Jak zprostředkovat středoškolákům širší pohled na logiku

Diplomová práce

Obor logika

Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha

Anna Lauschmannová
Vedoucí práce: Doc. PhDr. Petr Jirků, CSC.
2007

Vysázeno v programu $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím uvedených pramenů a literatury.

Souhlasím s tím, že čtenáři knihovny katedry logiky si budou moci zapůjčit výtisk této práce i domů. Dále souhlasím se zpřístupněním elektronické podoby na internetu.

Resumé

Text je určen středoškolským studentům k samostatné práci. Čtenář se seznámí se základními oblastmi moderní logiky (syntaxe, sémantika, dynamika) a základními postupy matematické logiky (tabulková metoda, kripkovské modely, dokazování v kalkulech). Pozornost je věnována také rozhraní logiky s jinými vědami: filozofií (intuicionismus, analýza modalit), sociologií (společné znalosti, princip kooperace), informatikou (multiagentní systémy, použití logik v programování). Na stručnou kapitolu o klasické logice navazují na sobě nezávislé kapitoly o intuicionistické logice a epistemických, modálních, vícehodnotových a fuzzy logikách.

Abstract

The text is intended for secondary school students. The reader will find out about most important areas of modern logic (syntax, semantics, dynamics) and basic methods of mathematical logic (truth-tables, Kripke models, proving in calculi). Attention is also given to the interfaces between logic and other sciences: philosophy (intuitionism, the analysis of modalities), sociology (common knowledge, the cooperation principle), information science (multiagent systems, the use of logics in programming). A brief chapter on classical logic is followed by self-contained chapters on intuitionistic logic and epistemic, modal, many-valued and fuzzy logics.

Poděkování a věnování

Děkuji rodičům za to, že mě po dobu studia podporovali hmotně, citově i intelektuálně.

Děkuji všem vyučujícím oboru logika za promyšlené, podnětné a zajímavé přednášky.

Děkuji Sašovi Kazdovi za AmS-TEXová makra a vydatnou pomoc s úskalími TeXu.

Děkuji všem, kteří četli tuto práci a upozorňovali mě na její nedostatky: mamince, Víťovi Kalovi, Jindrovi Soukupovi a dalším.

věnováno všem středoškolákům,
kteří byli či budou ochotni
si nad tímto textem lámat hlavu

Úvod

Špecifickú stimuláciu potrebuje každý predmet štúdia, ktorý je z hľadiska myšlienkovej disciplíny „náročnejší“ (zrejme to nepotrebuje napr. kreslenie alebo seminár z postmoderny).

František Gahér: Provokácia ako motivácia k štúdiu logiky, str. 8.

Prvotní impulz k napsání této práce vzešel z Matematického korespondenčního semináře organizovaného studenty MFF UK v Praze. Součástí semináře je v každém ročníku také seriál na nějaké téma související s matematikou. V minulých letech to byly například Nekonečno, Teorie množin, Teorie grafů, Pravděpodobnost, Matematická biologie a Metrické prostory. O tématu pro aktuální ročník mohli řešitelé rozhodnout sami formou hlasování pro některou ze čtyř nabízených možností.

Domnívám se, že vítězství Neklasických logik je třeba připisovat zejména dojmu, že se jedná o něco výjimečného, neobvyklého a zvláštního. Zatímco geometrii řešitelé dobře znají ze střední školy a vidí v ní „pouze“ suchopárnou matematiku (ač třeba velmi krásnou a elegantní), název „neklasické logiky“ slibuje něco zcela nového a neotřelého. Možná zde svou roli hrají i velká očekávání vůči filozofii tak typická u studentů, kteří ještě neměli možnost se s ní seznámit podrobněji.

V jistém smyslu jsou mnohá z těchto očekávání naivní a mylná - neklasické logiky jsou díky své formální výstavbě do velké míry ještě formálnější matematickou disciplínou než geometrie, ve které lze většinu úloh řešit pomocí náhledu a představivosti. Ačkoli vznikly jako reakce na nedokonalosti klasické logiky, nejsou alternativní ani převratné v témže smyslu, v jakém je postmoderna alternativou ke starší filozofii, nejsou revoluční a rebelské, což od nich snad podle názvu může dospívající člověk očekávat. Filozofické otázky, které s logikou souvisí, spadají vždy do filozofie jazyka, což je oblast, která málokterého středoškoláka skutečně zajímá.

Na druhou stranu slouží tato očekávání jako motivace k prvnímu seznámení s neklasickými logikami a proto jsem se snažila je nezklamat. Co možná neformální výklad ukazuje zejména problémy přirozeného jazyka a metodologie vědy, kvůli kterým byly konkrétní neklasické logiky zavedeny. Matematický aparát je vždy nejprve vysvětlen neformálně a přesné definice bývají uvedeny až na konci (většinou pouze pro čtenáře s větší zkušeností v zacházení s abstraktními matematickými pojmy). Důraz je kladen zejména na sémantiku jednotlivých logik; dokazování bývá pro laika zcela nezajímavou rutinou.

V textu nepředpokládám žádné matematické znalosti nad rámec základní školy. Přesto výklad klade poměrně vysoké nároky na houževnatost a chápavost čtenáře - řešiteli semináře se obvykle stávají studenti se zájmem o matematiku, kteří se nenechají odradit, pokud na první čtení všemu neporozumí a kteří jsou ochotni strávit nad zapeklitou matematickou úlohou celé odpoledne. Nedomnívám se, že by bylo vhodné snažit se vykládat neklasické logiky v této šíři a hloubce všem studentům středních škol - jedná se spíše o možné rozšíření pro matematické semináře a pro vlastní práci studentů (například formou seminárních prací).

Na závěr jedna poznámka: v korespondenčních seminářích je zvykem řešitelům tykat, nejčastěji 2. osobou jednotného čísla: „ukaž, vyřeš, dokaž“ na místo „ukažte, vyřešte, dokažte“ obvyklého ve středoškolských učebnicích. Při psaní této práce jsem se této konvence držela - prosím čtenáře, kteří již opustili školní lavice, aby mi odpustili tuto nezdvořilost.

Obsah textu

Vlastní jádro textu tvoří číslované kapitoly, jejichž tématy postupně jsou klasická a intuicionistická logika, epistemické, modální, vícehodnotové a fuzzy logiky. Snažila jsem se, aby jednotlivé kapitoly byly na sobě nezávislé, což vede k částečnému obsahovému překrývání (např. pojem kripkovského modelu vysvětluji ve třech kapitolách pouze s drobnými modifikacemi vynucenými zaměřením dané kapitoly).

Všechny číslované objekty (cvičení a věty) mají v rámci jednotlivých kapitol společné číslování. Doufám, že to čtenáři usnadní hledání v textu.

Na závěr jsem zařadila přehledné shrnutí všech devíti úloh, které byly vybrány jako soutěžní úlohy pro matematický korespondenční seminář. U prvních šesti uvádím i statistiky o úspěšnosti řešitelů (data o posledních třech úlohách nejsou dosud k dispozici).

Didaktické cíle textu

Podobně jako jiné úvodní učebnice logiky, které nejsou určené studentům matematiky, jde i tento výklad do šířky a ne do hloubky. Doufám, že studenti si z předkládaného textu odnesou následující:

1. Dovednost hledat a formulovat přesný význam slov. Důraz na jasnost a přesnost vyjadřování.

2. Základní představa o tom, jakými problémy se zabývá logika.

3. Přehled o přístupech k analýze logických aspektů jazyka: přístup syntaktický (kalkuly), základní nástroje sémantické analýzy (tabulky pravdivostních hodnot, kripkovské modely), dynamický pohled na logiku (dialogické hry). Nepovažuji za důležité, aby studenti tyto metody dokonale ovládli, ale aby si uvědomili, že existují různé možnosti, jak přistupovat k témuž problému.

4. Představa o rozmanitosti prostředků, které používá matematika k vyjasňování, formalizaci a řešení problémů z rozličných oblastí. Do textu a zejména do poznámek na konci jednotlivých kapitol jsem zahrnula témata, která nespadají přímo do logiky, ale těsně s ní sousedí. Vybraná témata slouží jako ukázky konceptů, z nichž vyrůstají matematické teorie. Snažím se tak bojovat proti rozšířenému problému, že mnozí studenti si ze střední školy odnášejí strach z jakéhokoli matematického formalismu. Formální definice a věty předkládám jako shrnutí neformálních úvah, čímž vyniknou jejich estetické a praktické přednosti: formalismus je stručný a přehledný.

K poslednímu bodu je nutná ještě jedna poznámka: snaha o neformální výklad vede k celkové upovídanosti textu. Ta může vyhovovat některým studentům, ale pro jiné je naopak překážkou porozumění. Tomuto typu studentů doporučuji přečíst si nejprve formálnější definice a teprve pak se vrátit k neformálním zdůvodněním; mohou také můj text používat jako „komentář“ k formálnějším učebnicím logiky, ve kterých často úplně chybí neformální příklady.

Peter Volek v úvodu svých skript Úvod do logiky a teórie vedy zmiňuje čtveřici témat, která by podle U. Meixnera měl pokrývat každý úvod do logiky. Podívejme se, do jaké míry jsou tato témata obsažena v textu, který předkládám.

1. *Úplné představení výrokové a predikátové logiky*
Ve výkladu jsem se omezila výhradně na výrokové logiky. Neklasické logiky dle mého názoru dostatečně ilustrují postupy běžné i v klasické predikátové logice. Při tom nepředpokládám, že by si student střední školy do života odnesl konkrétní znalosti (například znalost definice kripkovského modelu), ale spíše tušení možných postupů („vzpomínám si, že se tam dělaly nějaké modely“).

2. *Zprostředkování standartní metodiky moderní teoretické logiky, tedy kalkulizace a sémantiky*
Podobně jako Peter Volek jsem se soustředila zejména na výklad sémantiky; syntaxe a kalkuly jsou zmíněny spíše okrajově, pro dokreslení šíře použitelných metod; věty o úplnosti uvádím bez důkazu. Věty o korektnosti jsou často zařazeny jako cvičení, což by mělo studentům umožnit uvědomit si jejich skutečný význam: syntaxe a sémantika nejsou dvěma stranami téže mince zcela automaticky, musíme je tak vytvořit.

3. *Zprostředkování aplikace logiky na rekonstrukci argumentů z přirozeného jazyka*
Veškerý výklad je motivován problémy z filozofie, lingvistiky, matematiky či jiných oborů. Snažila jsem se zmínit také příklady použití jednotlivých logik v technické praxi.

4. *Určení místa logiky v rámci věd, jejího předmětu a způsobu zdůvodňování*
Tomuto tématu se nevěnuji přímo, domnívám se však, že jej ilustruji na mnoha příkladech.

Citace, které se vztahují k vyučování logiky

First write down the key ideas in the subject. Then think about how you want to flesh out each one. How will you illustrate the important techniques? What links will you construct between the big ideas? How will you examine the students on this material?

Steven G. Krantz: How to Teach Mathematics, str. 49.

Students are not scholars. But they are people. They probably react to human input more than they react to intellectual input.

Steven G. Krantz: How to Teach Mathematics, str. 54.

Metóda univerzálne orientovanej provokácie spočíva v tom, že učiteľ ukáže problém, ktorý nemusí byť vôbec z oblasti potenciálnej profesie poslucháčov, ale taký, že poslucháči chápu, že je to problém, a to taký, ktorý vôbec nevedia riešiť alebo nevedia riešiť jednoznačne a riešenie tohto problému je (tak sa zdá) výlučne v kompetencii logiky.

František Gahér: Provokácia ako motivácia k štúdiu logiky, str. 11.

Symbolická logika nabízí jednoduchou teorii, elegantní techniky a pravidla. Problém nastává, když se ji snažíme aplikovat na každodenní uvažování, ukázat její užitečnost [...] Každodenní uvažování je vhodnější studovat s pomocí neformální logiky a metod kritického myšlení.

M. Jauris, Z. Zastávka: Základy neformální logiky, str. 31.

Literatura, se kterou jsem se během zpracovávání jednotlivých témat setkal, mě překvapila tím, jak ostré je dělítko mezi matematickým pohledem na logiku, filozofickým pohledem a pragmatickým pohledem, který nabízí teorie argumentace. Jedná se o tutéž logiku, a přesto je každý pohled jiný. Snažil jsem se tyto pohledy v úvodních textech k jednotlivým tématům skloubit a ne vždy se mi to podařilo tak, jak bych si přál. Přesto myslím, že je to správná cesta, že podstatné je z logiky právě to, na čem se matematik, filozof a pragmatický uživatel jazyka shodnou, a že právě toto minimum by se mělo vhodným způsobem prezentovat středoškolákům.

Petr Jansa: Logika jako součást předmětu "Základy společenských věd", str. 106.

1. KLASICKÁ VÝROKOVÁ LOGIKA

Nediv se, že seriál o neklasických logikách začínáme povídáním o logice klasické. Za prvé nám to umožní lépe pochopit, co je na neklasických logikách nového, zajímavého a neobvyklého; za druhé Ti dobrá znalost klasické logiky může pomoci všude tam, kde je třeba se jasně a jednoznačně vyjadřovat, například při řešení matematických úloh, ať už v našem semináři nebo ve škole.[1]

Části označené * se Ti možná při prvním čtení budou zdát celkem složité, můžeš je ale bez obav přeskočit a vrátit se k nim později.

Pohádka

Byl jednou jeden Matematik a ten si přál, aby nikdo nikdy nepochyboval o pravdivosti toho, co řekl. Jeho kamarádi Literát a Filozof, ti se v různých slovních potyčkách a půtkách cítili jako doma, ba dokonce někdy to vypadalo, že kdyby s nimi všichni souhlasili, vyšla by jejich snaha o originalitu naprázdno. Ne tak Matematik. Sedával celé dny doma a přemýšlel, jak to udělat, aby si ho škodolibí školáci konečně přestali dobírat, je-li součet úhlů v trojúhelníku skutečně $180°$ a jestli i při teplotě $-273°C$ platí, že $1 + 1 = 2$.

Jednoho dne navštívil Matematika Hráč a povídá: „Řekni nějaké tvrzení."

Matematik chvíli přemýšlel, no nic rozumného ho zrovna nenapadalo, ale na dvoře si zrovna zpívalo nějaké děvčátko, tak zopakoval, co slyšel: „Kočka leze dírou, pes oknem."

Hráč nejprve vykouknul z okna, a pak povídá: „Tak ty tvrdíš, že kočka leze dírou a že pes leze oknem, rozumím tomu správně? No dobrá, kočku vidím támhle vylézat dírou ze sklepa. Dovol mi vybrat si druhou polovinu tvé věty. Pes leze oknem. Můžeš to prokázat?"

Matematik samozřejmě nemohl, a tak musel uznat, že řekl něco, co není pravda. Zadoufal ale, že se mu podaří podobně nachytat Hráče, a tak povídá: „Teď zkus říct nějaké tvrzení ty."

Hráč ještě jednou mrkl z okna, a pak pravil: „Jsem čínský velvyslanec nebo u vás ve dvoře stojí docela nový mercedes."

Matematik užasl a vyhrkl: „To mi teda řekni, co z toho je pravda."

Hráč ukázal z okna a říká: „Taky jsem nevěděl, že máte tak bohaté sousedy!"

Na dvoře totiž stál docela nový zářivě žlutý mercedes.

* Hintikkova logická hra[2]

Pak se Hráč zamračil a říká: „Myslel jsem, že budeš v téhle hře docela dobrý."

„V jaké hře?" divil se matematik.

„No v té, kterou jsme zrovna hráli. Vymyslel ji slavný finský logik Jaako Hintikka už někdy v 60. letech 20. století a ty ji ještě neznáš?[3]

První hráč - říká se mu proponent - řekne nějaké tvrzení. Úkolem druhého hráče, tomu se říká oponent, je ukázat, že tvrzení prvního hráče není pravdivé. Musí při tom ale postupovat přesně podle pravidel.

Když to tvrzení je tvaru „**A a B**", tak si oponent může vybrat, jestli budou dál hrát s A nebo s B. Takže když jsi ty v roli proponenta řekl, že kočka leze dírou a pes oknem, mohl jsem si vybrat, že se dál chci bavit o větě „pes leze oknem".

Když to tvrzení je tvaru „**A nebo B**", tak si vybrat může proponent. Takže když jsem já v roli proponenta řekl, že jsem čínský velvyslanec nebo u vás ve dvoře stojí docela nový mercedes, mohl jsem si vybrat zase já, k čemuž jsi mě ostatně sám pobídl větou „to mi teda řekni, co z toho je pravda".

Když to tvrzení je tvaru „**ne A**" nebo „**není pravda, že A**", tak si prohazují role a dál se hraje s tvrzením A. Třeba kdybys ty řekl „dnes neprší", hráli bychom dál jako kdybych já řekl „dnes prší".

[1] Možná jsi už o logice něco slyšel ve škole v hodinách matematicky nebo filozofie. V tom případě můžeš přeskočit kapitolku nadepsanou „Výroková logika - povídání o významu". V té se navíc oproti tomu, co se běžně učí ve školách, dočteš pouze něco málo o podivnosti implikace.

[2] Nečekej, že se bude jednat o kdovíjak zábavnou hru; jejím smyslem je podívat se na logiku jako na soubor určitých pravidel pro dialog a rozumnou argumentaci vůbec. Ve cvičení 19 si ukážeme, že pomocí této hry lze definovat pravdivost výroků: výrok je pravdivý právě tehdy, když proponent (první hráč), který neudělá chybu, vyhraje - v matematické řeči řekneme, že existuje *vyhrávající strategie* pro proponenta.

[3] Poznamenejme, že myšlenku nahlížet dialog jako hru s určitými pravidly zformuloval Ludwig Wittgenstein v knize Filozofická zkoumání, která vyšla po jeho smrti roku 1953.

Nakonec se dojde k nějaké docela jednoduché větě, o které je i bez hraní jasné, jestli je pravdivá - v tom případě vyhrává ten, kdo je zrovna proponentem, nebo nepravdivá - to vyhraje oponent. Rozumíš?“

Cvičení 1. Zkus si rozmyslet, jak by asi mohla být formulována pravidla pro výroky tvaru *Pro každé x platí, že…* a tvaru *Existuje nějaké x takové, že…*

Napiš průběh hry, ve které proponent začne následujícími tvrzeními:

a) Pro každé přirozené číslo n platí: jestliže je n dělitelné číslem 6, je dělitelné číslem 2 a také je dělitelné číslem 3.

b) Existuje přirozené číslo, které je dělitelné 2 a není dělitelné 3.

Výroková logika - povídání o významu[4]

Matematik rozuměl a hnedka ho napadla důležitá věc: je důležité mít nějaká pravidla, která určují, co tím myslíme, když třeba řekneme, že platí *A a B*, přesně jako to říkají pravidla té hry. Pochopil, že prvním krokem k tomu, aby nikdo nemohl pochybovat o správnosti toho, co říká, je každému vysvětlit, co tím myslí, když používá slovíčka jako *a, nebo, jestliže, pak*. Což o to, se slůvky *a* a *nebo* až tak veliký problém nebude, ale jeho oblíbené *jestliže A, pak B*, to bude oříšek.

Přemýšlel a přemýšlel a nakonec sepsal tohle:

Vědu zabývající se vztahy mezi pravdivostí složené věty a pravdivostí jejích částí nazvu *logika*. Půjde v ní o to, co nejlépe zachytit a popsat *vyplývání*, tedy to, jak jedna pravda vynucuje jinou pravdu.[5]

Přesně tak, jako to známe z češtiny, se i v logice složené výroky (v češtině jim říkáme souvětí) vytvářejí z jednodušších pomocí spojek. Přitom logické spojky vyjadřují určité vztahy mezi významem jednodušších výroků a významem celku.

Výrok, který neobsahuje žádné logické spojky nazveme *jednoduchý* nebo také *atomický*.

Jsou-li oba výroky, které spojuje spojka **a**, pravdivé, je i složený výrok se spojkou **a** pravdivý, jinak je složený výrok nepravdivý.[6]

K tomu, aby byl výrok se spojkou **nebo** pravdivý stačí, aby byl pravdivý alespoň jeden z obou spojovaných výroků.

Vztah vyplývání mezi dvěma výroky zachycuje implikace, kterou vyjadřují výrazy jako **Jestliže A, pak B. Kdykoli A, potom B. Nechť A. Pak B. A implikuje B.**[7] Implikace je nepravdivá, pokud předpoklad A je pravdivý, ale závěr B je nepravdivý; jinak je pravdivá.[8]

---

[4] Jak v lingvistice, tak v logice (není divu, že mají aspoň něco společného, vždyť se obě zabývají jazykem, i když z úplně jiného úhlu pohledu), se otázkami souvisejícími s významem vět a slov zabývá *sémantika*. V logice je pro nás na významu nějaké věty nejdůležitější to, zda je pravdivá nebo ne, a jak její pravdivost souvisí s pravdivostí ostatních výroků. Proto logiky, na rozdíl od lingvistů, zajímají jen *výroky*, tedy věty, které jsou buďto pravdivé nebo nepravdivé.

[5] *Jak už zaznělo výše, zkoumá logika* vyplývání. *Logik požaduje, aby při zdůvodňování teze logicky vyplývala z argumentů, kterými je podpořena. Co to přesně znamená? Znamená to, že argumenty musí být (vzhledem k tezi) formulovány tak, aby platilo:* Když přistoupíme na pravdivost argumentů, musíme nutně přistoupit i na pravdivost teze.

Petr Jansa: Logika jako součást předmětu „Základy společenských věd“, str. 19.

[6] O tom, že ne vždy slůvko „a“ označuje konjunkci výroků, svědčí následující příklady:

a) Firma Novák a syn.

b) Přišel domů a zjistil, že je vykradeno. (Pro konjunkci totiž musí platit „zřejmá“ formule $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$. Ovšem věta „zjistil, že je vykradeno, a přišel domů“ říká něco trochu jiného než původní věta.)

Další příklady vět, ve kterých „a“ neoznačuje konjunkci, najdeš ve cvičení 20.

[7] O tom, proč by se implikace neměla vyjadřovat slovy „**z A vyplývá B**“ píše František Gahér v knize Logika pre každého (str. 71): *Výraz „implikuje“ nie je synonymný s výrazom „logicky vyplýva“, […] Jednoducho povedané, implikácia vo všeobecnosti môže byť pravdivá alebo nepravdivá v závislosti od empiricky zistiteľného stavu vecí, ale implikácia, ktorou vyjadrujeme logické vyplývanie, je vždy pravdivá bez ohľadu na stav vecí.*

Implikace se samozřejmě snaží vyplývání zachytit, vždyť v přirozeném jazyce často považujeme vyjádření „**jestliže A, tak B**“ a vyjádření „**z A vyplývá B**“ za ekvivalentní. V klasické logice se podařilo tento vztah uchopit v tom smyslu, že jestliže z výroku A *logicky vyplývá* výrok B, tak je implikace $A \Rightarrow B$ tautologií a naopak. Označení *logicky vyplývá* přitom použijeme tehdy, jestliže B vyplývá z A pouze na základě toho, jak jsou jednotlivé výroky poskládány z jednodušších pomocí logických spojek. Např. z věty „Sokrates je člověk“ vyplývá věta „Sokrates je smrtelný“, ale nevyplývá z ní logicky. Matematická věta, která popisuje vztah mezi vyplýváním a tautologičností některých implikací se jmenuje *věta o dedukci* a neplatí zdaleka pro všechny logické systémy. V těch, kde neplatí, je potom třeba si dát pozor na rozdíl mezi slůvky „vyplývá“ a „implikuje.“

[8] To se Ti může na první pohled zdát divné, ale zkus si představit následující situaci: kamarádka Ti řekne, že nebude-li pršet, půjde do kina. V případě, že pršet nebude, je jednoduché o pravdivosti jejího tvrzení rozhodnout. Pokud kamarádka do kina půjde, mluvila pravdu. Pokud do kina nepůjde, můžeš se na ni právem zlobit. Na případ, že pršet bude, se její výrok

Ekvivalencí mezi dvěma výroky rozumím tvrzení, že **A právě tehdy, když B.** Někdy pro ni také používáme obrat „**A tehdy a jen tehdy, když B**“. Ekvivalence je pravdivá, jsou-li A a B buďto oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Lze to říct i jinak: ekvivalence je pravdivá, pokud A implikuje B a B implikuje A.

„**Není pravda, že**“ je také logická spojka, ačkoli to není spojka z hlediska jazykovědy. Tato spojka nespojuje dva výroky, ale z jednoho výroku vytváří složitější výrok. Přitom z pravdivého výroku dělá výrok nepravdivý a naopak.

Pro přehlednost můžeme význam těchto spojek zachytit tabulkou. Je-li výrok pravdivý, budeme říkat, že jeho *pravdivostní hodnota* je 1, je-li nepravdivý, je jeho pravdivostní hodnota 0.

		ne A	A a B	A nebo B	jestli A, pak B	A právě když B
		$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
A	B	negace	konjunkce	disjunkce	implikace	ekvivalence
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Cvičení 2. Obraty jako „**A nebo B, ne však obojí**“, „**buď A, nebo B**“, „**právě jedna z možností A, B je pravdivá**“ a podobně neoznačují logickou spojku *nebo*, ale jinou, která se často nazývá „*vylučovací nebo*“.[9] Za cvičení si pro ni zkus napsat tabulku.

Cvičení 3. Jak rozumíš českému slůvku „leda“? Zahraj si na chvíli na logika a zkus nalézt tabulku, která by zachytila pravdivostní hodnotu výroků „A, ledaže by B“ a „jestliže A, pak B, ledaže by C“! („A, ibaže B. Ak A, tak B, ibaže C.“)

Domníváš se, že tyto tabulku lze navrhnout jediným možným způsobem? Lze tabulku pro „jestliže A, pak B, ledaže by C“ vyplnit pouze na základě znalosti tabulky pro „A, ledaže by B“?

Na základě tabulek, které navrhneš, nalezni výrok obsahující pouze obvyklé výrokové spojky, který je logicky ekvivalentní s výrokem „A, ledaže by B“.

Popiš všechny situace, ve kterých jsou pravdivé následující výroky:

a) Zůstanu doma s dětmi, ledaže bys mě zastoupil.

b) Pes, který štěká, nekouše - ledaže by štěkal. (Nebo přesněji: Jestliže pes štěká, nekouše - ledaže by štěkal.)

Pozorně si prohlédni tabulku implikace! Implikace je nepravdivá pouze tehdy, když výrok A je pravdivý a výrok B nikoli.

Když se rozhodneme výrokům tvaru „**jestliže A, pak B**“ rozumět tak, jak nám radí tabulka, budou pravdivé i následující překvapivé věty:

Jestliže 59876542665 : 123456789 je celé číslo, tak 1+1=2.
Jestliže 1+1=2, tak tohle je seriál v matematickém korespondenčním semináři a sluníčko je žluté.
Jestliže jsem čínská princezna, tak 1+1=2.
Jestliže jsem čínská princezna, tak je dneska pátek třináctého.

Zkrátka a dobře, libovolný pravdivý výrok je implikován libovolným jiným výrokem, který nejenže s ním vůbec nemusí souviset (jako v prvních dvou příkladech), ale může dokonce být i nepravdivý! Navíc, libovolný nepravdivý výrok implikuje úplně cokoli, ať už to je pravda (první příklad s čínskou princeznou), nebo není (druhý příklad s čínskou princeznou).

Ač se to může zdát překvapující, je skutečně těžké rozumně matematicky či formálně popsat vztah mezi A a B, který normálně vyjadřujeme slovy „jestliže A, tak B“. Řešení, které nalezl náš matematik, a kterého se skutečně drží většina matematiků na celém světě, je krásné a jednoduché v tom, že ho

ale vůbec nevztahuje; jak tedy rozhodnout, mluvila-li pravdu? Asi by se Ti ale zdálo nefér kamarádku osočit z toho, že lhala. Jenže logika požaduje, aby každá věta, kterou se zabýváme, byla buďto pravdivá, nebo nepravdivá - není-li nepravdivá, musí tedy být pravdivá.

[9] V technické literatuře se používá z angličtiny převzatý název *xor*, který přesně vystihuje podstatu této spojky: jedná se o nebo (or), které ale vylučuje možnost, že by oba výroky byly pravdivé (X). Písmeno x pochází z anglického slova exclusive.

lze popsat pomocí nul a jedniček tak, jak jsme to udělali v tabulce. Znamená to, že **pravdivostní hodnota složeného výroku závisí pouze na pravdivostní hodnotách jednodušších výroků, které obsahuje**.[10] Tomu, jak rozumíme implikaci v normální lidské řeči, to moc neodpovídá: když řeknu „jestli dostanu z té písemky pětku, budu doma bita", budou tomu moji spolužáci rozumět tak, že budu bita kvůli té pětce z písemky, a ne třeba proto, že jsem rozbila vzácnou vázu po dědečkovi.

Přesto má tento způsob chápání logických spojek nesporné výhody:

1. Pravdivost nějakého složitého tvrzení můžeme ověřovat tabulkou. Některá tvrzení, říká se jim *tautologie*, budou ohodnocena jedničkou bez ohledu na to, jaké pravdivostní hodnoty mají jejich části.

Podívejme se třeba na to, jak vypadá tabulka pro tvrzení tvaru $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$. Postupně budeme zjišťovat hodnoty složitějších a složitějších výroků v jednotlivých řádcích tabulky:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

Cvičení 4. Zkus si vyplnit tabulku třeba pro tvrzení tvaru $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ a pro tvrzení tvaru $A \vee \neg A$.

Jiná tvrzení, těm se říká *kontradikce*, budou vždy mít pravdivostní hodnotu 0.

2. Nepotřebujeme všechny spojky - ve skutečnosti stačí negace a implikace, nebo negace a konjunkce. Ostatním spojkám lze rozumět jako zkratkám za složitější výroky napsané pomocí vybraných spojek.

Cvičení 5. Dejme tomu, že se Ti líbí spojka $\neg$ a spojka $\wedge$, zato $\vee$ se Ti nelíbí (plete se s písmenem V). Ověř tabulkou, že $A \vee B$ má ve všech řádcích stejné hodnoty jako $\neg(\neg A \wedge \neg B)$! To znamená: Dokaž, že $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ je tautologie.

Cvičení 6. Ověř, že „A právě tehdy, když B" vlastně znamená „A a B mají vždycky stejné hodnoty". Jinak řečeno: ukaž, že $A \Leftrightarrow B$ má stejné pravdivostní hodnoty jako $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$!

Cvičení 7. Najdi formuli, kterou nelze ekvivalentně zapsat pouze pomocí spojek $\wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$.

Cvičení 8. Podívej se na tabulku výrokové spojky, jejíž význam je „ani A, ani B".[11]

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ukaž, že pomocí této jediné spojky lze vyjádřit všechny spojky výrokové logiky, tedy najdi formule, které obsahují pouze spojku $\downarrow$ a jsou ekvivalentní s $\neg A$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$.

Toho, že nepotřebujeme všechny spojky, se hodně využívá v informatice. Každému počítačovému programu totiž lze rozumět tak, že jen počítá pravdivostní hodnoty nějakých složitých formulí. K tomu, aby to mohl udělat, potřebuje v sobě mít zabudované součástky, které umí spočítat pravdivostní hodnotu negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence z pravdivostních hodnot jejich částí. Může se ale stát, že je o hodně levnější nebo jednodušší vyrobit součástku, která počítá konjunkci, než třeba součástku, která počítá implikaci ...

[10]*Téhle vlastnosti se říká, že spojky výrokové logiky jsou *extenzionální*. Až budeme mluvit o modálních logikách, všimni si, že spojka **„možná (=může být pravda, že)"** není extenzionální (takovým spojkám se pak říká intenzionální). Například věta „možná zítra bude pršet" je pravdivá bez ohledu na to, zda věta „zítra bude pršet" je pravdivá. Pravdivost složeného výroku závisí nejen na pravdivosti jeho částí, ale i na tom, jakým způsobem jsou tyto pravdivosti popsány - nejde jen o to, zda hodnota je 1 nebo 0, ale i o to, jak se k tomu dojde.

[11]Tuto spojku zavedl americký logik Charles Sanders Peirce, proto se nazývá *Peirceův symbol*.

Výroková logika - povídání o formě[12]

Vraťme se k našemu Matematikovi. Když přišel na to, že pravdivostní hodnoty složených výroků se dají určovat pomocí tabulek, a že existují tautologie, tedy tvrzení pravdivá bez ohledu na pravdivost jednotlivých částí, začalo ho zajímat, jestli existuje nějaký způsob, jak napsat počítačový program, který by je postupně všechny vypsal. Brzy mu došlo, že těch vždy pravdivých tvrzení je nekonečně mnoho, takže to nejlepší, co se mu může podařit, je najít program, který bude postupně vypisovat jedno za druhým a na každé někdy přijde řada (i když on sám se toho možná už nedožije, a když to bude nějaká hodně složitá tautologie, nedožije se toho ani jeho pravnuk).

Nakonec takový program objevil. My si ho zde nebudeme ukazovat, ale ukážeme si něco, s pomocí čeho už by se dal napsat. V logice se takovýmhle schématům pro programy, které vypisují jednu tautologii za druhou, říká *kalkuly*. Kalkuly a počítačové programy vůbec samozřejmě nevědí nic o tom, jestli venku prší, a dokonce ani o matematických pojmech, číslech, trojúhelnících, zkrátka ničemu nerozumí. Proto jsou čistě formální - takový kalkul pracuje tak, že vezme nějakou řádku znaků a udělá s ní nějakou jednoduchou úpravu podle předem daného pravidla. To jen člověk, který se na to dívá z venku, ví, že ta úprava znamenala třeba to, že z výroku $A \wedge (A \Rightarrow B)$ vyplývá výrok B. Kalkul sám nic takového „neví“.

