

Oponentský posudek disertační práce  
**Kernel Methods in Particle Filtering**  
Mgr. Ing. Davida Coufala

Disertační práce se věnuje tématu jádrových odhadů hustot a jejich derivací v oblasti teorie částicových filtrů. Hlavní teoretické výsledky se týkají odhadů tzv. MISE chyby (zkratka z anglického termínu *mean integrated square error*) těchto odhadů. Horní odhad chyby odvozený metodikou vícerozměrné Fourierovy transformace je doplněn výsledkem o nevylepšíitelnosti řádu odhadu, poněkud nepřesně interpretovaným jako dolní odhad chyby. Metodika samotná je inspirována Tsybakovovou knihou z roku 2009, kde se ovšem studuje jednorozměrný případ. Tyto odhady MISE chyby hrají klíčovou roli pro odhady rychlosti konvergence. Druhá část disertace je věnována konkrétnějším metodám konstrukce takových odhadů založeným na speciálních třídách polynomů.

Práce je napsána v anglickém jazyce. Oceňuji, že druhá kapitola, jejíž účelem je seznámit čtenáře s matematickým aparátem který je v disertaci později používán, je napsána celkem srozumitelně. Tato přehledová část disertace neobsahuje důkazy uváděných výsledků, místo toho jsou uvedeny odkazy na literaturu. Pročtení této kapitoly je klíčové pro základní porozumění textu dalších kapitol disertace. Je zde zaváděno značení používané v celém textu disertace, které je ovšem na můj vkus někdy těžkopopádné či nadbytečné, například složený symbol  $W_\mu^B$  na straně 11 vlastně nahrazuje jednodušší symbol míry  $\mu$ . Mám i několik dalších konkrétnějších výhrad k formálnímu stylu zpracování; jsou uvedeny v seznamu námitek.

Klíčové teoretické výsledky jsou v třetí kapitole, kde jsou již uváděny důkazy. Byl jsem schopen rámcově sledovat argumenty v oddíle 3.1, text důkazů v oddíle 3.2 je již hodně obtížně sledovatelný pro čtenáře který není podrobně obeznámen s teorií rozvinutou v Tsybakovově knize. Proto za mírný nedostatek disertace považuji že v přehledové druhé kapitole nebyl udělán přehled teorie z Tsybakovovy knihy stejně tak jak tam byl přehledným způsobem vysvětlen aparát z Douchetových knih, což mě osobně umožnilo sledovat argumenty v oddíle 3.1. Hlavním výsledkem v oddíle 3.3 je tvrzení o přenosu klíčového předpokladu Sobolevské charakteru hustoty na jejich derivace; tento pojem převzatý z Tsybakovovy knihy hraje klíčovou roli v předpokladech odhadových vět.

Nicméně, přesto si neodpustím výtku že styl důkazů v oddíle 3.1 je na můj vkus až příliš lakonický. Mám na mysli důkaz věty 3.1: na straně 35 je vlastně uvedena série nerovností ale chybí čtenářem očekávané zdůvodnění proč takové nerovnosti platí, přičemž někdy takové zdůvodnění je založeno na použití hlubšího aparátu z předchozí kapitoly, například Planchererovy věty či na komplexnější úvaze nebo na označovací konvenci. Někdy by si jeden řádek zasloužil podrobnější rozepsání na až tři řádky. Čtenář je potom zcela oprávněně na pochybách zda třeba autor neudělal někde chybu, je totiž obtížné zpětně rozkódovat autorovo chybějící zdůvodnění. Proto bych po autorovi v rámci odpovědí na dotazy chtěl, aby si na obhajobu připravil a předvedl podrobné a přesné zdůvodnění platnosti nerovností mezi řádky 7 a 12 strany 35 a dále ještě podrobněji a přesněji vysvětlil proč platí rovnosti na řádcích 16-18 strany 35.

Čtvrtá kapitola je opět přehledová, více směřována na praktické výpočetní použití odhadů. Obsahuje formule pro konkrétní jádra a jejich Fourierovy transformace. Opět oceňuji srozumitelnost této části disertace.

V krátkém závěrečném textu (kapitola 5) je vysvětleno v čem je přínos disertace. Konkrétněji je tam porovnání s výsledky z [arXiv](#) článku Crisana a Mígueze z roku 2016 podle kterého jsou horní odhady MISE chyby z disertace silnější než odhady z uvedeného článku zejména v tom smyslu že nepotřebují předpoklad že uvažované hustoty mají kompaktní nosič. Já sám nejsem odborník na tuto problematiku a tak těžko mohu posoudit do jaké míry mají výsledky význam pro další vývoj oboru. Nicméně ověřil jsem si porovnáním s textem článku Crisana a Mígueze z roku 2016 výše uvedená tvrzení. Navíc mohu potvrdit že v porovnání se zmíněným článkem jsou v disertaci výsledky o nevylepšítečnosti řádu odhadu, interpretované jako dolní odhad MISE chyby.

Shrnuji že fakt, že podobné problematice se věnuje nedávný článek svědčí o aktuálnosti řešeného tématu. Rovněž použití metodologie Fourierovy transformace se zdá být inovativní a uvedené výsledky z kapitoly lze považovat za nové vědecké poznatky. Nicméně v této souvislosti bych připomenul že nejsem odborník na danou problematiku a s touto výhradou by mělo být mé hodnocení aktuálnosti interpretováno.

Můj závěr je že, podle mého názoru, disertační práce prokazuje předpoklady autora k samostatné tvořivé práci.

V Praze dne 25.8.2018

RNDr. Milan Studený, DrSc.

