proto jsem z řad učebnic vybrala díly, ve kterých se tyto typy slovních úloh vyskytují. Při porovnávání jednotlivých publikací jsem se zaměřila na různé strategie dělení slovních úloh do kapitol. Zajímalo mě, kolik prostoru autoři věnují řešeným příkladům a kolik úloh je v učebnici k procvičení. V neposlední řadě jsem hodnotila, zda mají v učebnici všechny úlohy aktuální kontext, nebo jsou zařazeny i úlohy zastaralé a historické. Předpokládám, že v učebnicích jsou publikovány zejména úlohy aktuální.

2.2 Učebnice pro 2. stupeň základní školy a nižší třídy víceletého gymnázia

Pro potřeby diplomové práce jsem vybrala učebnice, které obsahují kapitoly týkající se slovních úloh řešených rovnicí. Protože témata týkající se slovních úloh, kterým se v práci věnuji, jsou v učebnicích zařazena buď v osmém ročníku v kapitole o rovnicích, nebo v devátém ročníku v kapitole o soustavách rovnic, musela jsem v některých řadách vybrat učebnice z obou zmíněných ročníků. Výběr učebnic vychází ze seznamu učebnic schválených Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky (dále jen MŠMT).[9] Podle tohoto seznamu jsem vybrala učebnice matematiky pro osmý a devátý ročník základní školy a z nich jsem potom vybrala podle obsažených témat následujících

[9] http://www.msmt.cz/uploads/VKav_200/Ucebnice_2014_03/Ucebnice_2014_III_ZS.docx

dvanáct učebnic (viz tabulka), kterým se budu podrobně věnovat v dalším textu. Pořadí učebnic v tabulce a v dalším textu je převzaté podle výše zmíněného seznamu MŠMT. [10]

Matematika a její aplikace (2. stupeň)

autor: název učebnice; číslo vydání, kterému byla udělena schvalovací doložka							
číslo jednací schvalovací doložky	datum vydání schvalovací doložky	termín platnosti schvalovací doložky	orientační cena v Kč podle sdělení nakladatelství	číslo jednací schvalovací doložky před prodloužením platnosti **) (stav od března 2010)	materiál nosiče učebnice *)	SUŘ [11]	název nakladatelství
Coufalová,J. a kol.: Matematika pro 8. ročník základní školy; vydání: 1., doložka prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Fortuna
MSMT-17304/2017	24.8.2017	24.8.2023	119	9114/2011-22	P	Ano	
Coufalová,J. a kol.: Matematika pro 9. ročník základní školy; vydání: 1., doložka prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Fortuna
MSMT-17304/2017	24.8.2017	24.8.2023	119	9114/2011-22	P	Ano	
Binterová,H.;Fuchs,E.;Tlustý,P.: Matematika 8 - Algebra, Geometrie (učebnice a pracovní sešit); vydání: 1., platnost doložky prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Fraus
MSMT-16194/2015	13.7.2015	13.7.2021	U 139 + 99 + PS po 69	7206/2009-22	P	Ano	
Rosecká,Z. a kol.: Algebra 8, Geometrie 8, pracovní sešity Počtářské chvilky 8, Rovnice, slovní úlohy I, Geometrie 8; vydání: 1.							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Nakladatelství Nová škola Brno, s.r.o.
MSMT-20141/2015	14.7.2015	14.7.2021			P	Ano	
Hejný,M. a kol.: Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia; vydání: 1.							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	H-mat, o.p.s.
MSMT-23066/2017	13.11.2017	13.11.2023	125		P	Ano	
Jedličková, M.;Krupka,P.;Nechvátalová,J.: Matematika pro 2. stupeň ZŠ – Výrazy a rovnice 1 (učebnice a pracovní sešit); vydání: 1.							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Nová škola, s.r.o.
MSMT-15345/2016	23.8.2016	23.8.2022	59 + 49		P	Ano	
Jedličková, M.;Krupka,P.;Nechvátalová,J.: Matematika pro 2. stupeň ZŠ – Výrazy a rovnice 2 (učebnice a pracovní sešit); vydání: 1.							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Nová škola, s.r.o.
MSMT-30516/2017	6.2.2018	6.2.2024	59 + 49		P	Ano	
Molnár,J. a kol.: Matematika pro 9. ročník ZŠ (učebnice a pracovní sešit - žákovská/učitelská verze); vydání: 1., platnost doložky prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Prodos
MSMT-1205/2013-210	15.2.2013	15.2.2019	99/133 + po 42/63	1785/2007-22	P	Ano	
Herman,J.;Chrápavá,V.;Jančovičová,E.;Šimša,J.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Rovnice a nerovnice; vydání: 1., platnost doložky prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Prometheus
MSMT-9942/2014	21.3.2014	21.3.2020	64	29327/2007-22	P	Ano	

[10] Seznam zachycuje stav ke dni 30.4.2018. Přehled učebnic, kterým byla udělena schvalovací doložka po tomto datu, je průběžně zveřejňován ve Věstníku MŠMT.

[11] Informace, zda je učebnice součástí ucelené řady učebnic (SUŘ)

Šarounová,A. a kol.: Matematika 8, 1. a 2. díl; vydání: 1., platnost doložky prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Prometheus
MSMT-6350/2016	11.3.2016	11.3.2022	88 + 88	2486/2010-22	P	Ano	
Odvárko,O.;Kadleček,J.: Matematika pro 8. ročník ZŠ (učebnice 1., 2. a 3. díl, pracovní sešit); vydání: 2. přepracované							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	Prometheus
MSMT-1905/2018	22.1.2018	22.1.2024	115 + 112 + 112 + 162	MSMT-27842/2012-22	P	Ano	
Půlpán,Z. a kol.: Matematika pro 8. ročník ZŠ - Algebra (učebnice a pracovní sešit); vydání: 1., platnost doložky prodloužena							
číslo jednací:	vydáno dne:	platnost do:	cena (v Kč):	předchozí č.j.	nosič:	SUŘ	SPN, a.s.
MSMT-31876/2015	18.11.2015	18.11.2021	125 + 79	2829/2009-22	P	Ano	

U každé učebnice v textu uvádím, zda text obsahuje samostatnou kapitolu o slovních úlohách, nebo jsou slovní úlohy pouze součástí nějaké kapitoly, nejčastěji kapitoly o rovnicích. V obou případech stručně nastiňuji strukturu kapitoly.

Dále slovní úlohy dělím do skupin podle aktuálnosti jejich kontextu. Zajímá mě četnost úloh spadajících do každé skupiny. Zejména se soustředím na to, zda učebnice obsahuje úlohy zastaralé a historické. Slovní úlohy jsem rozdělila do tří skupin:

- Slovní úlohy **aktuální** jsou takové, které sice v současnosti splňují podmínku aktuálnosti, ale obsahují pojmy nebo jednotky, s nimiž data v zadání postupem času svoji aktuálnost ztrácí. Nejčastěji se jedná o slovní úlohy s finančním kontextem, kde se ceny neustále mění. Mezi aktuální úlohy zařazuji i takové, které jsou svým kontextem nadčasové. Jsou to úlohy takové, jejichž kontext je neovlivnitelný časem. Jsou to často úlohy s geometrickým nebo aritmetickým kontextem (myslím si číslo, které…). Dále sem spadají úlohy o věku. Jinými nadčasovými úlohami jsou takové, které řeší pouze konkrétní časové úseky nebo vzdálenosti, protože jednotky času i délky jsou aktuální stále.
- Slovní úlohy **zastaralé** jsou takové, kde se vyskytuje pojem nebo hodnota, které současní žáci již nerozumí. Toto nepochopení jim pak komplikuje řešení úlohy a intuitivní provedení odhadu nebo zkoušky.
- Slovní úlohy **historické** jsou takové, které jsou přejaté z různých historických pramenů. V učebnici se uvádí i s odkazem k původu úlohy. Jsou to úlohy díky historickému kontextu i jazyku často zařazené jako náročné.

2.2.1 Coufalová, J. a kol.: Matematika pro 8. ročník základní školy

Slovní úlohy se objevují v kapitole *8 Lineární rovnice* na stranách 127 až 142. V úvodu kapitoly se žáci seznamují s pojmy rovnost, rovnice, ekvivalentní úpravy rovnice. Následuje řešení lineární rovnice se zlomky a diskuze o počtu řešení rovnice. Autoři v učebnici pracují s grafickým znázorněním rovnosti pomocí modelu vah. Na vahách odvozují i ekvivalentní úpravy rovnice. Různé možnosti postupu úprav demonstrují pomocí žákovských řešení.

V závěru kapitoly se nachází podkapitola *8.6 Slovní úlohy.* Tato podkapitola obsahuje, kromě obecného návodu jak řešit slovní úlohy, pouze **slovní úlohy o dělení celku na části**. Postup řešení je ukázán na jednom řešeném příkladu. Následuje čtrnáct slovních úloh k procvičování. Z nich deset je nadčasových buď s aritmetickým a geometrickým kontextem, nebo zadaných tak, že jejich téma zastarat nemůže. Další čtyři jsou ještě aktuální, ale díky počítání s různými předměty a jejich cenou rychle zastarávají. Například cenu čaje 7,50 Kč nebo parkovné 20 Kč za dopoledne je sice asi možné někde objevit, ale pravděpodobné to již není. Žádné historické úlohy zastoupeny nejsou.

2.2.2 Coufalová, J. a kol.: Matematika pro 9. ročník základní školy

V kapitole *3 Řešení lineárních rovnic* v této učebnici jsou kromě lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli zařazeny už jen slovní úlohy. Ty jsou podle kontextu rozdělené do tří podkapitol *3.2 Slovní úlohy o pohybu* na str. 62-64*, 3.3 Slovní úlohy o směsích* na str. 65-68*, 3.4 Slovní úlohy o společné práci* na str. 68-70.

V podkapitole 3.2 je uveden jeden řešený příklad. Jedná se o slovní úlohu o pohybu ve stejném směru. Žádný další řešený příklad již v této kapitole není. Důkladně zpracovaná je návodná tabulka k postupu řešení. V tabulce je zdůrazněna důležitost náčrtku, tabulky a uvědomění si vztahů mezi veličinami. V učebnici je nabízen pouze jeden možný postup řešení. V části k procvičení se nachází deset úloh, které se dají zařadit mezi úlohy s aktuálním kontextem.

V podkapitole *3.3 Slovní úlohy o směsích* je opět jeden řešený příklad. V příkladu jsou míchané bonbony do směsi. Mezi třinácti úlohami k procvičení je jedna, která je vyřešena pouze částečně a uvádí žáky do problematiky směsí různých roztoků. Všechny úlohy v této kapitole jsou aktuální. Poslední úloha by mohla být považována za zastaralou, pan Pilný, který pracuje za 10.520 Kč měsíčně, je sice uvěřitelný, nicméně trochu demotivující.

Třetí typ úloh je zmíněn v podkapitole *3.4 Slovní úlohy o společné práci*. Autoři si opět vystačili s jediným řešeným příkladem a nastínili žákům pouze jednu možnost řešení. To je u takto obtížného tématu málo. Deset slovních úloh, které jsou určeny k nácviku algoritmu řešení, má aktuální kontext.

V závěru kapitoly je ještě uvedena jedna sada úloh k procvičení. Úlohy jsou namíchané z témat předchozích tří kapitol. Je tu osm úloh, z nichž sedm je aktuálních a jedna zastaralá. Pojem dostavník, objevující se v poslední úloze, je pro žáky již zastaralý.

2.2.3 Binterová, H.; Fuchs, E.; Tlustý,P.: Matematika 8 – Algebra

V učebnici nakladatelství Fraus jsou slovní úlohy zařazeny do kapitoly *Rovnice* na str. 72-93. Již v podkapitole *2 Složitější lineární rovnice* jsou uvedeny první slovní úlohy. Jedná se o slovní úlohy o dělení celku na části. Ve třetí podkapitole *Kde se setkáme s rovnicemi?* jsou zařazeny úlohy s fyzikálním kontextem. Žáci v rovnicích procvičují zejména dosazování do vzorců. Další typy slovních úloh jsou obsaženy v podkapitole *4. Obávané slovní úlohy? Pomohou nám rovnice!* V této poslední části jsou řešeny slovní úlohy o pohybu, slovní úlohy o směsích a slovní úlohy o společné práci. K těmto obvykle zmiňovaným typům jsou ještě přiřazeny dva řešené příklady úloh s aritmetickým průměrem.

Ve čtvrté podkapitole je sedm řešených příkladů. Autoři ukazují řešení úlohy o směsi teplé a studené vody, tři úlohy o pohybu a jednu slovní úlohu o společné práci. U některých úloh jsou ukázány různé možnosti řešení.

Pro procvičení učebnice obsahuje pět slovních úloh. Všechny slovní úlohy mají aktuální kontext. Jediná úloha, která se tváří jako historická, je obsažena ve druhé podkapitole. Úloha je hádankou ze života slavného matematika Diofanta. Není u ní ovšem uveden zdroj ani datace vzniku.

2.2.4 Rosecká, Z. a kol.: Algebra 8, Rovnice, slovní úlohy

Slovní úlohy jsou zařazeny v samostatné kapitole *VII. Slovní úlohy řešené pomocí lineárních rovnic* na str. 85-95. V úvodu je zopakováno tvoření matematických výrazů ze slovního zadání. Na dvou jednoduchých úlohách je ukázán přechod od grafického řešení k řešení rovnicí. Dále jsou zařazeny slovní úlohy o dělení celku na části a slovní úlohy, které jsou v učebnici označené jako *slovní úlohy s geometrickými náměty a slovní úlohy-směsi.*

Kapitola obsahuje sedm řešených příkladů různých typů výše zmíněných slovních úloh. K procvičení je v učebnici padesát slovních úloh. Všechny úlohy jsou aktuální. Žádná z úloh není historická. Značná část úloh má geometrický (dvanáct), nebo aritmetický (šest) kontext. Celá publikace je řešena podle mě chaoticky. Stránky učebnice jsou rozděleny do několika částí. Je pro mě složité se v učebnici orientovat. S celou řadou učebnic je asi třeba nějakou dobu soustavně pracovat, aby se stala užitečným pomocníkem.

2.2.5 Hejný, M. a kol.: Matematika E

Řada učebnic autorů Hejný a kol. je pojata úplně jinak než ostatní řady učebnic. Protože v učebnicích nejsou uvedeny předpokládané ročníky, ve kterých by se s nimi mělo pracovat, je obtížné najít sledované téma. Slovní úlohy jsou obsaženy ve všech dílech učebnic. V díle A začínají jednoduché slovní úlohy řešené jedním snadným výpočtem. V díle E jsem již objevila slovní úlohu o společné práci (plnění bazénu dvěma přítoky). Nicméně vzhledem k rozvržení učebnic je složité sledovat slovní úlohy konkrétního typu. Všechny slovní úlohy, na které jsem v učebnicích narazila, byly kontextem aktuální.

2.2.6 Jedličková, M.; Krupka, P.; Nechvátalová, J.: Matematika pro 2. stupeň ZŠ – Výrazy a rovnice 1

Slovní úlohy jsou v učebnici zařazeny v kapitole *9 K čemu nám jsou slovní úlohy?* Tato kapitola se nachází v závěru publikace na str. 67-71. V jejím úvodu jsou vysloveny obecné zásady řešení slovní úlohy. Následuje šest řešených příkladů. Dvě z úloh jsou s geometrickým kontextem, dvě jsou úlohy o pohybu, jedna úloha o směsích a poslední úloha je o dělení celku na části.