Kalkul také neobsahuje ani nevytváří úplné věty, ale jen zjednodušená schémata, podle kterých lze z jednoduchých výroků vytvořit složený výrok. Takovým schématům se říká *formule*. Formule je taková řádka znaků, která by byla výrokem, kdybychom za písmena v ní obsažená dosadili nějaké jednoduché výroky. Třeba $A \wedge (A \Rightarrow B)$ je formule, a dosazením „prší“ za A a „je mokro“ za B dostaneme výrok „prší a když prší, tak je mokro“.[13]

Každý kalkul obsahuje nějaké axiomy, které říkají, že na začátku smíme vzít libovolnou řádku znaků takového a takového tvaru. V kalkulu výrokové logiky to jsou tři axiomy

(A1)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(A2)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(A3)	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Nenech se překvapit tím, že se zde vyskytují jen dvě spojky. Mohli bychom, samozřejmě, napsat i axiomy obsahující ostatní spojky, my se ale spokojíme s tím, že víme, že ostatní spojky jsou jen zkratkami za složité formule obsahující jen $\Rightarrow$ a $\neg$.[14]

To, že náš kalkul obsahuje axiomy (A1), (A2) a (A3) znamená, že příslušný program může do seznamu tautologií napsat libovolný řádek znaků, který vznikne tak, že za písmenka A, B a C dosadí nějaké formule. Například naše tři axiomy[15] jsou formule a dosazením výroku 1+1=2 za A, a výroku „teplota

[12]Tuhle část bychom také mohli nadepsat cizím slovem *syntaxe*. Syntaxe se zabývá tím, jak vypadá správně utvořený výrok, jaké musí mít části, tak jako věta musí mít podmět a přísudek a souvětí musí být správně rozděleno čárkami. Zajímavé na tom je, že při zkoumání správně utvořených složených výroků můžeme zapomenout na to, jaký mají význam. Dále se syntaxe zabývá vším, co lze zkoumat pouze na základě tvaru (formy) jednotlivých tvrzení, aniž bychom znali jejich konkrétní význam.

[13]Matematicky přesná definice formule zní takto:
1° Každé velké písmeno abecedy je formule a nazývá se *výroková proměnná*, protože označuje nějaký výrok. (Kdybychom potřebovali více proměnných než je písmen v abecedě, můžeme používat třeba symboly $V_1, V_2, \dots$)
2° Jsou-li A a B formule, jsou také $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B)$ a $(A \Leftrightarrow B)$ formule. Tam, kde nemůže dojít k omylu, můžeme závorky vynechávat.

[14]Kdyby Ti zvědavost nedala spát, tady přeci jen jsou i ostatní axiomy:

$(A\wedge1)$	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
$(A\wedge1')$	$(A \wedge B) \Rightarrow B$
$(A\wedge2)$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$
$(A\vee1)$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
$(A\vee1')$	$B \Rightarrow (A \vee B)$
$(A\vee2)$	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
$(A\Leftrightarrow1)$	$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
$(A\Leftrightarrow1')$	$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
$(A\Leftrightarrow2)$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A \Leftrightarrow B))$

[15]Axiomem se v matematice obvykle rozumí libovolné tvrzení, které považujeme za pravdivé, aniž bychom ho dokázali. V našem kalkulu můžeme do seznamu tautologií „bez důkazu“ napsat právě všechny formule, které vzniknou dosazením do

je $-273°$C“ za B do axiomu (A1), dostáváme výrok „jestliže 1+1=2, potom když je teplota $-273°$C, tak 1+1=2“. Při práci s kalkulem nebudeme dosazovat výroky, ale formule, takže dosazením do prvního axiomu může vzniknout třeba formule $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Q \Rightarrow S) \Rightarrow (X \Rightarrow Y))$.

Náš kalkul má taky jedno pravidlo, logikové mu říkají *modus ponens*. To říká tohle:

`Pokud jsi už na výstup napsal formuli A a také formuli A ⇒ B, můžeš tam napsat také B.`

* Příklad důkazu v kalkulu

Ukážeme si, jak pomocí tohoto kalkulu dostaneme formuli $p \Rightarrow p$, která říká, že když je pravda p, tak je pravda p. Tedy například „když prší, tak prší“, což je zřejmě pravda a tedy chceme, aby to bylo v našem kalkulu dokazatelné.

Nejdřív použijeme axiom (A2); za B dosadíme $p \Rightarrow p$[16] a za A a C dosadíme p.

$$(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})) \tag{A2}$$

$$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \tag{1}$$

Potom použijeme axiom (A1) a dosadíme do něj stejně jako v předešlém kroku.

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{A1}$$

$$p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \tag{2}$$

Teď můžeme použít pravidlo modus ponens na (1) a (2):

$$\begin{array}{lll} \text{(MP)} & \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} & (p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \\ & \mathrm{A} & p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \\ \hline & \mathrm{B} & (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p) \end{array} \tag{3}$$

Teď znovu dosadíme do (A1), ale tentokrát za A i B dosadíme p.

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{A1}$$

$$p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \tag{4}$$

No a nakonec znovu použijeme modus ponens, tentokrát na (3) a (4)

$$\begin{array}{lll} \text{(MP)} & \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} & (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p) \\ & \mathrm{A} & p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \\ \hline & \mathrm{B} & p \Rightarrow p \end{array}$$

Vidíme, že dokazování v takovém kalkulu není vůbec jednoduchá věc a rozhodně si dovedeme představit i jednodušší způsoby jak zjistit, že věta „jestliže prší, tak prší“ je vždycky pravdivá. Přesto se logikové kalkuly rádi zabývají, dokazují o nich různé věty a vymýšlí další (v některých z nich se dokazuje o něco lépe, ale museli bychom si vysvětlit ještě spoustu nových neznámých pojmů, abychom se s nimi mohli seznámit). My si bez důkazu uvedeme dvě typické věty o kalkulu výrokové logiky:

Věta 9. (O korektnosti) *Kalkul výrokové logiky je korektní, to znamená, že každá formule, kterou v něm dokážeme, je skutečně tautologie.*

Věta 10. (O úplnosti) *Kalkul výrokové logiky je úplný, to znamená, že každou tautologii v něm lze dokázat.*

(A1), (A2) nebo (A3), takže všechny takové formule jsou axiomy a (A1), (A2) a (A3) jsou vlastně *schémata axiomů*. Rozdíl mezi axiomem a schématem axiomů tkví v tom, že axiom bychom mohli do seznamu tautologií pouze opsat v přesně stejném znění, zatímco do schématu axiomu smíme i dosazovat. V našem textu budeme ale běžně schématům axiomů říkat axiomy. Axiomy i jejich schémata jsou vždy tautologie, protože pravidla dokazování umožňují opsat je do seznamu tautologií.

[16] Nedej se zmást tím, že za B dosazujeme formuli, kterou chceme dokázat! Dosadit za jednotlivá písmenka do axiomů můžeme cokoli, jen musíme do daného axiomu za stejné písmenko dosadit vždy to samé. Důležité je, že **do výsledného seznamu tautologií** nemůžeme napsat nic, co nedostaneme postupem popsaným v předchozí kapitolce.

Cvičení 11. Dokaž větu o korektnosti výrokové logiky, to znamená, ukaž pomocí tabulky, že axiomy jsou tautologie a že pravidlo modus ponens ze dvou tautologií opět odvodí tautologii.

Cvičení 12. Klasická logika má tu zajímavou vlastnost, že když k množině všech tautologií přidáme jedinou formuli, která tautologií není, budeme pomocí dosazení moci odvodit spor[17] - tedy budeme moci najít dvě formule, které obě vznikly dosazením do nějakých tautologií nebo do naší přidané formule, z nichž jedna je negací druhé.

Nechť je dána formule A, která není tautologií. Řekněte, jaké dvě formule použijete a jaké dosazení na každou z nich provedete, abyste dostali hledaný spor.

* Shrnutí

Dnes jsme se seznámili s klasickou výrokovou logikou. Na jejím příkladu jsme si ukázali, jaký je rozdíl mezi syntaxí, tedy čistě formálním hraní s písmenky, a sémantikou, tedy uvažováním o významu. Sémantika je velmi důležitá, protože s její pomocí se mezi sebou můžeme dohodnout, co máme na mysli, když vyslovíme tvrzení určitého tvaru.Viděli jsme, že například u implikace nemusí být úplně snadné takovou dohodu udělat (a ještě se k tomu vrátíme v příštích dílech). Zatímco v oblasti sémantiky výrokové logiky jsme se naučili ověřovat, zda je nějaká formule tautologie či kontradikce (nebo nic z toho) pomocí tabulky, v oblasti syntaxe jsme se seznámili s jedním kalkulem. Abychom nebyli pořád jen úplně klasičtí, předvedli jsme si také tzv. dynamický přístup k logice, ve kterém chápeme ověřování pravdivosti nějakého tvrzení jako hru pro dva hráče.

[17] V matematické řeči se říká, že množina tautologií klasické výrokové logiky je *maximální bezesporná množina*.

Další cvičení

Nedej se odradit délkou zadání některých úloh! Není vůbec pravda, že čím delší zadání, tím škaredější úloha...

Cvičení 13.[18]

Někdy se stává, že nějakou větu v přirozeném jazyce, tedy v jazyce, kterým se lidé běžně dorozumívají, lze pochopit dvěma různými způsoby. Často je to způsobené tím, že přirozený jazyk nezachycuje dostatečně přesně takzvanou logickou strukturu věty. V této úloze se podíváme na dva takové příklady:

a) Není-li stanoveno právním předpisem nebo účastníky dohodnuto jinak, jsou podíly všech spoluvlastníků stejné.

(Ak nie je právnym predpisom ustanovené alebo účastníkmi dohodnuté inak, sú podiely všetkých spoluvlastníkov rovnaké.)

Tuto větu lze formalizovat dvěma způsoby: $\neg(A \vee B) \Rightarrow C$, $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow C$.

b) Není-li možné vadu odstranit a není-li pro ni možné užívat věc dohodnutým způsobem nebo řádně, má nabyvatel právo domáhat se zrušení smlouvy.

(Ak nemožno vadu odstrániť a ak nemožno pre ňu vec užívať dohodnutým spôsobom alebo riadne, je nadobúdateľ oprávnený domáhať sa zrušenia zmluvy.)

Dvě možné formule tentokrát jsou: $(\neg A \wedge \neg(B \vee C)) \Rightarrow D$, $(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \Rightarrow D$.

V obou částech ukaž, že dvě navržené formule nejsou ekvivalentní.

V každém příkladě zkus větu přeformulovat tak, jak by měla znít, aby jednoznačně odpovídala první a druhé navržené formuli. Rozhodni, která z nabízených formulí zachycuje zamýšlený význam věty.

Všimni si, jak byla zamýšlena část věty se strukturou „není-li A nebo B“ („ak nie A alebo B“)!

Cvičení 14.

Snem tvůrců logických kalkulů bylo vytvořit systém, ve kterém je každý jednotlivý krok důkazu zcela nezpochybnitelný, zkrátka evidentně správný a není tedy třeba jej zdůvodňovat. Karel Čapek o takovém dokazování napsal:

O logickém důkazu je jediná pravda, že se nic nedá logicky dokazovat; což vám dokážu logicky. Buď dokazuji své tvrzení samými evidentními soudy; ale kdyby mé tvrzení plynulo evidentně z evidentních vět, bylo by samo evidentní, a tu by ovšem naprosto nepotřebovalo být dokazováno. Nebo dokazuji své tvrzení větami neevidentními, ale pak bych musel logicky dokazovat vechny tyto věty „usque ad infinitum“, [...] z čehož logicky plyne, že logický důkaz je nemožný; a není-li tento logický důkaz naprosto přesvědčující, vidíte z toho, že logické dokazování opravdu za nice nestojí.

Karel Čapek: Kritika slov; citováno v Antonín Sochor: Klasická matematická logika, str. 21.

Odhlalte, v čem spočívá klam čili podfuk Čapkovy argumentace!

Cvičení 15.[19]

Jeden vědec z planety Venuše se rozhodl zkoumat, zda různé jazyky mohou fungovat na základě různých logických systémů. Po několika letech studia pozemšťanů (konkrétně svou studii prováděl v Čechách) publikoval článek, ve kterém tvrdil následující:

V jazyce Čechů se zápor vytváří tak, že se před určitý tvar slovesa připojí předpona ne-. Čechové přitom často používají věty tvaru „$A \wedge \neg A$“, například „Někteří lidé jsou chytří a někteří lidé nejsou chytří.“ Z toho je vidět, že v logice Čechů neplatí zákon, který na Venuši zná každé malé dítě, totiž že žádný výrok nemůže být pravdivý současně se svou negací.

Vysvětlete venušskému vědci, v čem se mýlí.

Cvičení 16.[20]

a) Nalezněte formuli obsahující pouze spojky $\neg$ a $\Rightarrow$, která je ekvivalentní s formulí $(A \wedge B) \Rightarrow A$.

b) Rozhodněte, zda je formule $(A \wedge B) \Rightarrow A$ dokazatelná v hilbertovském kalkulu výrokové logiky.

c) Rozhodněte, které z následujících vět jsou konjunkcemi a které ne:

Plakal a plakal. Samá práce a žádná zábava udělaly z Honzy hrozného škarohlída. Tomáš slíbil Šárce kožešinový kabát a prsten s diamantem. Pět a tři je osm. Pan Novák sveze na valníku Petříka a buďto Anežku nebo Kristýnku.

---

[18] Volně podle František Gahér: Provokácia ako motivácia k štúdiu logiky.

[19] James D. McCawley: Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic.

[20] James D. McCawley: Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic.

Soutěžní úlohy

Cvičení 17.[21] **1. soutěžní úloha**

Předpokládejme, že místo obvyklých pravdivostních hodnot „pravda / nepravda“ budeme pracovat s následujícími čtyřmi pravdivostními hodnotami:

1: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám důvod si myslet, že je nepravdivý.
X: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

a) Napiš tabulku pro negaci (tedy pro každou ze čtyř možných „pravdivostních hodnot“ výroku A urči, jakou hodnotu bude mít $\neg$A). (2 body)

b) Zkus určit, jaké hodnoty může mít konjunkce A $\wedge$ B v následujících případech. Nezapomeň při tom na to, že v této logice nemusí pravdivostní hodnota A $\wedge$ B záviset pouze na pravdivostních hodnotách výroků A, B.[22] (3 body)

A	B	A $\wedge$ B
1	X	
1	?	
X	?	
0	X	

Cvičení 18. **2. soutěžní úloha**

Podívej se na tabulku výrokové spojky, jejíž význam je „*A a B jsou neslučitelné*“. Tato spojka se obvykle nazývá „Shefferovo lomítko“.

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Ukaž, že pomocí této jediné spojky lze vyjádřit všechny spojky výrokové logiky, tedy najdi formule, které obsahují pouze spojku | a jsou ekvivalentní s $\neg$A, A $\wedge$ B, A $\Rightarrow$ B, A $\vee$ B, A $\Leftrightarrow$ B.

Rozšíření této úlohy (mimo soutěž) Ukaž, že kromě Peircova symbolu (cvičení 8) a Shefferova lomítka neexistuje žádná další dvouargumentová výroková spojka, pomocí které by se daly vyjádřit spojky $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$.

Cvičení 19. **3. soutěžní úloha**

a) Zdůvodni, že hrají-li proponent i oponent dobře (tedy neudělají-li chybu), pak platí, že proponent vyhraje právě tehdy, když jeho tvrzení je pravdivé (a v opačném případě vyhraje oponent). Můžeš předpokládat, že oba hráči jsou vševědoucí - o každém výroku vědí, zda je pravdivý nebo ne.

(3 body)

b) V pravidlech pro hru chybí pravidla pro implikaci a pro ekvivalenci. My ale víme, že obě lze považovat jen za zkratku za formuli se spojkami $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, pro které pravidla máme. Navrhni pravidlo pro hru s výrokem, který je implikací.

(2 body)

[21] James D. McCawley: Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic; tam podle Nuel Belnap: A useful four-valued logic. Ve sborníku M. Cunn and G. Epstein: Modern uses of multiple-valued logic, strany 5-37. Reidel, Dordrecht 1977.

[22] Tedy $\wedge$ nemusí být extenzionální spojka.

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Řešení cvičení 2

A	B	$\otimes$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Nápověda ke cvičení 12 Vymyslete, jaké dosazení je třeba udělat, abychom z formule, která není tautologií (tedy není pravdivá při nějakém ohodnocení), dostali kontradikci (formuli nepravdivou při všech ohodnoceních).

Řešení cvičení 14 Antonín Sochor komentuje citovaný text takto:

Je nutné zdůraznit, v čem se matematický logik naprosto rozchází s citovaným výrokem K. Čapka. Parafrázuji-li jeho úvahu, mohu také jednoduše „dokázat“, že nikdy nedojdu z Prahy do Pračic: při každém kroku se má pozice změní jen málo a Prčice jsou od Prahy dost daleko. Chyba Čapkovy úvahy spočívá v tom, že mnoha (byť malými) kroky je možno urazit velkou vzdálenost, což řada účastníků pochodu na uvedené trase prakticky prokázala. Analogicky není možno popřít, že i pomocí evidentních důkazových kroků je možno dojít (je-li jich hodně) k tvrzením značně neevidentním.

Antonín Sochor: Klasická matematická logika, str. 23.

Řešení části a) cvičení 17

Mám-li důvod si myslet, že výrok A je nepravdivý, mám současně důvod si myslet, že jeho negace je pravdivá – vždyť od negace očekáváme právě to, že bude vyjadřovat tvrzení „A je nepravdivé“.

Naopak, mám-li důvod si myslet, že výrok A je pravdivý, mám současně také důvod si myslet, že jeho negace je nepravdivá. Díky tomu by tabulka pro čtyřhodnotovou negaci měla vypadat takto:

A	$\neg$A
1	0
0	1
X	X
?	?

Řešení části b) cvičení 17

U konjunkce je situace o trošku zapeklitější, podívejme se ale nejprve na některé dílčí případy:

Víme, že když je některý z výroků A, B nepravdivý, je také celý výrok $A \wedge B$ nepravdivý. Naopak, jistotu o tom, že výrok $A \wedge B$ je pravdivý, máme pouze tehdy, když víme, že oba výroky A i B jsou pravdivé. Můžeme tedy zformulovat následující pravidla:

(i) Mám-li nějaký důvod věřit, že výrok A je pravdivý, a také nějaký důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak mám důvod věřit, že jejich konjunkce je pravdivá.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků buďto 1 nebo X.)

(ii) Mám-li důvod věřit, že jeden z výroků A, B je nepravdivý, tak mám také důvod věřit, že jejich konjunkce je nepravdivá.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo X.)

Obrácením druhého pravidla dostaneme třetí pravidlo:

(iii) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je nepravdivý, ani nemám důvod věřit, že výrok B je nepravdivý, tak nemám důvod věřit, že výrok A a B je nepravdivý.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 1 nebo ?.)

Pokud se rozhodneme řídit se podle těchto pravidel, můžeme začít vyplňovat tabulku:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B$
1	X	podle (i) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	X
1	?	podle (iii) nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	1 nebo ?
X	?	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	0 nebo X
0	X	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	0 nebo X

Vidíme, že naše pravidla umožňují určit pravdivostní hodnotu v prvním řádku. Navíc říkají, jestli máme důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý výrok.

Možná se ptáš, proč jsme neobrátili také první pravidlo – dostali bychom tak následující pravidlo:

(iv) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, nebo nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

Pomocí pravidla (iv) dostaneme nejčastěji přijímané řešení naší úlohy:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	?
X	?	0
0	X	0

Můžeme se ale rozhodnout pravidla (i) a (iv) pozměnit a být raději optimističtí:[23]

(i') Když mám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá. (Mohu argumentovat třeba takhle: už vím, že „aspoň půlka“ výroku $A \wedge B$ je pravdivá.)

Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 1 nebo X.

Pravidlo (iv) tedy přijmeme jen ve slabším znění:

(iv') Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je pravdivý a také nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

V tom případě bychom tabulku doplnili takto:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	X

Vidíme, že při vyplňování druhého až čtvrtého řádku si můžeme vybrat, zda budeme pesimističtí (raději nebudeme konjunkci $A \wedge B$ věřit, pokud pro to nemáme opravdu pádné důvody), nebo optimističtí (pokud první tři pravidla neurčují jasně, zda konjunkci věřit či ne, prostě jí uvěříme). Čtvrté pravidlo bychom mohli zformulovat ještě alespoň jedním způsobem:

(iv") Když mám důvod věřit, že jeden z výroků je pravdivý, a nemám důvod věřit, že druhý výrok je nepravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce je pravdivá.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota jednoho z výroků A, B buďto 1 nebo X a pravdivostní hodnota druhého je 1, X nebo ?.)

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	0

Asi bychom dokázali vymyslet ještě další verze čtvrtého pravidla. Můžeme také říci, že v těchto případech nelze pravdivostní hodnotu výroku $A \wedge B$ určit pouze na základě pravdivostních hodnot výroků A a B.

Poznámka k došlým řešením cvičení 17

Velmi mne překvapilo, že většina řešitelů si neuvědomila rozdíl mezi pravdivostní hodnotou negovaného výroku (resp. konjunkce) a negací věty (resp. konjunkcí vět), která popisuje význam pravdivostní hodnoty.

[23] Ve skutečnosti je toto řešení spíše naivní než optimistické: uvěříme skoro všemu, co nám kdo napovídá.

S tím se pojila další chyba, totiž nesprávné znegování konjunkce (pravdivostní hodnoty jsou totiž popsány výroky ve tvaru konjunkcí, jejichž negacemi by měly být disjunkce).

Většina řešitelů tak objevila součinovou logiku: každé pravdivostní hodnotě odpovídá dvojice klasických pravdivostních hodnot výroků „mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý“ a „mám důvod si myslet, že výrok je nepravdivý“ a logické operace se provádějí po složkách. Tabulka pro negaci v součinové logice vypadá takto:

A	¬A
1 = (1,0)	0 = (0,1)
0 = (0,1)	1 = (1,0)
X = (1,1)	? = (0,0)
? = (0,0)	X = (1,1)

Zatímco věty popisující pravdivostní hodnoty šlo snadno negovat (ač výsledkem nebyla žádna z nabízených pravdivostních hodnot), část řešitelů si všimla, že je nelze spojovat konjunkcí. Jak napsal jeden řešitel: *„Tato část mi přijde dosti diskutabilní, řekl bych totiž, že je otázkou citu pro češtinu. Jak totiž vnímat souvětí: „Mám důvod si myslet, že je výrok pravdivý i nepravdivý, ale zároveň nemám důvod myslet si, že je pravdivý ani nepravdivý.“ (X∧?) ?!“* Díky tomu byla část b) ve skutečnosti jednodušší než část a).

Řešení cvičení 18

Formule pro negaci a konjunkci vytvoříme vcelku jednoduše:

$$\neg A \Leftrightarrow (A|A)$$
$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A|B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$$

Pro nalezení formule pro disjunkci můžeme použít známé de Morganovy zákony:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow [(A|A) \wedge (B|B)]|[(A|A) \wedge (B|B)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]|[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]$$

Dostali jsme sáhodlouhé a krkolomné vyjádření. Když si budeme chvilku hrát s tabulkou, najdeme i kratší vyjádření: $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A|\neg B) \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$.

Toto vyjádření bychom objevili i pomocí de Morganových zákonů, kdybychom si uvědomili, že $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, což v řeči Shefferova lomítka zní $(A|A)|(A|A) \Leftrightarrow A$. Díky tomu můžeme zkrátit dlouhou formuli na krátkou:

$$[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]|[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))] \Leftrightarrow (A|A)|(B|B).$$

Formuli pro implikaci bychom mohli zkusit napsat pomocí některé z ekvivalencí

$$\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

Kratší vyjádření zní:[24] $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B|A) \Leftrightarrow (B|B)|A$.

Formuli pro ekvivalenci už určitě sám dokážeš napsat pomocí jedné ze dvou následujících ekvivalencí:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

Poznámka ke cvičení 18

Opravovatel Pavel Paták mne upozornil na to, že nejjednodušší cestou k výše popsaným formulím je vyjádřit si slovy, co spojky znamenají v řeči neslučitelnosti:

$\neg A$ znamená, že A je neslučitelné samo se sebou: $A|A$.

$A \vee B$ znamená, že $\neg A$ a $\neg B$ jsou neslučitelné: $(A|A)|(B|B)$.

$A \Rightarrow B$ znamená, že A a $\neg B$ jsou neslučitelné: $A|(B|B)$.

$A \Leftrightarrow B$ znamená, že $A \vee B$ je neslučitelné s $A|B$ (tedy, pokud je pravda $A \vee B$, tak musí být A a B slučitelné, a pokud nejsou A a B slučitelné, tak nemůže být pravdivý ani jeden z nich): $[(A|A)|(B|B)]|(A|B)$.

---

[24] K objevení tohoto vyjádření nám může pomoci si všimnout, že v druhém řádku chceme dostat nulu, což lze jedině tak, že spojíme dvě formule, které mají hodnotu 1. Protože B má v tomto řádku hodnotu 0, zkusíme ho nejdřív znegovat, takže nejjednodušší formule, u které máme naději na úspěch, je $(B|B)|A$.

Poznámka k došlým řešením cvičení 18

Většina došlých řešení byla správná, body se strhávaly hlavně za nedostatečné zdůvodnění a chyby z přehlédnutí.

Poznámka ke cvičení 18

Pro zajímavost uveďme, že pomocí Shefferova lomítka lze vytvořit kalkul s jediným axiomem

$$\big[A|(B|C)\big] \mid \big[[D|(D|D)] \mid \big((E|B) | [(A|E)|(A|E)]\big)\big].$$

Tento kalkul má jediné pravidlo, kterým samozřejmě nemůže být modus ponens (nemáme zde žádné formule tvaru $A \Rightarrow B$):

Pokud jsi již odvodil formule A a $A|(B|C)$, můžeš odvodit i C.

1. nápověda k rozšíření cvičení 18 Dvouargumentovou výrokovou spojku, pomocí které lze vyjádřit všechny obvyklé spojky výrokové logiky, označme $\div$. Uvědom si, že stačí, abychom pomocí $\otimes$ uměli vyjádřit negaci a implikaci.

2. nápověda k rozšíření cvičení 18 Na základě toho, že pomocí $\div$ lze vyjádřit negaci, rozhodni, jaké pravdivostní hodnoty může mít $A \div B$, jestliže A i B mají hodnotu 1.

Řešení rozšíření cvičení 18 Nejprve ukážeme, že kdyby pro pravdivé výroky A a B bylo $A \div B$ také pravdivé, nemohli bychom vyjádřit negaci. Protože pravdivostní hodnota $\neg A$ závisí pouze na pravdivostní hodnotě výroku A, bude se ve formuli, pomocí které vyjádříme $\neg A$, vyskytovat pouze písmenko A. Kdyby v prvním řádku tabulky bylo $A \div B$ pravdivé, bylo by tam také $A \div A$ pravdivé, a tedy i $A \div (A \div A)$ a $(A \div A) \div A$ a tak dále pro libovolně složitou formuli obsahující pouze A a $\div$, takže bychom nemohli vyjádřit $\neg A$, které je v prvním řádku tabulky nepravdivé.

Analogicky můžeme ukázat, že v případě, že A i B jsou nepravdivé výroky, musí být $A \div B$ pravdivý výrok.

Existují celkem čtyři výrokové spojky, které mají v prvním řádku 0 a v posledním řádku 1; jsou to:

A	B	$\vert$	$\downarrow$	$\neg_A$	$\neg_B$
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

První dvě jsou Shefferovo lomítko a Peirceův symbol; třetí je „dvouargumentová negace prvního argumentu“ - její hodnota vůbec nezávisí na B. My ale víme, že hodnota $A \Rightarrow B$ na B závisí, takže pomocí $\otimes_{\neg A}$ nelze napsat $A \Rightarrow B$. Podobně to dopadne i pro $\neg_B$.

Řešení části a) cvičení 19

Věta 20. *Pokud proponent ani oponent neudělají chybu a oba jsou vševědoucí, vyhraje proponent právě tehdy, je-li jeho tvrzení pravdivé; jinak vyhraje oponent.*

Důkaz. Nejprve si řekneme, jakou asi úvahu bys měl udělat, abys vymyslel následující důkaz: představme si nejprve, že proponentovo tvrzení je pravdivá negace $\neg A$. Oponent může na toto tvrzení zaútočit jedině tím, že bude tvrdit A, což je nepravdivý výrok. Je-li A věta jednoduchá, okamžitě prohraje. Kdyby A bylo nějaké složitější souvětí, stejně by se nakonec ukázalo, že je nepravdivé, takže by oponent nakonec prohrál. (V poslední větě jsme jaksi mimochodem použili dokazované tvrzení. V pořádném důkazu, který najdeš o kousek dále, uvidíme, že si to můžeme dovolit!)

Kdyby proponent tvrdil nepravdivou negaci, bude oponent tvrdit pravdivý výrok A, takže by vyhrál oponent.

Představme si ještě, že proponentovo tvrzení je konjunkce $A \wedge B$. Kdyby byla nepravdivá, byl by alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, a právě ten by si vychytrale vybral oponent. Proponent by byl nucen tvrdit nějaký nepravdivý výrok a prohrál by. Kdyby ale konjunkce $A \wedge B$ byla pravdivá, nedostane oponent proponenta do úzkých.

Pořádný důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu spojek v proponentově tvrzení. (Vůbec se nelekej, pokud předchozí větě nerozumíš.) Z pravidel hry je jasné, že dokazované tvrzení platí pro všechny jednoduché výroky, tedy pro všechny výroky, které neobsahují žádné spojky. Ukážeme, že jestli dokazované tvrzení platí pro všechny výroky, které obsahují nejvýš k spojek, platí i pro všechny výroky, které obsahují nejvýš $k + 1$ spojek. Díky tomu budeme vědět, že platí pro výroky s libovolným počtem spojek: platí totiž pro výroky s nula spojkami, a tedy i pro výroky s jednou spojkou, a tedy i pro výroky se dvěma spojkami, ... a tedy i pro výroky se sto třiceti pěti spojkami, ...

Předpokládejme, že už jsme tvrzení dokázali pro všechny výroky s k spojkami a že dostaneme výrok s $k+1$ spojkami. Ten může být negací ¬A, konjunkcí A ∧ B nebo disjunkcí A ∨ B; v každém případě obsahují výroky A a B nejvýš k spojek.

Na negaci ¬A musí oponent zaútočit tvrzením výroku A. Hra bude pokračovat s prohozenými rolemi a nový proponent (tedy původní oponent) vyhraje právě tehdy, když výrok A je pravdivý (A má k spojek, takže pro něj jsme tvrzení už dokázali), tedy právě tehdy, když výrok ¬A je nepravdivý. Přesně to jsme chtěli ukázat.

Tvrdí-li proponent nepravdivé tvrzení tvaru A ∧ B, vybere oponent ten z výroků A, B, který je nepravdivý (jsou-li nepravdivé oba, vybere si kterýkoli). Tím donutí proponenta tvrdit nepravdivý výrok s nejvýš k spojkami, takže víme, že proponent prohraje, což jsme chtěli ukázat. Kdyby ale tvrzení A ∧ B bylo pravdivé, bude proponent muset tvrdit pravdivý výrok, a tedy vyhraje, což jsme chtěli ukázat.

Případ, kdy proponent tvrdí výrok tvaru A ∨ B je analogický a přenecháme ho čtenáři.

Poznámka k došlým řešením části a) cvičení 19

V části a) si mnoho řešitelů neuvědomilo, že mají dokázat ekvivalenci (výrok je pravdivý, `právě když` proponent vyhraje) a dokazovali pouze implikaci „jestliže je výrok pravdivý, tak proponent vyhraje“. Udělovala jsem 1 bod za rozumné zdůvodnění alespoň některé z implikací, 1 bod za dokazování ekvivalence a 1 bod za vysvětlení, že důkaz probíhá matematickou indukcí.

Za zmínku stojí řešení několika řešitelů (konkrétně to byli *Pepa Tkadlec, Háňa Bendová* a *Michal Kenny Rolínek*), kteří tvrzení nedokazovali indukcí, ale pomocí následujícího *invariantu*:

Po celou dobu hry se nemění pravdivostní hodnota výroků, které hráč (proponent či oponent) říká. Pravdivostní hodnota oponentových výroků je opačná než pravdivostní hodnota proponentových výroků.

Pokud tedy proponent začne s pravdivým tvrzením, bude i v posledním kroku hry tvrdit pravdu (nebo bude oponent tvrdit nepravdu) a vyhraje, a pokud začne s nepravdivým tvrzením, bude v posledním kroku tvrdit nepravdu a prohraje (nebo bude oponent tvrdit pravdu a vyhraje oponent).

Snad ještě zajímavější bylo řešení *Mirka Olšáka*, který zavedl pojem *vyhrávající hodnota* a ukázal, že se z vyhrávajících hodnot jednodušších výroků počítá stejně jako pravdivostní hodnota. Z toho je vidět, že vyhrávající hodnota nějakého výroku je rovná jeho pravdivostní hodnotě, což je dokazované tvrzení.

Například pokud oponent řekne konjunkci dvou výroků, jejichž vyhrávající hodnota je 1, podle pravidel vyhraje, a tedy vyhrávající hodnota této konjunkce je opět 1; kdyby vyhrávající hodnota alespoň jednoho z těchto výroků byla 0, tak prohraje, takže vyhrávající hodnota celé konjunkce by opět byla 0. Přesně tak se ovšem chová i tabulka pro pravdivostní hodnoty konjunkce.

