

Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Autor práce: Michael Skotnica

Název práce: Balanced and almost balanced group presentations from algorithmic viewpoint

Rok odevzdání: 2018

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Diskrétní modely a algoritmy

Autor posudku: doc. RNDr. Martin Tancer, Ph.D. (Vedoucí)

Pracoviště: Katedra aplikované matematiky

Jak název práce napovídá, Michael Skotnica se ve své práci věnuje algoritmickým vlastnostem balancovaných a téměř balancovaných prezentací grup, čímž se myslí prezentace grup s konečným a shodným nebo téměř shodným počtem generátorů a relací (rozdílu mezi těmito počty se říká defekt).

Práce je z velké části přehledová; přehledovou část však autor doplňuje mnoha svými vlastními poznatky, doplňujícími tvrzeními/věťmi, a současný stav poznání rozvíjí v několika směrech (viz níže). Dalším dodatkem k práci je menší počítačový program (vysvětlen opět níže).

Už samotná přehledová práce část práce zaslouží uznání. Autor se při práci na této části naučil a naučil vysvětlit mnoho pojmů z oblastí teorie grup, vyčíslitelnosti a algoritmické rozhodnutelnosti, a také kombinatorické topologie; už jenom spojení těchto tří oblastí do uceleného textu vyžaduje velké odhodlání a úsilí proniknout do pokročilých partií matematiky.

Úvodní kapitola je věnována teorii grup a vyčíslitelnosti a zatím okrajově jejich souvislostem. V druhé kapitole se autor věnuje rozhodovacím problémům pro prezentace grup, čímž dvě oblasti o kapitole dříve důkladně prováže. Zde už přidává některé vlastní poznatky odvozené z literatury, avšak nikoliv přímo zmíněné v literatuře. Za zmínku stojí např. odvození, že problém triviality je nerozhodnutelný už pro prezentace s defektem 12 (věta 2.12) nebo objevení vlastnosti grup, která není Markovova, ale je nerozhodnutelná. Také autor uvádí několik vlastností pro balancované grupy, které jsou algoritmicky nerozhodnutelné, což je v kontrastu s tím, že problém triviality pro balancované grupy je významný otevřený problém.

Třetí kapitola je věnována rozpoznávání, zda daná balancovaná prezentace prezentuje perfektní grupu. To je naopak možné dělat efektivně a autor nabízí svůj pohled, jak toho docílit.

Čtvrtá kapitola je věnována redukci několika algoritmických problémů na problémy pro balancované prezentace (zejména problém triviality). Zde je cílem zkoumat, co je a co není v možnostech balancovaných prezentací z algoritmického pohledu. Například pro problém triviality není znám ani jakýkoliv algoritmus ani jakákoliv algoritmická dolní mez (např. NP-těžkost). Dle mých znalostí jediný dobře známý výsledek je, že do problému triviality lze zakódovat, zda je zadaný 2-rozměrný komplex kontrahovatelný. Proto je zajímavé, že se M. Skotnicovi podařilo přijít i s něčím, co nezapadá do tohoto schématu, např. přirozený postup pro rozpoznávání grafového cyklu. (To se může zdát triviální, nicméně jiný jednoduchý problém - poznávání lichého čísla - za určitých omezujících podmínek ani nelze pomocí balancovaných prezentací řešit, jak M. Skotnica ukazuje ve větě 4.14.)

V poslední páté kapitole se autor věnuje souvislostem s topologií, především popisu převodu otázek o balancovaných grupách na otázky o 2-rozměrných CW/simpliciálních komplexech. Dále je tu popsán algoritmus, který ze zadané prezentace P vytvoří 2-rozměrný simpliciální komplex, jehož

fundamentální grupou je grupa určená prezentací P . Následně je možné například vypsát link vrcholů odvozeného komplexu. Ač tento program dal také nějaké množství práce (především po teoretické stránce - rozmyšlení správného postupu), nejedná se o stěžejní složku práce. Spíše se jedná o součást dlouhodobého výhledu, na kterém bude mít M. Skotnica příležitost dále pracovat při svých doktorských studiích; případné další rozšíření programu má potenciál převádět prezentace na triangulované singulární 3-variety a určovat některé vlastnosti prezentací grup pomocí známých algoritmů z 3-rozměrné topologie.

Práce je psána anglicky, což se v některých místech projevuje trochu složitějšími formulacemi. Ale velmi oceňuji pokrok, kterého M. Skotnica v průběhu práce na svém prvním rozsáhlém textu v angličtině dosáhl. Současnou verzi, po stránce čitelnosti, už považuji za zdařilou (byť by se text dal vylepšovat dále).

Co se celkového zhodnocení práce týče oceňuji zejména ochotu Michaela Skotnici naučit se a vysvětlit rozsáhlé téma zasahující do několika oblastí matematiky, a ještě k němu přidat své poznatky. Paradoxně, toto byl dle mého názoru těžší úkol, než dosáhnout vlastních publikovatelných výsledků u problému, který nevyžadoval hlubší teorii, což se M. Skotnicovi podařilo v jeho bakalářské práci (která ale také rozhodně měla kvality diplomové práce). Z tohoto pohledu tuto diplomovou práci hodnotím velmi pozitivně.

Práci doporučuji ohodnotit známkou **výborně**.
Práci navrhuji na zvláštní ocenění: Ne

V Praze, 28. 8. 2018

Martin Tancer