K procvičení autoři zařadili šest úloh. Úlohy nejsou nijak rozděleny. Všechny úlohy jsou aktuální. Není zařazena žádná úloha historická.

2.2.7 Jedličková, M.; Krupka, P.; Nechvátalová, J.: Matematika pro 2. stupeň ZŠ – Výrazy a rovnice 2

Slovní úlohy jsou v učebnici zařazeny v kapitole *3 Pomocí rovnic řešíme slovní úlohy* na str. 16-27. V úvodu kapitoly jsou připomenuty základní pojmy vztahující se k tématu rovnic. Jsou tu vysvětleny pojmy: neznámá, kořen rovnice, ekvivalentní úpravy atd. Dále jsou tu zopakovány základní kroky, kterých využíváme při řešení slovní úlohy, a na příkladu hned názorně předveden postup řešení jedné z úloh (o pohybu). Následují čtyři řešené příklady slovních úloh o společné práci, i když pojem úlohy o společné práci není zmíněn. V části k procvičování jsou dvě úlohy o společné práci a jedna úloha o pohybu. Všechny použité úlohy jsou aktuální.

V další kapitole *Jedna neznámá mnohdy nestačí* jsou slovní úlohy zastoupeny také. Zaměřují se však na řešení pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Ty ve své práci nezmiňuji.

2.2.8 Molnár, J. a kol.: Matematika pro 9. ročník ZŠ

Kapitola *III. Lineární rovnice* obsahuje 5 podkapitol. Třetí podkapitola se jmenuje *Slovní úlohy* a osahuje řešení několika typů slovních úloh. Prvním typem úloh jsou slovní úlohy o dělení celku na části. Po dvou řešených příkladech následuje dvanáct úloh k procvičení. K těmto úlohám jsou přiřazeny ještě čtyři slovní úlohy využívající k řešení počítání s procenty. Další dva řešené příklady a dvě slovní úlohy k procvičení jsou o směsích. Všechny slovní úlohy mají aktuální kontext.

Druhou skupinu úloh uvádí tabulka, kde autoři žákům odvozují vzorec pro výpočet rychlosti z jednotky rychlosti km/h, kterou žáci dobře znají. Vzápětí ze získaného vzorce vyvozují i zbylé varianty vzorce (pro výpočet dráhy a času). Algoritmus výpočtu je ukázán na čtyřech řešených příkladech a k procvičení je žákům nabídnuto deset slovních úloh o pohybu dvou těles stejným i opačným směrem. Všechny úlohy jsou aktuální.

V závěru podkapitoly týkající se slovních úloh jsou zařazeny ještě dva řešené příklady, kde autoři zdůrazňují nutnost ověření reálnosti výsledku.

V další z řady učebnic nakladatelství Prodos *Matematika 9,* jsou v kapitole *III. Rovnice (nejen) s neznámou ve jmenovateli* uvedeny tři řešené příklady a sedm slovních úloh k procvičení. Všechny úlohy jsou aktuální.

2.2.9 Herman, J.; Chrápavá, V.; Jančovičová, E.; Šimša, J.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Rovnice a nerovnice

Slovním úlohám jsou věnovány kapitoly *3 Slovní úlohy řešené rovnicemi* a *5 Úlohy o pohybu*. V úvodu třetí kapitoly je na dvou jednoduchých příkladech vysvětleno, jak správně sestavit rovnici. Ve dvou odstavcích souvislého textu jsou formulovány zásady, které je užitečné při řešení slovní úlohy dodržet. Postup je následně ukázán na pěti řešených příkladech. V těch jsou řešeny slovní úlohy o dělení celku na části. Následuje čtrnáct příkladů k procvičování. V těch jsou zastoupeny slovní úlohy s kontextem geometrickým i algebraickým, úlohy o věku nebo úlohy s různými finančními kontexty. Všechny úlohy jsou aktuální.

V páté kapitole jsou uvedeny slovní úlohy o pohybu. Nejprve je připomenut vzorec pro výpočet rychlosti ($v = \frac{s}{t}$), který by žáci měli znát již z hodin fyziky, a definovány pojmy průměrná rychlost a stálá rychlost. Následuje odvození vzorců pro výpočet dráhy a času. Připomenutí převodů jednotek rychlosti k tématu také patří. Po jednom řešeném příkladu mohou žáci v šesti úlohách procvičit nejjednodušší úlohy, pro jejichž zvládnutí stačí dosadit do jednoho z odvozených vzorců. V oddíle věnovaném složitějším úlohám se autoři věnují úlohám o současném pohybu dvou těles. Ve čtyřech řešených příkladech je popsáno řešení s důrazem na grafické znázornění. V jiném z příkladů je ukázán postup pomocí doplněné tabulky. V dalším pak žáci vidí, jak je možné postupně odvodit a použít všechny potřebné vztahy mezi veličinami. V této kapitole je také pět slovních úloh k procvičení. Všechny úlohy mají aktuální kontext.

V následném *Cvičení 3* jsou kromě jiných úloh obsaženy také slovní úlohy o pohybu. Jedná se o patnáct slovních úloh. Všechny úlohy mají aktuální kontext.

2.2.10 Šarounová, A. a kol.: Matematika 8, 2. díl

V kapitole *3 Rovnice* v této učebnici jsou kromě lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli zařazeny i slovní úlohy. Podkapitola *3.5 Slovní úlohy* začíná formulací obecných zásad, kterými by se žáci měli při řešení slovních úloh řídit. Následují tři řešené příklady a osm úloh k procvičení. Jeden z příkladů je kontextem zastaralý. Známky na dopis v hodnotě 4,60 Kč a na pohlednici za 4 Kč nejsou aktuální již dlouho. Ostatní úlohy jsou aktuální.

V oddílu *3.5.1 Úlohy o pohybu* jsou dvě řešené slovní úlohy, jedna je o pohybu stejným směrem, ve druhé jedou auta proti sobě. Následuje třináct slovních úloh. První z nich spadá do skupiny zastaralých. Zadání mluví o zisku světového rekordu v běhu na 200 m. Běžec Ménea ale již dávno není světovým rekordmanem. Přesto v úloze není uvedeno žádné datum a ze zadání nelze poznat, že byl rekord již překonán. Ostatní úlohy jsou aktuální.

Poslední oddíl kapitoly o rovnicích jsou *3.5.2 Úlohy o společné práci.* Oddíl obsahuje tři řešené příklady a devět úloh k procvičení. Autoři předkládají pouze jeden způsob řešení. Všechny úlohy jsou aktuální.

2.2.11 Odvárko, O.; Kadleček, J.: Matematika pro 8. ročník ZŠ (2. díl)

V druhém dílu učebnice autorů Odvárka a Kadlečka se Slovní úlohy nacházejí v kapitole *2 Rovnice kolem nás* na str. 26-42. Jedná se o druhé přepracované vydání.

První část kapitoly je nazvána *2.1 Jak na slovní úlohy* a je uvedena třemi řešenými příklady. Jedná se o slovní úlohy o dělení celku na části. Mezi těmito příklady je vložena tabulka s obecnými zásadami pro řešení slovních úloh. Následuje cvičení se čtrnácti úlohami. Již mezi příklady se nachází jedna úloha označená jako „zápis středověkého kronikáře“. V úloze jsou použity zastaralé výrazy, které se již v běžném jazyce neužívají (např. panoš, vozkové, dvořané). Nicméně vzhledem k tomu, že není uveden žádný zdroj ani datum vzniku, nelze považovat úlohu za historickou. Mezi úlohami k procvičení jsou zařazeny dvě historické. Úloha 10 pochází ze *Rhindova papyru* a podle datace vznikla asi 2000 let př. n. l. Úloha 11 je převzata z knihy *Siddhantaciromani* a je datována do 12. stol n. l. I v těchto dvou úlohách jsou použity neobvyklé výrazy a archaický jazyk, ale u úloh předkládaných jako historické je to obvyklé a učitel u nich musí počítat s tím, že žáci mohou potřebovat s porozuměním textu pomoc. Ostatní úlohy v přepracovaném vydání jsou aktuální.

Druhá část kapitoly *2 Rovnice kolem nás* se nazývá *2.2 Proti sobě i za sebou.* Jak název napovídá, jedná se o slovní úlohy o pohybu. Autoři ve třech řešených příkladech kladou důraz na grafické znázornění a následné vyjádření situace rovnicí. Vůbec nezmiňují možnost práce s doplněnou tabulkou. Řešené příklady obsahují všechny možnosti pohybu ve zmíněném typu úloh (pohyb proti sobě, pohyb stejným směrem a pohyb s různou dobou startu). Následuje cvičení s osmi slovními úlohami. Pouze *úloha 7* je historická, přejatá z učebnice z roku 1530. Ostatní úlohy jsou aktuální.

Třetí část kapitoly o využití rovnic je pojmenována *2.3 Každý sám, nebo společně?* V této části jsou zařazeny úlohy o společné práci. Jsou v ní uvedeny tři řešené příklady. Jeden z nich je řešen dvakrát, pokaždé autoři ukazují jinou možnost řešení. Následuje deset slovních úloh k procvičení. Všechny úlohy jsou aktuální.

2.2.12 Půlpán, Z. a kol.: Matematika pro 8. ročník ZŠ - Algebra

Kapitola *3. Rovnice kolem nás* na str. 95-110 je rozdělena na čtyři části: *A Slovní úlohy, B Úlohy o pohybu, C Úlohy o práci a výkonu lidí i strojů, D Úlohy o směsích*.

V části A jsou řešeny slovní úlohy o dělení celku na části. Po dvou řešených příkladech následuje třicet úloh k procvičení. Všechny úlohy jsou aktuální.

V části B jsou prezentovány úlohy o pohybu. Ve dvou řešených příkladech je pozornost věnovaná zejména rozboru situace a důraz je kladen na pochopení vztahů mezi použitými veličinami. Po grafickém znázornění jsou údaje zaznamenány do přehledné tabulky. Autoři nabízejí pouze jednu možnost řešení. Následuje soubor jedenácti úloh k procvičení probraného typu úloh. Všechny úlohy jsou aktuální.

Ve třetí části označené písmenem B jsou tři příklady, řešené vyplněním tabulky a následně sestavením rovnice. Následuje třináct slovních úloh s aktuálním kontextem k procvičení.

Čtvrtá část *Úlohy o směsích* začíná třemi řešenými příklady. U jednoho příkladu je uvedeno, že se jedná o rozšiřující učivo. Rozbory úloh jsou zaznamenány v tabulkách, z nichž jsou následně vyjádřeny rovnice pro samotný výpočet. Na závěr je předloženo pět slovních úloh ke cvičení. Všechny úlohy jsou aktuální.

Žáci jsou od začátku nabádáni, aby sami prováděli odhady výsledků a pak je porovnávali s vypočítanými výsledky. Aby takové odhady mohli žáci provádět, je třeba, aby úlohy byly aktuální a měly zadání, kterému žáci dobře rozumí. To je v učebnici splněno.

2.3 Závěr

Po prostudování dostupných učebnic musím zkonstatovat, že přístup jednotlivých autorů k tématu řešení slovních úloh se velmi liší. Zatímco Jedličková ve své publikaci předkládá pouze šest úloh k procvičení, Rosecká nabízí hned padesát slovních úloh všech typů. Většina autorů uvádí deset až třináct úloh k procvičení probraného tématu. Většina učebnic obsahuje pouze jediný postup správného řešení. Výjimku tvoří učebnice autorů Odvárka a Kadlečka a učebnice pro gymnázia kolektivu autorů kolem J. Hermana. Podle mého očekávání většina učebnic obsahuje úlohy s aktuálním kontextem. Pouze ve dvou případech se objevují úlohy historické, ve třech učebnicích jsem narazila na úlohy zastaralé.

3 Praktická část

3.1 Úvod

Již v době, kdy jsem zpracovávala svoji bakalářskou práci a začala se více zabývat slovními úlohami, začala jsem přemýšlet, jak tvrzení, která jsem v práci vyslovila, potvrdit, nebo vyvrátit. Proto, když jsem hledala úlohy do dotazníkového šetření pro svoji diplomovou práci, samozřejmě jsem se vrátila k úlohám, které jsem použila již dříve. Některé úlohy jsou vyhledané v aktuálních, ale i starších učebnicích, jiné jsem čerpala z historických pramenů (ovšem již přeložených do češtiny). Posledním typem jsou úlohy, které jsem přeformulovala tak, aby jejich kontext byl žákům bližší a při řešení se mohli opřít o svou vlastní zkušenost.

Do dotazníků[12] jsem vybrala úlohy všech typů představených v předchozím odstavci. Použila jsem několik slovních úloh o dělení celku na nestejné části, dvojici úloh o společné práci i dvě úlohy o pohybu. Schválně jsem zařadila originální znění i úlohy přeformulované do současného kontextu, abych mohla ověřit, jestli opravdu změna kontextu bude mít na žákovské řešení nějaký vliv. Pro šetření nebylo nejdůležitější složkou samo řešení, ale spíš přiložený dotazník, kde se žáci měli zamyslet nad srozumitelností zadání a nad tím, zda formulace úlohy nějak ovlivnila postup řešení. Každý řešitel měl možnost uvést libovolné poznámky a připomínky. Byla jsem ráda, že mnoho respondentů tuto možnost využilo a tím mi dodali zpětnou vazbu, která je pro mou práci stěžejní. Odpovědi, které v dotazníku žáci uvedli, jsem následně konfrontovala s přiloženými výpočty, protože sami žáci velmi často měli pocit, že úloha je srozumitelná a snadná, ale výpočtem své tvrzení nepodpořili.

Úlohy jsou rozdělené do několika skupin. V každé verzi dotazníku je zařazena jedna **slovní úloha o pohybu**. Úloha 2A je vybraná ze skupiny aktuálních úloh a úloha 2B je svým kontextem historická. **Slovní úlohy o společné práci** jsou v zadání opět po jedné. Úloha 4A spadá do skupiny úloh se zastaralým kontextem a úloha 4B je jednou z úloh, které jsem přepracovala a převedla do aktuálního prostředí. **Slovní úlohy o dělení celku na části** jsou zastoupeny v největším počtu, protože nevyžadují ke svému řešení znalost konkrétního algoritmu a početně jsou jednodušší než dva předchozí typy slovních úloh. V každé verzi zadání jsou dvě úlohy, v prvním dotazníku je to aktuální 1A a historická 4A. V druhé verzi

[12] Zadání i dotazník jsou k nahlédnutí v příloze 1, 2 a 3.

je to úloha zastaralá 1B a aktuální 4B. Poslední skupinu tvoří tři slovní úlohy o dělení celku na části. Jedná se o slovní úlohu, kterou jsem z původního zastaralého kontextu (3A, 5B) převedla do aktuální verze pouze změnou čísel a jednotek (5A, 3B), a v druhém případě jsem změnila kontext celé úlohy, ale výpočet zůstal stejný (7A, 7B). Tato trojice úloh se nachází v obou verzích zadání.

V práci uvádím vždy zadání úlohy i se vzorovým řešením. Zdůvodňuji, proč jsem úlohu zařadila. Dále ke každé úloze vyslovuji očekávání, se kterým jsem do vyhodnocování vstupovala. Toto očekávání konfrontuji s výsledky šetření na gymnáziu a na základní škole. V závěru kapitoly potom shrnuji výsledky šetření obecněji.