Řešení části b) cvičení 19

Nejjednodušší pravidlo pro implikaci, které mě napadá, využívá ekvivalenci (A ⇒ B) ⇔ (¬A ∨ B). Pravidlo může znít třeba takto: „Pokud proponent tvrdí A ⇒ B, může si vybrat, zda má dále tvrdit ¬A nebo B.“

Mohli bychom také využít ekvivalenci (A ⇒ B) ⇔ ¬(A ∧ ¬B). Tomu by odpovídalo následující znění pravidla: „Pokud proponent tvrdí A ⇒ B, může oponent tvrdit A ∧ ¬B; dál se hraje s prohozenými rolemi.“

2. INTUICIONISTICKÁ LOGIKA A KONSTRUKTIVISMUS

Přestože Brouwer chtěl ukázat, že některé matematické důkazy fungují jinak než logika, lidé si všimli, že Brouwerův argument může ukázat také to, že některé oblasti matematiky sice fungují podle logiky, ale tato logika je odlišná. Někteří dokonce takovou logiku vybudovali a pokusili se předvést, že to je ve skutečnosti logika veškeré matematiky. Nazvali to intuicionistickou logikou.

Dan Cryan, Sharron Shatil, Bill Mayblin: Logika, str. 94.

Budování základů matematiky

V druhé polovině 19. století prožívala matematika krizi způsobenou zjištěním, že základy, na kterých se dosud budovalo, nejsou dost pevné a připouštějí různé paradoxy. Gottlob Frege se domníval, že jediným skutečně pevným a důvěryhodným základem pro matematiku je logika. Vypracoval způsob zápisu a dokazování logických formulí, díky kterému je považován za zakladatele moderní logiky. V té době byla za nejdůležitější část matematiky považována nauka o číslech, aritmetika. Frege se pokusil vybudovat aritmetiku na pevných základech logiky, ale když mělo jeho celoživotní dílo po dvanácti letech práce vyjít tiskem, upozornil ho mladý anglický matematik a filozof Bertrand Russel na závažný problém. V podstatě se jednalo o obdobu známého paradoxu holiče:

Holič ze Sevilly holí právě ty ze sevillských mužů, kteří se neholí sami. Otázka zní: „Holí se holič sám?"

Pokusíme-li se odpovědět, dostaneme se do bludného kruhu: Kdyby se holil, neholil by se, protože holí jen ty, kteří se neholí sami. Ale pokud se neholí sám, musí se holit ...

Přestože se Fregeho logika nakonec neosvědčila, Russel na Fregeho dílo navázal a stejně jako on se pokusil vybudovat pevné základy pro matematiku. Rozhodl se postupovat stejně jako kdysi dávno Euklidés při budování geometrie: některá zřejmá tvrzení prohlásit za axiomy[1] a všechna složitější tvrzení dokázat pomocí několika postupů, o jejichž správnosti nemůže být pochyb. V třísvazkovém díle *Principia mathematica* Russel společně s Whiteheadem skutečně touto metodou vybudoval aritmetiku a teorii čísel. Jaké bylo jejich zděšení, když si uvědomili, že se dopustili téže chyby jako Frege!

Problém, se kterým se Russel potýkal, lze zformulovat takto:

Uvažujme množinu M všech množin, které nejsou prvkem sama sebe. Každý pokus zjistit, zda M je svým vlastním prvkem, vede do bludného kruhu.

Ve stejné době významný německý matematik David Hilbert charakterizoval krizi v matematice těmito slovy:

„Současný stav věcí je neudržitelný. Jen si pomyslete, definice a deduktivní metody, kterým se všichni učíme, kterým vyučujeme a které používáme v matematice, vzor pravdy a jistoty, vedou k absurditám! Pokud je matematické myšlení nedokonalé, kde hledat jistotu a pravdu?"[2]

Hilbertovi a jeho následovníkům se pak podařilo vybudovat takové axiomatické systémy, které k absurditám nevedly. Podstatnou roli zde hrálo to, že se vzdali představy, že existuje jen jedna „správná" matematika. Zhruba řečeno, Hilbert považoval za „správnou" každou matematickou teorii, která nevede k absurditám. Matematicky řečeno, lze si zvolit zcela libovolné axiomy, na jejichž základě nelze dokázat nějaké tvrzení i s jeho negací. Soubor axiomů, který splňuje toto kritérium, nazveme *bezesporná teorie*, protože jeho důsledkem není žádná formule tvaru $A \wedge \neg A$ (takovou formuli nazýváme *spor*). Podle Hilberta mohou v matematice existovat vzájemně konkurenční teorie a nikomu to nevadí.[3]

---

[1] Přestože si matematikové velmi zakládají na tom, aby každé jejich tvrzení bylo odůvodněné, není možné snažit se dokázat skutečně všechna tvrzení. V každém důkaze totiž matematik použije nějaká jednodušší tvrzení, která by opět měl dokázat - a tak až do nekonečna. Abychom se vyhnuli nekonečnému dokazování, musíme se rozhodnout, že některým tvrzením budeme důvěřovat bez důkazu. Taková tvrzení se nazývají *axiomy*; někdy, zejména v souvislosti s řeckou matematikou, se používá též označení *postuláty*.

[2] John D. Barrow: Pí na nebesích, str. 115.

[3] Již dříve známým příkladem tohoto počínání bylo zavedení neeuklidovských geometrií. Fyzik by řekl, že nejvýše jedna z těchto teorií je správná, protože nejvýše jedna z nich popisuje svět, ve kterém žijeme. V neeklidovských geometriích může například být součet úhlů v trojúhelníku i jiný než 180°; fyzikové provádějí velmi přesná měření, aby ověřili, jaký je součet úhlů ve „skutečných trojúhelnících" (tvořených například třemi hvězdami; přímky jsou při tom vymezeny dráhou světelných paprsků). Matematik se na „skutečné trojúhelníky" neohlíží: zajímá jej jen to, zda je svět, ve kterém je součet úhlů v trojúhelníku jiný než 180°, vůbec myslitelný, zda by úvahy o něm nevedly ke sporům a paradoxům.

Důležité je, jak se tyto teorie budují. Začne se tím, že napíšeme několik axiomů. Pak je třeba ukázat, že z těchto axiomů nelze odvodit spor.[4] Při odvozování dalších tvrzení smíme používat pouze určité předem popsané malé krůčky. Příkladem takové teorie je například kalkul výrokové logiky.

Netrvalo dlouho a holandský matematik Luitzen Brouwer vystoupil s tvrzením, že axiomatické budování matematiky je zcela mylné. Jeho argument byl zhruba následující:

Matematika je v prvé řadě činností matematikovy mysli. Matematik intuitivně ví, s jakými objekty pracuje, třeba co to je přirozené číslo. Jazyk, kterým svoje poznatky vyjadřuje, je jen pomůckou pro dorozumívání. Je zcela mylné vyjít z tohoto jazyka, ten formalizovat a pak se domnívat, že prostým hraním se symboly „provozujeme" matematiku.[5] Ovšem přesně toho se dopouštíme, pokud budujeme teorie s axiomy a odvozovacími pravidly: sice se snažíme, aby naše axiomy odrážely naše intuitivní představy o matematických objektech, ale jakmile se jednou rozhodneme pro určitou sadu axiomů a odvozovacích pravidel, můžeme další matematické věty dokazovat zcela mechanicky - tak mechanicky, že by to za nás mohl dělat i počítač. Za axiomy své teorie volíme určité věty, výroky či formule, které se skládají ze slov či symbolů, kterými se snažíme (většinou ne zcela přesně) popsat vlastnosti čísel či jiných matematických objektů; díky tomu místo se samotnými čísly pracujeme s větami o číslech.

Podle Brouwera je třeba matematiku budovat pouze na těch nejzákladnějších matematických představách - *intuicích*, které sdílejí všichni lidé. Pro intuicionisty jsou těmito základními kameny matematiky přirozená čísla a princip matematické indukce, který říká toto: jestliže číslo 1 má nějakou vlastnost a jestliže platí, že má-li číslo n tuto vlastnost, pak ji má i číslo $n+1$, tak všechna přirozená čísla mají tuto vlastnost.

Mezi společné intuice všech matematiků patří také základní operace s přirozenými čísly (sčítání, násobení a podobně), které nazýváme *konstrukce*. Matematika je vědou o konstrukcích probíhajících v matematikově mysli. Například tvrzení

$$1 + 3 = 2 + 2$$

pro intuicionisty znamená „provedl jsem v mysli konstrukce odpovídající výrazům 2+2 a 1+3 a zjistil jsem, že vedou k témuž výsledku".

Většina matematiků se domnívá, že nezávisle na nás existuje něco jako svět matematických objektů, který můžeme zkoumat a objevovat. Tento názor na matematiku se často nazývá *matematický platonismus*, protože se podobá Platónově představě, že „někde" existuje svět dokonalých idejí a předměty, se kterými se setkáváme v každodenním životě, jsou jen nedokonalými obrazy těchto idejí. Například téměř každé malé dítě ví, že přímka je „nekonečně tenká" čára, ale žádná přímka nakreslená na papíře tuto vlastnost samozřejmě nemá. Přímky, se kterými se setkáváme, jsou tedy pouze nedokonalými napodobeninami těch „skutečných" přímek, které „bydlí" ve světě matematických objektů spolu s čísly, trojúhelníky a množinami.

Podle Brouwera tato představa vedla k používání některých postupů, které nejsou oprávněné. Ze všeho nejvíc se mu nelíbilo dokazování existence matematických objektů metodou nazývanou důkaz sporem. Ten patří k matematickému folklóru už od dob starého Řecka, kdy Eukleidés takto dokázal existenci nekonečného počtu prvočísel:

Předpokládejme, že prvočísel je pouze konečný počet a že $2, 3, 5, \ldots P$ jsou všechna prvočísla. Pak číslo $Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots P) + 1$ je větší než největší prvočíslo P, takže není prvočíslem, a tedy je dělitelné nějakým prvočíslem. Ale po dělení všemi prvočísly $2, 3, 5, \ldots P$ dává zbytek 1, takže žádným prvočíslem dělitelné není. To je spor - ukázali jsme, že Q je i není dělitelné nějakým prvočíslem. Předpoklad, že prvočísel je jen konečný počet, vede ke sporu, takže prvočísel musí být nekonečný počet.

Brouwerovi se na dokazování sporem nelíbilo, že nedává žádný návod na to, jak najít (zkonstruovat) objekt, jehož existenci dokazujeme. Připomíná to známý vtip o matematikovi a fyzikovi, obou zavřených v kobce s hromadou konzerv. Když se po týdnu žalářník přišel podívat do kobky, kde věznil fyzika, našel ho spokojeného a sytého, protože se mu podařilo konzervy otevřít kouskem ostrého kamene, který uloupl ze stěny. Matematik ležel ve své kobce vyčerpaný a téměř mrtvý hladý; stěny pokryl spoustou výpočtů a nápisů (v kobce byl dostatek bláta, kterým mohl psát) a dole v rohu objevil žalářník dvojitě podtrženou větu „Z toho plyne, že KONZERVU LZE OTEVŘÍT!"

[4] Ve skutečnosti matematikové často tento krok vynechávají a pouze doufají, že jejich teorie jsou bezesporné. Profesor Tomáš Kepka z pražského matfyzu k tomu s oblibou říká: „Věřím, že v matematice je spor, ale je příliš daleko, takže ho nikdy neobjevíme."

[5] *Matematika je rozumová činnost (jednotlivých) lidí a je jen ne zcela adekvátně sdělitelná jazykem.*

Miroslav Mleziva: Neklasické logiky, str. 63.

Brouwer tvrdil, že matematické objekty neexistují mimo matematikovu mysl. Chceme-li dokázat existenci objektu s určitými vlastnostmi, musíme jej *zkonstruovat* pomocí jednoduchých kroků jako sčítání a násobení. Může se stát, že neumíme zkonstruovat předmět s danou vlastností (a tak dokázat jeho existenci), ani dokázat, že neexistuje. V naší mysli se tedy nemusí nacházet ani konstrukce hledaného předmětu a z ní plynoucí poznání, že existuje, ani poznání, že neexistuje. Vidíme, že o poznatcích v matematikově mysli neplatí *zákon vyloučeného třetího* $A \vee \neg A$, který říká, že každé tvrzení je buďto pravdivé nebo nepravdivé. Jenže matematika je pro Brouwera právě studiem konstrukcí probíhajících v matematikově mysli, takže musíme odmítnout klasickou logiku.

Odmítnutí zákona vyloučeného třetího úzce souvisí s intuicionistickým pojetím disjunkce. Intuicionista považuje disjunkci $A \vee B$ za dokázanou pouze v případě, že je dokázán aspoň jeden z výroků A, B. Neintuicionistovi stačí ukázat, že za všech okolností je pravdivý alespoň jeden z výroků A, B - nemusí to ale za všech okolností být ten stejný. Díky tomu lze $A \vee \neg A$ dokázat v klasické logice, ale ne v intuicionistické (protože nelze v obecnosti dokázat jeden z výroků A, $\neg A$ - to, který je pravdivý, závisí na pravdivostní hodnotě výroku A).

Jak už bylo řečeno, považoval Brouwer za neintuitivní také dokazování sporem; tvrdí, že je založeno na zákonu vyloučeného třetího, což jsme viděli na příkladu Euklidova důkazu: tvrzení, že prvočísel je konečný počet, vede ke sporu, takže není pravdivé; v důsledku toho musí být nepravdivé, takže prvočísel není konečný (tj. je nekonečný) počet.

Vidíme, že Brouwer odmítal některé z pilířů klasické logiky; ve skutečnosti odmítal budovat matematiku pomocí jakékoli logiky, protože logika zachycuje pouze vlastnosti našeho jazyka, zatímco matematika by se měla zabývat matematickými intuicemi, které jazykem pouze vyjadřujeme. Někteří Brouwerovi následovníci ale logiku neodmítali tak důrazně jako on. Jedním z nich byl i Arend Heyting, který vytvořil intuicionistickou logiku. Heyting sice tvrdil, že *„nikdy nebude možno matematicky přesně dokázat, že daná soustava axiómů skutečně obsahuje všechny platné metody důkazu“*[6], ale jeho logika se ujala a patří dnes k nejčastěji studovaným neklasickým logikám.

Kolmogorova logika problémů

Jednou z podivných vlastností intuicionistické logiky je to, že v ní neplatí zákon vyloučeného třetího $A \vee \neg A$. Z toho plyne, že zatímco v klasické logice je pravdivý buďto daný výrok (to když je pravdivý), nebo jeho negace (to když je nepravdivý), v intuicionistické logice existuje ještě třetí možnost, totiž že není pravdivý ani A, ani $\neg A$! Výroky intuicionistické logiky tedy nesplňují definici, kterou jsme si uvedli v předchozí kapitole, totiž že výrok je tvrzení, které je vždy buďto pravdivé nebo nepravdivé.

Kolmogorov přišel s myšlenkou neuvažovat o výrocích, ale o problémech. Nadále tedy používal symboly klasické logiky, ale význam symbolu A nebyl „výrok A je pravdivý“, ale „problém A je řešitelný“. Podobně interpretoval i logické spojky:

$\neg A$	problém A je neřešitelný
$A \wedge B$	oba problémy, A i B, jsou řešitelné
$A \vee B$	A je řešitelný nebo B je řešitelný
$A \Rightarrow B$	je-li vyřešen problém A, je vyřešen i problém B
$A \Leftrightarrow B$	zkratka za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Co to ale znamená, že nějaký problém je řešitelný? V konstruktivistickém duchu to znamená „umíme zkonstruovat řešení“. Jinak řečeno, řešitelná je pouze ta úloha, ke které je znám postup, jak ji vyřešit. Konstruktivisté nepřipouštějí tvrzení, že daný problém je řešitelný, ale my to ještě neumíme. Neřešitelností problému se pak myslí to, že umíme dokázat, že žádné řešení neexistuje. Zřejmě existuje i třetí možnost: dosud daný problém vyřešit neumíme, ani nevíme, jestli skutečně nějaká řešení má. Zákon vyloučeného třetího $A \vee \neg A$ tedy neplatí.

Podívejme se, jak v této interpretaci dopadne další z důležitých postupů klasické logiky, totiž důkaz sporem. Příslušná formule zní $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$. V klasické logice jsme uvažovali následovně: kdyby bylo pravda $\neg A$, musí podle první implikace být pravda také A, ale A nemůže být současně pravda i nepravda. Je-li tedy implikace $(\neg A \Rightarrow A)$ pravdivá, nemůže být výrok $\neg A$ pravdivý, a podle zákona vyloučeného třetího $A \vee \neg A$ musí být pravdivý výrok A.

Tato formule zachycuje základní myšlenku dokazování sporem: vyjdeme od negace dokazovaného tvrzení a snažíme se ukázat, že z ní plyne nějaký zřejmý nesmysl. V úvaze z předešlého odstavce je tím

[6] Miroslav Mleziva: Neklasické logiky, str. 75.

nesmyslem formule $A \wedge \neg A$; logikové ji obvykle nazývají *spor*. Pokud z $\neg A$ plyne spor, $\neg A$ platit nemůže, a musí tedy platit A.

Implikace $(\neg A \Rightarrow A)$ v Kolmogorově interpretaci říká zhruba toto: umíme-li vyřešit problém $\neg A$, umíme vyřešit i problém A. Řešením problému $\neg A$ je ale důkaz, že problém A je neřešitelný! Kolmogorův výklad formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ tedy zní „je-li vyřešena úloha přepracovat jakýkoli důkaz, že problém A nemá řešení, na řešení problému A, umíme nalézt i samotné řešení problému A". Na první pohled je vidět, že nemáme žádný důvod považovat tuto formuli za platnou[7]: řešení úlohy přepracovat důkaz neřešitelnosti A na řešení problému A by nám k vyřešení problému A pomohlo pouze tehdy, když už bychom měli připravený důkaz její neřešitelnosti.

Do třetice se podívejme na to, jak z pohledu pana Kolmogorova dopadne klasická ekvivalence $A \Leftrightarrow \neg\neg A$. Stejně jako v klasickém případě ekvivalenci považujeme za pouhou zkratku za konjunkci dvou implikací $(A \Rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \Rightarrow A)$.

První implikace je platná i při výkladu pomocí řešitelnosti problémů: je-li A „pravdivé", známe způsob, jak nalézt řešení problému A. Ovšem tím je dokázáno, že není neřešitelný; jinými slovy, je dokázáno, že problém $\neg A$ (tedy úloha dokázat neřešitelnost problému A) je neřešitelný.

Opačná implikace klasicky platí také, ale v Kolmogorově interpretaci ne: $\neg\neg A$ říká, že umíme dokázat, že nelze dokázat neřešitelnost problému A; z toho ještě nijak neplyne, že problém A už umíme vyřešit![8]

Kripkovské modely intuicionistické logiky[9][10]

Odpověď na otázku, zda umíme nějaký problém vyřešit, se samozřejmě může měnit v čase: nejprve nevíme, zda je problém A řešitelný, není tedy pravdivé ani A, ani $\neg A$. Později se třeba dovíme, že není neřešitelný ($\neg\neg A$) a nakonec třeba objevíme řešení (A bude pravdivé). Budeme navíc předpokládat, že jsme dost chytří na to, abychom nezapomněli nic z toho, co jsme už zjistili.

Uvažujme tvrzení, která jsou pravdivá nebo nepravdivá (ale my třeba nevíme, co z toho), jejichž pravdivost se nemění v čase; tedy výrok „prší" neuvažujeme, ale výrok „17. prosince roku 1900 v 13.45 nad Národním divadlem v Praze pršelo" uvažujeme. Na každý takový výrok se můžeme dívat jako na problém určit, která z možností pravda / nepravda nastává. Způsob, jak zachytit vývoj našich znalostí v čase, se nazývá *(kripkovský) model*. Ty časové okamžiky, které nás zajímají, budou reprezentovány takzvanými *možnými světy*.[11] V každém možném světě jsou některá tvrzení pravdivá a některá nepravdivá, ale o některých ještě není rozhodnuto, neplatí zde tedy zákon vyloučeného třetího. Označení *možné světy* se používá proto, že nebudeme uvažovat jen okamžiky odpovídající skutečnému stavu našeho poznání někdy v minulosti nebo v budoucnosti, ale i možnosti, které se neuskutečnily či neuskuteční. Podívejme se na takový maličký model pro výrok „na Marsu je život" Je zvykem kreslit modely tak, že „nejstarší" možné světy jsou dole. Přibývání času (a tedy i poznatků) se označuje šipkami.

---

[7] O nějaké formuli řekneme, že je *platná*, je-li tautologií.

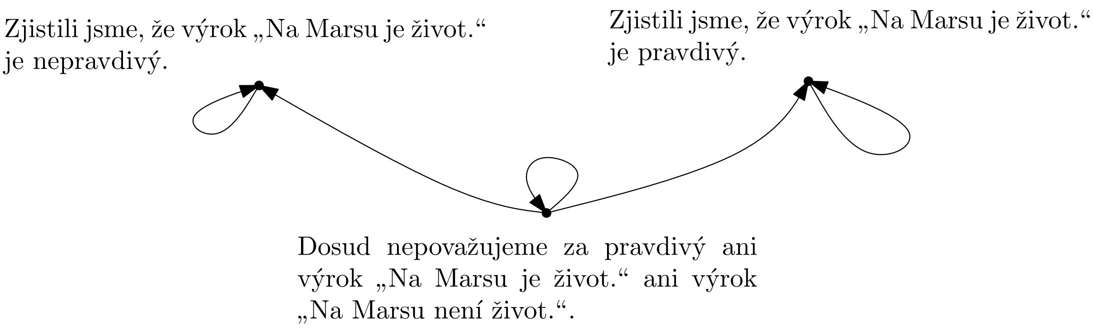
*Označení *platná formule* se v logice používá v několika významech: 1) jako synonymum pro *pravdivá* (zejména při definování splňování v modelech predikátové logiky se často používá výraz „formule je platná v modelu" místo „formule je pravdivá při dané interpretaci"); 2) jako synonymum pro *pravdivá nezávisle na ohodnocení proměnných* - to je ve výrokové logice totéž co *tautologická*. (V predikátové logice, která v jistém smyslu obsahuje výrokovou logiku, se pak slůvko *tautologická* používá pro formule, které jsou pravdivé nezávisle na ohodnocení proměnných díky své výrokově-logické struktuře, zatímco *platná* pro formule, u nichž je nutno vzít v potaz jejich predikátově-logickou strukturu a vlastnosti modelu, se kterým právě pracujeme.); 3) ve významu *důsledek teorie* neboli *pravdivá ve všech modelech dané teorie*.

[8] Z toho, že víme, že úloha zapsat číslo π s přesností na 10^{100000} desetinných míst není neřešitelná pomocí supervýkonných počítačů budoucnosti, ještě neplyne, že takové počítače máme k dispozici nebo že je umíme sestrojit.

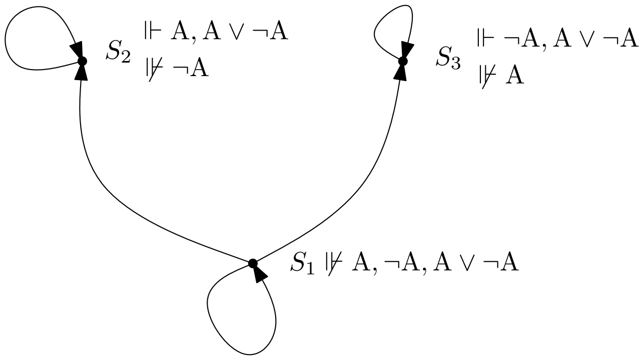
[9] Místo *kripkovský model* budeme říkat pouze *model*.

[10] Tato kapitola se snaží ukázat na příkladech, co to je model a proč vypadá tak, jak vypadá. Záleží na Tobě, zda je pro Tebe snazší přečíst si nejdřív delší a trochu rozvláčná vysvětlení bez velkého množství matematických pojmů v téhle kapitolce nebo stručnou a přehlednou, zato zcela abstraktní matematickou definici v kapitolce příští.

[11] Místo *možný svět* budeme často říkat pouze *svět*.



Podobný obrázek bychom si mohli nakreslit pro jakýkoli výrok. To, že v daném možném světě S je o daném tvrzení A známo, že je pravdivé, označíme značkou $S \Vdash$ A. To, že dané tvrzení zatím za pravdivé nepovažujeme, označíme tak, že tuto značku přeškrtneme. Uvědom si, že je rozdíl mezi $S \Vdash \neg$A a $S \nVdash$ A! Předchozí model tedy bude vypadat takto:



Uvědom si, že (přinejmenším podle intuicionistů) tvrzení tvaru A $\vee$ B můžeme prohlásit za pravdivé pouze tehdy, když už jsme ukázali pravdivost jednoho z výroků A, B. Speciálně v jednom z možných světů v minulém modelu neplatí zákon vyloučeného třetího A $\vee\ \neg$A!

Tvrzení tvaru A $\wedge$ B můžeme prohlásit za pravdivé, pokud už víme, že obě tvrzení A i B jsou pravdivá. To znamená, že $S \Vdash$ A $\wedge$ B právě, když $S \Vdash$ A a současně $S \Vdash$ B.

Důležitým předpokladem tvorby modelů je to, že tvrzení, která jsme jednou prohlásili za pravdivá, budeme za pravdivá považovat už napořád. To znamená, že pokud $S_1 \Vdash$ A a do světa S_2 vede z S_1 šipka (v matematické hatmatilce se říká, že S_2 je z S_1 *dosažitelný*), tak $S_2 \Vdash$ A. Matematici této vlastnosti modelů říkají *podmínka perzistence* a je typická právě pro modely intuicionistické logiky. Tedy ještě jednou: o ničem, co jsme jednou prohlásili za pravdivé tvrzení, nemůžeme v budoucnu zjistit, že ve skutečnosti je nepravdivé. Omyly nejsou dovoleny a žádné poznatky se nezapomínají.

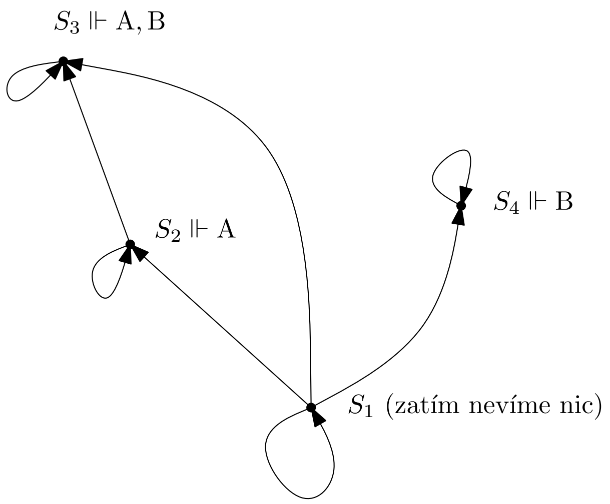
Zajímavější než podmínky pro konjunkci a disjunkci jsou ale podmínky, za kterých můžeme za pravdivou prohlásit nějakou implikaci nebo negaci. Pro účely tvorby modelů začíná budoucnost už v přítomném okamžiku, pokud tedy napíšu „nikdy v budoucnu“, mám na mysli „ nyní ani nikdy v budoucnu“. V obrázcích modelů to znázorníme tak, že z každého možného světa vede šipka zpátky do něj samotného, a v matematické řeči řekneme, že relace dosažitelnosti je *reflexivní.*

Z podmínky perzistence je vidět, že je-li pravdivé $\neg$A, nemůže se stát, že někdy v budoucnu bude pravdivé A. V takovém budoucím okamžiku by totiž bylo pravda A $\wedge\ \neg$A, což ale v žádném rozumném světě nastat nemůže.

Tuto úvahu lze i obrátit: Negaci $\neg$A prohlásíme za pravdivou, kdykoli víme, že nikdy v budoucnu neprohlásíme za pravdivou formuli A. To znamená, že pokud v žádném možném světě dosažitelném z S není pravdivé A, můžeme psát $S \Vdash \neg$A.

Intuitivně tušíme, že by implikace A $\Rightarrow$ B měla vypovídat něco o příčinném vztahu mezi A a B. Proto se i podmínka pro pravdivost implikace A $\Rightarrow$ B odvolává na pravdivost v (možných) budoucích okamžicích: pokud v každém budoucím okamžiku bude tato implikace pravdivá klasicky, pak v daném okamžiku je pravdivá i intuicionisticky. Jinak řečeno, pokud z S není dosažitelný žádný možný svět, ve kterém A je pravda a B nikoli (tedy ve kterém je implikace A $\Rightarrow$ B nepravdivá ve smyslu klasické logiky), tak $S \Vdash$ A $\Rightarrow$ B.

Tohle vypadá trochu složitě, ale hnedka si to ukážeme na příkladu:



formule	je pravdivá v možných světech	
A	S_2, S_3	
B	S_3, S_4	
¬A	S_4	ze všech ostatních světů se lze po šipkách dostat někam, kde je pravda A
¬B	**nikde!**	odevšad se lze po šipkách dostat někam, kde je pravda B
A ⇒ B	S_3, S_4	z S_1 i S_2 se lze dostat do S_2, kde je pravda A, ale není pravda B
¬¬A	S_2, S_3	z S_1 i S_4 se lze dostat do S_4, kde je pravda ¬A
¬¬B	**všude!**	odnikud se nelze po šipkách dostat někam, kde je pravda ¬B
A ∨ ¬A	S_2, S_3, S_4	
B ∨ ¬B	S_3, S_4	**S_1 i S_2 je protipříkladem na zákon vyloučeného třetího**
¬¬A ⇒ A	S_1, S_2, S_3, S_4	všude, kde je pravda ¬¬A, je pravda i A
¬¬B ⇒ B	S_3, S_4	z S_1 i S_2 se lze dostat do S_2, kde je pravda ¬¬B, ale není pravda B

Cvičení 1. Někteří intuicionisté považují formuli ¬A za zkratku za formuli A ⇒ ⊥, kde ⊥ označuje spor, tedy jakoukoli formuli tvaru B ∧ ¬B. Ušetří si tím práci s definováním, kdy je pravdivá formule ¬A. Spor nikdy pravdivý není. Ukaž, že takto definovaná negace je pravdivá právě v těch možných světech, ve kterých je pravdivá na základě podmínky popsané v této kapitole.

Cvičení 2. Pravděpodobně Tě to překvapí, ale Brouwerovi nevadilo vyvracení sporem - pokud nějaké tvrzení vede ke sporu, je jistě nepravdivé, a tedy je pravdivá jeho negace. Znamená to, že Brouwer odmítá formuli (¬A ⇒ A) ⇒ A popisující dokazování sporem, ale přijímá formuli (A ⇒ ¬A) ⇒ ¬A. Vysvětli, jak to souvisí s pojetím negace popsaném ve cvičení 1.

V tuto chvíli už tedy tušíš, že model je způsob, jak matematicky zachytit přibývání poznatků a že v něm jsou zachyceny i ty situace, které ve skutečnosti nenastanou, ale třeba by nastat mohly. V následující kapitole si ukážeme, jak se tento typ modelů definuje v řeči matematiky.

* Matematická definice kripkovských modelů[12]

Relace R na množině W je nějaký vztah, do kterého vstupují vždy dva prvky množiny W.[13] Například vztah „mít rád“ je relace na množině lidí.[14] Dalšími příklady relací jsou vztahy „být otcem“, „být manželem“, „být partnerem“, „být sourozencem“, „chodit do stejné třídy“.

To, že prvky a a b jsou ve vztahu R můžeme značit různými způsoby: $(a, b) \in R$, $R(a, b)$ nebo aRb. Příkladem druhého způsobu zápisu jsou relace „být menší nebo roven než“ a „být větší než“, které znáš ze školy: $1 \leq 3, 3 > 1$. Jiným příkladem téhož zápisu je tvorba jednoduchých vět: maminka má ráda děťátko, paní učitelka má ráda poslušné dítě.

[12]Místo *kripkovský model* budeme většinou říkat pouze *model*.

[13]Matematická definice: *Relace* R na množině W je množina uspořádaných dvojic $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$, kde $a_1, a_2, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ jsou prvky množiny W.

[14]mít rád = {(Pepíček, Mařenka), (maminka, děťátko), (paní učitelka, poslušné dítě), (Mařenka, Honzík), ... }.

V případě žáků jedné školy je každý žák sám se sebou v relaci „chodit do stejné třídy“; o relaci, která má vlastnost, že každý prvek množiny W (také přezdívané *nosná množina*) je sám se sebou v relaci, řekneme, že je *reflexivní*. Stručně to lze zapsat $\forall x \in W \quad R(x,x)$.

Při tvorbě modelů se budeme nejčastěji setkávat s relací dosažitelnosti, která odpovídá vlastnosti „být později než“.[15] Pro tu platí, že je-li okamžik Q pozdější než okamžik P a ten je zas pozdější než okamžik O, je Q pozdější než O. Matematicky to zapíšeme $(R(O,P) \wedge R(P,Q)) \Rightarrow R(O,Q)$ a řekneme, že R je *tranzitivní relace.*

Kripkovský model se skládá z neprázdné *množiny možných světů* W s reflexivní a tranzitivní *relací dosažitelnosti* $\leq$.[16] O každém možném světě S je určeno, které výroky A v něm jsou pravdivé (což značíme $S \Vdash \mathrm{A}$) a které pravdivé nejsou (což značíme $S \nVdash \mathrm{A}$). Toto určení ale není libovolné, musí totiž splňovat následující podmínky:[17]

• $S_1 \Vdash \mathrm{A}$	potom	jestliže $S_1 \leq S_2$, tak $S_2 \Vdash \mathrm{A}$ (*podmínka perzistence*)
• $S \Vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	právě tehdy, když	$S \Vdash \mathrm{A}$ a $S \Vdash \mathrm{B}$
• $S \Vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	právě tehdy, když	$S \Vdash \mathrm{A}$ nebo $S \Vdash \mathrm{B}$
• $S_1 \Vdash \neg\mathrm{A}$	právě tehdy, když	jestliže $S_1 \leq S_2$, tak $S_2 \nVdash \mathrm{A}$
• $S_1 \Vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$	právě tehdy, když	jestliže $S_1 \leq S_2$ a $S_2 \Vdash \mathrm{A}$, tak $S_2 \Vdash \mathrm{B}$
• $S \Vdash \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$	právě tehdy, když	$S \Vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ a $S \Vdash \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$.