## Příloha: seznam námitek

1. V oddíle 2.1.8., na straně 11 formule na řádce 7 asi obsahuje překlep. Symbol  $\deg Q \leq \deg P$  připouští  $P = Q$ , což ale díky  $\langle P, Q \rangle = 0$  implikuje že každá ortogonální míra musí být nulová, což předpokládám nebyl záměr definice. Snad  $\deg Q < \deg P$  či  $\deg Q \leq \deg P, P \neq Q$ ?
2. V oddíle 2.1.8., na straně 12, řádek 7. Tvrzení že funkce  $g_{*,*}$  jsou polynomy zní podivně když závisí na normě, jež není polynom v klasických proměnných. Asi zde chybí vysvětlení, že pojem polynomu je chápán v širším smyslu jako složenina polynomu s nějakou transformací souřadnic.
3. V oddíle 2.1.8., na straně 13 řádek 12 je odkaz na Lemma 2.6, které jsem v práci nenašel. Není jasné co měl autor na mysli, snad formuli (2.6) v Lemma 2.1?? Každopádně zdůvodnění daného tvrzení je na můj vkus až příliš stručné.
4. V oddíle 2.2.2., na straně 14 dole je použit symbol pro dvojitý faktoriál  $n!!$  a uvedena formule  $n!! = 2^n n! \sqrt{2/\pi}$ . Není jasné co měl autor na mysli, ale pokud mohu soudit z informací na wikipedii pak dvojitý faktoriál přirozeného čísla by měl být přirozené číslo a tudíž formule neplatí tak jak je uvedeno. Je myšlena formule v asymptotickém smyslu nebo se jedná o jiný pojem dvojitého faktoriálu?
5. V oddíle 2.4.4., na straně 21, předposlední odstavec. Není mi moc zřejmé co se myslí formulací že “*non-uniformly weighted empirical measure is resampled into its uniformly sampled counterpart*”.
6. V oddíle 2.4.4., na straně 22, popis Algoritmu 1. V tomto popisu je mnoho věcí pro čtenáře nejasných. Uvedu několik otázek jež mne napadly. Je počet částic  $n$  fixní během celého algoritmu? Dále v bodu 2. **sampling** druhý řádek “sample ...” není jasné zda operace “sampling” se dělá zvláště pro každé  $i = 1, \dots, n$  (částici) či vzhledem k celé kolekci částic. Také není jasné co je výsledek této operace. Připadá mi absurdní představa že výsledkem “sampling” z nějaké distribuce by měl být jediný bod v Eukleidovském prostoru, tedy jediná částice reprezentující celou distribuci a nikoliv víceprvková množina takových bodů. U bodu 3. **resampling** opět není jasné co se tímto myslí, přesněji co znamená fráze “resample from sample”.
7. V oddíle 2.5.2., na straně 30 odhad pod kolonkou **The third term** by mohl být podrobněji zdůvodněn.
8. V oddíle 3.1, na straně 34, řádka -2 je poněkud zavádějící odkaz na “*complex exponential in (2.19)*”. Je zde myšlen odkaz na Corolary věty 2.3? V následném posledním řádku stránky není jasné zda je úvaha prováděná pro fixní  $\omega$ .
9. V oddíle 3.1, na straně 35 mezi řádky 7 a 18 je celá řada chybějících zdůvodnění, které by měly být tématem odpovědi na můj dotaz při obhajobě. Zde je pár poznámek. Na řádce 7 není jasné přes jakou proměnnou se integruje, na dalších řádcích jaké konkrétní vlastnosti z § 2.3.1 pro Fourierovu transformaci se použijí, přes jaké oblasti jsou myšleny integrály, proč se “ztratí” faktor  $\frac{1}{(2\pi)^d}$  při předpokládaném použití Planchererovy formule. Pozdější odkaz na formuli (3.4) na řádce -9 je asi nepřesný; nemá autor na mysli formuli odvozenou pod (3.4)?

10. V oddíle 3.2, důkaz věty 3.2 již není sledovatelný bez toho že by čtenář byl obeznámen s detaily Tsybakovovy knihy. Například není jasné jak se určí parametr  $M$  na straně 39 řádek 3. Celý text důkazu věty 3.2 jsem tedy již nebyl schopen hlouběji analyzovat.

### Nalezené překlepy, angličtina a jiné drobnosti

- str. 5, řádek -4: applied on  $\rightarrow$  applied to
- str. 6, řádek 1: “orthogonal measure” zní podivně, snad by mělo být “orthogonality measure”, či lépe “underlying measure”
- str. 8, řádek -9: the the Jacobi  $\rightarrow$  the Jacobi
- str. 10, řádek -7: in several variables  $\rightarrow$  in  $d$  variables
- str. 11, řádek 3: Symbol  $B$  pro oblast integrálu nebyl zaveden. Asi je to koule v  $\mathbb{R}^n$ (?). Nicméně si neodpustím poznámku že symbol  $B$  má označovat beta funkci . . .
- str. 11, řádek 14: is cardinality of  $\{P^\alpha : |\alpha| = n\}$   $\rightarrow$  is cardinality of  $\{\alpha : |\alpha| = n\}$  ( $P^\alpha$  jsou nejednoznačně určené míry)
- str. 15, formule (2.10): chybný argument funkce  $f$  v definici Fourierovy transformace, má být  $x$  místo  $\omega$
- str. 20, řádek 6:  $\mathbf{Y}_{1:t} = \mathbf{y}_{1:t-1}$   $\rightarrow$   $\mathbf{Y}_{1:t-1} = \mathbf{y}_{1:t-1}$
- str. 39, řádek 8: centered at  $k$   $\rightarrow$  centered at  $x_k$
- str. 50, řádek 2: higer  $\rightarrow$  higher