3.2 Cíle experimentu

Cílem šetření bylo ukázat, zda má kontext, ve kterém se slovní úloha odvíjí, vliv na to, jak žáci, kteří se zúčastnili šetření, úlohu řeší. Dalším cílem bylo zjistit, zda formulace slovní úlohy a použití moderního jazyka žákům při řešení slovní úlohy pomohou, a ověřit, že historické úlohy jsou sice zajímavé a jako osvěžení v průběhu hodiny jistě užitečné, ale pro samostatné řešení, díky své obtížnosti, zejména v rovině jazykové, použitelné jen omezeně.

3.3 Očekávání

V úvodu experimentu vyslovuji očekávání, která jsem chtěla v průběhu šetření potvrdit. Dále v rozboru každé zvolené slovní úlohy jsem vyslovila předpoklady, se kterými jsem do testování vstupovala, a hned jsem zhodnotila, jestli se ve výsledku potvrdily. Byly to zejména předpoklady, které chyby a v jakém množství se v řešení úlohy objeví, nebo očekávání, jaké problémy budou řešitelé nejčastěji zmiňovat ve svých poznámkách.

Očekávání

- Předpokládám, že slovní úlohy s aktuálním kontextem budou pro žáky snadněji řešitelné než úlohy zastaralé, ve kterých je obtížnější se zorientovat a není možné pomocí vlastní zkušenosti ověřit správnost řešení.

Očekávání budu považovat za potvrzené, pokud bude úspěšnost řešení aktuálních úloh alespoň o 15 % vyšší než u úloh zastaralých.

- Předpokládám, že slovní úlohy historické, přejaté z velmi starých pramenů, díky odlišnosti jazykové stránky, zejména stylistické povahy, budou pro žáky řešitelné obtížněji než úlohy zasazené do aktuálního kontextu.
  Očekávání budu považovat za potvrzené, pokud bude úspěšnost řešení aktuálních úloh alespoň o 15 % vyšší než u úloh historických.

3.4 Metody výzkumu

Dlouho jsem přemýšlela, zda zvolit formu kvalitativního nebo kvantitativního výzkumu. Nakonec jsem zvolila kompromis a použila metody smíšeného výzkumu. V experimentu tak zkoumám nejen procentuální úspěšnost řešení jednotlivých úloh, ale pomocí dotazníků se snažím zjistit, jaké jsou hlavní překážky úspěšného řešení a zda souvisí s kontextem úlohy. Zkoumání odpovědí v dotaznících jsem pak zaměřila hlavně na aktuálnost kontextu zvolených úloh.

K ověření, zda se má očekávání u žáků, kteří se šetření zúčastnili, potvrdila, jsem zvolila metodu dotazníkového šetření. Žáci dostali sadu zadání slovních úloh, které každý samostatně vyřešil. Každý z řešitelů dostal zároveň dotazník, zjišťující jeho názor na srozumitelnost textu úlohy. V dotazníku měli řešitelé také možnost vlastního vyjádření připomínek a komentářů k úlohám.

3.5 Popis sledovaného vzorku

Testování proběhlo ve dvou školách, každé jiného typu. Zvolila jsem žáky víceletého gymnázia v Nymburce, které jsem poznala díky pedagogické praxi během svého vysokoškolského studia. Jako další školu jsem vybrala tradiční základní školu v Roztokách, kde učí můj spolužák z vysoké školy, a tak mi svoje pracoviště pro výzkum doporučil.

3.5.1 Gymnázium Bohumila Hrabala v Nymburce

Jedná se o gymnázium ve Středočeském kraji. Škola sídlí v historické budově v centru okresního města Nymburk. Ve školním roce 2016/2017 navštěvovalo třídy osmiletého gymnázia 473 žáků a třídy čtyřletého studijního programu 122 žáků. Školu navštěvují žáci nejen středočeského kraje a další z ostatních krajů České republiky, ale také několik zahraničních žáků. Gymnázium se rozvíjí mnoha směry. Pro výuku matematiky je důležité, že se zapojilo do projektu Učíme (se) v zahraničí a dva z učitelů matematiky absolvovali 14denní kurz na Maltě. Dále tu probíhá rozšířená výuka matematiky formou semináře pro nadané žáky MATAL (matematika pro talenty), kde se ve dvouhodinových blocích vybraní žáci z několika tříd i ročníků, pod vedením různých učitelů matematiky, seznamují s rozšiřujícími tématy z různých oblastí matematiky.

V této škole jsem pro testování zvolila žáky tercie víceletého gymnázia, v jejichž třídě jsem učila během své pedagogické praxe. Testování se zúčastnilo 29 žáků.

3.5.2 Základní škola Roztoky

Základní škola v Roztokách je dynamicky se rozvíjející škola, která se nachází v okrese Praha-západ, ve školním roce 2016/2017 působila ve třech budovách. Ve zmíněném školním roce navštěvovalo školu 793 žáků. Výuka probíhá podle školního vzdělávacího programu Škola pro všechny, platného od 1.9.2016. Ve škole kromě učitelů prvního a druhého stupně působí také několik asistentů pedagoga, dvě speciální pedagožky, dvě psycholožky a tři výchovné poradkyně. Žáci se pod vedením svých učitelů zúčastňují mnoha matematických soutěží, např. Matematické olympiády, Klokana, Pythagoriády aj. V této škole se experimentu zúčastnili žáci devátých tříd. Ve školním roce 2016/17 navštěvovalo školu 48 žáků devátého ročníku rozdělených do dvou tříd. Testování se zúčastnilo 43 žáků.

3.6 Průběh zadávání úloh a vyplňování dotazníků

K testování jsem zvolila nejprve třídu osmiletého gymnázia v Nymburce, kde jsem byla na pedagogické praxi. Zadání úloh i udělení pokynů k vyplnění dotazníků jsem prováděla osobně. Zadávání testu na gymnáziu proběhlo v listopadu 2016. Žáci v tercii, kde jsem se zadáváním začala, právě v předchozích hodinách dokončili kapitolu o slovních úlohách řešených rovnicí. Mohla jsem tak předpokládat, že řešení nebude ovlivněno tím, zda si žáci vybaví správnou řešitelskou strategii nebo algoritmus. Protože metody řešení tohoto typu úloh měli v živé paměti, doufala jsem, že jim to umožní soustředit se právě jen na formulaci a kontext zadání, které byly pro mou práci zásadní.

Testování probíhalo ve dvou na sebe navazujících hodinách. Třída zrovna tuto hodinu má dělenou, většinou hodina probíhá více formou semináře nebo individuálních konzultací. Žáci byli rozděleni na dvě skupiny. Dělení proběhlo na začátku školního roku podle abecedního pořádku. Podle vyjádření učitelky, která ve třídě matematiku učí, by obě skupiny měly být v řešení úloh přibližně vyrovnané. Díky tomu, že ve třídě byla pouze polovina žáků, bylo možné, aby žáci během řešení mých úloh seděli v lavici po jednom. Tím se eliminovalo jakékoliv domlouvání, případně společné řešení. Tady je nutno podotknout, že třída opravdu působila velmi vyspělým dojmem. Přestože jsou žáci v této době ve velmi problematickém věku, k řešení úloh přistoupili velmi zodpovědně a jsem přesvědčená, že i kdyby šetření proběhlo v celé třídě najednou, výsledky by to neovlivnilo.

V první skupině dotazník vyplňovalo 14 žáků. Z toho byl jeden integrovaný autista s paní asistentkou. Ve druhé skupině pak bylo 15 žáků. V průběhu zadávání se nevyskytl žádný problém. Řešitelé dostali zadání úloh (rozdělené do dvou verzí), dotazník, ve kterém měli odpovídat na otázky týkající se zadání a kontextu úloh, a volné papíry pro výpočty. Všichni byli seznámeni s cílem mého výzkumu a upozorněni na důležitost přiloženého dotazníku. Dále jsem vysvětlila možnosti nabízené v dotazníku u každé úlohy. U každé možnosti jsem uvedla jednoduché příklady, kdy je možné kterou zaškrtnout. Žáci měli možnost položit doplňující dotazy. Každý si označil všechny papíry svými iniciálami. Celá jména jsem v rámci zachování anonymity nechtěla a ani pro moji práci by nebyla žádným přínosem. Iniciály jsem použila proto, abych mohla všechny části řešení k sobě správně přiřadit a zkompletovat.

Pro řešení jsem stanovila limit jedné vyučovací hodiny. To bez času, který jsem strávila zadáváním a vysvětlováním, znamenalo reálně cca 40 minut. Ukázalo se, že tento čas je nastaven optimálně. Na gymnáziu se našlo minimum žáků (2 z 29), kteří měli problém řešení kompletně dokončit a ještě ho po sobě zkontrolovat.

Druhá část mého výzkumu proběhla na základní škole v Roztokách u Prahy v květnu roku 2017. Jedná se o základní školu, kde vyučuje můj spolužák z vysoké školy. Díky tomu nebyl problém v hodinách matematiky v devátých ročnících provést stejné šetření jako v předchozím případě na gymnáziu. Již po konzultaci s vyučujícím matematiky právě v těchto třídách jsem se rozhodla čas na vyřešení úloh a vyplnění dotazníků navýšit na plných 45 minut, a nakonec jsem za to byla velmi vděčná. Díky tomu i v těchto třídách základní školy stihla většina žáků práci odevzdat celou. V době testování měli už nejen zopakované slovní úlohy řešitelné rovnicí, ale probrané už i soustavy rovnic a řešení některých typů slovních úloh právě pomocí soustavy dvou rovnic. Předpokládala jsem, že jim to při orientaci v řešení úloh, které jsem zadávala já, může výrazně ulehčit práci.

V první hodině jsem zadala úlohy a dotazníky v 9.B, ve které bylo ten den přítomno 22 žáků. Ve druhé hodině potom řešilo úlohy a vyplnilo dotazníky 21 žáků třídy 9.A. Přestože jsem i tady důkladně vysvětlila účel testování a zdůraznila všechny body jako na gymnáziu, tady se mi vrátily 4 dotazníky naprosto neidentifikovatelné a nepřiřaditelné. Žáci pouze zaškrtali možnosti v dotazníku, ale jinak nevyplnili vůbec nic. Není tedy zřejmé, ani jakou sadu úloh řešili, ani zda opravdu nějakou úlohu počítali, nebo jen namátkou zaškrtávali. Tyto 4 archy jsem musela z vyhodnocení vyřadit.

K vyhodnocení jsem tedy nakonec měla 29 dotazníků vyplněných žáky gymnázia a 39 dotazníků vyplněných žáky základní školy.

3.7 Slovní úlohy

3.7.1 Úloha 1A

Tři sourozenci jsou na letní brigádě. Marie a Petra zabalily dohromady 784 balíků. Petra a Milan dohromady zabalili 812 balíků a Petra sama 370 balíků. Kolik si vydělali sourozenci dohromady, když za jeden zabalený balík dostali 24 Kč?

Řešení:

Petra zabalila…………….370 balíků

Marie zabalila……………784 – 370 = 414 balíků

Milan zabalil……………..812 – 370 = 442 balíků

celkem zabalili…………...370 + 414 + 442 balíků

vydělali…………………….*x* Kč

Rovnice:

$$x = (370 + 414 + 442) \,.\, 24,$$

$$\underline{\underline{x = 29\,424.}}$$

Odpověď:

Sourozenci na brigádě vydělali dohromady 29 424 Kč.

Rozbor

Tato úloha patří k těm, kde jsem pro zachování aktuálního kontextu změnila znění úlohy. Originální text je použit v druhé verzi dotazníku jako úloha 1B. Předpokládám, že prostředí letní brigády je pro žáky jasnější a srozumitelnější, než rodina pracující v JZD. V této verzi jsem použila jednoduchý jazyk, jasné vyjádření a žádné komplikované vztahy nebo převody jednotek. Výsledek vychází v korunách, což je pro žáky blízké prostředí, ve kterém se pohybují každý den. Při řešení této úlohy jsem nečekala žádné větší problémy. Protože je snadno řešitelná i bez použití rovnice, většina žáku ji opravdu bez komplikací zvládla.

Že zadání úlohy bylo srozumitelné, mi potvrdilo i šetření. V dotaznících uvedlo 100 % žáků gymnázia, že zadání je srozumitelné a řešení jim nečiní žádné obtíže. Z toho ovšem skoro třetina měla řešení špatně. Nejčastěji se vyskytly dvě různé chyby. 16,7 % žáků sečetlo zadaná čísla (370 + 812 + 784) a vynásobilo výsledek 24. Stejně tak 16,7 % žáků udělalo početní chybu, nejčastěji v násobení. Jeden řešitel sice vypočítal úlohu správně, ale odpovídal na otázku, kolik korun si každý ze sourozenců vydělal, která v textu vůbec nefiguruje. Na základní škole se objevili tři žáci (8,3 %), kteří zaškrtli možnost b, to znamená, že zadání jim přijde srozumitelné, ale úlohu neuměli vyřešit. A další 5,6 % nezaškrtli žádnou možnost. Přesto více než 50 % žáků mělo úlohu zcela správně vyřešenou.

Nejčastější chybou bylo nedopočítání úlohy do konce. Žáci byli tak spokojení, že správně sečetli počet zabalených balíků, že již nedopočítali, jaký honorář si sourozenci za práci odnesli. V několika případech se objevily numerické chyby.

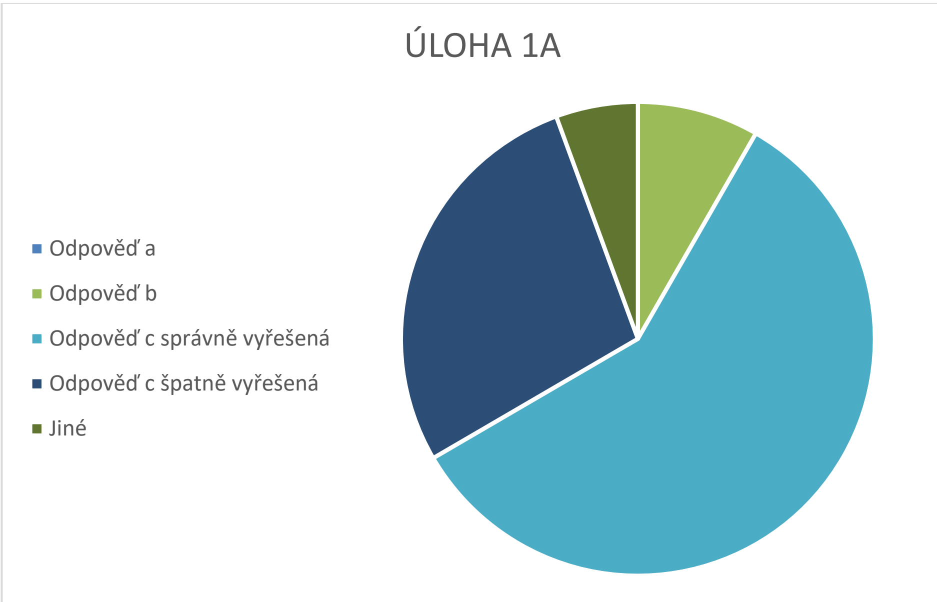
Zaujala mě poznámka žáka základní školy: „*Měl jsem problém se zadáním neznámých*.“ Přemýšlela jsem, co tím mohl myslet. Následně jsem zjistila, že vyjádřil počty balíků zabalených konkrétními lidmi pomocí neznámých *x, y, z* a počet všech balíků neznámou *a.* V zápisu pak místo vypisování celého slova *balíků* použil jen písmenko b. Ovšem v rovnicích se mu potom pletlo b do výpočtu a on se dlouho z bludného kruhu nedokázal vymotat. Nakonec však měl úlohu správně a i odpovědí dokázal, že se v ní dokázal zorientovat.