$S \Vdash \mathrm{A}$ čteme „v možném světě S je formule A pravdivá“ nebo „v možném světě S je splněna formule A“. Není-li v možném světě S formule A pravdivá, píšeme $S \nVdash \mathrm{A}$ a říkáme „v možném světě S není splněna formule A“. Pozor - to není totéž jako „v možném světě S je formule A nepravdivá“ - $S \Vdash \neg\mathrm{A}$!

Cvičení 3. Najdi model a v něm možný svět S a formuli A takové, že $S \nVdash \mathrm{A}$, ale při tom není pravda, že $S \Vdash \neg\mathrm{A}$. Ukaž, že pokud $T \Vdash \neg\mathrm{A}$, tak také $T \nVdash \mathrm{A}$.

Budeme-li prvky W kreslit jako tečky v rovině a $S \leq R$ označíme šipkou ze světa S do světa R, znamená reflexivita a tranzitivita relace $\leq$ to, že z každého světa musí vést šipka zpátky do něj a také do všech světů, do kterých se lze dostat po šipkách.

Intuicionistické tautologie a kripkovské protipříklady

Formuli, která je splněna ve všech možných světech všech modelů, nazveme *intuicionistická tautologie.*

Pokud nějaká formule F není intuicionistickou tautologií, existuje nějaký model a v něm nějaký možný svět, ve kterém dotyčná formule není splněna. Tento model nazveme *(kripkovský) protipříklad pro formuli* F.

Ve dvou předcházejících oddílech jsme si ukázali protipříklady pro formule tvaru $\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{A}$ a také pro formule tvaru $\neg\neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$ (pouze jsme ji napsali jako $\neg\neg\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B}$). Ukažme si ještě na příkladu formule $(\neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{A}$[18], jak se protipříklady vytváří. Vždycky můžeme začít tím, že si nakreslíme možný svět, ve kterém zadaná formule není splněna:[19]

$$S \nVdash (\neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{A}$$

Podle definice modelu ovšem implikace neplatí v možném světě S jen tehdy, je-li z něj dosažitelný nějaký svět R, ve kterém je její první člen pravdivý a její druhý člen není pravdivý (tedy kde tato implikace neplatí ani klasicky).

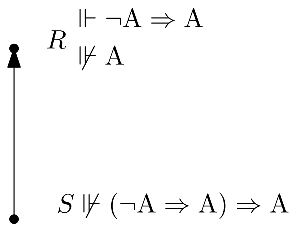
[15] Přesněji řečeno, relace dosažitelnosti odpovídá vlastnosti „být totožný s nebo moci nastat později než“.

[16] Formálně vzato patří k modelu ještě *valuace*, která každému možnému světu určuje, které atomární formule, tedy výroky, které neobsahují logické spojky, v něm jsou pravdivé.

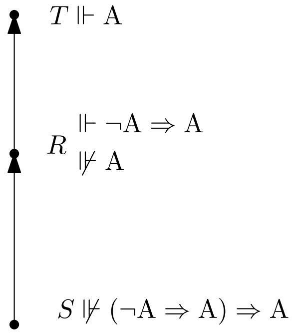
[17] Vyjmenované podmínky musí být splněny ve **všech** možných světech $S, S_1, S_2 \in W$ a musí platit pro všechny formule A, B!

[18] To je formule popisující dokazování sporem, o které byla řeč již v oddíle o Kolmogorově interpretaci formulí jako výroků o řešitelnosti problémů.

[19] Pozor! Pro přehlednost vynecháváme z obrázku šipku ze světa S zpátky do něj, ale vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze reflexivní modely, měla by tam být. Podobně si i u všech později přidaných světů domysli šipky zpět do nich a také šipky plynoucí z tranzitivity!



Vypadá to nadějně: zdá se, že z R není (po šipkách) dosažitelný žádný možný svět, kde je splněno $\neg$A, takže implikace $\neg$A $\Rightarrow$ A je splněna triviálně. Zbývá ověřit, že všechny ostatní podmínky z definice modelu jsou splněny... Jenže pozor! Z R není dosažitelný ani žádný svět, kde je splněno A, takže v R je splněno $\neg$A! Přeci jen je z R dosažitelný nějaký svět, kde $\neg$A je pravdivé, takže musíme zkontrolovat pravdivost implikace $\neg$A $\Rightarrow$ A. Podle té by ve světě R muselo být pravdivé také A, a to by znamenalo, že tam je pravda A a $\neg$A současně. To ale není možné vzhledem k podmínce pro spojku $\neg$ z definice modelu. Znamená to snad, že svět R do našeho obrázku nemůžeme přikreslit? Ne; problémů se zbavíme tak, že přikreslíme svět T dosažitelný z R, kde bude splněno A (tím v R přestane být splněno $\neg$A a tudíž budeme moci použít úvahu z předminulého odstavce):



Cvičení 4. **4. soutěžní úloha**

Zkontroluj, že ve všech možných světech našeho modelu jsou splněny podmínky z definice modelu. Tím ukážeš, že poslední nakreslený obrázek je modelem intuicionistické logiky a je tedy hledaným protipříkladem.

Cvičení 5.[20] Sestroj protipříklad k následující formuli:

$$((\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee \neg A)) \vee (\neg\neg A \Rightarrow A).$$

Cvičení 6. **a)** Ukaž, že pokud z nějakého světa S není dosažitelný žádný jiný možný svět, tak v něm platí všechny klasické tautologie.

b) Ukaž, že existuje-li k nějaké formuli protipříklad, tak existuje i protipříklad s antisymetrickou relací dosažitelnosti, tedy takový, že je-li $S \leq T$ a $S \neq T$, tak **není** $T \leq S$.

c) Ukaž, že je-li A klasická tautologie, je $\neg\neg$A intuicionistická tautologie.[21]

* Lorenzenova dialogická hra

Vzpomeň si na Hintikkovu hru z minulého dílu. Ve stručnosti zopakujeme a lehce rozšíříme pravidla. Zatímco minule jsme ji hráli s konkrétními výroky v přirozeném jazyce, tentokrát budeme hrát s formulemi. Minule byli oponent i proponent vševědoucí - o každém výroku věděli, zda je pravdivý či nepravdivý. Tentokrát už nic takového předpokládat nebudeme.

Role:

(P) *proponent* se snaží obhájit platnost[22] nějaké formule
(O) *oponent* se snaží dostat ho do úzkých

[20] Vítězslav Švejdar: Cvičení ke kurzu Logika II, část III, cvičení 4.
[21] Můžeš použít větu, která říká, že existuje-li k nějaké formuli protipříklad, pak existuje i konečný protipříklad.
[22] Proponent tedy chce ukázat, že daná formule je pravdivá nezávisle na tom, zda jsou pravdivé nejjednodušší výroky, z nichž se skládá.

Průběh hry:

Proponent a oponent se pravidelně střídají v tazích; možné tahy jsou dvou typů: *napadení* a *obrana*. Na každé napadení lze reagovat nejvýše jednou obranou, navíc daný tah proponenta může být napaden nejvýše jednou.

(♠) Odpovídat se může pouze na poslední nezodpovězené napadení - jinak řečeno, pokud mezitím došlo k jinému napadení, nemohu si z ničeho nic vzpomenout na něco, co by bylo obranou vůči nějakému staršímu napadení. (Nelekej se, záhy si použití tohoto podivného pravidla ukážeme na příkladech.)

(♣) Proponent může tvrdit atomickou formuli (tedy takovou, která se neskládá z jednodušších výroků pospojovaných výrokovými spojkami)[23] až poté, co ji použil oponent.

Následující tabulka ukazuje, jak vypadají napadení formulí různých tvarů a jak se proti takovým napadením bránit:

	napadení	**obrana na napadení**
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	určí buďto A, nebo B	tvrdí to, co mu protihráč určil
$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	jedno kolo nehraje	vybere si a tvrdí buďto A, nebo B
$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	tvrdí A	tvrdí B nebo napadne A
$\neg\mathbf{A}$	tvrdí A	napadne A

Hra vlastně probíhá tak, že oponent záměrně popisuje situace, ve kterých by proponentova formule mohla být nepravdivá. Každému jeho napadení lze rozumět jako rýpavému „A co kdyby…?“ Proponent se snaží nenechat se zmást: každou jeho obranu lze číst jako „V tom případě by mé tvrzení bylo pravdivé, protože…“

Všimni si dobře pravidel pro napadení a obranu implikace. Vzpomeň si, že v případě, že A je nepravdivé, nelze pravdivost implikace napadnout. Chce-li oponent napadnout implikaci $A \Rightarrow B$, záměrně tedy nastolí situaci, v níž je A považováno za pravdivé. Chce-li nyní proponent implikaci obhájit, musí ukázat pravdivost B.

Dále si uvědom, že pravidlo pro negaci vlastně vede k prohození rolí proponenta a oponenta stejně jako v Hintikkově hře: tvrdí-li proponent $\neg A$, napadne to oponent tím, že tvrdí A. Nyní se ovšem původní proponent dostává do role oponenta - od této chvíle se totiž bude snažit svého protihráče nachytat na švestkách a ukázat mu, že své tvrzení nedokáže obhájit.

Konec hry: Hráč, který je na tahu, ale nemůže nic dělat (nemá co napadnout ani před čím se bránit), prohrává.

Jako první příklad si ukážeme sehrávku, v níž proponent začne formulí $A \vee \neg A$.

1. tah	P	$A \vee \neg A$		Sluníčko svítí nebo nesvítí.
2. tah	O		napadl 1. tah	Co z toho?
3. tah	P	$\neg A$	obrana proti 2	To, že svítí mi stejně neuvěříš, tak zkusím tvrdit, že nesvítí.
4. tah	O	A	napadl 3. tah	A co kdyby svítilo?

Proponent by teď velmi rád udělal následující tah:

5. tah	P	A	obrana proti 2	Řekl bych, že jsem se spletl, když jsem řekl, že nesvítí. Ale měl jsem pravdu, že buďto svítí, nebo ne.
6. tah	O			nemůže nic dělat, prohrál

V tomto provedení 5. tahu proponentovi brání pravidlo (♠) - oponent by se stejně určitě bránil, že proponent tvrdí každou chvíli něco jiného podle toho, jak se mu to hodí. Podle výše popsaných pravidel nemůže tedy proponent udělat nic: nemá, co by napadl (atomické formule napadnout nelze) a nemá možnost se bránit proti napadení ze 3. tahu.

[23] V analogii mezi logickými formulemi a obrázky znázorňujícími strukturu souvětí, které znáš z hodin češtiny, odpovídá atomická formule písmenku, které symbolizuje větu jednoduchou.

Z tohoto příkladu je zřejmé určité zdůvodnění podivného pravidla (♠): když něco tvrdíš, musíš vědět, jak to ubránit, jinak to netvrď. Žádné takové, že si vzpomeneš až za chvíli - buďto to víš (a v tom případě se budeš bránit hnedka), nebo svou příležitost promarníš, ale pak si nestěžuj.

Právě zde tkví rozdíl mezi Lorenzovou a Hintikkovou hrou: Hintikkovi hráči jsou vševědoucí, a tak by si proponent dokázal snadno vybrat, zda právě svítí sluníčko nebo ne. Oponentovi by nezbylo, než s ním souhlasit. Naproti tomu Lorenzenovi hráči sedí zavření v kinosále, kde je zhasnuto a neběží žádný film; o tom, co se děje venku, nevědí nic. To umožňuje oponentovi přispěchat vždycky s nějakým šťouravým „A co kdyby...?“

Představa hráčů zavřených v mítnosti bez oken nám pomůže pochopit také pravidlo (♣). To vlastně říká, že při dokazování nějakého tvrzení má smysl používat pouze argumenty, s nimiž protihráč souhlasí - nemělo by smysl stále tvrdohlavě opakovat „venku svítí sluníčko a basta!“, pokud by na to oponent odmítal přistoupit. Je třeba ho o tom napřed přesvědčit.

Ukažme si, jak bude vypadat hra, v níž proponent začne formulí $\neg\neg p \Rightarrow p$, kde p je atomická formule (nedá se dál dělit na jednodušší formule, tedy neobsahuje žádné spojky):

1. tah	P	$\neg\neg p \Rightarrow p$	
2. tah	O	$\neg\neg p$	napadl 1. tah
3. tah	P	$\neg p$	napadl 2. tah
4. tah	O	p	napadl 3. tah

Proponent by nyní rád také tvrdil p, čímž by se ubránil napadení v 1. tahu. Jenže mezitím už došlo k jiným napadením a pravidlo (♠) mu tedy nedovoluje tvrdit p. Při tom nemohl tvrdit p hned po prvním tahu kvůli pravidlu (♣).

Vidíme, že v Lorenzenově hře nelze vyhrát s formulí $\neg\neg p \Rightarrow p$ ani s formulí $\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{A}$. To není náhoda: v této hře lze vyhrát pouze a právě s těmi formulemi, které jsou tautologiemi intuicionistické logiky. Kdyby neplatilo pravidlo (♠), ale mohlo by se napadat i obhajovat zcela libovolně, mohl by proponent vyhrát se všemi formulemi, které platí v klasické logice.

Cvičení 7.

a) Ukaž, že proponent, který začne s formulí $\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B})$, vyhraje.

b) Vysvětlli, proč tato formule platí ve všech modelech a proč je pravdivá v Kolmogorově interpretaci.

Hilbertovký kalkul intuicionistické logiky

První práce, ve které Brouwer popisuje intuicionistickou filozofii, pochází z roku 1907, ovšem širší veřejnost s ní začal seznamovat až po roce 1912, kdy se stal profesorem. Ve 20. letech dospěl Hilbert k závěru, že to Brouwer opravdu myslí vážně, a začal intuicionistickou filozofii považovat za hrozbu pro budoucí vývoj matematiky. Právem upozorňoval na to, že intuicionisté se snaží *„ustavit matematiku tak, že shodí přes palubu vše, co se jim nehodí, a uvalí na to blokádu.“* Dále se domníval, že *„cílem je rozložit naši vědeckou disciplínu a riskovat ztrátu našich nejcennějších objevů.“*[24] Přeci jen, intuicionistická matematika je ochuzena o některé z nejdůležitějších důkazových prostředků používaných od starověku.

V té době se pracovalo s tabulkami pro spojky klasické logiky, ale po prvotních neúspěšných pokusech vytvořit vícehodnotové tabulky pro intuicionistickou logiku Kurt Gödel roku 1932 ukázal, že neexistuje konečněhodnotová tabulka, ve které by tautologiemi byly právě ty formule, které konstruktivisté uznávali. Kripkovská sémantika vznikla až v 60. letech.

Ve snaze formálněji zachytit a popsat, které matematické postupy jsou pro intuicionisty přípustné a které ne, byli tedy logikové zpočátku odkázáni na logické kalkuly. To, jak se takové kalkuly tvoří a jak se s nimi pracuje, důkladně ukázali Russel a Whitehead ve svém díle Principia Mathematica.

Ukážeme si jeden z mnoha hilbertovských kalkulů[25] pro intuicionistickou logiku. Axiomy lze zvolit mnoha různými způsoby - zde si ukážeme způsob zajímavý tím, že přidáme-li k těmto axiomům ještě jeden jediný další axiom, dostaneme hilbertovský kalkul pro klasickou logiku (ovšem s trochu jinými axiomy, než které jsme vyjmenovali posledně).

---

[24] John D. Barrow: Pí na nebesích, str. 212.

[25] Označení *hilbertovský kalkul* se používá pro kalkuly, ve kterých se pracuje s jednotlivými formulemi. Tyto kalkuly obvykle obsahují pravidlo modus ponens a pravidlo o dosazování. Existují i jiné typy kalkulů.

Při formulaci axiomů pro klasickou logiku jsme vycházeli z toho, že každou formuli lze ekvivalentně zapsat pouze pomocí implikace a negace. Stačilo tedy napsat axiomy obsahující tyto dvě spojky. Kdybychom chtěli dokázat nějakou formuli obsahující i jiné spojky, našli bychom nejprve ekvivalentní formuli pouze se spojkami $\Rightarrow$ a $\neg$ a tu pak dokázali v kalkulu.

V intuicionistické logice něco takového udělat nemůžeme, protože nelze vybrat několik spojek, pomocí kterých by šlo ekvivalentně napsat všechny formule. Říkáme, že spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\neg$ jsou v intuicionistické logice *nezávislé.* Pouze spojce $\Leftrightarrow$ rozumíme jako zkratce za konjunkci dvou implikací a proto si nebudeme uvádět axiomy, které ji obsahují.

Axiomy obsahující implikaci a negaci jsou čtyři:

(Ai1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(Ai2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(Ai3) $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
(Ai4) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

První dva z těchto axiomů jsou totožné s axiomy (A1) a (A2) z kalkulu klasické výrokové logiky. Ta obsahovala ještě axiom

(A3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$,

který jsme nahradili podobně vypadajícím axiomem (Ai3). Jenže se ukazuje, že s pomocí axiomu (Ai3) lze dokázat mnohem méně formulí - dokonce ani formuli (Ai4), kterou bychom s pomocí axiomu (A3) snadno dokázali.

Slibovaný jediný axiom, který bychom museli přidat k axiomům (Ai1), ... (Ai4), abychom mohli odvodit všechny tautologie klasické logiky, také obsahuje pouze spojky $\Rightarrow$ a $\neg$:

(A*) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A)$

To je formule pro ***důkaz sporem***, jen napsaná o něco obecněji, než jsme to udělali v předchozích částech této kapitoly: když za B dosadíme A, dostaneme

(♡) $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$.

Ovšem $(\neg A \Rightarrow \neg A)$ je v kalkulu intuicionistické logiky dokazatelná - vznikne totiž substitucí $\neg A$ za p do $p \Rightarrow p$, o které jsme si v minulé kapitole ukázali, že je dokazatelná pouze pomocí axiomů (A1) a (A2) - tedy (Ai1) a (Ai2). Díky tomu formule (♡) implikuje formuli $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$, kterou jsme nazvali ***důkaz sporem.***

Cvičení 8. Ukaž podrobně, jak lze pomocí axiomů (Ai1), ... (Ai4), formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$ a pravidla modus ponens dokázat formuli $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Axiomy pro ostatní spojky se shodují s příslušnými axiomy v kalkulu klasické logiky:

(A∧1)	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
(A∧1')	$(A \wedge B) \Rightarrow B$
(A∧2)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$
(A∨1)	$A \Rightarrow (A \vee B)$
(A∨1')	$B \Rightarrow (A \vee B)$
(A∨2)	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
(A⇔1)	$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
(A⇔1')	$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
(A⇔2)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A \Leftrightarrow B))$

Stejně jako v klasické logice do kalkulu patří také pravidlo modus ponens:

Pokud jsi už na výstup napsal formuli A a také formuli $A \Rightarrow B$, můžeš tam napsat také formuli B.

Také pro intuicionistickou logiku platí věta o korektnosti a věta o úplnosti:

Věta 9. (O korektnosti a o úplnosti) *Kalkul intuicionistické logiky je korektní a úplný vzhledem ke kripkovským modelům intuicionistické logiky, to znamená, že v něm lze dokázat všechny intuicionistické tautologie* (úplnost) *a nic víc* (korektnost).

Další cvičení

Cvičení 10. **5. soutěžní úloha**

Vysvětli, proč je následující důkaz pro intuicionisty nepřijatelný:

Věta: Existuje dvojice čísel x, y, která nejsou racionální, ale x^y je racionální.

Důkaz: Uvažujme číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. V případě, že toto číslo je racionální, jsme hotovi ($x = y = \sqrt{2}$); v opačném případě uvažujme čísla $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$. Pak je $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2$.

Ve svých úvahách předpokládej, že intuicionisté přijímají známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Cvičení 11.[26] Rozhodni, zda následující formule jsou intuicionisticky tautologické. Pokud ne, sestroj protipříklad. Pokud ano, dokaž je v kalkulu intuicionistické logiky nebo jinak zdůvodni, že protipříklad sestrojit nelze. Uvědom si (ukaž tabulkou), že všechny tyto formule jsou z hlediska klasické logiky tautologiemi.

a) $\neg A \vee \neg B \vee (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
b) $\neg\neg\neg\neg B \Rightarrow B$
c) $(\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$
d) $(A \vee \neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

Cvičení 12. Arend Heyting navrhl následující tříhodnotové tabulky pro intuicionistickou logiku:[27]

A	¬A
1	0
x	x
0	1

V následujících tabulkách je v levém sloupečku hodnota A a v prvním řádku je hodnota B:

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	0
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	0
0	0	0	1

V této interpretaci hodnota 1 značí „pravda“, x značí „nevíme“ a 0 značí „nepravda“.

a) *korektnost hilbertovského kalkulu vůči těmto tabulkám*

Ukaž, že všechny axiomy intuicionistické logiky mají v této interpretaci hodnotu 1. Dále ukaž, že pravidlo modus ponens je vzhledem k těmto tabulkám korektní - že s jeho pomocí ze dvou formulí s hodnotou 1 odvodíme opět formuli s hodnotou 1.

b) *tyto tabulky nevystihují sémantiku intuicionistické logiky* **6. soutěžní úloha**

Ukaž, že také formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ má podle těchto tabulek hodnotu 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A, B). (2 body)

Najdi protipříklad pro tuto formuli. (3 body)

[26] Vítězslav Švejdar: Cvičení ke kurzu Logika II, část III, cvičení 3.
[27] Miroslav Mleziva: Neklasické logiky, str. 91.

Směsice poznámek a citátů

Důležitost důkazu sporem v matematice

Z předchozího výkladu by se mohlo zdát, že matematikové by důkaz sporem měli považovat za jakousi berličku, kterou je radno používat jen v nejnutnějších případech (pokud vůbec). Ve skutečnosti se názory různí - jen velmi málo matematiků důkaz sporem odmítá úplně, ale mnozí skutečně dávají přednost konstruktivním důkazům existence (tedy důkazům, v nichž je nalezen objekt s požadovanými vlastnostmi) před nekonstruktivními (tedy důkazy sporem). Najdou se i matematikové, kteří dokazování sporem obdivují a považují je za velmi elegantní. Citujme alespoň G. H. Hardyho, který krásu matematického důkazu přirovnává ke kráse dobře zahrané šachové partie:

Důkaz je proveden metodou reductio ad absurdum[28] a reductio ad absurdum*, které Eukleidés tak miloval, je jednou z nejlepších zbraní matematika. Je to mnohem vybranější gambit než jakýkoli gambit šachový: šachista může jako oběť nabídnout pěšce či figuru, ale matematik nabízí* hru.

G. H. Hardy: Obrana matematikova, str. 86.

O způsobu existence matematických objektů

Často jsem použil přídavné jméno „skutečný“, a to ve smyslu, v jakém ho běžně užíváme v rozhovoru. Mluvil jsem o „skutečné matematice“ a o „skutečných matematicích“ podobně, jako kdybych mluvil o „skutečné poezii“ a „skutečných básnících“, a nadále v tom budu pokračovat. Budu ale také používat slova „skutečnost“, a to ve dvou různých významech.

Především budu mluvit o „fyzikální skutečnosti“, a tady budu znovu používat slova skutečnost v běžném významu. Fyzikální skutečností míním hmotný svět, svět dne a noci, zemětřesení a zatmění, svět, který se fyzikální věda snaží popsat.

Těžko lze uvěřit, že by čtenář měl až dosud potíže s mým jazykem, ale nyní se dostávám na tenčí led. Pro mne, a domnívám se, že pro většinu matematiků, existuje jiná skutečnost, kterou budu nazývat „matematickou skutečností“. O povaze matematické skutečnosti není mezi matematiky ani mezi filozofy žádné shody. Někteří mají za to, že je „vnitřní, duševní“ a že si ji v jistém smyslu sami konstruujeme, jiní zase, že je vnější a na nás nezávislá. Člověk, jenž by dokázal přesvědčivě popsat matematickou skutečnost, by vyřešil velmi mnoho nejobtížnějších problémů metafyziky. Kdyby do svého popisu zahrnul i fyzikální skutečnost, vyřešil by je všechny.

Nerad bych se zde pouštěl do debaty o kterékoli z těchto otázek, i kdybych k tomu byl oprávněn, nicméně dogmaticky vyjádřím svůj vlastní postoj, abych se vyhnul drobným nedorozuměním. Věřím, že matematická skutečnost leží mimo nás, že naším úkolem je objevovat či pozorovat *ji a že věty, které dokazujeme a které nabubřele označujeme jako své „výtvory“, jsou jednoduše našimi záznamy našich pozorování. Tento názor byl a je zastáván v té či oné formě mnoha filozofy s nejvyšší reputací, Platónem počínaje, a já použiji jazyka, který je mi přirozený.*

G. H. Hardy: Obrana matematikova, str. 111-112.

Intuicionistická logika v teologii

<u>Príklad použitia intuicionistickej logiky v teológii</u> môžeme vidieť napr. v jej aplikácii na tajomstvo, čo môžeme vedieť o Bohu len prostredníctvom viery. Pre logickú analýzu takýchto výrokov sa najlepšie hodí práve intuicionistická logika.

<u>Príklad:</u>

Vezmime si výrok Tomáša Akvinského (...) v slovenskom preklade: „Ako totiž to, čo sa týka viery, nemožno dokázať, tak aj o ich kontráriách nemožno dôkazom ukázať, že sú nepravdivé.“

Túto tézu možno vyjadriť nasledovne: (...) „Nikdo nemôže dokázať zavrhnutie jestvovania tajomstiev.“

Ak symbolizujeme výrok „tajomstvo jestvuje“ ako A (jestvuje je v znení Tomáša Akvinského zamlčané) a odhliadneme od modality, môžeme tento výrok formalizovať: $\neg\neg A$, a čítať: Vyvrátenia A (že tajomstvo jestvuje) je vyvrátiteľné. Tento výrok však nemožno zmeniť na kladnú formu: „A je dokázateľné“, pretože to nezodpovedá jeho zmyslu. A práve tento významový rozdiel postihuje intuicionistická logika, kde zákon dvojitej negácie platí iba v jednom smere: $A \Rightarrow \neg\neg A$, ale nie v opačnom: $\neg\neg A \Rightarrow A$.

Podobne sa v nej dajú lepšie vysvetliť aj niektoré teologické problémy, ako problém spásnej vôli Boha a možnosti zatratenia a problém milosti a slobodnej vôli človeka.

Peter Volek: Úvod do logiky a teórie vedy, str. 126-127.

---

[28] *Reductio ad absurdum* je latinský název pro důkaz sporem: dovedení k nesmyslnému.

Různá pojetí pravdy

Pojetí pravdivosti jako čehosi, co je na člověku více méně nezávislé, či přinejmenším do značné míry mimo jeho vliv a poznávací schopnosti, bylo z logicko-filozofických pozic napadeno na počátku minulého století, a to jednak ze strany vídeňských pozitivistů, kladoucích rovnítko mezi pravdivost a empirickou verifikovatelnost, *jednak ze strany rodícího se (matematického) konstruktivismu, který za pravdivým tvrzením chtěl vidět efektiní důkaz (konstrukci), jinak se o jeho „pravdivosti" vůbec odmítal bavit. Toto ztotožnění pravdivosti s efektivním zdůvodněním, důkazem, stojí také bezpochyby za Brouwerovým odmítnutím Hilbertova optimistického vyjádření o řešitelnosti každého matematického problému jakožto případu intuicionismem neakceptovatelného zákona* vyloučeného třetího.

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 22.

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Řešení cvičení 4

K obrázku je třeba přikreslit smyčky u každého světa a šipku z S do T; pak bude reflexivní (z každého světa je dosažitelný on sám) i tranzitivní (z S se lze dostat do R a z R do T, takže z S se lze dostat do T i přímo).

K jednotlivým světům doplníme, které jednoduché formule tam jsou a nejsou splněné podle definice. Konkrétně nás budou zajímat podformule formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ a jejich negace, tedy formule $A, \neg A, \neg A \Rightarrow A, \neg(\neg A \Rightarrow A), (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Formule A je splněná v T a v R splněná není; díky podmínce perzistence není splněná ani v S.

Formule $\neg A$ není splěná v žádném z možných světů, protože z každého je dosažitelný svět T, kde je splněná A.

Formule $\neg A \Rightarrow A$ je splněná ve všech světech, protože v žádném není splněný její předpoklad $\neg A$. (A tedy ve všech světech, které jsou dosažitelné z nějakého pevně zvoleného světa, je implikace $\neg A \Rightarrow A$ klasicky pravdivá.)

Formule $\neg(\neg A \Rightarrow A)$ není splněná v žádném světě, protože z každého světa je dosažitelný svět T, o kterém víme, že $T \Vdash \neg A \Rightarrow A$.

Formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ je splněná ve světě T (je zde splněn předpoklad i závěr), ale není splněná ve světě R (předpoklad $\neg A \Rightarrow A$ zde splněný je, ale závěr ne) a tedy ani ve světě S (z toho je dosažitelný svět R, kde předpoklad je splněný a závěr ne).

	A	$\neg$A	$\neg A \Rightarrow A$	$\neg(\neg A \Rightarrow A)$	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
T	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$
R	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$
S	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$

Vidíme, že už samotný model se světy R a T by byl protipříkladem pro zadanou formuli; ve skutečnosti se světy S a R neliší platností žádné formule. Když jsme protipříklad vytvářeli, nepomyleli jsme totiž na to, že oním světem R dosažitelným z S, ve kterém platí $\neg A \Rightarrow A$, ale neplatí A, by mohl být svět S sám!

Nyní musíme ověřit platnost všech podmínek z definice.

perzistence. Ze světa T je dosažitelný pouze svět T, takže podmínka perzistence je zde splněna pro všechny formule.

Ve světech R a S se podmínka perzistence vztahuje pouze na jedinou formuli, která je v těchto světech pravdivá, totiž formuli $\neg A \Rightarrow A$. Ta je pravdivá ve všech dosažitelných světech, takže pomínka perzistence je splněna.

spojky. Podmínky pro jednotlivé spojky jsou splněné, což jsme ověřili při vyplňování tabulky.

Řešení části a) cvičení 6

Pokud z daného světa S není dosažitelný žádný jiný možný svět, shodují se podmínky pro pravdivost implikace a negace (a tedy všech formulí vůbec) s podmínkami klasické logiky.

Podrobnější důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu spojek v nějaké formuli. Dokážeme, že pro každou formuli F platí, že je pravdivá právě tehdy, když by ve světě S byla pravdivá klasicky.

1° Pokud F neobsahuje žádné spojky, je to atomická formule a její hodnota je stejná intuicionisticky i klasicky.

2° Je-li F konjunkcí $A \wedge B$ nebo disjunkcí $A \vee B$ a hodnoty A i B jsou stejné klasicky i intuicionisticky, tak jsou podle definice pravdivosti v kripkovském modelu stejné i hodnoty formule F.

Je-li F negací $\neg A$, tak je intuicionisticky pravdivá právě tehdy, když ze světa S není dosažitelný žádný svět, kde by A byla pravdivá. Protože z S je dosažitelný pouze on sám, je F pravdivá právě tehdy, když A není v S pravdivá, což je klasická definice pravdivosti pro negaci.

Důkaz pro implikaci proběhne úplně stejně jako pro negaci.

Nápověda k části b) cvičení 6

Ukaž, že pokud k nějaké formuli existuje protipříklad, ve kterém pro možné světy S a T platí $S \leq T, T \leq S$, tak lze vytvořit protipříklad, ve kterém oba světy S a T nahradíme jediným společným světem R.

Řešení části b) cvičení 6

Z podmínky perzistence vidíme, že jestliže $S \leq T$ a zároveň $T \leq S$, tak v obou světech S a T platí stejné formule (tedy $S \Vdash A$ právě když $T \Vdash A$). Celou množinu světů $\mathbf{R} = \{T; S \leq T, T \leq S\}$ nahradíme jediným světem R, ve kterém budou platit právě ty formule, které platily v S.

Ještě musíme určit, ze kterých světů bude R dosažitelné a které světy budou dosažitelné z něj.

Na první pohled je zřejmé, že šipky mezi světy v $\mathbf{R}$ jsou nahrazeny šipkou $R \leq R$, která v modelu musí být kvůli reflexivitě relace dosažitelnosti.

Jestliže pro nějaký svět U platí, že $U \leq S$, tak pro každé $T \in \mathbf{R}$ platí $U \leq T$. Pro nás je důležité, že pravdivostní hodnoty všech formulí jsou stejné ve všech světech z $\mathbf{R}$, protože pravdivostní hodnota některých formulí v U (například negací a implikací) závisí na pravdivostních hodnotách v dosažitelných světech.

Naopak, jestliže $S \leq U$, tak pro každé $T \in \mathbf{R}$ platí $T \leq U$.

Vidíme tedy, že pro každý možný svět U našeho modelu můžeme definovat

$$U \leq R \quad \text{právě, když} \quad U \leq S$$

$$R \leq U \quad \text{právě, když} \quad S \leq U$$

Řešení části c) cvičení 6

Sporem dokážeme, že neexistuje žádný kripkovský protipříklad k formuli ¬¬A.

Kdyby existoval nějaký protipříklad, existoval by také konečný protipříklad. (Věta uvedená v poznámce ke cvičení.) Podle části b) existuje také takový protipříklad, ve kterém neexistuje dvojice možných světů S a T taková, že $S \leq T$ a $T \leq S$. To znamená, že máme protipříklad s reflexivní, tranzitivní a *antisymetrickou* relací dosažitelnosti. Množinu možných světů tohoto protipříkladu označme W.

Nejprve ukážeme, že pro každý svět $S \in$ W existuje nějaký svět $T \in$ W takový, že $S \leq T$ a z T není dosažitelný žádný jiný možný svět. Takový svět nazveme *koncový svět*, protože z něj už nelze po šipkách jít nikam dál.