Další poznámka, která je pro problematiku nejen slovních úloh, ale i celkové pojetí výuky matematiky zásadní, se objevila u žákyně gymnázia. „*Protože teď řešíme úlohy s rovnicemi, nevěděla jsem, jestli to mám řešit rovnicí nebo normálně*.“ Tento problém se v současném pojetí výuky objevuje často. Žáci se soustředí pouze na problematiku, kterou v hodinách právě probírají. Nejsou schopni matematiku vnímat komplexně, neuvažují, že k řešení úlohy je možné využít i dovednosti získané dříve. Řešením je zařazování komplexních úloh, k jejichž řešení nepostačí pouze jeden algoritmus, ale nutí žáky přemýšlet logicky a používat více nástrojů, které již mají mít zautomatizované. Žákyně nakonec zvolila „normální“

řešení. V jejím podání to znamenalo sečíst pod sebou všechna zadaná čísla a výsledek vynásobit 24. Tím prokázala naprosté nepochopení celé úlohy. To, že žáci volí algoritmus řešení pouze podle toho „*co zrovna bereme*“, je podle mého mínění veliký problém. Ale není cílem mojí práce se těmito chybami hlouběji zabývat, proto tuto obsáhlou problematiku ponechám stranou.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 1A	Odpověď a[13]	Odpověď b[14]	Odpověď c[15] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	7	9	0
Základní škola	0	3	3	12	2
Celkem	0	3	10	21	2
Celkem v %	0	8,3	27,8	58,3	5,6



[13] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[14] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[15] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

3.7.2 Úloha 2A

Z továrny vyjelo v 8 hodin a 30 minut nákladní auto s objemným nákladem průměrnou rychlostí 20 km/h. V 9 hodin za ním ze stejného místa vyjel osobní vůz, který jel průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin dostihne osobní vůz nákladní auto?

Řešení:

Pro řešení použijeme vzorce:

$s_1 = v_1 \,.\, t_1,$ $\qquad$ $s_2 = v_2 \,.\, t_2,$ $\qquad$ $t_2 = t_1 - t,$ kde $t = 0{,}5$ h.

Označme dobu jízdy nákladního auta x h. Pak

$s_1 = (20 \,.\, x)$ km, $\qquad$ $s_2 = [60 \,.\, (x - 0{,}5)]$ km.

Protože dráhy se jistě rovnají, dostáváme rovnici pro x, která vyjadřuje čas nákladního auta, po který je na cestě.

Rovnice:

$$20x = 60(x - 0{,}5),$$

$$\underline{\underline{x = 0{,}75.}}$$

Čas jízdy nákladního auta je 0,75 h (45 minut).
Osobní auto dostihne nákladní v 9 hodin a 15 minut.

Analogicky řešíme pomocí zápisu v tabulce:

	Nákladní auto	Osobní auto
v	20 km/h	60 km/h
t	x h	$(x - 0{,}5)$ h
s	$(20x)$ km	$[60(x - 0{,}5)]$ km

Rovnice:

$20x = 60(x - 0{,}5)$, což je stejná rovnice, jako v předchozím případě.

$\underline{\underline{x = 0{,}75.}}$

Čas jízdy nákladního auta je 45 minut.

Osobní auto dostihne to nákladní v 9 hodin a 15 minut.

Rozbor

Tato úloha je naprosto typická. Žáci se s tímto typem úloh nesetkávají pouze v matematice, ale vzorce pro výpočet dráhy poznávají mnohem dříve ve fyzice. Zadání těchto úloh je víceméně nadčasové. Jediná proměnná, na kterou je třeba upozornit, je průměrná rychlost vozu. Pokud v zadání uvedeme, že automobily se po dálnici prohánějí rychlostí 70 km/h, předpokládám, že to žáky minimálně zarazí a odvede pozornost od samotného řešení.

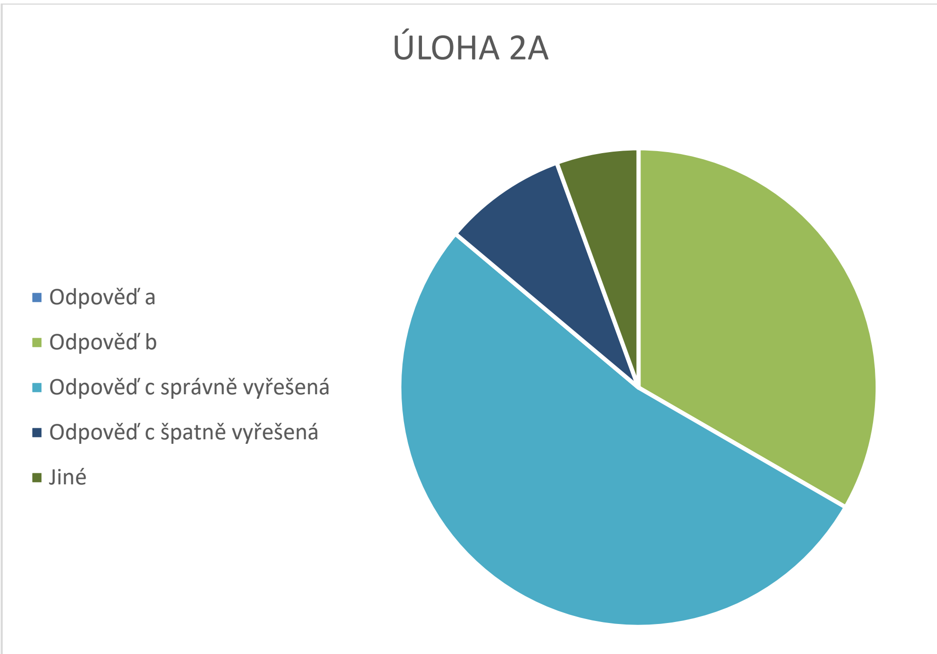
Od této úlohy jsem očekávala, že žáci zvládnou vyhodnotit svoje schopnosti. Protože je zadání opět naprosto srozumitelné, nepočítala jsem s tím, že by se měla ve výsledku objevit nějaká odpověď a. To se také potvrdilo. Žáci se rozdělili do dvou skupin. Jedna, která sice rozumí zadání, ale nemá aparát, aby úlohu vyřešila. Druhá zadání rozumí a potřebné vzorce a postupy zná. Příjemně mě překvapilo, kolik dětí nejen doplnilo tabulku, ale také správně použilo grafické znázornění. Zejména úspěšnost řešení na základní škole mě, přes moje negativní očekávání ovlivněné mnohaletou praxí, velice potěšila.

První skupinu žáků, kteří zadání rozumí, ale neumí úlohu vyřešit, naprosto jasně charakterizuje výrok gymnazisty M. P. „*Rozumím zadání úlohy a myslím, že tam budou vzorky pro čas, rychlost a dráhu, ale nevím, jak začít počítat*.“ Mezi těmi, kteří úlohu považovali za složitou nad svoje možnosti, se našlo i několik takových, kteří měli správně vyplněnou tabulku, ale rovnici již dohromady nedali. Tady je škoda, že se víc nedbá na grafické znázornění, které podle mých zkušeností víc napomůže pochopení a vhledu do situace.

Mezi těmi, kteří úlohu správně vyřešili, zmiňuji poznámku žákyně základní školy L. P.: *„Zadání je jasné, řešení trochu obtížnější, ale vyšel smysluplný výsledek.“* Tato úvaha mě nadchla, protože tím naznačuje, že aktuální a ověřitelný kontext napomáhá řešení úlohy a hlavně umožní kontrolu správnosti řešení a zpětnou vazbu.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 2A	Odpověď a[16]	Odpověď b[17]	Odpověď c[18] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	8	2	5	1
Základní škola	0	4	1	14	1
Celkem	0	12	3	19	2
Celkem v %	0	33,3	8,3	52,8	5,6



[16] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[17] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[18] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

3.7.3 Úloha 3A (5B)

Žák měl 11,40 Kčs. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 60 haléřů papír. Kolik stál trojúhelník a kolik štětec?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Řešení:

Označme cenu trojúhelníku jako t Kčs, cenu štětce jako $š$ Kčs.

Soustava:

$$t + š = 11{,}40,$$

$$\underline{2 \,.\, t + 0{,}60 = 11{,}40.}$$

Odtud: $\underline{\underline{t = 5{,}40;\ š = 6}}$.

Trojúhelník stál 5 Kčs a 40 h, štětec 6 Kčs.

Rozbor

Úlohu z roku 1970 jsem zařadila jako ukázku zastaralé slovní úlohy. Tuto úlohu jsem spolu s dvěma přeformulovanými úlohami zařadila do obou verzí dotazníků. Vyhodnocení proto provedu pro všechna řešení najednou. Zkoumaný vzorek se tak v podstatě zdvojnásobí a závěry by měly být o to přesnější.

Zejména cena zmiňovaných předmětů je dnes již samozřejmě vyšší. Hlavní problém jsem očekávala v použití zastaralých jednotek a také při počítání s haléři, na které již žáci nejsou tak zvyklí, jsem očekávala chyby.

Nakonec se ukázalo, že nejvíce chyb se objevilo numerických. Problém byl, jak jsem očekávala, s hodnotami zadanými v haléřích, ale spíš proto, že žáci nedokáží počítat bezchybně a automaticky s desetinnými čísly. 7,4 % dětí použilo místo jednotek Kčs aktuální verzi Kč. Nejsem si jistá, jestli je to proto, že počítají a neřeší, v čem jim hodnoty vychází, nebo jestli jim zkratka Kčs nic neříká a považují ji za chybu v zadání. V jednom případě se dokonce objevila i verze Ksč. To může být důkaz, že autor neví, co zkratka znamená. Z odpovědí žáků vyplývá, že takto formulované řešení je jasné a výstižné. Jako připomínka k žákům jinak jasnému zadání se objevilo pouze to, že není uvedeno, zda žák utratil všechny své peníze. To, že žák peníze utratil všechny, mi přijde vzhledem k zadání jednoznačné. Překvapující je i to, že čtyři žáci (5,9 %), uvedli jako odpověď a, podle toho měli problém porozumět textu úlohy. Předpokládám, že žáci úloze neporozuměli právě kvůli zastaralým jednotkám. Jeden z těchto žáků měl dokonce úlohu vyřešenou správně, jen jako jednotku někde volil Kč a někde Kčs.

U takto jednoduché úlohy je skoro 6 % žáků, kteří úlohu nepochopili, a dalších 4,4 % těch, kteří sice neuvedli, proč úlohu nespočítali, ale předpokládám, že ze stejného důvodu, překvapivě vysoké číslo.

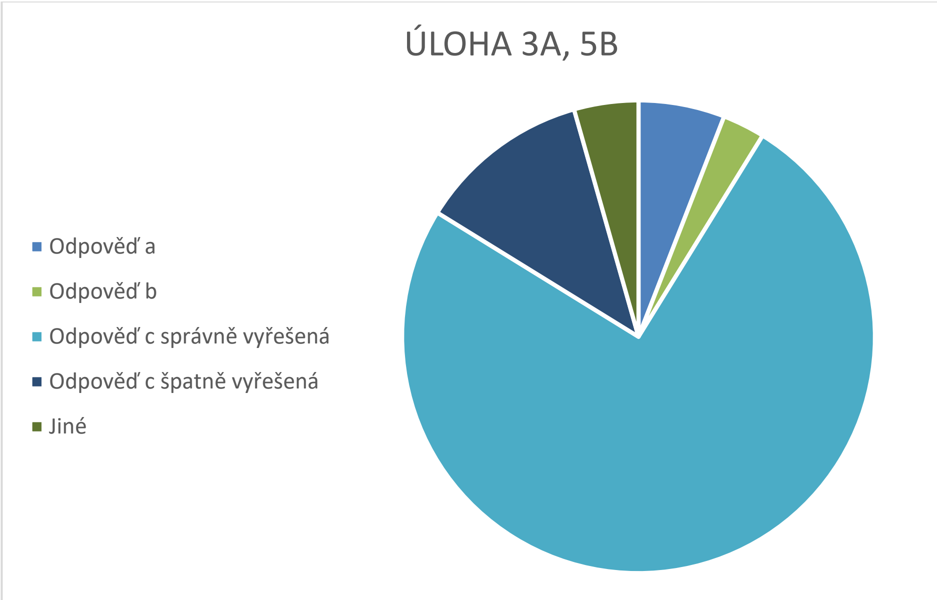
Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 3A	Odpověď a[19]	Odpověď b[20]	Odpověď c[21] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	2	14	0
Základní škola	4	2	1	11	2
Celkem	4	2	3	25	2
Celkem v %	11,1	5,6	8,3	69,4	5,6

ÚLOHA 5B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	3	10	0
Základní škola	0	0	2	16	1
Celkem	0	0	5	26	1
Celkem v %	0	0	15,6	81,3	3,1

[19] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[20] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[21] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

ÚLOHA 3A, 5B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	5	24	0
Základní škola	4	2	3	27	3
Celkem	4	2	8	51	3
Celkem v %	5,9	2,9	11,8	75	4,4



3.7.4 Úloha 4A

Dva horníci si dali na počest sjezdu KSČ závazek, že do dne sjezdu vytěží jisté množství uhlí. První z nich by sám splnil závazek za 45 směn, druhý za $67\frac{1}{2}$ směny. Za kolik směn splní závazek, budou-li pracovat společně?

(Slovní úlohy v matematice, Zdeněk Buřil, Brno 1985)

Řešení:

Označme *x* počet dní, po které budou kolegové pracovat společně.

Rovnice: $(\frac{1}{45} + \frac{1}{67{,}5}) \cdot x = 1,$

$$\underline{\underline{x = 27.}}$$

Oba pracovníci mohou na dovolenou odejít za 27 dní společné práce.

Rozbor

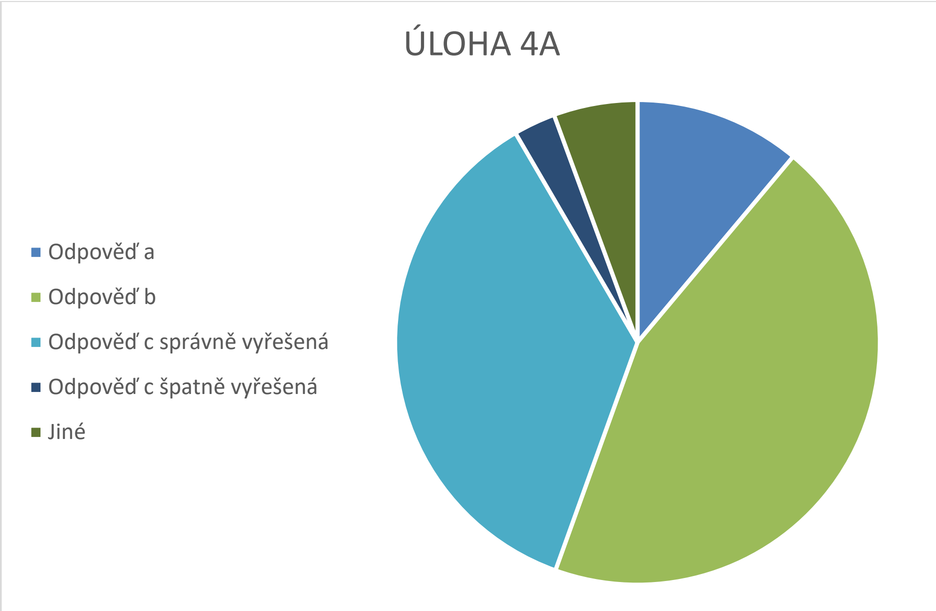
Úlohu z prostředí dolu jsem zařadila jako úlohu zastaralou. Samozřejmě si uvědomuji, že jsem nejspíš částečně předpojatá díky tomu, že žiji i učím ve Středočeském kraji. Možná že někde ve Slezsku, kde je téma těžby stále aktuální, by žákům toto prostředí přišlo přirozenější. Předpokládala jsem, že žáci budou váhat nad pojmem závazek, který je pro řešení právě téhle úlohy poměrně důležitý. Dále jsem počítala, že sjezd KSČ jim nebude nijak blízké téma, nicméně v této úloze nehraje takovou roli a očekávala jsem, že by s typovou úlohou neměli mít žáci problém. Překvapilo mě, že zejména gymnazisté měli výrazné problémy se zadáním smíšeným číslem $67\frac{1}{2}$. Jsem si vědoma, že by bylo pro můj výzkum praktičtější zvolit méně komplikovanou hodnotu, ale úlohu jsem chtěla nechat v původním znění, proto jsem ji zadala tak, jak jsem ji v publikaci našla.

Při vyhodnocování mě u této úlohy překvapila celkem vysoká úspěšnost řešení na základní škole (55 % žáků) proti velmi nízké na gymnáziu (12,5 % žáků).

Většina chyb v této úloze pramenila z toho, že žáci nebyli schopní správně převést smíšené číslo na zlomek, případně dál se zlomky počítat. Velké množství žáků se o řešení ani nepokusilo a skončili pouze zápisem. Podle poznámek řešitelů jsem zjistila, že problémy mohou nastat v mnoha krocích řešení. Za všechny alespoň pár příkladů: „*Nevím, jakou si mám zvolit neznámou*.“ „*Mám problém porozumět, jestli mají už něco natěženo.“ „Neumím najít společný násobek.“*

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 4A	Odpověď a[22]	Odpověď b[23]	Odpověď c[24] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	3	11	0	2	0
Základní škola	1	5	1	11	2
Celkem	4	16	1	13	2
Celkem v %	11,1	44,4	2,8	36,1	5,6



3.7.5 Úloha 5A (3B)

Žák měl 57 Kč. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 3 Kč papír. Kolik stál trojúhelník a kolik štětec?

[22] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[23] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[24] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Řešení:

Řešení úlohy je stejné jako v úloze 3A (5B), jen všechny částky jsou pětkrát zvětšené.

Označme cenu trojúhelníku jako t Kč, cenu štětce jako $š$ Kč.

Soustava: $t + š = 57,$

$$\underline{2 \cdot t + 3 = 57.}$$

Odtud: $\underline{\underline{t = 27;\ š = 30}}$.

Trojúhelník stál 27 Kč, štětec 30 Kč.

Rozbor

Tato úloha je postavena na stejném principu jako úloha 3A (5B). Jedná se o téměř stejnou úlohu. Úloha se liší pouze tím, že všechny hodnoty jsou vynásobené pěti a změnila jsem jednotky, abych eliminovala práci s haléři a aby si žáci nepletli jednotky Kč a Kčs. Tím se stala také úloha mnohem aktuálnější, protože ceny školních pomůcek byly tak pro žáky mnohem uvěřitelnější.

Očekávala jsem, že na řešení to bude citelně znát. Opravdu se nikdo nepozastavil nad jednotkami Kč. Tím, že čísla byla změněna všechna, tak i méně žáků odhalilo, že se jedná o prakticky stejnou úlohu, kterou již polovina z nich počítala (ve skupině B se objevuje nejprve tato a pak až původní úloha). Velmi všímavý byl žák A.P., který úlohu komentoval slovy: „*Zde byl stejný problém jako u třetího příkladu.*“

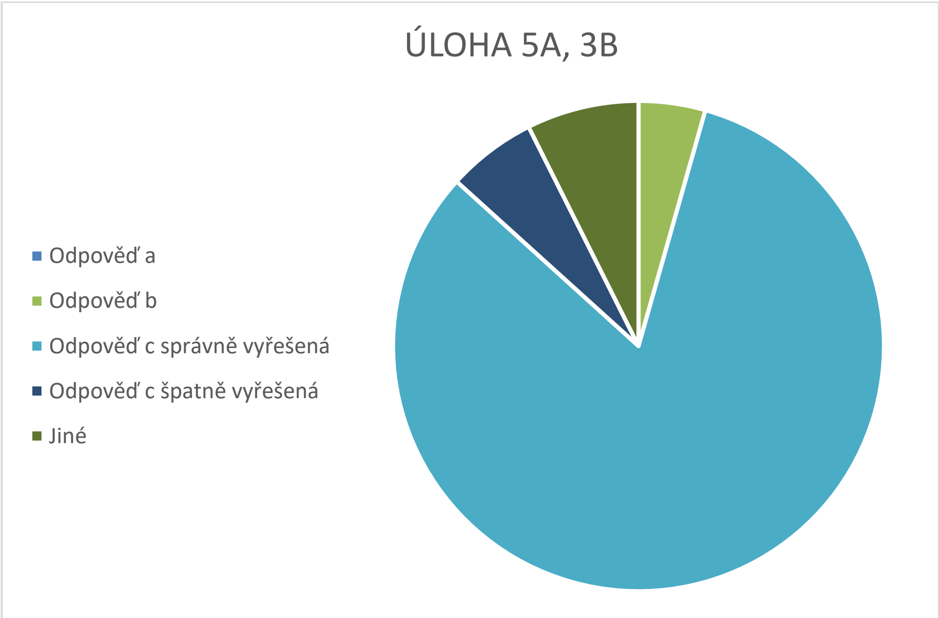
V řešení této úlohy se objevilo mnohem vyšší procento úspěšnosti než u zbylých dvou variant úlohy. Netroufnu si ovšem odhadnout, jestli to bylo díky změněnému kontextu, nebo spíš zásluhy na tom mám připsat absenci desetinných čísel a nutnosti s nimi počítat.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 5A	Odpověď a[25]	Odpověď b[26]	Odpověď c[27] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	1	14	1
Základní škola	0	3	2	11	4
Celkem	0	3	3	25	5
Celkem v %	0	8,3	8,3	69,4	13,9

ÚLOHA 3B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	0	13	0
Základní škola	0	0	1	18	0
Celkem	0	0	1	31	0
Celkem v %	0	0	3,1	96,9	0

ÚLOHA 5A,3B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	1	27	1
Základní škola	0	3	3	29	4
Celkem	0	3	4	56	5
Celkem v %	0	4,4	5,9	82,4	7,4



[25] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[26] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[27] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

3.7.6 Úloha 6A

„Phytagore vznešený, helikónských múz potomku, na mou odpověz otázku, kolik věrných žáků máš ve svém domě, kde jako borci na závodišti usilují o prvenství?“

„Rád povím, Polykrate. Vidíš, že polovina žáků pěstuje matematiku, a zatím čtvrtina na věčnou přírodu své zkoumání obrací. Sedmina nedělá nic, jen mlčení zachovává, jen své duše očišťuje, víš, opakováním učiva. A přidej k nim tři ženy, které nevstávají tak brzy, mezi nimi nejvýznamnější je má milovaná Teano.

Hle a to jsou všichni, které vedu cestou moudrosti a snad i múz pierijských jim zjednám lásku boží.“

(Původně veršovaná úloha od Metrodora (6. stol.), v českém překladu J. Šedivého již neveršované)

Rovnice: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x,$

$$\underline{\underline{x = 28.}}$$

Phytagoras má ve svém domě 28 žáků.

Rozbor

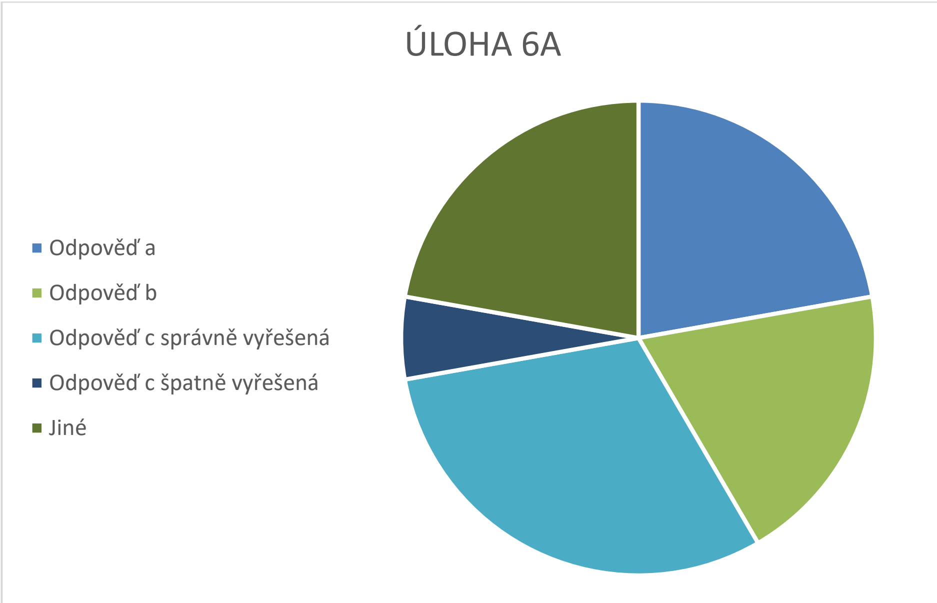
Úloha je zařazena jako historická. V (Hejdrychová, 2014) doporučuji zařazovat takové úlohy pro zpestření výuky. Jsou užitečné zejména proto, že žáky nutí číst důkladně a s porozuměním. V této úloze je kromě neaktuálního kontextu hlavně použit velmi archaický jazyk. A zejména hodně zastaralá syntax činila žákům veliké problémy. Objevily se připomínky ohledně zadání a bylo znát, že takto zadaná úloha je pro žáky velmi náročná. Často žáci vůbec nevěděli, k čemu se mají vlastně dopočítat. Například gymnazisté J. K.: *„Nevím, co je za otázku v této úloze“,* nebo K. Č.: *„Nerozumím, proč otázka je na začátku. To mě mate.“* M. P. dokázal své problémy s vhledem do úlohy formulovat podrobněji: „*Rozumím zadání úlohy a myslím si, že to bude rovnice, ale nevím, co si dát jako neznámou. Hůř jsem se v tom orientoval, když to bylo psáno v tom dopise*.“

Jako problém, který jsem nečekala, se ukázalo zadání čísel slovy. Hlavně žáci základní školy měli problém se v textu zorientovat a úlohu vůbec začít řešit. Žák A. P. velmi pěkně vystihl, co dělalo problémy jemu i spoustě jeho spolužáků: *„Úloha je jistě zajímavá, ale protože špatně čtu, tak mi dělá problém vybírat dané údaje ze zahuštěného textu a nemám rád, když je celá úloha napsaná slovy, protože u toho musím být mnohem déle, než kdybych měl údaje jasně vypsané číslicemi.“* Popsal tím několik problematických míst v řešení této úlohy. Protože mají žáci stále větší problémy se čtením s porozuměním, je pro ně dlouhá slovní úloha, psaná navíc zastaralým jazykem, samozřejmě problematická. Další komplikací jsou číselné údaje zapsané slovy, které celý text tvoří ještě ucelenějším a celkové porozumění znesnadňují. Žákům pro takovéto úlohy ve většině případů dnes chybí hlavně trpělivost.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 6A	Odpověď a[28]	Odpověď b[29]	Odpověď c[30] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	4	4	2	6	0
Základní škola	4	3	0	5	8
Celkem	8	7	2	11	8
Celkem v %	22,2	19,4	5,6	30,6	22,2

[28] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[29] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[30] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.



3.7.7 Úloha 7A (7B)

Pan Malý šel nakupovat před malováním bytu. Měl spočítáno, že vozík uveze právě 11,4 kg materiálu. Věděl, že může koupit kbelík bílé a kbelík tónované barvy, nebo dva kbelíky bílé a sadu štětců vážící 0,6 kg. Kolik kg váží kbelík bílé a kolik kbelík tónované barvy?

Řešení:

Označme váhu kbelíku bílé barvy jako b kg, váhu kbelíku tónované jako t kg.

Soustava rovnic: $b + t = 11{,}40,$

$$\underline{2 \,.\, b + 0{,}6 = 11{,}40.}$$

Odtud: $\underline{\underline{b = 5{,}4;\ t = 6}}$.

Kbelík bílé barvy vážil 5,4 kg a kbelík tónované barvy byl 6 kg těžký.

Rozbor

Tato úloha je podobná jako úloha 3A. Pouze jsem změnila kontext, do kterého je zasazena. Protože tato úloha se v jisté obměně objevuje v zadání již po třetí (viz 3A, 5A) a předpokládala jsem, že žáci budou řešit úlohy popořadě, čekala jsem vysokou úspěšnost v řešení. Bohužel bylo řešení ovlivněno tím, že byla úloha zařazena jako poslední, a proto bylo velké procento žáků, kteří ji nestačili dokončit. Ovšem i mezi těmi, kteří podle svého mínění úlohu spočítat zvládli, bylo mnoho takových, kteří udělali numerické chyby nebo vůbec nezvládli postup úlohy a opírali se o špatné předpoklady.

Proti zadání původní zastaralé úlohy tu žáci nemusí řešit převod z haléřů na celé koruny. Všechny hodnoty, které se v úloze objevují, jsou zadány ve stejných jednotkách. Proto jsem čekala, že řešení bude pro žáky snazší. Ukázalo se však, že počítání s desetinnými čísly je stále velký problém.

Velmi mě překvapilo, jak málo žáků si úlohy spojilo a uvedlo do souvislostí například jako A.P. „*Tady ten příklad byl stejný jako 5, ale v jiném prostředí a jednotkách.*“ Pouze 6 žáků uvedlo, že si poupraveného zadání stejné úlohy všimli a řešení tím pro ně bylo ulehčeno.