Předpokládejme pro spor, že z S není dosažitelný žádný koncový svět. Speciálně to znamená, že z S je dosažitelný nějaký svět S_1 takový, že z S_1 je dosažitelný nějaký svět S_2 takový, že z S_2 je dosažitelný nějaký svět S_3 … Při tom se nikdy nemůžeme vrátit do nějakého světa S_i, ve kterém jsme už byli, protože tím bychom měli dvojici světů $S_n \leq S_i, S_i \leq S_n$ (šipkou z S_n do S_i se vracíme tam, kde už jsme byli, ale $S_i \leq S_{i+1} \leq \cdots \leq S_n$ a podle tranzitivity tedy $S_i \leq S_n$). Pokud by tedy existoval svět S, ze kterého by nebyl dosažitelný žádný koncový svět, měl by náš model nekonečně mnoho světů, což je spor s předpokladem.

Máme tedy protipříklad a v něm svět P, ve kterém $P \nVdash \neg\neg$A. Kdyby ze světa P nebyl dosažitelný žádný svět S, ve kterém $S \nVdash \neg$A, tak by platilo $P \Vdash \neg\neg$A, takže určitě existuje S takové, že $P \leq S$ a $S \Vdash \neg$A. Ale z S je dosažitelný nějaký koncový svět T, ve kterém (podle části a)) $T \Vdash$ A. To je spor s tvrzením, že $S \Vdash \neg$A.

Poznámka ke cvičení 6

Již jsme si řekli, že všechny intuicionistické tautologie jsou současně i klasickými tautologiemi a v tomto smyslu je intuicionistická logika obsažena v klasické. V tomto cvičení jsme dokázali překvapivý výsledek: ačkoli existují výroky, které jsou klasickými tautologiemi a nejsou intuicionistickými tautologiemi, lze o každém výroku V `uvnitř intuicionistické logiky` rozhodnout, zda je klasickou tautologií nebo ne. Intuicionista nemusí opustit svou logiku k tomu, aby zjistil, jestli nějaká formule V je klasicky dokazatelná - prostě jen zjistí, jestli ¬¬V je dokazatelná intuicionisticky. V tomto smyslu je klasická logika částí logiky intuicionistické!

1. nápověda ke cvičení 8 Pro zpřehlednění důkazu si zaveď následující označení: $a = (\neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A})$, $b = (\neg\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{A})$, $c = \mathrm{A}$.

2. nápověda ke cvičení 8 Jako mezikrok odvoď formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Řešení cvičení 10

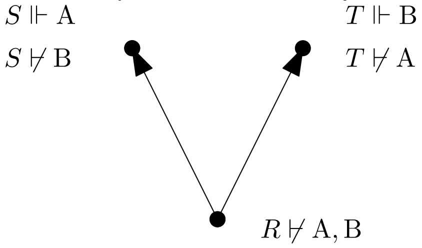
Problém tkví ve slůvcích „v opačném případě“, za kterými se maskuje přesvědčení, že výrok „Číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální.“ je buďto pravdivý, nebo nepravdivý. Intuicionista namítá, že dokud nebude dokázáno, že daný výrok je pravdivý, nebo nebude dokázáno, že je nepravdivý, nemůžeme se spolehnout na to, že nastane jedna z těchto možností.

Řešení části b) cvičení 12

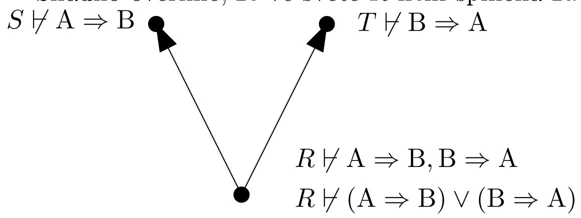
Následující tabulka dokazuje, že hodnota formule $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \vee (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A})$ je podle Heytingových tabulek 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A a B):

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	x	x	1	1
1	0	0	1	1
x	1	1	x	1
x	x	1	1	1
x	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	x	1	0	1
0	0	1	1	1

Hledaným protipříkladem je:



Snadno ověříme, že ve světě R není splněna zadaná formule:



Poznámka k části b) cvičení 12

Překvapivé řešení zaslal Miroslav Olšák:

„Podle textu k sérii je spousta možností, jak intuicionistickou logiku chápat.

Najdu tedy protipříklad v Kolmogorově logice problémů. Pokud si zvolím dva problémy, které spolu moc nesouvisí, tak $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ neplatí. Například šestá a osmá úloha šesté série. Není pravda, že když vyřeším šestou úlohu, budu mít vyřešenou i osmou a přitom není ani pravda, že když vyřeším osmou úlohu, budu mít vyřešenou šestou.“

3. Epistemické logiky

V minulém dílu seriálu jsme se seznámili s intuicionistickou logikou. Viděli jsme, že ji lze považovat za logiku, která popisuje, jak se v čase vyvíjí naše (pravdivé) poznání světa. Intuicionismus ovšem vznikl v rámci matematiky a také dnes je významný zejména jako popis určitého přístupu k matematickým důkazům; pro popis znalostí se častěji používají různé logiky, které označujeme souhrnným názvem *epistemické.*[1]

Pexeso a základní pojmy epistemické logiky

Představme si dva hráče, kteří právě rozložili na stůl šedesát čtyři kartičky pexesa a chystají se hrát. Jaké jsou v tuto chvíli jejich znalosti o rozložení kartiček?

Na první pohled by se mohlo zdát, že žádné: všechny kartičky jsou obráceny rubem vzhůru. Ale ve skutečnosti toho hráči vědí poměrně hodně - vědí, že kartičky skrývají třicet dva různých obrázků a že každý obrázek se vyskytuje právě dvakrát. Navíc jsou si oba vědomi toho, že druhý hráč také ví, že kartičky skrývají třicet dva párů obrázků. Můžeme říci, že mají nějakou *sdílenou znalost.*[2]

Obvykle se hraje tak, že hráč, kterému se podaří otočit dvě stejné kartičky, může pokračovat otočením další dvojice. Aby byla hra zajímavější, dohodli se naši hráči na tom, že podaří-li se jednomu otočit dvě dvojice kartiček po sobě, nechá hrát druhého hráče.

Představme si nyní situaci, která může nastat uprostřed hry. Hráč, který je právě na tahu, zná polohu tří dvojic stejných obrázků (jsou to autíčko, beruška a citron). Musí si z nich vybrat dvě a doufat, že tu třetí mu protihráč nevyfoukne ve svém tahu. Protihráč si nepamatuje, kde se nachází jeden z obrázků citronu, ale pamatuje si dobře, kde najde autíčka a berušky; jenže to náš hráč neví, takže otočí dvojice autíček a citronů. V této situaci sice oba hráči věděli, kde najít obrázky berušky, ale první hráč nevěděl, že to druhý hráč také ví - proto nehovoříme o sdílené znalosti, ale pouze o *znalosti všech.*[3] Všimni si, že kdyby se jednalo o sdílenou znalost, první hráč by se rozhodl lépe.

Nakonec se podívejme na znalosti hráčů v okamžiku, kdy na hrací ploše zbývá jediná kartička, kterou zatím nikdo neotočil. Pokud si hráč pamatuje, co je na všech ostatních kartičkách, nejspíš si domyslí také to, co se nachází na této zbývající kartičce. Ale co když se náhodou stane, že na hrací ploše je ještě velký počet kartiček? Pokud hráč není opravdu bravurní, snadno se mu přihodí, že si ani nevšimne, že už zná všechny kartičky kromě jediné. Prostě otočí některou z dvojic, které zná, a nebude se snažit si vzpomenout na to, co je na ostatních kartičkách. Vidíme tedy, že ačkoli si hráč poslední obrázek možná domyslí, rozhodně to není jisté.

Zkusme si nyní rozmyslet, s jakými překážkami se budeme muset vypořádat při tvorbě logického systému, který by nám pomohl analyzovat znalosti hráčů v průběhu hry pexeso:

(1) Jsou zde dva hráči, jejichž znalosti se mohou lišit. V epistemických logikách se obvykle hovoří o různých *agentech* - těmi mohou být agenti tajných služeb, kteří sbírají informace všeho druhu, stejně jako roboti, kteří jsou naprogramováni k tomu, aby prováděli meteorologická měření a sestavovali z nich předpověď počasí. Důležitou součástí epistemických logik je právě studium *multiagentních systémů.*

Agenti si za určitých okolností mohou předávat informace, takže znalost jednoho se rázem stane i znalostí druhého. Některé znalosti mají všichni agenti (*znalost všech*) a o některých dokonce všichni vědí, že je mají všichni ostatní a že všichni ostatní také vědí, že je mají všichni ostatní a tak dále (*sdílená znalost*).

(2) Hráči získávají znalosti nejen přímo (otočením kartiček), ale mohou si je také domýšlet. Ve většině her i skutečných životních situací se vyplatí předpokládat, že protihráč si skutečně domyslel všechny informace, které mohl; proto se v mnoha epistemických logikách nepracuje přímo se znalostmi agentů, ale s takzvanými *implicitními znalostmi* - s poznatky, které si agenti mohou domyslet. Mluvíme o *logické vševědoucnosti agentů*: předpokládáme, že znají všechny logické důsledky svých znalostí.

V praxi se ovšem s vševědoucími agenty setkáváme jen zřídka. Kdyby například hráči šachu byli vševědoucí, dokázali by si představit všechny budoucí tahy hry a nikdy by se jim nestalo, že přehlédnou soupeřovu šanci připravit je o královnu! Dokonce ani počítačové programy nedokážou v rozumném čase prozkoumat všechny možnosti, jak by se hra mohla dál vyvíjet, a vybrat z nich tu nejlepší.

---

[1] Řecké slovo *epistémé* znamená poznání. *Epistemologie* je část filozofie, která se zabývá procesem poznávání a vztahem poznání ke skutečnosti. Typická otázka zní: „Jak víme, že je naše poznání pravdivé?“

[2] V angličtině se používá označení *common knowledge* či *mutual knowledge.*

[3] V angličtině se používá vyjádření *everyone knows that.*

(3) Znalosti hráčů se vyvíjejí v čase - hráči otáčejí nové kartičky a zjišťují, co na nich je zakresleno, a také zapomínají, co bylo na kartičkách otočených dříve. Logické vlastnosti znalostí vyvíjejících se v čase a znalostí o minulosti a budoucnosti se snaží zachytit *epistemicko-temporální logika.* O té v našem textu nebude řeč.

Výhody sdílených znalostí

Na první pohled se znalost všech liší od sdílené znalosti jen maličko, ale už jsme viděli, že za určitých okolností může tento rozdíl hrát velikou roli.

Představ si, že jsi s kamarádem na matějské pouti a najednou se jeden druhému ztratíte. Chvilku bloudíš mezi atrakcemi a houfy lidí, ale svého kamaráda nikde nevidíš. Jako na potvoru u sebe zrovna nemáš mobil, takže to vypadá, že už se nejspíš nikdy neuvidíte. Co v tuhle chvíli uděláš?

Je dost možné, že budeš přemýšlet asi takhle: „Petr se chtěl jít podívat do Domu hrůzy. Možná bych ho tedy měla jít hledat tam... Ale ne, určitě už si všiml, že jsme se ztratili, a teď mě hledá. Kde by mě asi Petr mohl hledat? Říkala jsem mu, že se mi líbí Obří kolo. Nejspíš mě tedy hledá tam... Ale Petrovi už určitě došlo, že ho také hledám, a že tedy nejsem u Obřího kola. Protože ví, že ho hledám, určitě půjde tam, kde si myslí, že bych ho mohla hledat. Naposledy jsme se viděli u horské dráhy, takže si nejspíš řekl, že ho budu hledat tam. Když se lidé jeden druhému ztratí, mají se vrátit tam, kde se viděli naposledy..." Jenže u horské dráhy je zrovna neproniknutelný houf lidí, fronta se točí kolem vstupu do atrakce a je jasné, že tady se jen tak nenajdete. „Dobrá," řekneš si, „když jsme spolu na matějské, vždycky si jdeme dát cukrovou vatu, a tady zrovna vidím nápis 'CUKROVÁ VATA 100 m'. Jestli mě Petr hledal tady, určitě ho taky napadlo, že tam bychom se našli nejsnáz." Díky tomu, že sdílíte znalost, že si obvykle dáváte cukrovou vatu, se během pár minut potkáte u zmiňovaného stánku. Důležitou roli zde hraje nejen to, že víš, že oba máte rádi cukrovou vatu, ale také to, že Ti je jasné, že to ví i Petr, a také to, že Petr ví, že ty víš, že on to ví... Zkrátka a dobře, je to vaše sdílená znalost a tak se můžete spolehnout na to, že oba budete jednat na jejím základě.

V následující situaci ze života číšník záměrně přetvoří znalost obou ve sdílenou znalost:

Nešikovný číšník zakopne a vylije omáčku na bílou saténovou blůzku jedné dámy. Dáma na něj vyděšeně a rozzlobeně zírá a číšník omluvně vykoktá: „Promiňte, byla to moje chyba."

Co vlastně této dámě říká? Z jejího výrazu mu musí být jasné, že návštěvnice moc dobře ví, že to byla jeho chyba. Ve skutečnosti číšník dává najevo, že ON ví, že to byla jeho chyba. Tím, že to řekne nahlas, se ujišťuje, že ona ví, že on ví, že to byla jeho chyba. V tuto chvíli se znalost obou (totiž že to byla jeho chyba) stává jejich sdílenou znalostí (oba vědí, že ten druhý ví, že oni vědí atd.).[4]

V životě jakékoli společnosti hrají sdílené znalosti zcela zásadní roli. Pokud se občas stane, že se sdílení znalostí naruší, mívá to katastrofální následky, jak ukazuje následující příklad:

Chodes přechází ulici na přechodu bez semaforu. Ví, že má přednost, takže vstoupí do vozovky, ačkoli se blíží auto. Řidič je bohužel cizinec a neví, že v naší zemi mají chodci na přechodu přednost; vjede do křižovatky a jen tak tak stihne stočit automobil stranou a narazí do sloupu. Vyděšený chodec se ptá: „Copak jste nevěděl, že budu přecházet?!"; předpokládal totiž, že znalost předpisů je jejich sdílenou znalostí, tedy že řidič ví, že chodec bude jednat na základě svého práva přejít křižovatku jako první.

Všimni si, že kdyby si chodec nemyslel, že znalost předpisů je jejich sdílenou znalostí, ale že je jen znalostí jich obou, možná by do vozovky nevstoupil. Například pokud se chodec pozdě v noci vrací domů a slyší blížící se hřmětí motorů silného sportovního auta, bude raději předpokládat, že si ho (nejspíš opilý) řidič nevšimne.

Syntaxe epistemické logiky

Nejjednodušším způsobem, jak označit tvrzení „agent A zná fakt F" je symbol K_AF.[5] V epistemické logice jsou fakty reprezentovány výroky, takže K_AF čteme také jako „agent A ví, že výrok F je pravdivý", zatímco $K_A\neg$F znamená „A ví, že výrok F je nepravdivý".

[4] Sdílená znalost je taková, ve které řetězec „ona ví, že on ví, že ... " může pokračovat libolně daleko. Důležitou roli zde hraje i to, že oba vědí, že ten druhý si z už řečeného umí domyslet i to, že vědí, že on ví, že ... Například číšník si domýšlí, že dáma po jeho prohlášení ví, že on ví, že to byla jeho chyba. Dáma si zase domýšlí, že on ví, že ona si domyslela, že on ví, že to byla jeho chyba.

[5] Písmenko K pochází z anglického *knowledge.*

Pokud si agenty očíslujeme $A_1, \dots A_n$, budeme místo $K_{A_1}\mathrm{F}$ psát pouze $K_1\mathrm{F}$. Znalost všech budeme značit $E\mathrm{F}$, takže můžeme napsat

$$E\mathrm{F} \quad \Leftrightarrow \quad K_1\mathrm{F} \wedge K_2\mathrm{F} \wedge \dots \wedge K_n\mathrm{F}.$$

Sdílenou znalost všech agentů budeme značit $C\mathrm{F}$.[6]

Cvičení 1. Zkus napsat formuli obsahující symboly K a E ekvivalentní s formulí $C\mathrm{F}$. Pak zkus tuto formuli upravit tak, aby neobsahovala symbol E.

Zatímco ve skutečném životě se může snadno stát, že se domnívám, že něco vím, ale ve skutečnosti se mýlím, v logice tuto možnost obvykle nepřipouštíme. Věděním se tedy rozumí *pravdivá domněnka*. To, že se agent A domnívá, že fakt F je pravdivý, značíme $B_A\mathrm{F}$.[7] Domněnka může být pravdivá nebo nepravdivá.

Kripkovské modely znalostí jediného agenta

Představme si pro začátek situaci, ve které vystupuje jediný agent, třeba agent 007. Jeho znalosti jsou omezené. V důsledku toho nedokáže o všech větách rozhodnout, zda jsou pravdivé nebo nepravdivé. Například ví, že nebezpečný náklad se nachází ve vlaku z Moskvy do Petrohradu, ale neví, zda je pravda, že kapitán Flint zakopal svůj poklad na Ostrově pokladů. Svět, ve kterém se poklad nachází na Ostrově pokladů, je pro něj *možný*, ale rozhodně není *nutný*. Dokáže si představit dva možné stavy světa podle toho, zda poklad je či není na ostrově. V logice se různé stavy světa označují pojmem *možné světy*: každý možný svět reprezentuje jednu z alternativ, jak náš svět může vypadat.

My všichni „bydlíme“ v jednom z *možných světů*, nikdo z nás ale není schopen přesně určit, ve kterém! Nanejvýš se můžeme omezit na množinu možných světů, které se shodují s našimi znalostmi. Tím je určena *relace dosažitelnosti*: z našeho světa jsou dosažitelné všechny, které odpovídají našim znalostem a domněnkám.[8] Například pro agenta 007 jsou dosažitelné všechny možné světy, v nichž se nebezpečný náklad nachází ve vlaku z Moskvy do Petrohradu, a světy, v nichž je tento náklad v Londýně, pro něj dosažitelné nejsou.

Aby naše povídání o možných světech nesklouzlo do nekonečných debat o tom, které světy jsou možné a které možné nejsou, povězme si hned ze začátku, že z hlediska logiky není možný svět ničím více a ničím méně než objektem, o kterém víme, které výroky v něm jsou pravdivé a které další možné světy z něj jsou dosažitelné. Přitom předpokládáme, že pravdivost složitějších výroků závisí na pravdivosti jednodušších výroků stejně jako v klasické logice. Například svět, ve kterém je pravda „Mars je planeta“ a také je pravda „Eustach je planeta“ a přitom není pravda „Mars a Eustach jsou planety“, nebudeme považovat za možný.[9]

Určitou množinu možných světů spolu s pevně danou relací dosažitelnosti nazýváme *kripkovský model* nebo prostě *model*.

Příklad 2. Omezme se na následující dvojici výroků:

(V) „Lady Smithová je v hotelu Interkontinental.“

(W) „Agent 007 si vždycky ví rady.“

Vzhledem k těmto výrokům rozlišujeme celkem čtyři možné světy:

S_1. $\mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$

S_2. $\mathrm{V} \wedge \neg\mathrm{W}$

S_3. $\neg\mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$

S_4. $\neg\mathrm{V} \wedge \neg\mathrm{W}$

Agent 007 si prvním výrokem není moc jist, ale zato se domnívá, že druhý výrok je pravdivý: $B_{007}\mathrm{W}$. Ať už se nachází v kterémkoli ze světů $S_1, \dots S_4$, jsou pro něj dosažitelné právě světy s lichým číslem. Pokud označíme relaci dosažitelnosti šipkou mezi dvěma možnými světy, bude obrázek vypadat takto:

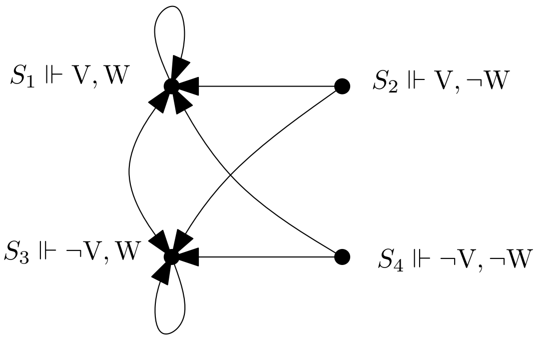
---

[6] Písmenko E pochází z anglického *everyone knows that*, C pochází z *common knowledge*.

[7] Písmenko B pochází z anglického *belief*.

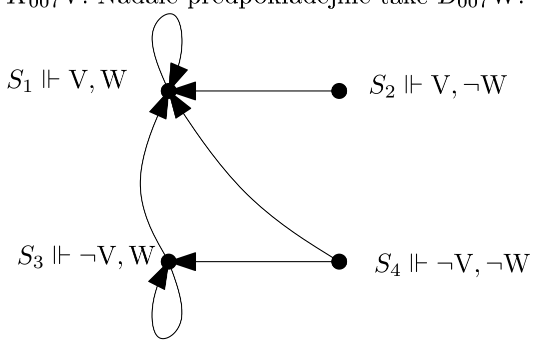
[8] A žádné světy, které našim znalostem a domněnkám neodpovídají, dosažitelné nejsou.

[9] Díky tomu, že složitější výroky musí splňovat pravidla klasické logiky, stačí pro popis možného světa určit pravdivostní hodnoty atomických výroků, tedy těch výroků, které nelze rozdělit na jednodušší výroky spojené pomocí logických spojek.



Všimni si, že náš model neříká nic o tom, ve kterém možném světě se agent vlastně nachází. Je-li jeho domněnka správná, pak je to určitě v jednom ze světů S_1 a S_3 - ale z hlediska modelu se klidně může stát, že jeho domněnky pravdivé nejsou. Šipky z daného možného světa S tedy říkají, které stavy světa agent *považuje za možné*, pokud se nachází ve světě S.

Příklad 3. V předchozím příkladě svět, ve kterém se agent nacházel, nehrál žádnou roli. Nyní přijměmě předpoklad, že pokud je lady Smithová v hotelu Interkontinental, tak si toho agent všimne, tedy $\mathrm{V} \Rightarrow K_{007}\mathrm{V}$. Nadále předpokládejme také $B_{007}\mathrm{W}$.[10] Relace dosažitelnosti teď bude vypadat takto:



Vidíme, že v tomto případě už to, které světy budou dosažitelné, závisí také na tom, ve kterém světě se agent nachází (z některých světů je dosažitelný jen svět S_1, z některých navíc také svět S_3). Všimni si také, že **čím více má agent poznatků, tím méně světů je dosažitelných**.

Cvičení 4. Urči, jak by vypadala relace dosažitelnosti, kdyby platilo $\mathrm{V} \Leftrightarrow B_{007}\mathrm{V}$ - tedy nejen, že agent ví, že lady je v hotelu, pokud tomu tak skutečně je, ale pokud si agent myslí, že lady je v hotelu, tak se nemýlí. Stále předpokládáme, že $B_{007}\mathrm{W}$.

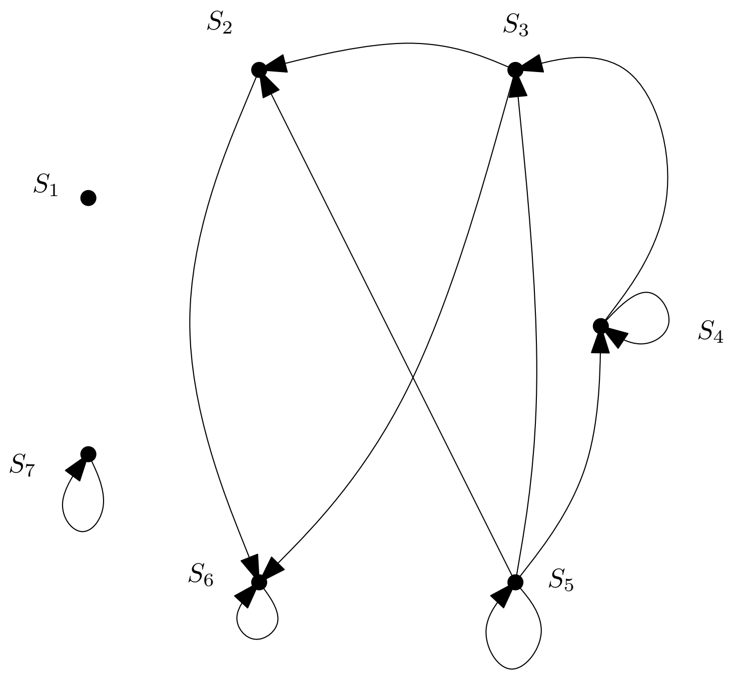
Cvičení 5. **7. soutěžní úloha**

Najdi příklad, který by ukázal významový rozdíl mezi formulemi $K\neg\mathrm{V}$ a $\neg K\mathrm{V}$! Uveď alespoň jeden příklad „ze života“ a alespoň jeden kripkovský model a v něm nějaký svět, ve kterém je jedna z těchto formulí pravdivá a jedna nepravdivá. Jaké jsou v tomto světě pravdivostní hodnoty implikací $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}, \neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$ pravdivá? Myslíš, že tomu tak musí být vždy?

Cvičení 6. **8. soutěžní úloha**

Představ si, že následující obrázek popisuje relaci dosažitelnosti nějakého agenta A_{008}. Urči, ve kterých možných světech jsou jeho domněnky v souladu s tím, jak se věci skutečně mají, a ve kterých možných světech se v nějaké věci mýlí.

[10] Agent si ovšem není jist, že je-li lady Smithová v hotelu, tak by si toho všiml, takže pokud tam není, neví o její přítomnosti či nepřítomnosti nic.



Explicitní a implicitní znalosti

Zatím jsme popisovali, které možné světy budeme na základě svých znalostí považovat za dosažitelné. Položme si nyní opačnou otázku: je dáno, které možné světy jsou dosažitelné; lze z toho poznat, které výroky patří k agentovým znalostem?

Již víme, že dosažitelné jsou právě ty světy, ve kterých jsou pravdivé všechny agentovy poznatky. Vzhledem k agentovým poznatkům jsou *možná pravdivé* ty výroky, které jsou pravdivé v některém dosažitelném možném světě, protože takové výroky jsou *konzistentní*[11] s jeho poznatky. *Nutně pravdivé* jsou ty výroky, které jsou pravdivé ve všech dosažitelných možných světech, protože takové výroky z jeho poznatků *vyplývají*.[12]

Ale pozor: agent si nemusí být vědom toho, že nějaký výrok je pravdivý ve všech dosažitelných možných světech. Může se totiž třeba jednat o nějaké velmi složité tvrzení, o kterém jej nikdy nenapadlo uvažovat. Proto musíme rozlišovat mezi explicitními znalostmi agenta (poznatky, kterých si je vědom, nebo si na ně může v případě potřeby vzpomenout) a jeho implicitními znalostmi (poznatky, které by si na základě svých znalostí mohl domyslet, kdyby byl dost chytrý). Proto budeme v následujícím cvičení rozlišovat symboly KV (agent ví V) a $\Box$V (V vyplývá z agentových poznatků = je pravdivé ve všech dosažitelných možných světech = je nutné).

Cvičení 7. Rozhodni, jak vypadá relace dosažitelnosti (vzhledem k našim znalostem) mezi následujícími možnými světy:

S Víme, že existuje alespoň 6 planet; ve skutečnosti existuje právě 9 planet (ale to nevíme).
T Víme, že existuje alespoň 6 planet; ve skutečnosti existuje právě 8 planet (ale to nevíme).
U Víme, že existuje právě 9 planet.[13]
V Víme, že existuje právě 17 planet.

Pomocí pravdivosti v dosažitelných možných světech urči, ve kterých z těchto světů jsou pravdivé výroky „Nutně existuje 9 planet." a „Nutně existuje 8 planet." (Předpokládej, že neexistují žádné možné světy kromě S, T, U, V.) Ověř, že $\Box$V je pravdivé právě tehdy, když víme V.

V předchozím cvičení jsme viděli, že KV $\Leftrightarrow$ $\Box$V. Implikace KV $\Rightarrow$ $\Box$V odpovídá tomu, že dosažitelné jsou ty světy, které jsou v souladu s našimi poznatky. Pokud tedy agent ví výrok V (KV), musí být

[11] V logice se místo *konzistentní* používá často české slovo *slučitelné*.

[12] Připomeňme si definici *vyplývání*: výrok A vyplývá z množiny výroků M, pokud není možné, aby všechny výroky z M byly pravdivé, ale výrok A byl nepravdivý.

[13] Ve světě U existuje právě 9 planet a ve světě V existuje právě 17 planet, protože věděním rozumíme pravdivé poznání.

V pravdivé ve všech dosažitelných světech ($\Box$V). Opačná implikace zdaleka tam samozřejmá není: může existovat nějaký výrok, který je pravdivý ve všech možných světech dosažitelných z daného světa, ale agent si toho nemusí vůbec být vědom. Takovým výrokem je třeba výrok „buďto je pravda, že jestliže svítí sluníčko, tak prší, nebo je pravda, že jestliže prší, tak svítí sluníčko“. Jako tautologie je tento výrok pravdivý ve všech možných světech (nejen v těch dosažitelných).

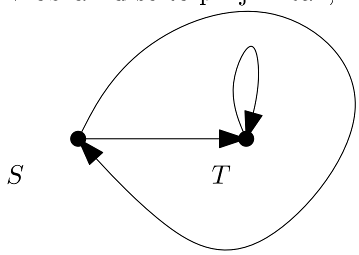
Přestože implikace $\Box$V $\Rightarrow$ KV tedy pro skutečné agenty neplatí, logici se rozhodli budovat logiku tak, jako by platila. Od této chvíle bude symbol KV označovat totéž, co symbol $\Box$V, tedy implicitní znalosti agenta.

Vlastnosti kripkovských modelů

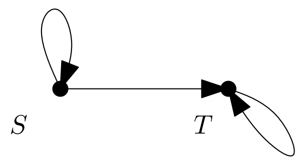
Cvičení 8. Urči, jak by vypadala relace dosažitelnosti, pokud by agent oplýval dokonalými poznávacími schopnostmi, tedy pokud by pro každý výrok V platilo V $\Rightarrow$ KV. (Můžeš nejprve zkusit uvažovat případ, ve kterém je každý svět popsaný pomocí n atomárních výroků.) Předpokládej, že agent nemá žádné nepravdivé domněnky.

Cvičení 9. Jak se změní výsledek předešlého cvičení, pokud budeme předpokládat pouze V $\Rightarrow$ BV a připustíme, že agent má i nepravdivé domněnky?

Jak vypadá model znalostí nějakého agenta? Protože pro každý výrok V platí KV $\Rightarrow$ V (za znalost považujeme jen pravdivé výroky), je vždycky skutečný stav světa konzistentní s agentovými poznatky. V obrázku se to projeví tak, že každý svět je dosažitelný sám ze sebe:



Všimni si, že nezáleží na tom, jakým způsobem obrázek nakreslíme. Oba obrázky zachycují tutéž relaci dosažitelnosti



Formule KV $\Rightarrow$ V bývá nazývána *axiom T* a logikové ji považují za formuli, která zachycuje rozdíl mezi vědomostmi a pouhými domněnkami.

Dejme tomu, že agent ví, že pokud svítí sluníčko a prší, bude duha (V $\Rightarrow$ W) a navíc si všimne, že právě svítí sluníčko a prší (V). Za těchto okolností nás nepřekvapí, že agent ví, že bude duha (W). Tuto schopnost agenta domyslet si na základě svých znalostí něco, co z nich logicky vyplývá, zachycuje formule $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$, nazývaná *axiom K* nebo také *axiom logické racionality agenta.*

Kalkuly epistemických logik

Existuje mnoho různých epistemických logik podle toho, jaké usuzovací schopnosti přisuzujeme jednotlivým agentům. Všechny epistemické logiky obsahují následující axiomy a pravidla:

Axiomy:

KL. všechny tautologie klasické logiky[14]

K. $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$ — axiom logické racionality

Pravidla:

MP. Z dokázaných formulí V, V $\Rightarrow$ W odvoď formuli W. — modus ponens

Nec. Pokud jsi už dokázal formuli V, odvoď formuli KV. — necesitace

Všimni si, že v kalkulu každé epistemické logiky lze dokázat všechny tautologie klasické logiky (dokonce jsme je všechny přijali za axiomy). To proto, že v jednotlivých světech kripkovských modelů se pravdivostní hodnota výroků utvořených pomocí spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ určuje stejně jako v klasické logice.

Jak již víme, axiom K je důsledkem našeho rozhodnutí soustředit se na implicitní znalosti agentů. O logické racionalitě agentů vypovídá i pravidlo necesitace, které říká, že agent zná všechny tautologie

[14] Stačilo by přijmout za axiomy všechny axiomy klasické logiky.

(a to nejen tautologie klasické logiky, ale i tautologie příslušné epistemické logiky; v důsledku toho je schopen uvažovat o svém vlastním uvažování a o uvažování ostatních agentů).

Další axiomy pro různé logiky[15]

Následující axiomy bývají někdy přidávány k základnímu axiomu K, když chceme zachytit další důležité vlastnosti některých agentů a jejich znalostí:[16]

T. $K\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}$ — vědomosti jsou pravdivé

D. $\neg B(\mathrm{V} \wedge \neg \mathrm{V})$ — agent nemá rozporné domněnky

4. $K\mathrm{V} \Rightarrow KK\mathrm{V}$ — pozitivní introspekce: vím, co vím

5. $\neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg K\mathrm{V}$ — negativní introspekce: vím, co nevím

Axiom T bývá považován za základní axiom *epistemické logiky*, protože formalizuje definici vědění, která se používá již od středověku: `vědění je pravdivá domněnka`.[17]

Axiom D je považován za základní axiom *doxastické logiky*, protože popisuje důležitou vlastnost většiny našich domněnek a názorů: nezastáváme současně opačné názory, nevěříme současně výroku i jeho negaci.

Axiomy 4 a 5 zachycují důležité vlastnosti lidských agentů: o každém faktu jsme schopni rozhodnout, zda patří k našim znalostem nebo ne.[18]

Cvičení 10. Ukaž, že platí-li v nějakém kripkovském modelu axiom T, platí tam i obměněná verze axiomu D: $\neg K(\mathrm{V} \wedge \neg \mathrm{V})$!