Většina žáků tuto úlohu raději řešila s jistotou a sebevědomím, více či méně opodstatněným. Za všechny konstatování žákyně gymnázia M. K. „Zadání je stručné, vím přesně, co se po mě chce.“

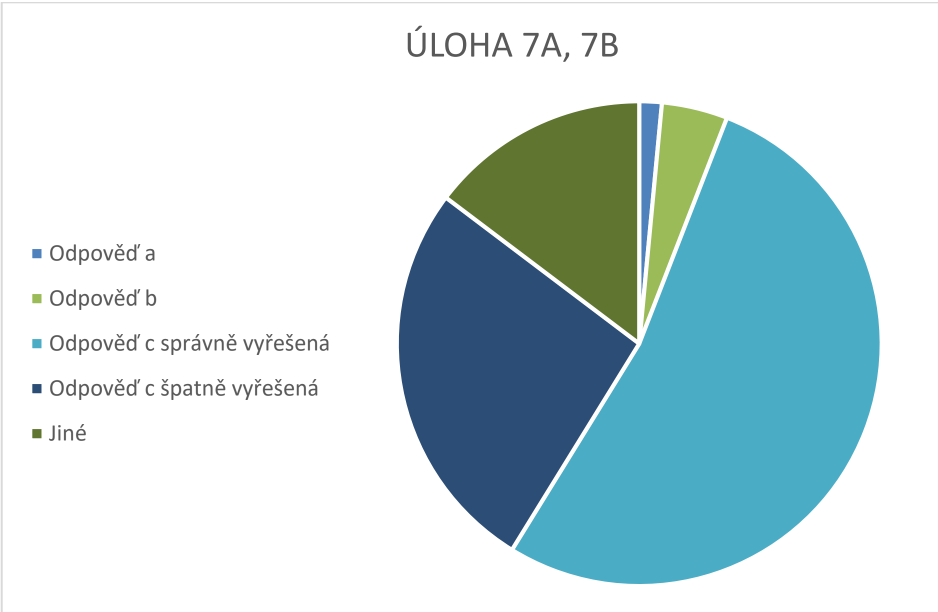
Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 7A	Odpověď a[31]	Odpověď b[32]	Odpověď c[33] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	1	5	8	2
Základní škola	1	2	5	7	5
Celkem	1	3	10	15	7
Celkem v %	2,8	8,3	27,8	41,7	19,4

[31] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[32] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[33] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

ÚLOHA 7B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	3	10	0
Základní škola	0	0	5	11	3
Celkem	0	0	8	21	3
Celkem v %	0	0	25	65,6	9,4

ÚLOHA 7A, 7B	Odpověď a	Odpověď b	Odpověď c špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	1	8	18	2
Základní škola	1	2	10	18	8
Celkem	1	3	18	36	10
Celkem v %	1,5	4,4	26,5	52,9	14,7



3.7.8 Úloha 1B

V JZD pracují rodiče s dcerou. Matka a dcera odpracovaly za rok dohromady 784 jednotek, otec s dcerou 812 jednotek, dcera sama 370 jednotek. Kolik dostali v této rodině za rok peněz, když v družstvu byla pracovní jednotka odměňována částkou 24 Kčs?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Řešení:

dcera odpracovala……370 jednotek

matka odpracovala……784 – 370 = 414 jednotek

otec odpracoval………812 – 370 = 442 jednotek

celkem odpracovali……370 + 414 + 442 jednotek

dostali zaplaceno………x Kč

Rovnice:

$x = (370 + 414 + 442)\ .\ 24,$

$x = 29\,424.$

Proto platí: Celá rodina vydělala 29 424 Kčs za rok.

Rozbor

Tato úloha z roku 1970 je zastaralá z více hledisek. Problémové mi přijde prostředí JZD, kde dnešní žáci většinou moc netuší, co to znamená. To, že znění je zastaralé a žákům nesrozumitelné, potvrzují i poznámky samotných řešitelů. Například gymnazistka D. N. se v hodnocení srozumitelnosti úloh ptá: „*Co je jednotka? To je nějaká žena*?“ Tady je jasné, že když nerozumí již základním pojmům v zadání, je pro žáky velmi obtížné řešit úlohu správně. To, že se v úloze objevují již zastaralé jednotky Kčs, je vedle toho už jen drobnost.

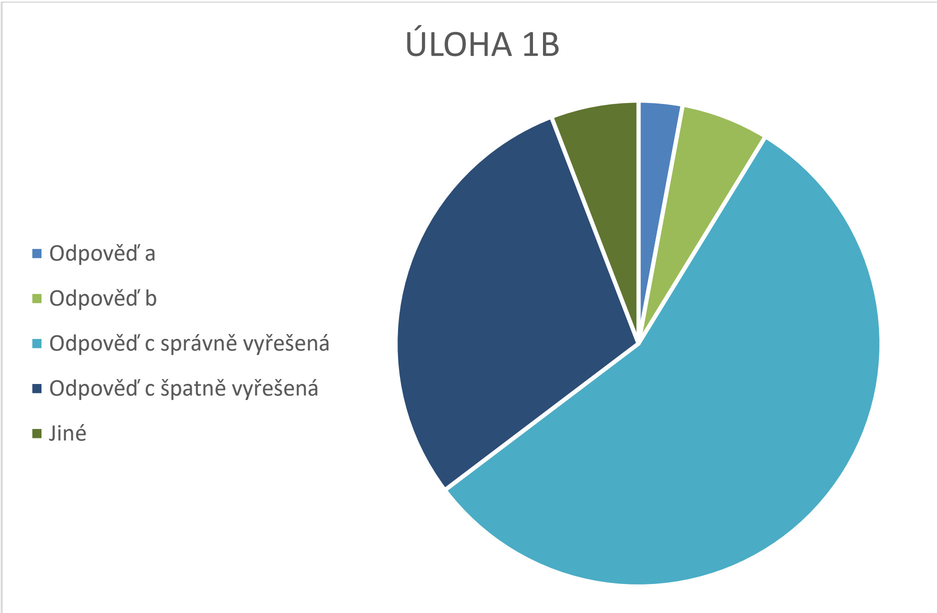
I přes obtížné porozumění textu nakonec řešení úlohy nedopadlo nejhůře a více než polovina žáků ji úspěšně zvládla.

Jako velmi častý problém se opět objevovaly početní chyby, ale u této úlohy také nepochopení, nebo nezvládnutí algoritmu řešení. Velmi často žáci pouze sečetli zadané hodnoty (784 + 812 + 370) a pak násobili 24. Nicméně toto řešení volili žáci u této i zaktualizované úlohy, takže šlo spíše o neznalost správného postupu řešení než srozumitelnost zadání a aktuálnost kontextu. Jediný žák základní školy uvedl, že zadání je pro něj naprosto nesrozumitelné, a další dva, že zadání bez problémů rozumí, ale neumí úlohu vyřešit. Z ostatních ovšem značná část (31,3 % žáků) také správné řešení nenašla.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 1B	Odpověď a[34]	Odpověď b[35]	Odpověď c[36] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	0	6	7	0
Základní škola	1	2	4	12	2
Celkem	1	2	10	19	2
Celkem v %	3,1	6,2	31,3	59,4	6,2

[34] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[35] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[36] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.



3.7.9 Úloha 2B

Host ujede za den 300 li (jeden li se rovná 0,576 km). Host vyjel od hostitele, ale zapomněl jeden oděv. Když po třetině dne hostitel objevil zapomenutý oděv, vydal se na cestu, aby hosta dohonil. Když předal oděv hostovi, ihned obrátil koně na zpáteční cestu, za tři čtvrti dne (od odjezdu hosta) byl opět doma. Kolik li by ujel na koni za den?

(Matematika v devíti knihách)

Řešení: tabulka

Při řešení budeme pracovat pouze s cestou jedním směrem, to znamená, že hostiteli tato cesta trvala pouze polovinu ze $\frac{3}{4}$ dne. Byl tedy na cestě $\frac{3}{8}$ dne. Host cestoval ještě o $\frac{1}{3}$ dne déle. Jeho cesta k místu předání trvala tedy $\frac{3}{8} + \frac{1}{3}$ dne. To je celkem $\frac{17}{24}$ dne.

Nyní je již dosazení do tabulky snadné.

	Host	Hostitel
V	300 li/den	*x* li/den
t	$\frac{17}{24}$ dne	$\frac{3}{8}$ dne
S	$(300.\frac{17}{24})$ li	$(x\,.\,\frac{3}{8})$ li

Rovnice: $300.\frac{17}{24} = \frac{3}{8}x,$

$\underline{\underline{x = 566}}\frac{2}{3}\,.$

Hostitel by ujel na koni za den $566\frac{2}{3}$ li.

Rozbor

Úlohu ze sborníku Matematika v devíti knihách jsem do práce zařadila jako úlohu historickou. Je obtížné jí porozumět nejen proto, že se v ní objevují neznámé jednotky délky li*,* ale také nejsou žáci vůbec zvyklí používat jako jednotku času celý den. Převáděním na hodiny si řada z nich úlohu spíše zkomplikovala. I přesto, že jsou nejvíce zastaralé a problematické obraty v českém překladu úlohy již vysvětleny, řešení úlohy to nijak nepomohlo. Dokonce se v rozboru objevily dotazy jako: „*Co je jednotka li?*“ Nevím, jak jinak vysvětlit, že jeden li je přibližně půl kilometru, než je uvedeno již v zadání.

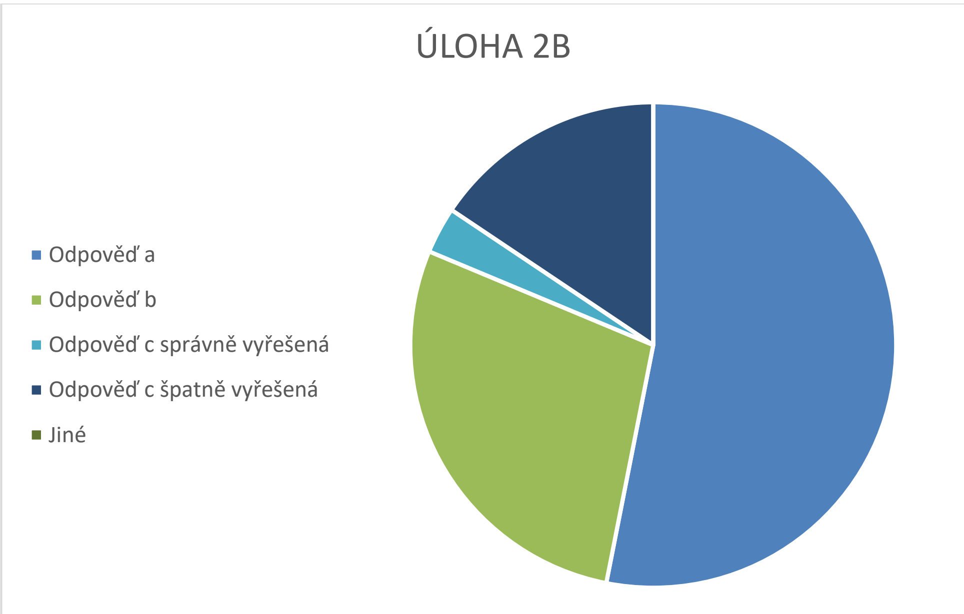
Většina žáků se shodla na tom, že je zadání složitě formulováno a poskytuje mnoho informací, které nejsou schopni spojit do jediné rovnice. Podle O.D.: „*Věřím, že úloha se dá vyřešit snadno, ale za mne je tam moc informací, které si já neumím spojit do rovnice.*“ Podle mého očekávání byl problém i se slovním zadáním částí dne. Někteří žáci nejsou schopni zlomek správně zapsat čísly. J. V. uvedl: „*Rozumím všemu, ale trochu jsem se ztrácel v částech dne*.“

V dotazníku se nejčastěji objevuje možnost a. Žákům bylo zadání naprosto nesrozumitelné. Žákyně V. B. napsala: „*Je to na mě moc těžké. Moc věcí a ani to nechápu*.“ Jiný z žáků ohodnotil obtížnost úlohy větou: „*Až moc logická úloha.*“ Jiní již tak složitou úlohu ještě komplikovali přemýšlením o dalších informacích: „*Nevím, čím jel host*.“

Přestože slovní úlohy o pohybu jsou probírány podrobně nejen v matematice, ale i fyzice a žáci v jiných úlohách prokázali, že s řešením tohoto typu úloh nemají veliké obtíže, tato úloha s komplikovaným zadáním byla většinou nad jejich síly.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 2B	Odpověď a[37]	Odpověď b[38]	Odpověď c[39] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	5	6	1	1	0
Základní škola	12	3	4	0	0
Celkem	17	9	5	1	0
Celkem v %	53,1	28,2	15,6	3,1	0



[37] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[38] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[39] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.

ÚLOHA 3B

Žák měl 57 Kč. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 3 Kč papír. Kolik stál trojúhelník a kolik štětec?

Řešení: viz. úloha 5A

3.7.10 Úloha 4B

Dva pracovníci se rozhodli, že před nástupem na dovolenou vykonají jistou práci. První z nich by sám práci vykonal za 45 pracovních dní, druhý za $67\frac{1}{2}$ dne. Za kolik pracovních dní mohou odejít na dovolenou, budou-li pracovat společně?

Řešení:

Označme x počet dní, po které budou kolegové pracovat společně.

Rovnice: $(\frac{1}{45} + \frac{1}{67{,}5})\,.\,x = 1,$

$$\underline{\underline{x = 27.}}$$

Oba pracovníci mohou na dovolenou odejít za 27 dní společné práce.

Rozbor

Úloha 4B je podobná jako úloha 4A, pouze je přeformulovaná do aktuálnější podoby. Původní úloha (4A) byla z prostředí hornického dolu a odvolávala se na sjezd KSČ. To jsem ze zadání vypustila. Mnou aktuálně formulovaná by měla být slovní úloha nadčasová. Jednotky dní budou aktuální vždy a práce, kterou je třeba vykonat, tu také není blíž specifikovaná. To je sice z pohledu aktuálnosti kontextu velká výhoda, ovšem v průběhu řešení pro žáky spíš překážka. Zjistila jsem, že obrat „jistá práce“ žáky nemotivuje. Neví, co si pod pojmem představit, odkud vlastně začít počítat.

Další obtíž jsem očekávala s použitím smíšeného čísla $67\frac{1}{2}$. Toto očekávání se potvrdilo, opravdu pro žáky tento zápis není přirozený a počítá se jim s ním hůř.

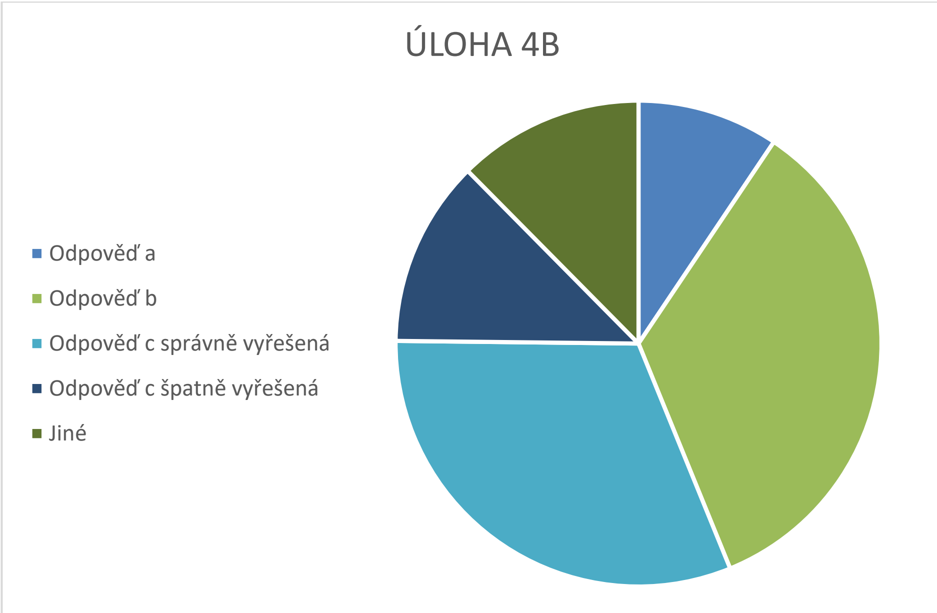
Překvapilo mě, o kolik lépe úlohu zpracovali žáci základní školy oproti většinou neúspěšným gymnazistům. Následně jsem zjistila, že žáci devátého ročníku tento typ úloh, tedy slovní úlohy o společné práci, nedávno probírali, a proto mají řešení v živé paměti. I se smíšeným číslem si poradili lépe. To jen potvrzuje žák gymnázia T. P.: *„Ne, že bych tomu nerozuměl, ale jsou tam příliš těžká čísla.“* Vzhledem k tomu, jaká čísla se v úloze vyskytují, jsou možné jen dva výklady tohoto tvrzení. Buď mu přišlo obtížné právě smíšené číslo, nebo jiná formulace jedničky (jistá práce). Předpokládám, že problém mohl nastat s oběma těmito údaji.