Věta o korektnosti

Dříve, než zformulujeme větu o korektnosti, si uveďme formální definici kripkovských modelů epistemických logik.

Připomeňme si, že relace R na množině W je nějaký vztah, do kterého vstupují vždy dva prvky množiny W. Například vztah „A je bratr B“ je relace na množině lidí: Jeník je bratrem Petra, Petr je bratrem Jeníka, Jeník je bratrem Mařenky (ale Mařenka není bratrem Jeníka!).[19]

Definice[20] *Kripkovský model (pro jednoho agenta)* je tvořen *množinou možných světů* M a *relací dosažitelnosti* $\leq$ na množině M.[21] O každém možném světě $S \in M$ je určeno, které výroky V v něm jsou pravdivé (což značíme $S \Vdash \mathrm{V}$) a které pravdivé nejsou (což značíme $S \nVdash \mathrm{V}$). Toto určení ale není libovolné, musí totiž splňovat následující podmínky:[22]

- $S \Vdash \neg \mathrm{V}$ právě tehdy, když neplatí $S \Vdash \mathrm{V}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V}$ a $S \Vdash \mathrm{W}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \vee \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V}$ nebo $S \Vdash \mathrm{W}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{W}$ nebo neplatí $S \Vdash \mathrm{V}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a $S \Vdash \mathrm{W} \Rightarrow \mathrm{V}$
- $S \Vdash K\mathrm{V}$ právě tehdy, když $S \leq T$ potom $T \Vdash \mathrm{V}$

$S \Vdash \mathrm{V}$ čteme „v možném světě S je výrok V pravdivý“ nebo „v možném světě S je splněna formule V“.[23]

[15] Názvy T, D, 4 a 5 jsou tradiční názvy jednotlivých axiomů.

[16] Pozor: ne všichni agenti mají tyto vlastnosti (viz např. axiom **D** a cvičení 9)!

[17] Tuto definici vědění přesněji zachycuje definice $K\mathrm{A} \Leftrightarrow (B\mathrm{A} \wedge \mathrm{A})$. Někteří myslitelé, například Occam, kladli na vědění silnější požadavky: `vědění je odůvodněná pravdivá domněnka`, což by zachytila formule $K\mathrm{A} \Leftrightarrow (B\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \wedge J\mathrm{A})$, kde $J\mathrm{A}$ označuje tvrzení „agent má důvod věřit, že A“.

[18] Neplatí to ovšem pokaždé: jak často se mi už stalo, že jsem si nechala vyprávět nějaký vtip, a po vyslovení pointy jsem se chytila za hlavu: „Jéé, vždyť já ten vtip vlastně už znám!“

[19] Matematikové považují relaci za množinu uspořádaných dvojic, což umožňuje předchozí tři věty napsat stručněji: „být bratrem“ = {(Jeník, Petr), (Petr, Jeník), (Jeník, Mařenka), ... }.

[20] Tato definice se podobá definici kripkovských modelů intuicionistické logiky, ale je jednodušší: na relaci dosažitelnosti neklade žádné zvláštní podmínky a podmínky pro pravdivost $\neg\mathrm{V}$, $\mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$, $\mathrm{V} \vee \mathrm{W}$, $\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a $\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{W}$ jsou stejné jako v klasické logice. Slovo „kripkovský“ budeme často pro přehlednost vynechávat; v tomto textu jiné než kripkovské modely neuvažujeme.

[21] Formálně vzato patří k modelu ještě *valuace*, která každému možnému světu určuje, které atomární formule, tedy výroky, které neobsahují logické spojky, v něm jsou pravdivé.

[22] Vyjmenované podmínky musí být splněny ve **všech** možných světech $S, T \in M$ a musí platit pro všechny výroky V, W!

[23] Formálně bychom neměli směšovat výroky s formulemi - výroky jsou konkrétní věty našeho každodenního jazyka, zatímco formule jsou posloupnosti symbolů nějaké logiky. Pokud za písmenko V dosadím větu „svítí sluníčko“, bude se jednat o výrok, ale pokud V považuji za jméno nějakého blíže neurčeného výroku, jedná se o formuli. Kripkovské modely se obvykle definují pouze pro formule, v našem textu jsme je ale definovali pro výroky.

$S \nVdash$ V čteme „v možném světě S není splněna formule V“ nebo „v možném světě S není výrok V pravdivý“.
KV čteme „agent ví, že V je pravdivé“ nebo „agent si může domyslet V“.

Uvedli jsme si axiomy epistemické logiky (nebo lépe řečeno epistemických logik, protože vybereme-li si jen některé z těchto axiomů, dostaneme různé epistemické logiky, které budou popisovat různé typy agentů) a definici kripkovských modelů. K čemu nám ale axiomy a modely jsou?

Logikové se pokoušejí zachytit důležité vlastnosti určitých slov a pojmů, které běžně používáme. V epistemické logice jsou takovými důležitými pojmy „vědět“ či „znát“ a „věřit“. Tyto pojmy mají určitý význam, který je znám všem lidem, kteří umí mluvit příslušným jazykem; jako u většiny slov, ani význam pojmů vědět a věřit není přesně ohraničený, což nám nijak nebrání je používat v naší každodenní řeči i ve filozofii.

Jedním z problémů, na které logikové narážejí ve své snaze zachytit vlastnosti pojmů, jsou právě drobné nuance jejich významů. Logikové proto vytvářejí umělé, formální systémy, které tento význam více či méně přesně zachycují a zpřesňují. Prvním krokem na jejich cestě bývá volba vhodných symbolů - v našem případě to je symbol K pro pojem „ví, že“, symbol B pro „věří“ a symboly $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ pro logické spojky. Symboly ovšem nezachycují význam pojmů, které symbolizují; jen umožňují zapsat věty přehlednějším a stručnějším způsobem a vynechat z nich vše, co není důležité pro tu část významu, která nás v dané chvíli zajímá.

Druhým krokem je volba vhodného formálního systému, který by nějakým způsobem zachytil, jak se zvolené pojmy chovají; obvykle říkáme, že zvolený systém *formalizuje logické vlastnosti* daných pojmů. V zásadě existují dvě cesty, jak to udělat:

1. *syntaktická cesta* Můžeme se pokusit vybrat axiomy, které by popsaly všechny důležité vlastnosti vybraných pojmů. Například axiom **T**: KV $\Rightarrow$ V zachycuje důležitou vlastnost, že vědění je pravdivé poznání. Když budeme mít štěstí, najdeme takovou skupinu axiomů, která bude popisovat všechny důležité vlastnosti zvoleného pojmu.

2. *sémantická cesta* Pokusíme se nějak zachytit, za jakých okolností budeme nějakou větu s daným pojmem považovat za pravdivou a za jakých okolností za nepravdivou. Opět máme k dispozici několik způsobů, jak to udělat:

2a. *tabulková metoda* V případě logických spojek nám výborně posloužily tabulky popisující pravdivostní hodnotu složeného výroku v závislosti na pravdivostních hodnotách jednodušších výroků.

2b. *kripkovské modely* Význam zvolených pojmů lze často dobře interpretovat v řeči možných světů: například to, že něco vím, znamená, že umím vyloučit určité možnosti, jak by mohl vypadat náš svět, a naopak určité možnosti považuji za pravděpodobné.

V případě epistemické logiky máme tedy k dispozici axiomy a kripkovské modely. Obojí se snaží nějak zachytit vlastnosti pojmů „vím“ a „věřím“. Je jasné, že výsledek našeho snažení, totiž volba axiomů a definice kripkovského modelu, se už příliš nepodobá tomu, s čím jsme začali, totiž větám v běžné lidské řeči a jejich významu. Přiznejme si, že žádnému smrtelníkovi kromě logiků neříká věta „vím, že sluníčko je žluté“ totéž jako věta „považuji za přípustné (dosažitelné) pouze ty možné světy, v nichž je sluníčko žluté“. Proto je pro logiky důležitá otázka, zda aspoň axiomy a modely popisují tytéž vlastnosti vybraných pojmů.

Cvičení 11. **9. soutěžní úloha**

Ukaž, že axiom **K:** $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$ jsme vybrali dobře - platí ve všech (kripkovských) modelech znalostí nějakých agentů.[24]

Podobně jako v předešlém cvičení, můžeme také pro obě pravidla ukázat, že s jejich pomocí dokážeme pouze formule, které platí ve všech modelech. Výsledkem je následující důležitá věta:

Věta 12. (o korektnosti) *Každá formule, kterou lze dokázat s použitím tautologií klasické logiky, axiomu* **K** *a pravidel modus ponens a necesitace, je pravdivá ve všech světech všech kripkovských modelů.*

Obrácením předchozí věty vznikne *věta o úplnosti*, která říká, že lze dokázat všechny formule, které jsou pravdivé ve všech světech všech modelů.

[24] Ve svém důkazu používej pouze definici kripkovských modelů - rozhodně nestačí prohlásit, že dokazované tvrzení je důsledkem věty o korektnosti, protože tu teprv dokazujeme!

* Rozdíly mezi intuicionistickou a epistemickou logikou

V tuto chvíli máš nejspíš pěkný zmatek v tom, jaký je vlastně rozdíl mezi intuicionistickou logikou a logikou epistemickou. Obě přeci zachycují významné vlastnosti znalostí, v obou je řeč o kripkovských modelech a možných světech ... Podívejme se tedy podrobněji na různé rozdíly mezi těmito dvěma logikami.

1. Rozdíly v jazyce

Jazykem nějaké logiky rozumíme množinu symbolů, které se v té logice používají. V intuicionistické logice je jazyk tvořen logickými symboly $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, pomocnými symboly (a) a proměnnými pro výroky A, B, ... V epistemické logice se vyskytuje navíc symbol K, v doxastické[25] logice symbol B.

2. Rozdíly v zachycení času

Intuicionistická logika věrně zachycuje, jak naše znalosti přibývají v čase: připouští okamžiky, ve kterých nemáme žádné znalosti a říká, že jednou nabyté pravdivé znalosti se neztrácejí (podmínka perzistence).

Naproti tomu epistemická logika popisuje znalosti agenta v jednom časovém okamžiku. Umožňuje určit, jaké důsledky by agent mohl odvodit ze svých aktuálních znalostí a které stavy světa považuje za možné a které za nemožné.

Kdybychom chtěli použít epistemickou logiku k popisu toho, jak se znalosti agenta vyvíjejí v čase, museli bychom do ní přidat další symboly, například FA („někdy v budoucnosti bude pravdivý výrok A“) a PA („někdy v minulosti byl pravdivý výrok A“). Pomocí těchto symbolů bychom mohli vyjádřit tvrzení jako FKPA („agent bude vědět, že pršelo“).

3. Rozdíly v definici kripkovských modelů

V důsledku toho, že kripkovské modely intuicionistické logiky mají zachycovat přibývání agentových znalostí v průběhu času, musí splňovat podmínku perzistence: $S \Vdash$ V a zároveň $S \leq T$ implikuje $T \Vdash$ V; žádný výrok, o kterém jsme poznali, že je pravdivý, už pravdivým být nepřestane. (Je třeba mít na paměti, že intuicionistická logika popisuje znalosti, které nejsou závislé na čase. Výrok „prší“ může samozřejmě být někdy pravdivý a někdy ne, ale tímto typem výroků se intuicionisté nezabývají.)

V důsledku podmínky perzistence nelze $S \Vdash \neg$V definovat jednoduše jako „není pravda, že $S \Vdash$ V“[26] a $S \Vdash$ V $\Rightarrow$ W definovat jednoduše jako „není pravda, že V $\wedge \neg$W“.

Naopak v epistemické logice se definice pravdivosti formulí tvaru $\neg$V a V $\Rightarrow$ W v daném možném světě neodvolává na žádné jiné možné světy.

4. Rozdíly v množině tautologií

Z předchozího bodu vyplývá, že v epistemické logice se implikace a negace chovají úplně stejně jako v klasické logice, zatímco intuicionistická logika je vůči těmto spojkám „přísnější“ (klade si více podmínek, aby uznala nějakou implikaci či negaci za pravdivou). Také z formulace axiomů vidíme, že všechno, co je pravda v intuicionistické logice, je pravda i v klasické (ale ne naopak), a všechno, co je pravda v klasické, je pravda i v epistemické (což platí i obráceně pro formule, které neobsahují nově přidané symboly K a B). Takže zatímco intuicionistická logika je obsažena v klasické a má méně tautologií, epistemická klasickou obsahuje a tautologií má více.

Modifikace epistemických logik pro multiagentní systémy

Zatím jsme popsali, jak vypadají modely znalostí jediného agenta a jak vypadají kalkuly, které tyto znalosti popisují. Nyní se pokusíme epistemickou logiku rozšířit tak, aby umožňovala popsat znalosti více agentů. Skupinám více agentů se v informatice a logice říká *multiagentní systémy*; může to být třeba skupina agentů tajné služby, skupina robotů, kteří mají společně vyplnit nějaký úkol (například různé moduly výzkumné sondy na Marsu) nebo skupina mravenečků, kteří společně staví mraveniště. Typické pro tyto systémy je to, že znalosti jednotlivých agentů se mohou lišit, ale za určitých okolností si mohou znalosti i předávat.

Již jsme řekli, že formálně zavedeme pro každého agenta A_i jeho vlastní symbol K_i, takže K_iV bude znamenat, že agent A_i zná (pravdivý) výrok V. Pomocí těchto symbolů můžeme zachytit i složité agentovy úvahy o tom, co všechno vědí ostatní agenti: například $K_1K_2K_1$`svítí sluníčko` znamená že agent A_1 si může říct „A_2 ví, že vím, že svítí sluníčko“.

---

[25] Doxastické logiky jsou ty, které popisují naše domněnky.

[26] Může se totiž stát, že pro nějaký svět S není pravda, že $S \Vdash$ V, ale je z něj dosažitelný svět T, ve kterém je pravda, že $T \Vdash$ V. Z toho je vidět, že navrhovaná definice negace by narušila podmínku perzistence.

Definice *Kripkovský model pro množinu agentů* $A_1, \dots A_n$ je tvořen *množinou možných světů* M a množinou *relací dosažitelnosti* $\leq_1, \cdots \leq_n$ na množině M. K modelu patří ještě *valuace*, která každému možnému světu určuje, které atomární formule, tedy výroky, které neobsahují logické spojky, v něm jsou pravdivé. Pravdivost složitějších výroků musí splňovat následující podmínky:[27]

- $S \Vdash \neg \mathrm{V}$ právě tehdy, když neplatí $S \Vdash \mathrm{V}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \wedge \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V}$ a $S \Vdash \mathrm{W}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \vee \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V}$ nebo $S \Vdash \mathrm{W}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{W}$ nebo neplatí $S \Vdash \mathrm{V}$
- $S \Vdash \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{W}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a $S \Vdash \mathrm{W} \Rightarrow \mathrm{V}$
- $S \Vdash K_i\mathrm{V}$ právě tehdy, když $S \leq_i T$ potom $T \Vdash \mathrm{V}$

Cvičení 13. Představme si sondu, která přistála na Marsu. Po povrchu planety se nyní pohybuje drobný robot, který má za úkol provést základní chemický rozbor místní atmosféry a vzorků hornin. Robot všechny výsledky měření okamžitě odesílá mateřské sondě a ta je opět odesílá vědcům na Zem (v případě, že by se robot nešťastnou náhodou zranil, zapadl do nějaké díry v zemi či se prostě rozbil, budou mít vědci k dispozici alespoň ty informace, které již stihl odeslat). Formálně toto předávání informací zachycují implikace $K_R\mathrm{A} \Rightarrow K_S\mathrm{A}$ a $K_S\mathrm{A} \Rightarrow K_V\mathrm{A}$.[28] Jak se tyto implikace projeví v příslušném kripkovském modelu?

Cvičení 14.

Dokážeš v následujícím textu odhalit několik omylů, kterých se autor dopustil?

Každý z možných světů reprezentuje způsob, jakým lze nahlížet na okolní svět. Hodláme-li užít epistemickou logiku pro popis multiagentního systému, pak předpokládáme, že svět zobrazuje znalosti o okolním světě očima jednoho z agentů. Relace dosažitelnosti mezi světy definuje vztahy mezi uvažovanými světy opět z hlediska nějakého agenta.

Příklad

Dejme tomu, že agenti, členové našeho multiagentního společenství, hrají kanastu. Úspěšnost hráče je dána nejen náhodou, jaké karty hráč získá při rozdávání. Pro úspěch ve hře je nejdůležitější schopnost hráče usoudit, jaké karty mají jeho spoluhráči. Každý z agentů má tedy svůj svět charakterizovaný kartami, které drží v ruce, a všemi informacemi, které hráč postupně během hry získává. Dalším světem je balíček neodkrytých karet, který není dosažitelný pro žádného z agentů. Naopak již vyložené karty tvoří svět dosažitelný pro všechny. Má-li agent A_1 v ruce určitou kombinaci karet, může začít uvažovat o různých možných variantách toho, co mají v rukou ostatní agenti. Tyto varianty jsou zcela konzistentní s tím, co agent A_1 ví (svět w_1), a patří tedy do světů dosažitelných ze světa w_1. Nechť formule V vyjadřuje tvrzení „agent A_2 drží v ruce nějaké eso“. Má-li například agent A_1 v ruce všechna esa, je zřejmé, že tvrzení V není pravda v žádném ze světů dosažitelných ze světa w_1, ba naopak o všech takových světech můžeme říci, že V v nich neplatí. Ve světě w_1 platí $\Box\neg V$, a tudíž pro agenta A_1 je tvrzení $\neg V$ nutně pravdivým. Naopak nechť formule W říká „agent A_2 má v ruce spodka“. Platí-li ve světě w_1, že agent A_1 nemá v ruce žádného spodka a mezi kartami vyloženými na stole je právě jeden spodek, pak lze odvodit ze znalostí platných ve světě w_1, že $\Diamond W$. Tvrzení W může být pro agenta A_1 pravdivé.

(...) Pokud epistemickou logiku používáme pro reprezentaci znalostí jednotlivých členů multiagentního společenství, pak každý jednotlivý svět chápeme jako konzistentní soubor znalostí jednotlivého agenta.

Vladimír Mařík, Olga Štěpánková, Jiří Lažanský: Umělá inteligence 3, str. 206-207.[29]

[27] Vyjmenované podmínky musí být splněny ve **všech** možných světech $S, T \in M$ a musí platit pro všechny formule V, W a pro všechny agenty $A_1, \dots A_n$!

[28] Robot, Sonda, Vědci; A je nějaký výrok. Zanedbáváme zde skutečnost, že předání informací trvá nějaký čas.

[29] V původním znění se místo o opistemické logice hovoří o modální logice; místo „relace dosažitelnosti“ je použito označení „relace přístupnosti“; místo označení „dosažitelný pro všechny“ se používá „přístupný všem“; a konečně místo V, W jsou v původním textu použity symboly φ, ψ. Tyto změny jsou nepodstatné z hlediska významu, ale neznámá terminologie by čtenáři ztížila orientaci v již tak náročném textu.

Směsice poznámek a citátů

Sdílené znalosti ztracených v davu

Jedním z prvních, kdo se začali zabývat významem sdílených znalostí pro naše sociální interakce, byl Thomas Schelling v díle Strategie konfliktu z toku 1960. Zde čteme:

Ztratí-li muž svou ženu v nákupním středisku, aniž by se před tím domluvili, kde se potkají, pokud se rozdělí, je velká naděje, že se opět brzy najdou. Pravděpodobně si každý z nich vzpomene na nějaké místo, kde by se evidentně mohli potkat, tak evidentně, že si oba budou jisti, že to je „evidentní" pro ně pro oba. Žádný z nich se nebude snažit prostě uhodnout, kam ten druhý půjde, což by bylo tam, kam by hádal, že ten druhý bude hádat, že (ten první) půjde, a tak donekonečna. Nejenom „Co bych dělal na jejím místě?" ale „Co bych dělal, kdybych na jejím místě přemýšlel, co by udělala, kdyby přemýšlela, co bych udělal já na jejím místě…?"[30]

V roce 1969 Lewis popsal tento problém v jazyce teorie her. Jedná se o strategickou hru, v níž se hráči rozhodují současně. Představme si, že obchodní dům, ve kterém se nachází manželé Petr a Pavlína Novákovi, má čtyři patra. V každém políčku následující tabulky je zapsáno, kolik uspokojení získá Petr (1. položka) a kolik Pavlína (2. položka), jestliže Petr bude v patře odpovídajícím danému řádku a Pavlína v patře odpovídajícím danému sloupečku.

Petr \ Pavlína	**1. patro**	**2. patro**	**3. patro**	**4. patro**
1. patro	**(1,1)**	(0,0)	(0,0)	(0,0)
2. patro	(0,0)	**(1,1)**	(0,0)	(0,0)
3. patro	(0,0)	(0,0)	**(1,1)**	(0,0)
4. patro	(0,0)	(0,0)	(0,0)	**(1,1)**

Vidíme, že pro oba „hráče" této jednoduché hry jsou výhodné tytéž situace - totiž ty, v nichž se sejdou ve stejném patře. Tyto situace se nazývají *Nashovy rovnovážné pozice*, protože pokud se jich podaří dosáhnout, žádný z hráčů už nebude mít důvod danou situaci nějak „vylepšovat".[31]

Je jasné, že pro oba náročnost této hry spočívá ve výběru patra do jít. Za jakých okolností se Petr rozhodne jít do 2. patra? Bude to tehdy, když bude mít přiměřenou jistotu, že do téhož patra půjde i Pavlína (jistota 1. řádu). Takovou přiměřenou jistotu může mít jen tehdy, když bude mít přiměřenou jistotu, že Pavlína má přiměřenou jistotu, že on půjde do 2. patra. K tomu, aby Pavlína měla přiměřenou jistotu, že Petr půjde do 2. patra (jistota 2. řádu), potřebuje mít přiměřenou jistotu, že Petr má přiměřenou jistotu, že ona půjde do 2. patra (jistota 3. řádu), takže celkově Petr potřebuje mít jistotu 4. řádu, že… Kdyby tak Petr věděl, že Pavlína ví, že on ví, že ona ví, že on ví, … že půjde do 2. patra, bylo by to dobrým důvodem tam jít.

Přesně tímto způsobem Lewis definuje *sdílenou znalost* Z skupiny agentů. Sdílená znalost je taková znalost, že pro každé n a pro každou posloupnost agentů $A_1, A_2, \ldots A_n$ (tentýž agent se v posloupnosti může opakovat vícekrát) platí: „A_1 ví, že A_2 ví, že … že A_n ví, že Z." Speciálně pro $n = 1$ dostáváme, že všichni agenti vědí, že Z.

Hra dvou vězňů

Z předešlého vyprávění by se mohlo zdát, že Nashovy rovnovážné pozice vždy odpovídají těm nejvýhodnějším celkovým výsledkům hry. Ukažme si hru, ve které Nashova rovnovážná pozice je pro oba hráče nevýhodná - a přesto v ní hra skončí, budou-li hráči hrát rozumně!

Ty a tvůj parťák jste obviněni z krádeže. Každý z vás je uvězněn v jiné cele, takže se nemůžete nijak domlouvat. Tvůj právník ti sdělil, že pokud se ani jeden z vás nepřizná, budete oba na základě částečných důkazů odsouzeni ke dvěma letům vězení. Pokud se přiznáš a budeš svědčit proti svému parťákovi, zatímco on se nepřizná, dostaneš pouze roční trest, zatímco tvůj parťák bude odsouzen na čtyři roky vězení. Pokud se přiznáte oba, odsedíte si v chládku tři roky. Víš také, že tvůj parťák je ve stejné situaci jako ty.

Celou situaci můžeš zachytit tabulkou:

[30] Překlad je můj vlastní: *When a man loses his wife in a department store without any prior understanding on where to meet if they get separated, the chances are good that they will find each other. It is likely that each will think of some obvious place to meet, so obvious that each will be sure that it is "obvious" to both of them. One does not simply predict where the other will go, which is wherever the first predicts the second to predict the first to go, and so ad infinitum. Not "What would I do if I were she?" but "What would I do if I were she wondering what she would do if she were wondering what I would do if I were she … ?"*

Thomas Schelling: The Strategy of Conflict, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1960.

[31] Anglický výraz je *Nash equilibrium*.

já \ parťák	**přizná se**	**nepřizná se**
přiznám se	$(3,3)$	$(1,4)$
nepřiznám se	$(4,1)$	$(2,2)$

Pravděpodobně budeš uvažovat asi takto: „Bez ohledu na to, jestli se můj parťák přizná nebo ne, je pro mě výhodnější se přiznat - v obou případech dostanu o dva roky nižší trest.“

Protože tvůj parťák uvažuje úplně stejně, oba se přiznáte a odsedíte si tři roky za mřížemi. Při tom by pro vás pro oba bylo výhodnější, kdyby se ani jeden z vás nepřiznal (odseděli byste si pouze dva roky)! Jenže pozice (2,2) není rovnovážná - alespoň jeden z vás by si mohl polepšit tím, že by se přiznal. Proto tato situace pravděpodobně nenastane - kdyby to vypadalo, že se nechceš přiznat, tvůj parťák zpozoruje svou příležitost, přizná se a bude svědčit proti tobě. Tobě nezbyde, než se přiznat také (přeci jen je lepší odsedět si tři roky než čtyři) …

Cvičení 15. Zkus najít situace ze skutečného života, v nichž Nashova rovnovážná pozice (tedy pozice, ve které si už nikdo ze zúčastněných nemůže nijak polepšit) je pro všechny méně výhodná než nějaká jiná pozice, ve které si ale někdo může polepšit (nejspíš na úkor ostatních).

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Řešení cvičení 1
Příslušná formule by musela vypadat asi takto:

$$C\mathrm{F} \quad \Leftrightarrow \quad EF \wedge EEF \wedge EEEF \wedge \ldots$$

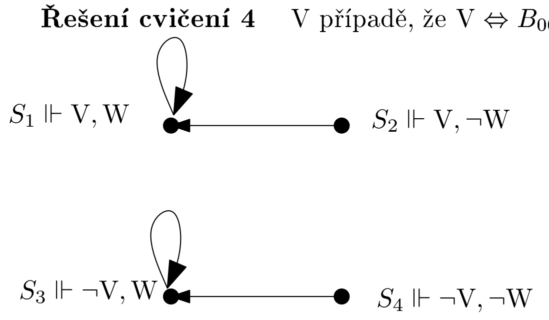
Všechny výskyty symbolu E můžeme zkusit nahradit podle definice:

$$\begin{array}{lll} C\mathrm{F} & \Leftrightarrow & K_1\mathrm{F} \wedge K_2\mathrm{F} \wedge \ldots K_n\mathrm{F} \wedge \\ & & K_1K_1\mathrm{F} \wedge K_1K_2\mathrm{F} \wedge \ldots \wedge K_1K_n\mathrm{F} \wedge K_2K_1\mathrm{F} \wedge K_2K_2\mathrm{F} \wedge \ldots \wedge K_nK_n\mathrm{F} \wedge \\ & & K_1K_1K_1\mathrm{F} \wedge \ldots \wedge K_1K_nK_1\mathrm{F} \wedge K_1K_nK_2\mathrm{F} \wedge \ldots \wedge K_nK_nK_n\mathrm{F} \wedge \\ & & \ldots \end{array}$$

Poznámka ke cvičení 1 Obě formule, které jsme napsali výše, jsou nekonečné. V logice není zvykem pracovat s nekonečnými formulemi a navíc je otázkou, jestli skuteční agenti, kteří jsou koneční, mohou podle této definice někdy sdílet znalosti s jinými agenty. Pokud totiž agenti A_1 a A_2 sdílí znalost F, měl by každý z nich mít nekonečné množství znalostí tvaru $K_1\mathrm{F}, K_1K_2\mathrm{F}, K_1K_2K_1\mathrm{F}, \ldots$! Při tom je zřejmé, že například lidé mají s jinými lidmi mnoho společných vlastností i přes to, že jejich mozek je schopen ukládat pouze konečné množství informace.

Podobně jako v jiných problémech, se kterými se v epistemické logice setkáme, i zde je řešením prohlásit, že agenti nemusí mít všechny tyto znalosti aktuálně „uložené v paměti“, ale musí je mít potenciálně či implicitně - na základě svých znalostí a schopností by si je mohli kdykoli odvodit či domyslet.

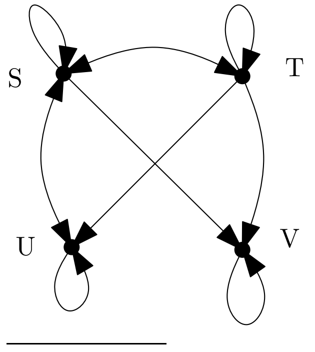
Řešení cvičení 4 V případě, že $\mathrm{V} \Leftrightarrow B_{007}\mathrm{V}$, by obrázek vypadal takto:



Poznámka ke cvičení 5
Zatímco ve skutečném světě je mezi formulemi $K\neg\mathrm{V}$ a $\neg K\mathrm{V}$ zcela zásadní rozdíl, při psaní počítačových programů se občas považují za ekvivalentní. Konkrétně je to například v některých databázích (programech pro ukládání a pozdější vyhledávání velkého množství informací) a dále třeba v programovacím jazyku ProLog. V obou případech se jedná o situaci, kdy se uživatel zeptá, zda je pravdivý nějaký výrok V. Počítač prohledá soubor informací, které „zná“ (má je uložené v paměti; buď to jsou informace uložené v databázi, v případě jazyka ProLog to jsou informace obsažené v samotném programu) a pokud mezi nimi najde výrok V, odpoví uživateli, že je pravdivý. Pokud výrok V nenajde, odpoví uživateli, že je nepravdivý.[32] Budeme-li formuli $K\mathrm{V}$ považovat za zápis tvrzení „počítač považuje výrok V za pravdivý“, bude skutečně platit $K\neg\mathrm{V} \Leftrightarrow \neg K\mathrm{V}$! Ti, kteří programují v ProLogu nebo používají zmiňované databáze, vědí, že si musí dávat veliký pozor na způsob, jakým jejich počítač rozumí negacím.

Řešení cvičení 6 Znalosti agenta jsou v souladu s aktuálním stavem světa ve světech S_4, S_5, S_6 a S_7. Všechny tyto světy jsou totiž dosažitelné samy ze sebe.

Řešení cvičení 7

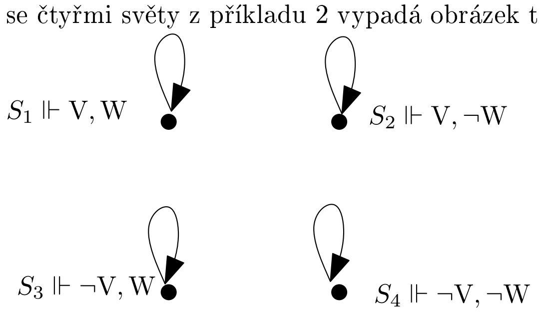


[32]Tento způsob nakládání s negací se označuje anglickým výrazem *negation as failure*, tedy *negace jako neúspěch*.

Řešení cvičení 8

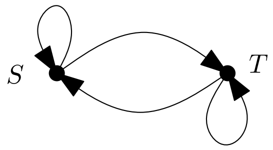
Vědění je vždy pravdivá znalost, tedy $K\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}$. Všimni si, že `pokud připouštíme pouze pravdivé znalosti, tak je z každého světa dosažitelný alespoň on sám.`[33]

Předpokládejme, že každé dva možné světy se liší pravdivostí alespoň jednoho výroku. Pokud je agent vševědoucí a nikdy se nemýlí ($\mathrm{V} \Leftrightarrow K\mathrm{V}$), je z každého světa dosažitelný pouze tento svět sám. V případě se čtyřmi světy z příkladu 2 vypadá obrázek takto:



Všimni si, že v tomto případě je agent schopen přesně určit, ve kterém možném světě se nachází - jen jediný svět je pro něj dosažitelný.

Kdybychom připustili možnost, že ve dvou možných světech S a T jsou pravdivé přesně tytéž výroky, vypadal by obrázek takto:



Řešení cvičení 9 Pokud připustíme, že agent má všechny pravdivé poznatky ($\mathrm{V} \Rightarrow B\mathrm{V}$) a také některé nepravdivé domněnky (nastane případ $\neg\mathrm{V} \wedge B\mathrm{V}$), nebude z daného možného světa dosažitelný ani on sám, ani žádný jiný. Ve chvíli, kdy agent věří nějakému výroku i s jeho negací ($B\mathrm{V} \wedge B\neg\mathrm{V}$), nemůže být dosažitelný žádný možný svět, protože v každém možném světě je splněna podmínka klasické logiky, že negace výroku je pravdivá právě tehdy, když výrok sám není pravdivý. V žádném možném světě tedy výroky V a $\neg$V nemohou být současně pravdivé.

Řešení cvičení 10 Předpokládejme, že platí axiom T: $K\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$. Verzi axiomu D dokážeme sporem. Nechť platí $K(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A})$. Potom podle T také $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A}$, což je spor.