Úspěšnost řešení 31,3 % je u takové úlohy nízká a naopak množství žáků, kteří zadání sice rozumí, ale nemají nástroje k jejímu vyřešení (34,4 % žáků), je velké. Protože v zadání úlohy nebyla žádná komplikovaná formulace a žáci by měli mít algoritmus řešení úloh o společné práci zvládnutý, nečekala jsem při řešení úlohy takové problémy.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 4B	Odpověď a[40]	Odpověď b[41]	Odpověď c[42] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	3	7	2	1	0
Základní škola	0	4	2	9	4
Celkem	3	11	4	10	4
Celkem v %	9,4	34,4	12,5	31,3	12,5

[40] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[41] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[42] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.



3.7.11 Úloha 5B

Žák měl 11,40 Kčs. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 60 haléřů papír. Kolik stál trojúhelník a kolik štětec?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Řešení: viz. úloha 3A

3.7.12 Úloha 6B

Adam se vrátil z výletu se svým skautským oddílem. Pečlivě si zapisoval, kolik kilometrů cestovali. Do hodiny matematiky si připravil pro své spolužáky tento úkol: „Kolik kilometrů jsme celkem cestovali, jestliže jsme ušli pěšky 4/7 cesty, autobusem ujeli dvakrát méně, než jsme ušli pěšky, a zbylých 14 km jsme urazili lodí?

(Matematika Rovnice a nerovnice, Prometheus)

Řešení:

Nejprve uděláme zápis úlohy, vyjádříme všechny části cesty pomocí neznámé *x*, kde *x* označuje celkový počet kilometrů, které oddíl urazil.

pěšky……… $\frac{4}{7}x$ km

autobusem…$[(\frac{4}{7}x) : 2]$ km

lodí…………14 km

<u>celkem………*x* km</u>

Rovnice: $\frac{4}{7}x + (\frac{4}{7}x) : 2 + 14 = x,$

$$\underline{\underline{x = 98.}}$$

Správnost řešení ověříme zkouškou dosazením.

Při odpovědi opět musíme dát pozor na to, aby žáci odpovídali pouze na otázku, která byla položena. Skauti celkem urazili 98 km.

Rozbor

Úloha je vybrána z aktuální řady učebnic. Svým kontextem je naprosto aktuální. Problematika cestování je víceméně nadčasová. Jediné místo, kde by se dalo o aktuálnosti v některých dobách pochybovat, je prostředí skautského oddílu. Ale doufám, že i tento pojem se nestane v nejbližší době neaktuální, zastaralý nebo dokonce historický. Z jazykového hlediska jsem v této úloze neočekávala žádný problém. Předpokládala jsem, jak se ukázalo správně, že se v dotaznících neobjeví žádná odpověď a (absolutní neporozumění textu úlohy). Naopak jsem čekala velké procento naprosto správných odpovědí. Bohužel výsledky sebrané na základní škole jsou ovlivněné nedostatkem času pro řešení úlohy. Žáci často tuto úlohu řešili až jako poslední, a proto ji nestihli řádně přečíst, a tudíž ani vyřešit. Myslím, že část z nich v rychlosti zaškrtala možnost b, část ani odpověď neřešila.

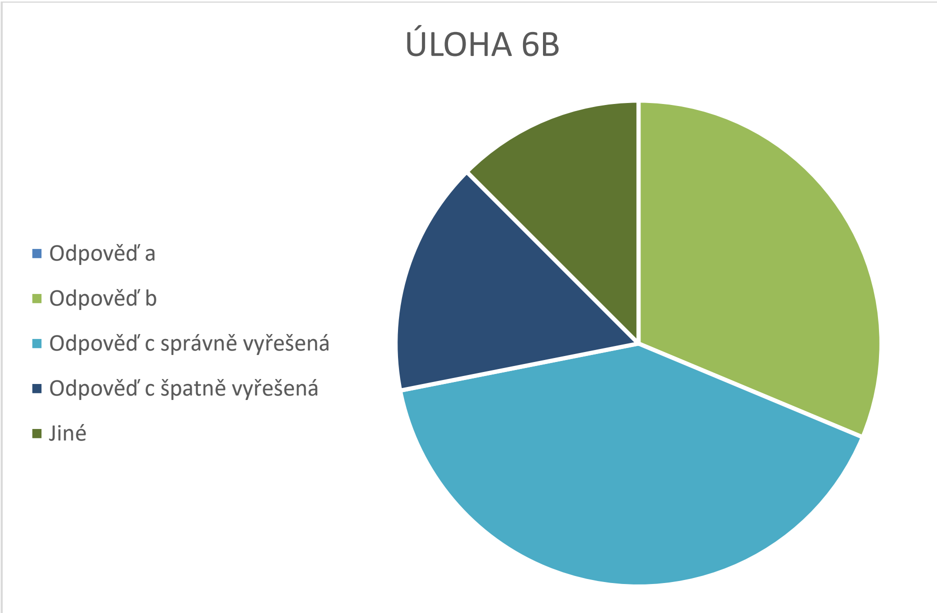
Naproti tomu na gymnáziu dopadlo procentuální zastoupení odpovědí b a c přesně podle mého očekávání. Pouze 10,3 % žáků si s úlohou nevědělo rady, dalších 6,9 % pak dospělo ke špatnému výsledku. Jeden z problémů, které žáci zmiňovali, vystihl žák A. D.: *„Neumím moc počítat se zlomkem."* To ale samozřejmě v této fázi vzdělávání není žádnou opodstatněnou připomínkou. Spíš je k zamyšlení, že žák s tímto přístupem je schopen fungovat na gymnáziu.

Pro mne nejpřekvapivější komentář k řešení úlohy přišel od M. K.: *„Věděl jsem, jak zapsat rovnici, ale nevěděl jsem, jak to vypočítat."* Tak nějak automaticky jsem předpokládala, že nejproblematičtějším místem v řešení jakékoliv slovní úlohy je zapsat danou situaci rovnicí. Ale celá tato práce mi ukázala, že nic nesmím dopředu jednoznačně předpokládat, protože každý žák je jiný a téměř každé řešení něčím překvapivé.

Tabulka a grafické znázornění správnosti řešení

ÚLOHA 6B	Odpověď a[43]	Odpověď b[44]	Odpověď c[45] špatně vyřešená	Odpověď c správně vyřešená	Jiné
Gymnázium	0	3	2	8	0
Základní škola	0	7	3	5	4
Celkem	0	10	5	13	4
Celkem v %	0	31,3	15,6	40,6	12,5

[43] a) Mám problém porozumět textu úlohy.
[44] b) Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
[45] c) Úlohu umím bez problémů vyřešit.



3.7.13 Úloha 7B

Pan Malý šel nakupovat před malováním bytu. Měl spočítáno, že vozík uveze právě 11,4 kg materiálu. Věděl, že může koupit kbelík bílé a kbelík tónované barvy, nebo dva kbelíky bílé a sadu štětců vážící 0,6 kg. Kolik kg váží kbelík bílé a kolik kbelík tónované barvy?

Řešení: viz. úloha 7A

3.8 Závěrečné vyhodnocení experimentu

V závěru této části své práce shrnuji a vyhodnocuji výsledky šetření. Porovnám dosažené výsledky a úspěšnost v úlohách obměněných pouze kontextem. Konfrontuji výstupy s očekáváním, vysloveným v úvodu experimentu.

Úloha 1A je přepracovaná verze zastaralé úlohy, která v je v šetření uvedena pod symbolem 1B. Když jsem novou úlohu formulovala, snažila jsem se vyhnout prostředí JZD a práci s již neexistujícími jednotkami Kčs. V řešení se často objevila stejná chyba, kdy žáci automaticky místo Kčs zapisují Kč. To jsem jako chybu v řešení nebrala a také proto jsou výsledky úspěšnosti řešení obou úloh prakticky stejné. Podle hodnocení žáků se jim přepracovaná verze řešila o něco snadněji, ale i žáci, kteří měli v zadání úlohu zastaralou, si s ní poradili stejně dobře. Procentuálně vyjádřeno zastaralou verzi úlohy úspěšně spočítalo 59,4 % žáků a aktuálně zadanou 58,3 % žáků. Stejně tak neúspěšní řešitelé, kterým je text úlohy ale srozumitelný, jsou zastoupeni v přibližně stejném poměru: 31,3 % žáků nezvládlo vypočítat úlohu původní a 27,8 % žáků nevyřešilo úlohu mnou přepracovanou. Dokonce nepatrně úspěšněji z tohoto srovnání vychází zadání původní.

Jako zástupce úloh o pohybu jsem zvolila aktuální úlohu 2A a historickou úlohu 2B. Tady je srovnání trochu obtížnější, protože se nejedná jako v předchozím případě o totožnou úlohu pouze s jiným kontextem. Ale myslím, že i toto srovnání svoji výpovědní hodnotu má. Tady je zásadní zejména srovnání počtu žáků, kteří úloze rozumí, ale nemají aparát k jejímu vyřešení. To je v obou případech kolem 30 % žáků. Ze zbytku řešitelů potom můžeme porovnávat skupiny žáků, kteří úloze rozumí a pokusili se ji vyřešit, a těch, kteří se do řešení úlohy vůbec nepustili, protože pro ně bylo zadání příliš obtížné a nesrozumitelné. Tady je poměr hodně nevyrovnaný. Úlohu historickou se pokusilo vyřešit pouze 18,7 % žáků z toho pouze 3,1 % žáků pracovalo úspěšně. Aktuální úlohu potom řešilo celých 61,1 % žáků a úspěšně ji zvládlo 52,8 % řešitelů z celkového počtu 68 dotazovaných. Počet žáků, kteří se úlohu vůbec nepokusili řešit, protože neporozuměli zadání, je v historické úloze 53,1 %. V úloze aktuální se podle předpokladu nenašel žádný žák, kterému by zadání přišlo nesrozumitelné. V tomto případě má tedy aktuálnost kontextu a hlavně použití moderního jazyka oproti úloze historické pozitivní vliv a mnohem větší úspěšnost řešení. Je to dáno tím, že historická úloha je zadána velmi archaickým jazykem. Žákům je cizí zejména složitý slovosled vět.

Další dvojici tvoří úlohy zaměřené na společnou práci. Úlohu 4A z prostředí dolu a řešenou na pozadí sjezdu KSČ doplňuje aktualizovaná verze, ve které jsou tyto kontexty nahrazeny neutrálním pracovním prostředím v úloze 4B. Počty žáků, kteří se úlohu pokusili spočítat, nejsou ani v jednom případě nijak vysoké. V úloze 4A se jedná o 38,9 % žáků a v aktuální verzi 4B 43,8 % žáků. To naznačuje, že aktuálnost kontextu při řešení opravdu význam má. Na druhou stranu počet žáků, kteří zadání chápou, ale neví, jak ji vyřešit, je v případě zastaralé úlohy o 10 % vyšší. Pokud bychom tedy vzali v úvahu všechny řešitele, kteří uvádějí, že úloha jim je srozumitelná, bez ohledu na úspěšnost řešení, tak se tyto počty téměř vyrovnávají.

Typickým příkladem slovních úloh o dělení na nestejné části jsou 6A, což je historická úloha o Pythagorovi, a 6B o putování skautského oddílu. Opět tu byl problém zejména s použitím archaického slovosledu ve starořecké úloze. Žáci poukazovali na problémy s délkou zadání, nestandardní jim přišlo i položení otázky hned v úvodu úlohy. Problémem se ukázalo i zapsání číselných údajů slovy. Z těchto důvodů považovalo úlohu za srozumitelnou a vyřešitelnou pouze 36,2 % žáků. Naproti tomu slovní úloha z aktuální řady učebnic byla srozumitelná 56,2 % žáků, z nichž většina zvládla úlohu vyřešit bez problémů. Naprosto nesrozumitelná byla historická úloha pro 22,2 % všech řešitelů. Úloha zadaná v aktuálním kontextu nečinila problém s porozuměním žádnému ze žáků, kteří ji řešili. V těchto úlohách je tedy rozdíl způsobený aktuálností, či neaktuálností zadání velmi citelný.

Zbylé úlohy potom vycházejí ze stejné zastaralé verze. Ve všech zadáních byla obsažena tato úloha jako originál z početnice z roku 1970 (3A, 5B). Další verzí bylo zadání mnou přeformulované, tak, aby kontext zůstal stejný, jen hodnoty a jednotky aktuálnější (5A, 3B). A poslední verze, kde zůstaly stejné číselné údaje, ale kontext jsem změnila, aby se jednalo o úlohu pro současné žáky, s jejich zkušenostmi, ověřitelnou (7A, 7B). Předpokládala jsem, že nejvyšší úspěšnosti dosáhnou žáci v úloze aktuální, kde jsem změnila pouze hodnoty avšechna čísla objevující se v ní vynásobila pěti, aby ceny kupovaných předmětů odpovídaly aktuálnímu stavu. Vzhledem k tomu, že obměnou z úlohy zmizela desetinná čísla a úloha byla tak řešena pouze v oboru přirozených čísel, náročnost výpočtu nebyla tak vysoká jako u ostatních dvou verzí úlohy. Tato domněnka se potvrdila. Opravdu nejvíce správných odpovědí mezi těmito úlohami získala právě tato varianta. 82,4 % žáků zvládlo vyřešit úlohu zcela správně. V souladu s předpokladem, že aktuální nebo neutrální kontext je pro žáky při řešení úlohy snazší než zastaralé údaje, jsem očekávala, že druhá přepracovaná verze úlohy, kde jsem měnila pouze kontext, bude mít více úspěšných řešení než úloha původní. To se ovšem nepotvrdilo. Původní zastaralá úloha z roku 1970 byla úspěšně vyřešena 75 % žáků, zatímco obměněná verze, řešitelná ovšem stejnou rovnicí, pouze 52,9 % žáků. To mohlo být vlivem toho, že úloha byla v obou verzích zadání uvedena jako poslední a zejména žáci základní školy byli již tlačeni časem, aby stihli nejen slovní úlohy vyřešit, ale i vyplnit dotazník, týkající se pochopení každé úlohy. Takže přestože jsem čekala v těchto úlohách jednoznačné potvrzení svého očekávání, bohužel jsem ho nedokázala uspokojivě potvrdit.

Původní očekávání, že úlohy zasazené do aktuálního kontextu jsou pro žáky srozumitelnější, a proto i lépe řešitelné než úlohy zastaralé, experiment nedokázal uspokojivě potvrdit. Ve dvou případech byla úspěšnost v aktuálních úlohách vyšší, ale jen o 5 %, resp. 7 %. V jedné úloze dokonce zastaralou verzi úlohy vyřešilo o 1,1 % žáků více než aktuální verzi.

Naproti tomu očekávání, že historické úlohy jsou pro žáky nesrozumitelné a samostatně většinou velmi obtížně řešitelné se potvrdilo.

4 Závěr

V úvodu práce jsem popsala důvody, proč jsem si vybrala téma diplomové práce, která se zaměřuje na strategie řešení slovních úloh v závislosti na jejich kontextu. Stručně jsem shrnula obsah své bakalářské práce, na kterou tématem diplomové práce navazuji. Stanovila jsem si několik cílů. V teoretické části bylo mým cílem seznámit se s různými definicemi pojmu slovní úloha, zasazení pojmu slovní úloha do kontextu školské matematiky a vytvořit nástin historického vývoje slovních úloh. Dalším cílem bylo ukázat pojetí slovních úloh o pohybu, slovních úloh o společné práci a slovních úloh o dělení celku na části v současných učebnicích matematiky na druhém stupni základní školy. V praktické části práce jsem si vytyčila za cíl prokázat, zda má kontext, ve kterém se slovní úloha odvíjí, vliv na to, jak žáci, kteří se zúčastnili šetření, úlohu řeší, a zjistit, zda formulace slovní úlohy a použití moderního jazyka žákům při řešení slovní úlohy pomohou. Všechny vytyčené cíle jsem v práci splnila.