Řešení cvičení 11

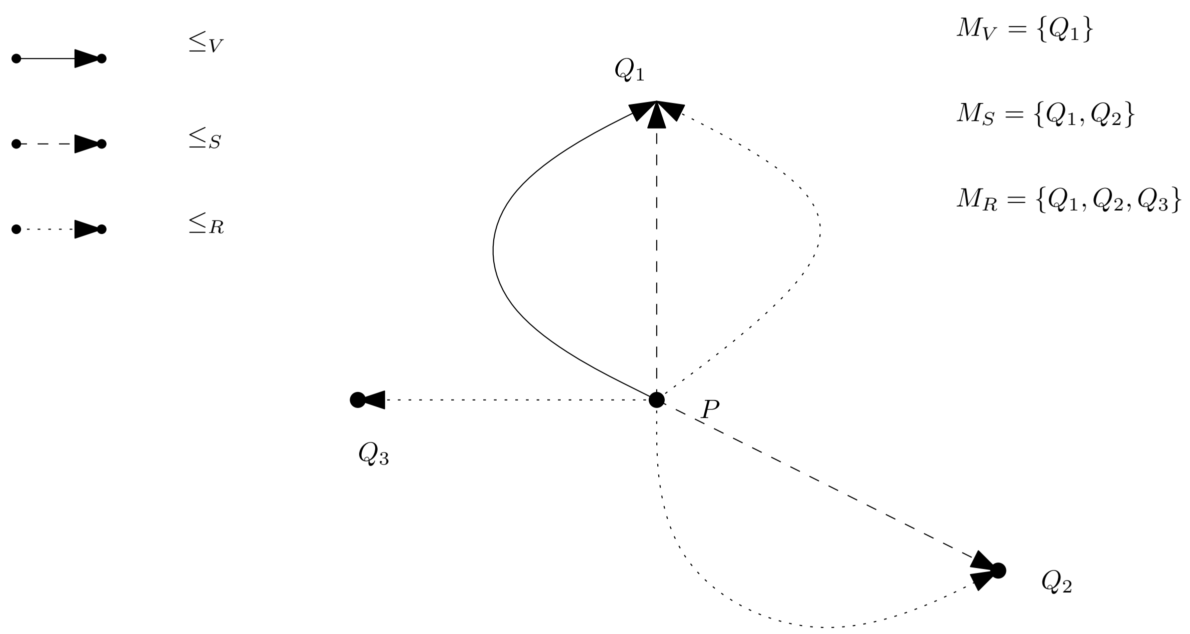
Předpokládejme, že máme nějaký kripkovský model a v něm nějaký svět S.

Jestliže $S \Vdash K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}$, tak pro všechny světy T dosažitelné z S platí $T \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a také $T \Vdash \mathrm{V}$. Ovšem podle definice pravdivosti implikace z toho plyne, že $T \Vdash \mathrm{W}$. Odtud $S \Vdash K\mathrm{W}$, protože ve všech světech dosažitelných z S je W pravdivé.

Nápověda ke cvičení 13 Zjisti, jak se liší množina možných světů dosažitelných z daného světa vzhledem k relacím $\leq_R, \leq_S, \leq_V$!

Řešení cvičení 13 Vzhledem k tomu, že vědci mají k dispozici více informací než sonda (například informace od dalších sond nebo informace z dalekohledů na zemi), považují méně možností za přípustné: méně stavů světa je v souladu s jejich poznatky. Naopak, všechny stavy světa, které vědci považují za možné (jsou dosažitelné v relaci $\leq_V$) jsou v souladu se všemi poznatky sondy (takže jsou dosažitelné i v relaci $\leq_S$). Jinak řečeno, jestliže pro dva světy P a Q platí $P \leq_V Q$, tak pro ně platí také $P \leq_S Q$ a pokud $P \leq_S Q$, tak $P \leq_R Q$. Pokud označíme množinu možných světů dosažitelných z nějakého pevně daného světa v relaci $\leq_V$ (resp. $\leq_S, \leq_R$) symbolem M_V (resp. M_S, M_R), bude platit $M_V \subseteq M_S \subseteq M_R$.

[33] Řekneme, že relace dosažitelnosti je *reflexivní*.



Řešení cvičení 14

V prvé řadě, autor si neuvědomil, že v každém možném světě je o každé atomické formuli řečeno, zda je pravdivá či nepravdivá. Jak by tedy mohla být pravda, že „každý jednotlivý svět chápeme jako konzistentní soubor znalostí jednotlivého agenta“, když znalosti jednotlivého agenta jsou neúplné a tedy existují atomické výroky, o kterých neví, zda jsou pravdivé či nepravdivé?

Za druhé, autor se domnívá, že všem agentům přísluší jakási společná relace dosažitelnosti („agent A_1 $(\dots)$ může začít uvažovat o různých možných variantách toho, co mají v rukou ostatní agenti. Tyto varianty jsou zcela konzistentní s tím, co agent A_1 ví (svět w_1), a patří tedy do světů přístupných ze světa w_1.“). Ve skutečnosti má každý agent svou vlastní relaci dosažitelnosti; autor citovaného textu se správně domnívá, že tato relace dosažitelnosti odpovídá tomu, že dané stavy světa jsou v souladu s agentovými poznatky.

4. MODÁLNÍ LOGIKY

Shledáváme totiž ve věcech některé, u nichž jest možno býti a nebýti, neboť se shledává, že některé se rodí a hynou a v důsledku toho mohou býti a nebýti. Ale jest nemožné, aby všechno, co je takové, bylo vždycky, poněvadž co může nebýti, někdy není. Jestliže tedy všechno může nebýti, někdy nebylo skutečně nic. Jestli však toto jest pravda, ani nyní by nic nebylo, poněvadž co není, nezačíná leč skrze něco, co jest. Nebylo-li tedy žádného jsoucna, nebylo možné, aby něco začalo býti, což je zřejmě nesprávné. Tedy ne všechna jsoucna jsou možná, nýbrž musí býti ve věcech něco nutného. Ale každé nutné buď má příčinu své nutnosti odjinud, nebo nemá. Není pak možno postupovati do nekonečna v nutných, jež mají příčinu své nutnosti, jako to není možné u příčin účinných, jako bylo dokázáno. Tedy jest nutno stanoviti něco, co je samo sebou nutné, nemajíc odjinud příčiny nutnosti, nýbrž co jest příčinou nutnosti jiným.

Tomáš Akvinský: Summa theologicae[1]

Cvičení 1. O čem myslíš, že je předcházející text? Dokážeš v něm objevit nějakou logickou chybu?

Podle ukázky jsi možná uhodl, že dnes bude řeč o tom, co je možné a co je nutné. To jsou otázky, které trápily filozofy po celá staletí.

Na konci 20. let založila skupinka vědců, z nichž nejvýznamnějším byl filozof a logik Rudolf Carnap, uskupení nazvané *Vídeňský kruh*. Jejich manifestem se stal text nazvaný *Vědecký světový názor - Vídeňský kruh*[2], ve kterém od samého počátku prohlašují, že všechny problémy tradiční filozofie jsou buďto pseudoproblémy vytvořené nesprávným zacházením s jazykem, nebo by je měla řešit fyzika či biologie:

Vyjasňování tradičních filozofických problémů vede k tomu, že budou částečně odhaleny jako problémy zdánlivé, a částečně přeměněny v problémy empirické a tím podřízeny soudu empirických věd.

Jaroslav Peregrin: Analytická filosofie (náčrt!), kapitola 4, str. 3.

Základním přínosem Vídeňského kruhu moderní filozofii se stal jejich obrovský důraz na to, aby bylo jasně řečeno, co znamenají pojmy, se kterými se pracuje. Carnap a ostatní členové skupiny se totiž domnívali, že všechny filozofické problémy půjde rozlousknout pomocí logické analýzy jazyka, tedy pomocí rozboru logických vztahů mezi použitými slovy a jejich významů.[3] Proto se pro ně vžilo také označení *logičtí pozitivisté*.[4]

Vraťme se k textu od Tomáše Akvinského a podobně jako pozitivisté se pokusme zamyslet nad tím, co znamenají slova, která se v textu vyskytují. Dříve než tak učiníme, podívejme se do slovníku cizích slov, co znamenají výrazy, s nimiž se budeme často setkávat:

modální slovesa *(způsobová) = obměňující význam slovesa po stránce způsobové (možnosti, vůle, nutnosti apod.): chtít, mít (za povinnost), moci, musit, smět, např. nemocný chce jíst, ale smí jen pít;*

modální částice *= vyjadřující stanovisko mluvčího k obsahu věty, např. možná, prý atp.;*

modalita *= 1. možný způsob, jak se něco provádí, nebo okolnost, za níž se (podle úmluvy) něco provádí 2. stupeň jistoty určitého soudu, jeho charakteristika z hlediska „síly“ tvrzení 3. uplatňování postoje mluvčího ve výpovědi, tj. že ji považuje za skutečnou, chtěnou atp.*

Doc. dr. Lumír Klimeš, CSc.: Slovník cizích slov, str. 452.

Slovem *modalita* budeme většinou označovat slova „možná“ a „nutně“ a logické symboly $\Diamond$ a $\Box$, kterými je označujeme. V širším smyslu se v logice za modality považují všechny výrazy, které v nějakém smyslu vyjadřují vztah mluvčího k určitému výroku nebo upravují jeho význam, například tedy výrazy „věřím, že“, „vím, že“, „je všeobecně známo, že“, „je přikázáno“, „musím zařídit, aby“, „nesmím dopustit, aby“, „je dokazatelné, že“ a mnohé další.

Rozhodne-li se logik začít zkoumat logické vlastnosti nějakých slov přirozeného jazyka, v našem případě slov „nutně“ a „možná“, má několik možností jak začít:

---

[1] Přeložili čeští dominikáni. František Marek, Štěpán Zapletal: Filosofická čítanka, str. 50-51.

[2] Kromě Carnapa se na sepisování textu podíleli také matematik Hans Hahn a sociolog Otto Neurath.

[3] Už dávno před nimi racionalista Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tvrdil, že mnohé filozofické problémy by zmizely, kdyby se podrobněji prozkoumaly nedokonalosti jazyka. Myšlenkové proudy 20. století, které rozvíjejí tuto myšlenku, nazýváme souhrnně *analytická filozofie*.

[4] Slůvko pozitivismus zde označuje přesvědčení, že skutečný smysl mají pouze otázky, na které lze odpovědět na základě pozorování a měření, tedy otázky *empirické*, na které dávají odpověď přírodní vědy.

1) Pomocí několika formulí popsat, jak se tato slůvka chovají, a použít je jako axiomy logického systému. Tento způsob se nazývá *axiomatický* nebo také *syntaktický*, protože vede k vytváření systémů, se kterými můžeme pracovat, i když zapomeneme na původní význam symbolů; takové systémy se v logice nazývají *kalkuly* a část logiky, která se jimi zabývá, *syntaxe*. Syntaxe zahrnuje i volbu symbolů pro důležité pojmy a popis, jak smíme tyto symboly řadit za sebe. (Například posloupnost symbolů $\wedge B \vee \Rightarrow A \neg$ totiž nedává žádný smysl.)

2) Formulovat kritéria pro určování pravdivosti výroků „možná A" a „nutně A". Například můžeme zkusit nalézt tabulky, které by určily pravdivostní hodnotu výroků „možná A" a „nutně A" na základě pravdivostní hodnoty výroku A. Nebo můžeme vytvářet modely, pomocí kterých určíme pravdivost výroků „možná A" a „nutně A" v různých možných stavech světa. Tento postup se nazývá *sémantický*, protože se týká logického zkoumání významu, tedy části logiky nazývané *sémantika*.

3) Popsat, jaké argumenty a protiargumenty lze použít v diskuzi o větě, která zmiňovaná slůvka obsahuje. To lze udělat například určením pravidel logické hry. Tento postup se nazývá *dialogický* nebo *dynamický*, protože se při něm logiku nahlížíme jako soubor pravidel pro rozhovor - dialog, nebo jako dynamický proces přesvědčování partnera v dialogu.[5]

Łukasiewiczovo zkoumání vlastností modalit

Prvním, kdo se zabýval zkoumáním logických vlastností modalit, byl polský logik Jan Łukasiewicz, který se při svém studiu středověké filozofie pokusil symbolizovat pravidla středověké modální logiky (tedy logiky zabývající se výroky o tom, co je možné a nutné) pomocí moderní logiky výrokové. Łukasiewicz zavedl následující značení:

$\Diamond A$	je možné, že A	*possibile*
$\neg\Diamond A$	není možné, že A	*impossibile*
$\Diamond\neg A$	je možné, že ne-A	*contingens*
$\neg\Diamond\neg A$	není možné, že ne-A	*necessarium*

Jak ukazuje úvodní citát, k úvahám o možném patří také úvahy o nutném. Pro nutnost máme opět čtyři možnosti:

$\Box A$	je nutné, že A
$\neg\Box A$	není nutné, že A
$\Box\neg A$	je nutné, že ne-A
$\neg\Box\neg A$	není nutné, že ne-A

Cvičení 2. Latinská slova possibile, impossibile a necessarium znamenají možné, nemožné a nutné. Rozhodni, jak tyto tři možnosti zapsat pomocí symbolu $\Box$.

Łukasiewicz dále zkoumá tři přirozené vlastnosti tohoto typu výroků:

($\heartsuit$1) Jestliže není možné, že A, pak ne-A. $\neg\Diamond A \Rightarrow \neg A$
($\heartsuit$2) Jestliže ne-A, pak (v tomtéž časovém okamžiku) není možné, že A. $\neg A \Rightarrow \neg\Diamond A$
($\heartsuit$3) Pro některé výroky B platí, že je možné, že B, i že je možné, že ne-B.
Existuje B takové, že $\Diamond B \wedge \Diamond\neg B$.

Odhlédneme-li od toho, že se nám nepodařilo formalizovat třetí vlastnost čistě výrokově-logickou formulí, máme tu další problém:

Cvičení 3. Pomocí axiomu (A3) klasické logiky

(A3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

odvoď z ($\heartsuit$1) a ($\heartsuit$2) formuli $C \Leftrightarrow \Diamond C$.

To už je samo o sobě divné: říká to například, že je-li možné, že vyhraji ve Sportce milión (protože jsem si vsadila), tak vyhraji ve Sportce milión! Jenže to není všechno:

Cvičení 4. Na základě předešlého cvičení můžeme všechny výskyty znaku $\Diamond$ v ($\heartsuit$3) vymazat. Zjisti, co dostaneme.

Vidíme, že ačkoli tři zmiňované vlastnosti vypadaly celkem rozumně, vede jejich přijetí k nepřijatelným důsledkům. Po tomto počátečním neúspěchu s axiomatickým postupem, se Łukasiewicz obrátil k sémantickému způsobu zkoumání logických vlastností slov „možná" a „nutně".

[5] Dialogický přístup k modální logice je poměrně komplikovaný a proto není v textu vyložen.

Łukasiewiczova trojhodnotová logika

Łukasiewicz navrhuje místo výrokové logiky, která pracuje pouze s dvěma pravdivostními hodnotami - výrok je pravdivý nebo nepravdivý - použít logiku trojhodnotovou, ve které je navíc i pravdivostní hodnota *možnost*. Tuto třetí hodnotu budeme značit x.

Ostatně princip dvouhodnotovosti odmítal už Aristoteles. Jeho oblíbeným příkladem byla věta „zítra bude námořní bitva". Pokud je tato věta pravdivá, musí se zítra nutně konat námořní bitva, ačkoli o tom ještě nikdo nerozhodl. Je-li nepravdivá, je nemožné, aby se bitva konala. Jestliže tato věta musí mít jednu z pravdivostních hodnot pravda / nepravda, je o tom, zda se bitva bude konat, předem rozhodnuto a nemůžeme s tím už nic udělat.

Později byl tento problém zformulován ještě razantněji. Například švýcarský reformátor Kalvín tvrdil, že o každém člověku Bůh předem ví, jestli bude spasen nebo ne - nemáme žádnou šanci to svým jednáním ovlivnit. Díky tomu, že Bůh je vševědoucí, musí být předem dáno, koho spasí ...

Na poli filozofie vede tedy dvouhodnotová logika k deterministickému pohledu na svět a popírá jakoukoli možnost svobodné volby ohledně toho, co budeme jíst, pít, jakými cestami se budeme ubírat a s kým se budeme přátelit. Všechno je předem určeno, neboť výroky jako „budu-li ještě naživu, dám si 13. července 2013 k obědu guláš" mají předem danou (ač nám neznámou) pravdivostní hodnotu.

Łukasiewicz nabízí řešení: výroky o budoucnosti nechť mají pravdivostní hodnotu x, které budeme rozumět jako „*možnost*". Samozřejmě musíme určit, jakou pravdivostní hodnotu budou mít složené výroky; po vzoru klasické logiky to uděláme pomocí tabulek.

Hodnota x odpovídá tomu, co se v logice a filozofii běžně nazývá *kontingence* - výrok s pravdivostní hodnotou x může být pravdivý a může také být nepravdivý. Vojtěch Kolman přesvědčivě dokládá, že běžné užití slova „možná" odpovídá právě kontingenci:

Řekneme-li v běžné promluvě, že nějaká situace (A), např. vítězství určité strany ve volbách, je docela dobře možná ($\Diamond$A), nesporně tím popíráme, že by tato strana ve volbách vyhrát nemohla, tzn. že by její prohra byla nutná ($\neg\Box\neg$A). To, že by vyhrát musela ($\Box$A), samozřejmě nepředpokládáme (nespolutvrdíme), zdá se ale, že to dokonce implicitně vylučujeme ($\neg\Box$A), neboť na příslušný dotaz („myslíte si, že musí vyhrát?") odpovíme nejspíš záporně: „Nemusí ani vyhrát ani prohrát, obojí je možné."

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 40.

Łukasiewicz pro logické spojky navrhl následující tabulky:

B	¬B	$\Diamond$B	$\Box$B
1	0	1	1
x	x	1	0
0	1	0	0

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
1	1	1	1	1	1
1	x	x	1	x	x
1	0	0	1	0	0
x	1	x	1	1	x
x	x	x	x	1	1
x	0	0	x	x	x
0	1	0	1	1	0
0	x	0	x	1	x
0	0	0	0	1	1

Místo toho, abychom pro každou kombinaci hodnot A a B psali zvláštní řádek, můžeme pro každou spojku napsat její vlastní tabulku, ve které hodnoty A napíšeme do levého sloupečku a hodnoty B do horního řádku:

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	x
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	x
0	0	x	1

Za tautologie této trojhodnotové logiky budeme považovat ty formule, které pro všechny možné hodnoty svých proměnných mají pravdivostní hodnotu 1.

Následující tautologie klasické logiky nejsou tautologiemi trojhodnotové modální logiky. V závorce je pro zajímavost a zmatení čtenáře uvedeno, zda se jedná o intuicionistickou tautologii.[6]

(1) A ∨ ¬A — zákon vyloučeného třetího — (intuicionisticky neplatí)

[6] V této logice ale platí některé z často zpochybňovaných tautologií klasické logiky:

(1) A ⇒ (B ⇒ A) — axiom (A1), „paradox implikace" — (intuicionisticky platí)

(2) $\neg(A \wedge \neg A)$ zákon sporu (intuicionisticky platí)
(3) $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ spor implikuje cokoli (intuicionisticky platí)
(4) $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ důkaz sporem (intuicionisticky neplatí)
(5) $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ vyvrácení sporem (intuicionisticky platí)

To, že v trojhodnotové logice neplatí zákon vyloučeného třetího, bychom možná uhodli už z jeho názvu - samozřejmě, že připouštíme i třetí možnost, totiž že výrok není „ani pravdivý, ani nepravdivý“!

O něco překvapivější už se může zdát to, že neplatí zákon sporu, tedy že nějaký výrok „může být současně pravdivý i nepravdivý“. Ovšem je dobré si uvědomit, že ve skutečnosti to znamená pouze to, že $A \wedge \neg A$ může mít i jinou hodnotu než „nepravda“. Konkrétně může mít i hodnotu „možná“, ale nemůže mít hodnotu „pravda“! Víme-li, zda je výrok A pravdivý či nepravdivý (pravdivostní hodnota A je 1 nebo 0), má výrok $A \wedge \neg A$ hodnotu „nepravda“. Pouze v případě, že výroku A přiřadíme hodnotu „možná“, má také výrok $A \wedge \neg A$ hodnotu „možná“. Zkrátka a dobře, v téhle logice si můžeme dovolit následující zbrklou úvahu: „Jestliže může být pravdivý výrok A a také může být pravdivý výrok $\neg A$ (což odpovídá tomu, že A má hodnotu x), tak může být pravdivý i výrok $A \wedge \neg A$.“

To, že neplatí tři zbývající formule, je důsledkem toho, že neplatí zákon sporu.

Cvičení 5. Ukaž, že že v trojhodnotové modální logice platí následující:

(1) $\Box A \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ definice $\Box$ pomocí $\Diamond$
(2) $\Diamond A \Leftrightarrow \neg\Box\neg A$ definice $\Diamond$ pomocí $\Box$[7]
(3) $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ axiom **K**
(4) Jsou-li A a $A \Rightarrow B$ tautologiemi této logiky, je i B tautologií této logiky. *pravidlo modus ponens*
(5) Je-li A tautologií této logiky, je i $\Box A$ tautologií této logiky. *pravidlo necesitace*

Cvičení 6. Ukaž, že v této logice platí implikace $\Box A \Rightarrow A$ a $A \Rightarrow \Diamond A$ vyjadřující, že je-li něco nutné, pak to tak je, a pokud je nějaký výrok pravdivý, pak je možné, aby byl pravdivý. Ukaž také, že platí ekvivalence $\Diamond\Diamond A \Leftrightarrow \Diamond A$ a $\Box\Box A \Leftrightarrow \Box A$, tedy ukaž, že

(1) A je možné, právě když je možné, že A je možné
(2) A je nutně pravdivé, právě když je nutné, že A je nutně pravdivé

Spojky této logiky nejsou nezávislé; ve skutečnosti lze všechny definovat pomocí implikace a negace. Definice jsou následující:

$A \vee B$	je zkratkou za	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
$A \wedge B$	je zkratkou za	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
$A \Leftrightarrow B$	je zkratkou za	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
$\Diamond A$	je zkratkou za	$\neg A \Rightarrow A$
$\Box A$	je zkratkou za	$\neg\Diamond\neg A$

Cvičení 7. Celkem překvapivě vypadá zjištění, že Łukasiewicz definoval tabulku pro $\Diamond A$ na základě ekvivalence $\Diamond A \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow A)$. Ověř, že tato ekvivalence je tautologií trojhodnotové modální logiky.

Cvičení 8. Ukaž, že v modální trojhodnotové logice platí ($\heartsuit$1) $\neg\Diamond A \Rightarrow \neg A$, ale neplatí ($\heartsuit$2) $\neg A \Rightarrow \neg\Diamond A$.

Vidíme, že Łukasiewicz ve své snaze vytvořit formální systém, který by odpovídal středověké modální logice, příliš neupěl: když to zkoušel axiomaticky, dospěl ke sporu (viz cvičení 4); když to zkoušel pomocí tabulek, nepodařilo se mu zachytit vlastnosti, které možnosti a nutnosti přisuzovali středověcí myslitelé (viz cvičení 8). Zdá se tedy, že nám nezbývá nic jiného, než vrátit se ke Carnapově návrhu pořádně se zamyslet na významem slov „možná“ a „nutně“.

---

(2) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ „paradox implikace“ (intuicionisticky platí)
(3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ axiom (A3) (intuicionisticky neplatí)
(4) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ zákon dvojí negace (intuicionisticky neplatí)

[7] Díky ekvivalencím $\Box A \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ a $\Diamond A \Leftrightarrow \neg\Box\neg A$ stačí napsat tabulku pro jednu z modalit $\Diamond$, $\Box$ a přijmout vhodnou z nich jako axiom. Obě tyto formule platí téměř ve všech modálních logikách, protože popisují vlastnost většiny modalit: nutné je to, co nemůže být jinak, a možné je to, co nemusí nebýt.

Různé druhy možnosti

Při studiu logických vztahů mezi výroky o možnosti a nutnosti velmi brzy narazíme na to, že slůvka „možná“ a „nutně“ používáme v mnoha různých kontextech a v každém znamenají něco trochu jiného. Pokusme se nyní popsat několik základních způsobů chápání těchto vět.

Redukcionistická teorie modalit

Některé věty o možnosti a nutnosti lze přeformulovat jako věty se slůvky „každý“ a „některý“: Například řekne-li matematik, že prvočísla větší než 2 jsou nutně lichá, má tím prostě na mysli, že každé prvočíslo větší než 2 je liché. Podobně si lze tvrzení, že fialky mohou být bílé, vykládat tak, že některé fialky jsou bílé.[8] A do třetice: v úvodním citátu a komentáři k prvnímu cvičení jsme viděli, že Tomáš Akvinský používá slov „nutný“ a „možný“ ve významu „vždy existující“ a „někdy existující, ale někdy neexistující“.[9]

Protože takto redukujeme výroky modální v běžné výroky bez modalit, říká se tomuto pojetí *redukcionistické*.

V tomto chápání platí dvojice implikací $\Box A \Rightarrow A$ (co nastává nutně (vždy), to je pravdivé) a $A \Rightarrow \Diamond A$ (skutečný stav věcí je možný (nastává alespoň někdy)).

Epistemické modality

Epistemologie je část filozofie zabývající se poznáváním. *Epistemické* zde tedy znamená „týkající se aktuálního stavu našeho poznání“.

Redukcionistické chápání významu slov „možný“ a „nutný“ někdy vede k paradoxům: větě „je možné, že se Země střetne s cizím tělesem a zanikne“ rozhodně nechceme rozumět tak, že existuje těleso, se kterým se Země střetne a zanikne - vždyť říká právě jen to, že takové těleso existovat může (ale nemusí)! Tuto větu si budeme vykládat jako tvrzení „nejsou mi známy zákony, z nichž by vyplývalo, že Země touto cestou nezanikne“.

Také v detektivkách se často vyskytují situace, v nichž hrdinové usuzují na možnost či nutnost nějakého vysvětlení na základě toho, co je jim známo:

„Kdo zabil hostinského?“ začal znovu Richards zmaten. „Vždyť by s ním mělo práci několik mužů, než by ho přemohli. Ačkoli jich mohlo *být víc, kdo v tom měli prsty. Jestli byl někdo nenáviděn, pak to byl on.“*

„Byl to kramář,“ řekla Mary zvolna. „Zapomněla jsem na kramáře. Musil *to být on; dostal se nějak ze zavřeného skladiště.“*

Chytila se této domněnky, aby se vyhnula jiné; a začala znovu vyprávět celý příběh, tentokrát dychtivě, jak kramář přišel předešlou noc do hostince. Hned se jí zdálo, že jeho vina je dokázána, *a jiné vysvětlení že* není možné.

Daphne du Maurier: Hospoda Jamajka, překlad Ladislav Bezpalec, Odeon, Praha 1972, str. 216.

Vidíme, že slůvko „musil“ zde má znamenat „vyplývá to z toho, co vím“. Takto chápané modality často úzce souvisí s pojmem důkazu, jak ostatně naznačuje i věta „jeho vina je dokázána“.

Chceme-li se zabývat epistemickými modalitami, musíme jasně určit, jaké poznatky považujeme za známé. Dostaneme tak různé dílčí druhy nutnosti a možnosti, jako například *logickou nutnost* (například platí $\Box(A \vee \neg A)$, protože $A \vee \neg A$ je tautologie klasické logiky) a *fyzikální nutnost* (něco je nutné, protože to odpovídá známým fyzikálním zákonům).

Modální logika by měla popisovat ty vztahy mezi větami, které nezávisí na volbě množiny znalostí, ze kterých vycházíme. Například

$$(\Box A \wedge \Box B) \Rightarrow \Box(A \wedge B)$$

je kandidátem na pravdivý výrok každé modální logiky - když dospěji k závěru, že $\Box A$ a $\Box B$ jsou pravdivé, budu si také myslet, že $\Box(A \wedge B)$ - nezávisle na tom, jestli $\Box A \wedge \Box B$ považuji za pravdivé na základě logiky, fyziky, historie nebo psychologie.

Cvičení 9. Urči, na základě jakých poznatků jsou následující věty epistemicky nutné. O jaký poddruh epistemické nutnosti se jedná?

(1) Jestliže nějaký člověk skočí z Eiffelovy věže, určitě spadne.

[8] Můžeme též říci, že pravděpodobnost, že náhodně vybraná fialka je bílá, není nulová (ačkoli už sám název naznačuje, že s největší pravděpodobností bude fialová). Proto se redukcionistické pojetí též někdy nazývá *statistické*.

[9] Tomáš Akvinský si ovšem redukcionistické pojetí nevymyslel, nýbrž jej převzal od myslitele mnohem staršího, Aristotela. Ten definuje nutné jako to, co je vždy aktuální, nemožné jako to, co není nikdy aktuální, a možné jako to, co je aspoň jednou aktuální.

(2) Jestliže nějaký rozumný dospělý člověk skočí z Eiffelovy věže, bude určitě očekávat, že tímto pádem zahyne.
(3) Ozónová díra se určitě bude zvětšovat ještě asi 50 let.
(4) Pokud Jiří věří té knize, určitě si myslí, že ozónová díra se bude zvětšovat ještě asi 50 let.
(5) Platí-li A a také A $\Rightarrow$ B, tak nutně platí B.

Formuli $\Diamond$A v epistemickém pojetí rozumíme tak, že nemohu vyloučit pravdivost A, tedy že z mých poznatků není odvoditelné $\neg$A.

Cvičení 10. Ukaž, že implikace $\Box$A $\Rightarrow$ $\Diamond$A, která platí ve většině modálních logik, je důsledkem požadavku, aby náš soubor znalostí neobsahoval spor.

Praktické čili dispoziční modality

Stejně jako na mých znalostech závisí, o kterých situacích se domnívám, že mohou nastat, bude na mých schopnostech (dispozicích) záviset to, co mohu udělat. V konkrétních situacích by mělo být jednoduché ověřit, zda jsou věty jako „mohu / dokážu uběhnout 100 metrů za 5 vteřin“ pravdivé - prostě požádáme o předvedení. Může se ale stát, že mluvčí výroku se bude vykrucovat: „Mohl bych, ale zrovna se mi nechce.“

Proto logikové zavedli pojem *dosažitelný stav* a symbol $\Diamond$A čtou „stav A je dosažitelný“ nebo „mohu / mohla bych dosáhnout stavu A“. Symbol $\Box$A interpretují jako *neodvratnost stavu A*; označuje větu „nemohu zařídit, aby A nenastalo“.[10] Přitom za neodvratný považuji každý stav, kterému nemohu zabránit, tedy každý stav A takový, že $\neg$A je pro mne nedosažitelné. Vzápětí uvidíme, že tato interpretace symbolu $\Box$A je celkem nepřirozená; jejím smyslem je zachovat ekvivalenci $\Box$A $\Leftrightarrow$ $\neg\Diamond\neg$A, na kterou jsou logikové zvyklí z ostatních modálních logik a neradi by se jí vzdávali.

Tento typ modalit je zajímavý tím, že pro něj neplatí $\Box$A $\Rightarrow$ $\Diamond$A. Například při házení korunou neumím zařídit, aby nepadl orel. Z tohoto hlediska je pro mě stav „orel“ neodvratný, $\Box$ orel. Stejně tak ale neumím zařídit, aby orel padl, a tedy je pro mě nedosažitelný ($\neg\Diamond$ orel).

Cvičení 11. Rozhodni, zda pro tento typ modalit platí A $\Rightarrow$ $\Diamond$A.

Deontické modality

Studiem příkazů, zákazů a dovolení se zabývá *deontická logika*. Do oblasti deontické logiky nespadají jen skutečné zákony, ale i ideální soubory pravidel o tom, co je žádoucí a nežádoucí, co by se mělo či nemělo; hovoříme pak o *mravní nutnosti*. Deontická logika bývá zařazována mezi logiky modální, protože tento typ vět často obsahuje slova „(ne)může / (ne)smí“, „(nutně) musí“. Použití modalit k analýze pravidel navíc souvisí s tím, že chceme-li jednat v souladu se zákony a etickými pravidly naší společnosti, jsou naše možnosti podstatně okleštěny vůči tomu, čeho bychom mohli dosáhnout na základě svých fyzických a duševních schopností a omezení.

Na druhou stranu se deontické logiky od ostatních modálních logik v několika směrech výrazně odlišují. Protože symbol $\Box$A obvykle čteme jako „je přikázáno nastolit stav A“ a symbol $\Diamond$A jako „je dovoleno nastolit stav A“, neplatí zde obvyklé implikace $\Box$A $\Rightarrow$ A (ne všechno, co je přikázáno, se skutečně dělá) ani A $\Rightarrow$ $\Diamond$A (ne všechno, co dělám, je dovoleno).

Cvičení 12. Následující věty zkus zařadit do jednoho ze čtyř zmiňovaných typů modalit:

Je možné, že Goldbachova domněnka je nepravdivá.
Není možné, že Pythagorova věta je nepravdivá.
2 a 2 krokodýli jsou nutně 4 krokodýli.
Můžeš mi půjčit hodinky?
Prvočísla mohou být sudá.
K zatmění Slunce dojde nutně počátkem příštího měsíce.
Vyhodím-li květináč z okna, padá nutně k zemi.
Není možné, aby se stůl vznesl.
Není možné smrkat palcem u nohy.
Tady nemůžete stát!
Ze severního pólu je možné jít pouze na jih.

[10] V logické literatuře se používá označení *nevyhnutelný* stav, ale slovo „neodvratný“ považuji za jasnější. Kdyby slovo *nezabranitelný* patřilo k běžně používaným výrazům českého jazyka, vystihovalo by přesně význam symbolu $\Box$.

Věty aritmetiky jsou nutně pravdivé.

Současná existence faktu a jeho protějšku je nemožná.

Můžu u vás být tak hodinu.

Není pravda, že každá labuť je nutně bílá. Labutě mohou být černé.

K zavraždění srbského premiéra nemuselo dojít.

To snad ani nemůžeš myslet vážně!

Čtenář si z knihovny může vypůjčit maximálně deset svazků najednou.

Je nutné, aby nemocný zachovával klid na lůžku a pravidelně užíval léky.

Velká říjnová socialistická revoluce propukla s historickou nutností.

Nutně potřebuji nový počítač.

Svaté učení může využít poznání ostatních disciplín, ne z nutnosti, ale pro větší jasnost věcí, které obsahuje.[11]

Snadno lze ukázat, že takové nutné a přísně vzato obecné, tudíž čisté soudy apriorní v lidském poznání skutečně jsou.[12]

Cvičení 13. Zkus v krásné nebo filozofické literatuře najít příklady jednotlivých typů modalit.