Nejprve jsem ukázala pojetí pojmu úloha pohledem různých významných matematiků (např. Novotná, 2000; Fridman, 1977; Polya, 1966). Potom jsem charakterizovala úlohu jako **úmyslně navozenou problémovou situaci, kterou je třeba řešit, a tím dosáhnout u žáků určitého učebního cíle**. Pojem slovní úloha jsem na základě definic různých autorů (např. Odvárko a kol. 1990; Vyšín 1962, Blažková a kol., 2002) rozdělila na dva typy: úlohy matematického charakteru, které se zakládají na reálném kontextu, a úlohy, které jsou podle označení některých autorů čistě matematické, tzn. uvozené slovy *vypočítej, uprav, odvoď* atd. Ve své práci jsem se zabývala pouze prvním typem slovních úloh.

Další kapitola diplomové práce je věnována různým možnostem dělení slovních úloh podle rozlišných kritérií. Jako stěžejní jsem pro svoji práci zvolila dělení slovních úloh podle Novotné (2000), která slovní úlohy dělí podle kontextu. První skupinu tvoří **slovní úlohy o dělení celku na části**. Jiným typem úloh jsou **slovní úlohy o pohybu.** Další, v učebnicích samostatně uváděný, typ úloh jsou **slovní úlohy o společné práci.** Poslední velkou součástí skupiny, kterou jsem se v práci zabývala, jsou **slovní úlohy o směsích.**

Následně jsem zmínila ukotvení slovních úloh v rámcových vzdělávacích programech. Zastavila jsem se u pojmů kompetence a matematická gramotnost. Stručně jsem zasadila slovní úlohy do historických souvislostí.

V další části diplomové práce jsem provedla rešerši dostupných učebnic schválených MŠMT, v nichž se slovní úlohy o dělení celku na části, o pohybu, o společné práci a o směsích nachází. Sledovala jsem zejména přístup k dělení slovních úloh podle kontextu, důkladnost a zpracování výkladu a četnost úloh k procvičování. Vzhledem k tématu své práce jsem se zaměřila na aktuálnost kontextu uvedených úloh. Podle očekávání se v učebnicích objevují zejména úlohy aktuální, minimálně jsou zastoupeny úlohy historické a v několika málo případech jsem našla úlohy se zastaralým kontextem.

V úvodu praktické části diplomové práce jsem zformulovala dvě očekávání. Pomocí výzkumu provedeného ve dvou třídách základní školy a jedné třídě víceletého gymnázia jsem chtěla svá očekávání potvrdit nebo vyvrátit. K ověření, zda se má očekávání u žáků, kteří se šetření zúčastnili, potvrdila, jsem zvolila metodu dotazníkového šetření. Žáci dostali sadu zadání slovních úloh, které každý samostatně vyřešil. Každý z řešitelů dostal zároveň dotazník, zjišťující jeho názor na srozumitelnost textu úlohy. První z očekávání, že slovní úlohy s aktuálním kontextem budou pro žáky snadněji řešitelné než úlohy zastaralé, ve kterých je obtížnější se zorientovat a není možné pomocí vlastní zkušenosti ověřit správnost řešení, se mi uspokojivě potvrdit nepodařilo. Naproti tomu očekávání, že historické úlohy jsou pro žáky často nesrozumitelné, a proto jejich řešení činí žákům většinou obtíže, se potvrdilo. Vzhledem k malému vzorku řešitelů považuji výsledky svého výzkumu za orientační a spíše za námět k rozsáhlejšímu šetření.

Přínos práce pro svou pedagogickou praxi vidím zejména v tom, že jsem si uvědomila, že ne všechna očekávání, se kterými do výuky vstupuji, jsou platná tak jednoznačně, jak se mi zdálo. Velikým přínosem, a doufám, že nejen pro mě, je rešerše učebnic. Díky ní mám přehled, po jaké učebnici nejraději sáhnu, když budu potřebovat podpořit vlastní výklad tématu slovních úloh. Vím, kde hledat úlohy k procvičení a v případě zájmu třeba náměty k použití historických úloh.

Seznam použitých informačních zdrojů

Odborná literatura

BALDA, F. *Z dějin elementární matematiky*. 1. vydání, Praha: SPN, 1959, 238 s. ISBN 85-0-04.

BLAŽKOVÁ, R., K. MATOUŠKOVÁ a M. VAŇUROVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: slovní úlohy, projekty*. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-3022-4.

BOBOK, J. a kol. *Metodická příručka k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy.* 1. vydání, Praha: SPN, 1983, 152 s. ISBN 14-474-83.

BUŘIL, Z. *Slovní úlohy v matematice*. Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1985, 60 s.

FALTÝN, J., K. NĚMČÍKOVÁ, E. ZELENDOVÁ (eds). *Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele*, Praha 2010.

FOLTA, J., Z. HORSKÝ, L. NOVÝ, I. SEIDLEROVÁ, J. SMOLKA, M. TEICH. *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století.* 1. vydání, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1961, 432 s.

FRIDMAN, L. M.: Logiko-psychologičeskij analiz školnych učebnych zadač. Moskva, Pedagogika, 1977.

GABRIEL, V. *Obrázky ze školství českého a rakouského v XVIII. a XIX. století*. Praha: Matice lidu XXV, 1891.

HEJDRYCHOVÁ, K., *Strategie řešení slovních úloh v historickém vývoji*. Praha, 2014 Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, 2014-09-04.

HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: SPN, 1989, ISBN 80-8052-085-2.

HEJNÝ, M. a F. KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál (vydavatelství), 2001. ISBN 80-7178-581-4.

HELUS, Z. a kol. *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. Praha: SPN pedagogické nakladatelství, 1979.

HENDL, J. *Kvalitativní výzkum. Základní teorie, metody a aplikace.* 2. vydání, Praha: Portál, 2008, 407 s. ISBN: 978-80-7367-485-4

HRUŠA, K., Z. DLOUHÝ a J. ROHLÍČEK. *Úvod do studia matematiky*. 2. dopl. vyd. Praha: SPN pedagogické nakladatelství, 1977.

HRUŠA, K. *Metodika počtů pro pedagogické fakulty*. 2. vyd. Praha: SPN pedagogické nakladatelství, 1968.

JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vydání, Praha: Academia, 1978, 448 s. ISBN 509-21-857.

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968, 224 s. ISBN 507-21-875.

KONFOROVIČ, A. G. *Viznačni matematični zadači*. Kijev: Radanska škola, 1981, 208 s.

KRAEMER, E. (předseda komise) *Učební osnovy základní školy Matematika 5. – 8. ročník*. 1. vydání, Praha: SPN, 1987, 52 s. ISBN 14-596-87.

KRIŽALKOVIČ, K. a kol. *Metodická příručka k učebnici Cvičení z matematiky pro 8. ročník základní školy*. 1. vydání, Praha: SPN, 1983, 64 s. ISBN 14-434-83.

MIKULČÁK, J. *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*. 1. vydání, Praha: MATFYZPRESS, 2010, 313 s. ISBN 978-80-7378-112-5.

NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2000, 126 s. ISBN 80-7290-011-0.

NOVOTNÁ, J. Zpracování informací při řešení slovních úloh, in Hejný M., Novotná J., Stehlíková N. (eds): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta 2004, s. 367-378, ISBN 80-7290-189-3(2. sv.).

ODVÁRKO, O. *Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ Matematika a její aplikace*. 1. vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2006, 111 s. ISBN 80-7196-333-X.

ODVÁRKO, O. a kol. *Metody řešení matematických úloh: Učebnice pro matematicko-fyzikální fakulty*. Praha: SPN pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN (váz.).

POLYA, G. *How to solve it.* Princeton Univerzity press, 1945.

SMIDT, Siegbert., WEISER, Werner. (1995). Semantic structures of one-step word problems involv-ing multiplication or division. Educational Studies in Mathematics, 28(1), 55–72. doi: 10.1007/BF01273856.

STRUIK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. 2. vydání, London: G. Bell and Sons Ltd., 1956, 195 s.

TRÁVNÍČEK, S. Slovní úlohy o pohybu. In Matematika – fyzika – informatika 14, 2004/2005.

VONDROVÁ, N., M. RENDL, R. HAVLÍČKOVÁ, L. HŘÍBKOVÁ, A. PÁCHOVÁ aj. ŽALSKÁ. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh*. 1. vydání, Praha: SPN, 1962, 172 s. ISBN 14-907-62.

Učebnice

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, Jana. *Matematika 8: pro 8. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-994-2.

COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-995-9.

HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2017]. ISBN 978-80-905756-8-4.

HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda E*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2017]. ISBN 978-80-88247-00-5.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2015]. ISBN 978-80-905756-1-5.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda C*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2016]. ISBN 978-80-905756-3-9.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK a Eva BOMEROVÁ. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2015]. ISBN 978-80-905756-0-8.

HERMAN, Jiří. *Matematika: Sekunda*. Rovnice a nerovnice. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-014-4.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV*. Brno: Nová škola, 2018. ISBN 978-80-7289-970-8.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV*. Ilustroval Martin BAŠAR. Brno: Nová škola, 2016. ISBN 978-80-7289-837-4.

KINDL, K. *Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy*. 6. vydání, Praha: SPN, 1970, 203 s. ISBN 14-198-79

MOLNÁR, Josef. *Matematika 8*. Olomouc: Prodos, 2007. ISBN 80-7230-062-8.

MOLNÁR, Josef. *Matematika 9*. Olomouc: Prodos, 2001. ISBN 80-7230-109-8.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. [2], Lineární rovnice. Základy statistiky. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-435-3.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika 8 pro základní školy*. Praha: SPN pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-419-1.

ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 1999. ISBN 80-85607-92-1.

ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 8*. 2. Díl. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-127-2.

Internetové zdroje:

Rámcový vzdělávací program. [citováno 2018-07-07]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp

Internetový portál Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy [citováno 2018-07-07]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/uploads/VKav_200/Ucebnice_2014_03/Ucebnice_2014_III_ZS.docx

Seznam příloh

Příloha 1

Úloha 1. Tři sourozenci jsou na letní brigádě. Marie a Petra zabalily dohromady 784 balíků. Petra a Milan dohromady zabalili 812 balíků a Petra sama 370 balíků. Kolik si vydělali sourozenci dohromady, když za jeden zabalený balík dostali 24 Kč?

Úloha 2. Z továrny vyjelo v 8 hodin a 30 minut nákladní auto s objemným nákladem průměrnou rychlostí 20 km/h. V 9 hodin za ním vyjelo osobní auto, které jelo průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin dostihne nákladní auto?

Úloha 3. Žák měl 11,40 Kčs. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 60 haléřů papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

Úloha 4. Dva horníci si dali na počest sjezdu KSČ závazek, že do dne sjezdu vytěží jisté množství uhlí. První z nich by sám splnil závazek za 45 směn, druhý za $67\frac{1}{2}$ směny. Za kolik směn splní závazek, budou-li pracovat společně?

Úloha 5. Žák měl 57 Kč. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 3 Kč papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

Úloha 6. „Phytagore vznešený, helikónských múz potomku, na mou odpověz otázku, kolik věrných žáků máš ve svém domě, kde jako borci na závodišti usilují o prvenství?“

„Rád povím, Polykrate. Vidíš, že polovina žáků pěstuje matematiku, a zatím čtvrtina na věčnou přírodu své zkoumání obrací. Sedmina nedělá nic, jen mlčení zachovává, jen své duše očišťuje, víš, opakováním učiva. A přidej k nim tři ženy, které nevstávají tak brzy, mezi nimi nejvýznamnější je má milovaná Teano.

Hle a to jsou všichni, které vedu cestou moudrosti a snad i múz pierijských jim zjednám lásku boží.“

Úloha 7. Pan Malý šel nakupovat před malováním bytu. Měl spočítáno, že vozík uveze právě 11,40 kg materiálu. Věděl, že může koupit kbelík bílé a kbelík tónované barvy, nebo dva kbelíky bílé a sadu štětců vážící 0,60 kg. Kolik kg váží kbelík bílé a kolik kbelík tónované barvy?

Příloha 2

Úloha 1. V JZD pracují rodiče s dcerou. Matka a dcera odpracovaly za rok dohromady 784 jednotek, otec s dcerou 812 jednotek, dcera sama 370 jednotek. Kolik dostali v této rodině za rok peněz, když v družstvu byla pracovní jednotka odměňována částkou 24 Kčs?

Úloha 2. Host ujede za den 300 li (jeden li se rovná 0,576 km). Host vyjel od hostitele, ale zapomněl jeden oděv. Když po třetině dne hostitel objevil zapomenutý oděv, vydal se na cestu, aby hosta dohonil. Když předal oděv hostovi, ihned obrátil koně na zpáteční cestu, za tři čtvrti dne (od odjezdu hosta) byl opět doma. Kolik li by ujel na koni za den?

Úloha 3. Žák měl 57 Kč. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 3 Kč papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

Úloha 4. Dva pracovníci se rozhodli, že před nástupem na dovolenou vykonají jistou práci. První z nich by sám práci vykonal za 45 pracovních dní, druhý za $67\frac{1}{2}$ dne. Za kolik pracovních dní mohou odejít na dovolenou, budou-li pracovat společně?

Úloha 5. Žák měl 11,40 Kčs. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 60 haléřů papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

Úloha 6. Adam se vrátil z výletu se svým skautským oddílem. Pečlivě si zapisoval, kolik kilometrů cestovali. Do hodiny matematiky si připravil pro své spolužáky tento úkol: „Kolik kilometrů jsme celkem cestovali, jestliže jsme ušli pěšky 4/7 cesty, autobusem ujeli dvakrát méně, než jsme ušli pěšky a zbylých 14 km jsme urazili lodí?

Úloha 7. Pan Malý šel nakupovat před malováním bytu. Měl spočítáno, že vozík uveze právě 11,40 kg materiálu. Věděl, že může koupit kbelík bílé a kbelík tónované barvy, nebo dva kbelíky bílé a sadu štětců vážící 0,60 kg. Kolik kg váží kbelík bílé a kolik kbelík tónované barvy?

Příloha 3

Dotazník k řešení slovních úloh

Úloha 1.

- o Mám problém porozumět textu úlohy.
- o Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- o Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....

....

....

Úloha 2.

- o Mám problém porozumět textu úlohy.
- o Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- o Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....

....

....

Úloha 3.

- o Mám problém porozumět textu úlohy.
- o Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- o Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....

....

....

Úloha 4.

- o Mám problém porozumět textu úlohy.
- o Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- o Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....

....

....

Úloha 5.

- Mám problém porozumět textu úlohy.
- Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....…………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………...………………………………………………………………………………

Úloha 6.

- Mám problém porozumět textu úlohy.
- Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....…………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………...………………………………………………………………………………

Úloha 7.

- Mám problém porozumět textu úlohy.
- Zadání úlohy rozumím, ale neumím ji vyřešit.
- Úlohu umím bez problémů vyřešit.

Měl jsi se zadáním úlohy nějaký problém? Objevuje se v textu něco, čemu nerozumíš (případně sis význam domyslel)? Co?

....…………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………...………………………………………………………………………………