Možné světy a relace dosažitelnosti[13]

Na příkladu formulí $\Box A \Rightarrow \Diamond A$, $\Box A \Rightarrow A$ a $A \Rightarrow \Diamond A$ jsme viděli, že pro různé typy modalit budeme muset vytvořit různé modální logiky. Łukasiewiczův nápad navrhnout tabulku s více hodnotami, která by chování modalit zachytila, se nejeví jako příliš praktický: pro každou modální logiku bychom museli navrhnout novou tabulku, přičemž není moc zřejmé, jak dosáhnout toho, aby tautologiemi byly právě ty formule, které chceme.[14] Metoda kripkovských modelů vytvořená v 60. letech je zajímavá právě tím, že ji lze použít k zachycení vlastností mnoha různých typů modalit. Nápad vytvářet modely vychází ze zjištění, že každou modalitu charakterizuje rozdělení „stavů světa“ (v logice obvykle přezdívaných *možné světy*) podle toho, za jakých okolností je považujeme za možné a za jakých okolností nikoli.

Podívejme se například na epistemické modality: Mé znalosti jsou omezené. V důsledku toho nedokážu o všech větách rozhodnout, zda jsou pravdivé nebo nepravdivé. Například nedokážu říct, je-li věta „na světě žije v tomto okamžiku přesně 6 456 456 456 lidí“ pravdivá, je to ale (vzhledem k mým velmi chabým znalostem o světové populaci) docela dobře možné. Svět s 6 456 456 456 obyvateli je vzhledem k mým znalostem možný, stejně jako svět, ve kterém dnes v Brně pršelo. Zato vzhledem k mým znalostem není možný svět, ve kterém byl dnes pátek třináctého, protože vím, že je neděle.

My všichni „bydlíme“ v jednom z možných světů, nikdo z nás ale není schopen přesně určit, ve kterém! Nanejvýš se můžeme omezit na množinu možných světů, ve kterých jsou pravdivé výroky odpovídající našim znalostem. Tím je určena *relace dosažitelnosti*: z našeho světa jsou dosažitelné všechny, které odpovídají znalostem, které máme.

Z hlediska logiky není možný svět ničím více a ničím méně než objektem, o kterém víme, které výroky v něm jsou pravdivé a které další možné světy z něj jsou dosažitelné. Přitom předpokládáme, že pravdivost složitějších výroků závisí na pravdivosti jednodušších výroků stejně jako v klasické logice. Například svět, ve kterém je pravda „Mars je planeta“ a také je pravda „Eustach je planeta“ a přitom není pravda „Mars a Eustach jsou planety“, nebudeme považovat za možný.

Název relace dosažitelnosti se může zdát nahodilý, uvědom si ale, že dosud jsme se bavili o epistemických modalitách - to, co je možné, jsme určovali na základě našich znalostí. Stejnou úvahu můžeme ale provést například i pro modality praktické. Schopnosti každého člověka jsou omezené. Stavy světa, kterých mohu dosáhnout, odpovídají právě dosažitelným možným světům! Například si dovedu představit svět, ve kterém uběhnu 100 metrů za 5 vteřin, ale není to pro mě dosažitelný možný svět - nemohu (neumím) uběhnout 100 metrů za 5 vteřin. Kdybych žila v možném světě, ve kterém platí stejné fyzikální zákony jako v našem světě, ale lidé by uměli běhat desetkrát rychleji, byl by pro mě dosažitelný i svět, ve kterém uběhnu 100 metrů za 5 vteřin.

---

[11] Tomáš Akvinský: Summa theologicae. Překlad Tomáš Hančil. Citováno v Diogenes Allen: Filosofie jako brána k teologii, nakladatelství Mlýn, Třebenice 1999, str. 132.

[12] Immanuel Kant: Kritika čistého rozumu, překlad František Krejčí. Citováno v František Marek, Štěpán Zapletal: Filosofická čítanka, nakladatel František Novák, Praha 1948, str. 126.

[13] Protože epistemické logiky jsou speciálním případem modálních logik, bude se tato část podobat příslušné části v kapitole o epistemických logikách. Tam najdeš také další příklady. Epistemické logiky místo symbolu $\Box$ užívají symbol K a neobsahují symbol pro možnost.

[14] Bylo dokázáno, že pro mnohé modální logiky takovou tabulku ani navrhnout nelze.

Každé pojetí možnosti tedy každému možnému světu určuje množinu dosažitelných možných světů. V případě, že možnost pojímáme epistemicky, to budou ty možné světy, které jsou v souladu s našimi znalostmi, v případě, že ji pojímáme deonticky, to budou ty možné světy, které jsou v souladu s našimi zákony a etickými normami …

Rozmysli si, že to, které světy jsou dosažitelné, bude obecně záviset také na tom, ve kterém možném světě se právě nacházíme. Například víme, že hodím-li míč do vzduchu, spadne zpátky na zem. Pokud se zrovna nacházím v možném světě, ve kterém jsem právě vyhodila míč do vzduchu, omezuje tento poznatek množinu dosažitelných možných světů na ty, ve kterých míč spadne na zem. Nacházím-li se v možném světě, ve kterém jsem míč do vzduchu nevyhodila, jsou (vzhledem k tomuto poznatku) dosažitelné všechny možné světy.

Zatím jsme popisovali, které možné světy budeme považovat za dosažitelné, víme-li, co považujeme za možné. Položme si nyní opačnou otázku: je dáno, které možné světy jsou dosažitelné; o kterých výrocích řekneme, že mohou být pravdivé? A o kterých řekneme, že jsou nutně pravdivé?

Odpověď není složitá: „A může být pravdivé“ je pravdivé tehdy, je-li dosažitelný alespoň jeden možný svět, kde je A pravdivé; „nutně A“ je pravdivé tehdy, je-li A pravdivé ve všech dosažitelných možných světech.

Představme si situaci, ve které Pepíček ve škole rozbil vitrínu s vycpanými savci. Když si maminka přečte poznámku v žákovské knížce, dostane provinilec na vybranou: „Když budeš celé odpoledne hodný, budeš bit ode mne a tatínkovi nic neřeknu, ale jestli budeš zlobit, dostaneš od tatínka pořádný výprask.“ Pepíček vidí, že výprask je neodvratný, tedy nutný (v obou dosažitelných možných světech bude bit), ale že může dosáhnout toho, aby nebyl moc veliký (svět, ve kterém dostane výprask od maminky, je dosažitelný). V této situaci tedy může Pepíček říct: „Nutně budu bit, ale možná nebudu bit moc.“

Cvičení 14. Zkusme nyní definovat relaci dosažitelnosti pro deontické modality. Můžeme to udělat například tak, že z S jsou dosažitelné světy, v nichž nedochází k porušování žádných morálních principů, které nejsou porušeny v S - tedy světy, které nejsou „o nic horší“ než svět S. Rozhodni, jak vypadá relace dosažitelnosti mezi následujícími třemi světy:

:-(Simon Legree vlastní otroky a bije je.
:-| Simon Legree vlastní otroky, ale nebije je.
:-) Simon Legree nevlastní otroky ani nikoho nebije.

Předpokládej, že mezi světy :-(, :-| a :-) nejsou žádné další rozdíly vzhledem k morálním principům, které zakazují vlastnit otroky a bít kohokoli.

Matematická definice kripkovských modelů[15]

Připomeňme si, že relace R na množině W je nějaký vztah, do kterého vstupují vždy dva prvky množiny W. Například vztah „A je bratr B“ je relace na množině lidí: Jeník je bratrem Petra, Petr je bratrem Jeníka, Jeník je bratrem Mařenky (ale Mařenka není bratrem Jeníka!).[16]

Kripkovský model se skládá z neprázdné *množiny možných světů* W a *relace dosažitelnosti* $\leq$ na množině W.[17] O každém možném světě S je určeno, které výroky A v něm jsou pravdivé (což značíme $S \Vdash$ A) a které pravdivé nejsou (což značíme $S \nVdash$ A). Toto určení ale není libovolné, musí totiž splňovat následující podmínky:[18]

[15]Tato definice se podobá definici kripkovských modelů intuicionistické logiky, ale je jednodušší: na relaci dosažitelnosti neklade žádné zvláštní podmínky a podmínky pro pravdivost ¬A, A ∧ B, A ∨ B, A ⇒ B a A ⇔ B jsou stejné jako v klasické logice. Definice kripkovských modelů pro epistemické logiky je speciálním případem definice pro modální logiky. Slovo „kripkovský“ budeme často pro přehlednost vynechávat; v tomto textu jiné než kripkovské modely neuvažujeme.

[16]Matematikové považují relaci za množinu uspořádaných dvojic, což umožňuje předchozí tři věty napsat stručněji: „být bratrem“ = {(Jeník, Petr), (Petr, Jeník), (Jeník, Mařenka), … }.

[17]Stejně jako v minulých kapitolách je třeba zmínit, že formálně vzato patří k modelu ještě *valuace*, která každému možnému světu určuje, které atomární formule, tedy výroky bez logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \Diamond, \Box$, v něm jsou pravdivé.

[18]Vyjmenované podmínky musí být splněny ve **všech** možných světech $S, T \in W$ a musí platit pro všechny formule A, B!

- $S \Vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{A}$ a $S \Vdash \mathrm{B}$
- $S \Vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{A}$ nebo $S \Vdash \mathrm{B}$
- $S \Vdash \neg \mathrm{A}$ právě tehdy, když neplatí $S \Vdash \mathrm{A}$
- $S \Vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{B}$ nebo neplatí $S \Vdash \mathrm{A}$
- $S \Vdash \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ právě tehdy, když $S \Vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ a $S \Vdash \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$
- $S \Vdash \Box \mathrm{A}$ právě tehdy, když $S \leq T$ potom $T \Vdash \mathrm{A}$
- $S \Vdash \Diamond \mathrm{A}$ právě tehdy, když existuje T takové, že $S \leq T$ a $T \Vdash \mathrm{A}$.

$S \Vdash \mathrm{A}$ čteme „v možném světě S je formule A pravdivá“ nebo „v možném světě S je splněna formule A“. $S \nVdash \mathrm{A}$ čteme „v možném světě S není splněna formule A“ nebo „v možném světě S není formule A pravdivá“.

Všimni si, že definice modelu neklade žádné podmínky na pravdivost atomických výroků. To znamená, že si můžeme určit zcela libovolně, které atomické výroky jsou v jednotlivých možných světech pravdivé a které nepravdivé.

Model, v jehož některém světě není formule A pravdivá, nazveme *protipříklad pro formuli A*.

Cvičení 15. V případě intuicionistické logiky se mohlo stát, že $S \nVdash \mathrm{A}$ a současně $S \nVdash \neg \mathrm{A}$. Ukaž, že v modálních logikách platí vždy alespoň jedna z možností $S \Vdash \mathrm{A}$ a $S \Vdash \neg \mathrm{A}$, takže vyjádření „v možném světě S není formule A pravdivá“ ($S \nVdash \mathrm{A}$) říká totéž jako vyjádření „v možném světě S je formule A nepravdivá“ ($S \Vdash \neg \mathrm{A}$).

Cvičení 16. Ukaž, že ve světě, ze kterého nejsou dosažitelné žádné možné světy (ani on sám), je všechno nutné, ale nic není možné.

Cvičení 17. Ukaž, že pokud nějaká formule obsahuje nejvýše n výskytů symbolů $\Box$ a $\Diamond$, tak její pravdivost v daném světě závisí na pravdivosti atomických formulí ve světech, do kterých se lze dostat po nejvýše n šipkách.

Někdy budeme potřebovat mluvit o všech modelech, které lze vytvořit k dané množině možných světů W a relaci dosažitelnosti $\leq$. Proto dvojici W a $\leq$ nazveme *(kripkovský) rámec*. Vzhledem k tomu, že si můžeme libovolně zvolit, které atomické výroky jsou pravdivé v jednotlivých možných světech, lze na daném rámci vytvořit různé modely.

Řekneme, že formule A *platí* v daném rámci, pokud je ve všech modelech na tomto rámci pravdivá ve všech možných světech.

Kalkuly modálních logik

Jak už bylo řečeno výše, omezují se logikové většinou na ty modální logiky, v nichž nutné je to, co nemůže nebýt a možné je to, co není nutně jinak. Proto budeme bez dalších zmínek předpokládat, že všechny kalkuly obsahují následující dvojici axiomů:

$\Box \mathrm{A} \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg \mathrm{A}$ definice $\Box$ pomocí $\Diamond$

$\Diamond \mathrm{A} \Leftrightarrow \neg \Box \neg \mathrm{A}$ definice $\Diamond$ pomocí $\Box$

Některé z obvyklých axiomů modálních logik mají tradiční a běžně užívané názvy. Jmenujme si alespoň některé:[19]

K	$\Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\Box \mathrm{A} \Rightarrow \Box \mathrm{B})$
D	$\Box \mathrm{A} \Rightarrow \Diamond \mathrm{A}$
T	$\Box \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$
4	$\Box \mathrm{A} \Rightarrow \Box\Box \mathrm{A}$
5	$\Diamond \mathrm{A} \Rightarrow \Box\Diamond \mathrm{A}$

Při formulaci kalkulů modálních logik se setkáváme se dvěma pravidly. Jedno je nám už známé pravidlo modus ponens:

Pokud jsi už odvodil A a také $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, můžeš odvodit B. *pravidlo modus ponens*

[19] To jsou ale romantické názvy!

Druhé pravidlo vyjadřuje, že všechny dokazatelné věty jsou nutně pravdivé:

Pokud jsi už odvodil A, můžeš odvodit □A. *pravidlo necesitace*

Výrokové modální logiky, které obsahují klasickou výrokovou logiku, axiom **K** a pravidla modus ponens a necesitace se nazývají *normální*. Obvykle jim dáváme názvy podle toho, které axiomy obsahují, tedy např. K, KD45. Logika KT se často označuje pouze T, pro logiky KT4 a KT5 se používá označení S4 a S5.

* Vlastnosti kripkovských modelů

Cvičení 18. Ukaž, že všechny tautologie klasické logiky platí ve všech modelech. Rozhodni, zda lze zvolit množinu modelů, ve které by platily právě tautologie Łukasiewiczovy trojhodnotové modální logiky.

Logikové se vždy snaží vytvářet kalkuly tak, aby v nich byly dokazatelné právě ty formule, které jsou pravdivé bez ohledu na okolnosti, za jakých pravdivost vyhodnocujeme. V klasické logice to znamenalo, že dokazatelné by měly být všechny tautologie a nic víc.[20] V modálních logikách si budeme přát, aby dokazatelné byly právě ty formule, které platí ve všech rámcích. O tom, že se takové kalkuly podařilo sestrojit, vypovídají věty o korektnosti a o úplnosti:

Věta 19. (O korektnosti logiky K) *Všechny formule, které jsou dokazatelné v logice K, platí ve všech rámcích, tedy jsou pravdivé ve všech možných světech všech modelů. Speciálně ve všech rámcích:*

- *platí všechny tautologie klasické logiky.* *klasická logika*
- *platí* $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$. *axiom* **K**
- *platí-li* A *a* $A \Rightarrow B$, *platí i* B. *modus ponens*
- *pokud platí* A, *platí i* $\Box A$. *necesitace*

Důkaz. Dokážeme pouze axiom **K**, ostatní části jsou podobné. Budeme postupovat sporem. Nechť tedy v některém možném světě S je implikace $\Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B})$ nepravdivá.

● $S \not\vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B})$

Protože pravdivost implikace je definována stejně jako v klasické logice, můžeme z nepravdivosti implikace usoudit, že první člen je pravdivý, ale druhý je nepravdivý.

$S \vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})$

● $S \not\vdash \Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B}$

Z nepravdivosti $\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B}$ můžeme opět usoudit, že $\Box\mathrm{A}$ je pravda, ale $\Box\mathrm{B}$ nikoli.

$S \vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}), \Box\mathrm{A}$

● $S \not\vdash \Box\mathrm{B}$

To znamená, že ve všech možných světech dosažitelných z S je A pravdivé, ale v některém - označme jej R - není pravdivé B.

$R \vdash \mathrm{A}$

● $R \not\vdash \mathrm{B}$

$S \vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}), \Box\mathrm{A}$

● $S \not\vdash \Box\mathrm{B}$

V možném světě R tedy není pravdivá implikace $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, a protože R je dosažitelný z S, dostáváme $S \not\Vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})$. To je spor s předpokladem, že $S \Vdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})$.

Cvičení 20. Dokaž, že pravidlo necesitace je korektní vzhledem k množině všech rámců, t.j. dokaž poslední bod předešlé věty.

Bez důkazu si uveďme také sestřičku věty o korektnosti:

Věta 21. (O úplnosti logiky K) *Formule, která platí ve všech rámcích, je dokazatelná v logice K.*

[20] *Tautologie* je formule, jejíž hodnota je ve všech řádcích tabulky 1.

Podle věty o korektnosti nemá smysl snažit se najít množinu modelů, ve které by neplatily některé z formulí, které jsou dokazatelné v logice K. Konkrétně to znamená, že modely jsou vhodné ke zkoumání pouze normálních modálních logik (tedy těch, které obsahují všechny formule dokazatelné v logice K). Příkladem logiky, která toto kritérium nesplňuje, je Łukasiewiczova trojhodnotová modální logika, která neobsahuje některé klasické tautologie (viz cvičení 5).

Můžeme si zvolit nějakou formuli F, která není v K dokazatelná, a zkoumat, co se stane, přidáme-li ji jako další axiom. Vzniklou logiku, která má více axiomů než logika K, označme L. Ve cvičení 12 v 1. kapitole jsme si ukázali, že bude-li přidaná formule F obsahovat pouze spojky $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$, budeme (čistě na základě klasické výrokové logiky) umět odvodit spor A $\wedge\neg$A. Proto logika L nebude mít žádný model, protože v žádném možném světě nemůže být současně pravdivé A i $\neg$A. Zkusíme tedy přidat nějakou formuli, která obsahuje také symboly $\Diamond$ a $\Box$ a budeme zkoumat, jak vypadá množina rámců, ve kterých platí všechny formule dokazatelné v logice L.

Žádné rámce nemohou přibýt, protože všechny modely (nad všemi rámci) jsou modely logiky K. Navíc platí, že pokud nějaká logika L obsahuje formuli F, tak tato formule bude obsažena i v každé logice L', kterou získáme přidáním nějakého axiomu k L. Pokud F neplatí v daném rámci, nic se na tom nezmění přidáním dalšího axiomu do L. Díky tomu se množina rámců, ve kterých platí všechny formule určité logiky, může přidáním axiomu skutečně jen zmenšit.

Cvičení 22. Dokaž, že v nějakém rámci platí axiom **D**, právě když je z každého možného světa dosažitelný nějaký možný svět.

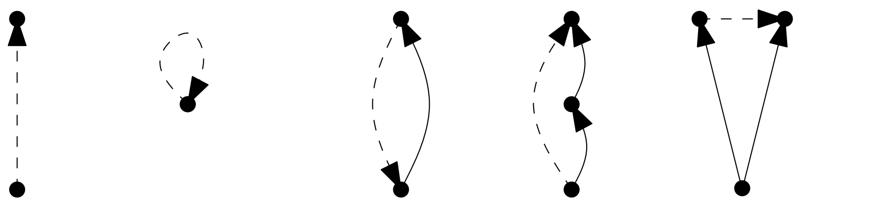
Na základě předchozího cvičení vidíme, že modální formule mohou popisovat vlastnosti rámců. Ke každé modální formuli můžeme zkoumat množinu všech rámců, ve kterých platí; často není těžké popsat vlastnost, kterou mají všechny společnou. V následující větě shrneme vlastnosti rámců odpovídající nejběžnějším modálním axiomům a jejich kombinacím.

Věta 23. (O korektnosti a úplnosti různých logik) *Následující normální logiky jsou korektní a úplné vzhledem k množině všech modelů s danou vlastností. Jinak řečeno, všechny formule dokazatelné v kalkulu se zmíněnými axiomy platí ve všech modelech s danou vlastností a pokud nějaká formule platí ve všech modelech s danou vlastností, je dokazatelná v kalkulu se zmíněnými axiomy.*

KD	$\Box A \Rightarrow \Diamond A$	*sériovost*	$\forall S \in W\ \exists T \in W\quad S \leq T$
T = KT	$\Box A \Rightarrow A$	*reflexivita*	$\forall S \in W\quad S \leq S$
K4	$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$	*tranzitivita*	$\forall S, T, U \in W\quad (S \leq T \wedge T \leq U) \Rightarrow S \leq U$
K5	$\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$	*eukleidovskost*	$\forall S, T, U \in W\quad (S \leq T \wedge S \leq U) \Rightarrow T \leq U$
S4 = KT4			*reflexivita a tranzitivita*
S5 = KT5		*ekvivalence*	*reflexivita, tranzitivita a symetrie*

Zkusme si v lidské řeči přeříkat, co znamenají ty podivné formule a cizí slova v předešlé větě:

- sériovost: z každého světa je dosažitelný nějaký svět
- reflexivita: každý svět je dosažitelný sám ze sebe
- tranzitivita: všechny světy, kam lze dojít „po šipkách“, jsou dosažitelné
- eukleidovskost: mezi všemi světy, do kterých se lze dostat z u, vedou šipky
- symetrie: šipky jsou obousměrné ($\forall S, T \in W\quad S \leq T \Rightarrow T \leq S$)
- ekvivalence: možné světy jsou rozděleny na skupiny, mezi kterými nevedou žádné šipky, a uvnitř každé vedou šipky z každého světa do každého



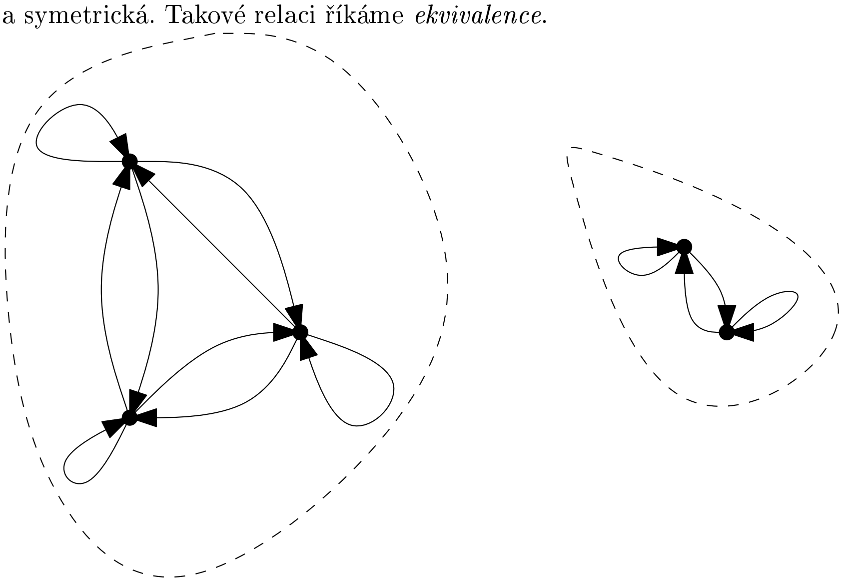
sériovost reflexivita symetrie tranzitivita eukleidovskost

Na několika cvičeních si ukážeme, k čemu se nám věty o korektnosti a úplnosti mohou hodit:

Cvičení 24. Ukaž, že v logice T je dokazatelná formule A $\Rightarrow \Diamond$A. Dále ukaž, že v logice T je dokazatelný axiom **D**, tedy že KT = KDT.

Cvičení 25. Ukaž, že formule $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$ není dokazatelná v logice T, ale je dokazatelná v logice S4 = KT4.

Cvičení 26. Rozmysli si, že možné světy jsou rozděleny do skupin tak, že z každého světa jsou dosažitelné všechny světy v „jeho" skupině a žádné jiné, právě když je relace dosažitelnosti reflexivní, tranzitivní a symetrická. Takové relaci říkáme *ekvivalence.*



Cvičení 27. Přidání axiomu odpovídá přidání příslušné podmínky na relaci dosažitelnosti. Například logika S5 = KT5 je korektní a úplná vůči všem modelům, vůči kterým jsou korektní a úplné jak logika KT, tak logika K5, tedy vůči všem reflexivním eukleidovským modelům. Ukaž, že relace dosažitelnosti je reflexivní a eukleidovská, právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní (a tedy to je ekvivalence, jak jsme konstatovali ve znění věty).

Teď jsme se na chvíli zabrali do ryze matematického zkoumání modelů a vlastností jejich relace dosažitelnosti. Pro logika může být takové zkoumání skutečně vzrušující, protože mu dává nové prostředky, jak zkoumat vlastnosti různých logik pomocí jim odpovídajících vlastností relace dosažitelnosti. Například ze cvičení 27 vyplývá, že axiom **4** je dokazatelný v logice S5 = KT5. To znamená, že KT5 = KT45 a že logika S5 obsahuje všechny formule, které jsou dokazatelné v logice S4 = KT4!

Typy modalit a modální logiky

Možná se ptáš, jak to všechno souvisí s různými typy modalit, které jsme měli v úmyslu formalizovat pomocí modelů. Na základě toho, co jsme si již řekli, bys asi již sám dokázal určit, které soustavy axiomů jsou vhodné či nevhodné pro různé typy modalit.

Například o redukcionistickém pojetí modalit jsme si řekli, že v něm platí $\Box A \Rightarrow A$ a $A \Rightarrow \Diamond A$, což jsou formule, které neplatí v logice K, ale platí v logice T. Logik zastávající redukcionistické stanovisko tedy do svého systému přijme axiom **T**.

Připomeňme, že při epistemickém chápání modalit budeme formuli $\Box A$ číst jako „vím, že A". V tomto kontextu se pro osobu, o jejíchž znalostech mluvíme, často používá slovo *agent.* Už jsme si řekli, že axiom **D:** $\Box A \Rightarrow \Diamond A$ vyjadřuje požadavek, aby agentův systém znalostí neobsahoval spor. Protože jsme se rozhodli pracovat s normálními logikami, musíme přijmout i axiom **K:** $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$.[21] Ten vyjadřuje *logickou racionalitu* agenta: pokud vím, že A implikuje B (což se značí $\Box(A \Rightarrow B)$) a vím, že A (tj. $\Box A$), tak usoudím, že B (tj. $\Box B$).[22]

Nyní si musíme položit otázku, zda předpokládáme, že znalosti agenta jsou v souladu se skutečným stavem věcí a přijímáme i axiom **T:** $\Box A \Rightarrow A$, nebo jestli připouštíme možnost, že se mýlí. V případě, že možnost mýlky nepřipouštíme, můžeme se rozhodnout mezi logikou S4 a S5. V logice S4 platí $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$, tedy pokud agent něco ví, pak ví, že to ví. V logice S5 platí navíc $\neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A$, tedy pokud agent něco

[21] Název axiomu **K** pochází pravděpodobně právě z anglického slova knowledge - poznání.

[22] Stručně řečeno, axiom **K** říká, že agent není úplně hloupý.

neví, pak ví, že to neví. V praxi se nejčastěji setkáváme s agenty typu S4 v podobě různých počítačových databází, ve kterých je v rozumném čase nemožné ověřit, že nějakou informaci neobsahují, a tedy o nich neplatí $\neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A$.

Podívejme se nyní na deontické modality. Již jsme si řekli, že symbol $\Box A$ obvykle čteme jako „je přikázáno nastolit stav A" a symbol $\Diamond A$ jako „je dovoleno nastolit stav A". Při tvorbě modelů budeme za možné světy považovat různé stavy světa. Z daného možného světa budou dosažitelné pouze *dovolené* stavy světa - místo o relaci dosažitelnosti bychom tedy mohli mluvit o relaci dovolení. Pokud jsou dovoleny pouze stavy, v nichž je výrok A pravdivý, je (implicitně) přikázáno nastolit stav A. Naopak, pokud není dovolen žádný stav, v němž je A pravdivý, je A zakázáno. Například mám dovoleno používat různé dopravní prostředky, takže mezi dosažitelnými stavy světa jsou ty, v nichž jedu autobusem, tramvají, na kole, na kanoi atd., ale svět, v němž řídím formuli 1 dosažitelný není, protože k tomu nemám oprávnění. Tedy mám dovoleno jet tramvají a mám zakázáno jet formulí 1.

Pro světy dosažitelné ze světa S se často používá označení *deontické alternativy* S a lze je chápat jako *deonticky perfektní* - jsou v nich totiž splněny všechny příkazy. Při tom předpokládáme, že v deonticky perfektních světech jsou splněny všechny v nich platné příkazy, tedy že jsou dosažitelné samy ze sebe. Příslušná modální formule zní $\Box(\Box A \Rightarrow A)$ a odpovídající vlastnost relace dosažitelnosti popisuje formule $\forall S, T \in W \quad S \leq T \Rightarrow T \leq T$.

Cvičení 28. **a)** Rozmysli si, že $\Box(\Box A \Rightarrow A)$ říká totéž jako $\forall S, T \in W \quad S \leq T \Rightarrow T \leq T$.
b) Ukaž, že $\Box(\Box A \Rightarrow A)$ je dokazatelná v logice T.
c) Zdůvodni, proč do deontické logiky nepřidáme přímo axiom **T**.

Při budování deontických logik se neustále naráží na problémy s překladem formulí zpátky do přirozené řeči. Snad nejznámější je takzvaný Rossův paradox:

V logice K (a tedy i ve všech zmíněných deontických logikách) platí $\Box A \Rightarrow \Box(A \vee B)$. Nechť $\Box A$ označuje příkaz „pošli tento dopis!" a $\Box B$ označuje „spal tento dopis!"; zdá se, že v logice K z příkazu „pošli tento dopis!" vyplývá příkaz „pošli nebo spal tento dopis!".

Správněji bychom měli napsat, že A označuje výrok „dopis je poslán", $\Box A$ označuje pobídku „nastol stav, ve kterém dopis je poslán" a analogicky pro B. Vidíme, že musíme být opatrní - formule $\Box A \Rightarrow \Box(A \vee B)$ zachycuje zcela správnou úvahu, že platí-li ve všech deonticky perfektních (a tedy dovolených) stavech světa výrok, že dopis je poslán, platí tam také výrok, že dopis je poslán nebo spálen.

Směsice poznámek a citátů

Aristotelův pohled na výroky o budoucnosti

Soud má tedy podle Aristotela pravdivostní hodnotu nutně, ale neurčitě, tj. nemá nutně právě tuto pravdivostní hodnotu. Když odhlédneme od toho, že často nedovedeme pravdivostní hodnotu určit, čili od tzv. rozhodnutelnosti, pak je těžko pochopitelné, jak může soud mít sám o sobě pravdivostní hodnotu neurčenou. (. . .) Existuje ale hlubší důvod, proč se Aristoteles uchýlil ke koncepci zprvu neurčené pravdivostní hodnoty. On se totiž obával, že bychom fixováním soudu o budoucím jevu na určitou pravdivostní hodnotu zrušili nahodilé prediikáty, že bychom do reality zavedli striktní determinismus. (. . .) Skutečně, Aristoteles zaměňuje nutnost logickou s nutností reálnou. Je-li pravda shoda poznání s realitou a je-li soud „Petr zítra udělá zkoušku" pravdivý, pak skutečně Petr nutně má ten predikát, nutně v určitém čase (zítra) zkoušku udělá. Ale nutností v řádu dedukce, nutností konsekvenční. To znamená, že za daných předpokladů musím uznat, že Petrovi akt vyjádřený predikátem patří; ta nutnost vyplývá právě z oněch předpokladů. Je to tedy evidentně nutnost logická, daná strukturou určitého myšlenkového pochodu. (. . .) Aristoteles však z této logické nutnosti dělá nutnost reálnou, podle níž je Petr k tomu aktu reálně determinován - a to je přechod neoprávněný. Jde totiž o promítání nutnosti založené toliko v určitém myšlenkovém pochodu do reality, v níž se taková nutnost nenachází. (. . .) Má-li tedy soud o budoucím jevu nutně pravdivostní hodnotu, nesignalizuje to žádné naprogramování reality, nelze z toho vyvozovat nežádoucí fatalismus.

Jiří Fuchs: Filosife - Úvod do filosofie, 1. Filosofická logika, str. 104-105.

Co je nemožné?

Co tedy vlastně pokládáme za nemožné? Je například nemožné, aby normální člověk uběhl 100 m za pět vteřin, *aby* nenastala bouřlivá reakce, když bylo nalito do kyseliny sírové malé množství vody, *aby* ze slunečnicového semena vyrostlo něco jiného než slunečnice *nebo aby s vámi třeba* krtek debatoval o koupi zahradní sekačky. *To jsou věci empiricky nemožné. Výše uvedené je ve sporu s tím, o čem nás dnes a denně přesvědčuje svědectví smyslů nebo soudobá věda. Podaří-li se spor formulovat tak, aby se protivníkův názor ukázal jako empiricky nemožný, lze jej snadno poukazem na svědectví smyslů nebo poznatky soudobé vědy zamítnout.*

Dále se často setkáváme se záležitostmi, které jsou nemožné, protože bychom byli doslova znemožněni, a to společensky znemožněni, kdybychom je připustili. Jednali bychom pak totiž proti zavedeným zvyklostem, konvencím či normám, které jsou v dané společnosti uznávané a jejichž dodržování je vyžadováno, případně kontrolováno, a jejich překračování se netoleruje, nebo dokonce postihuje. V tomto smyslu je nemožné přejít hranici bez platného pasu, nepomoci člověku, který je v ohrožení života a naši pomoc potřebuje, přecházet ulici „na červenou", nepřijít na schůzku, když jsme to slíbili, smát se v nevhodnou chvíli, *ale třeba i* nepozdravit své známé *apod. Jistě cítíme, že nemožnost nedodržet konvence a normy má „slabší" charakter než nemožnost překračovat empirické zákony. Kategoričnost konvencí a norem je kategoričností ve smyslu Kantova kategorického imperativu, jehož uplatňování je záležitostí morálky v případě jednotlivce a mravního étosu v případě společnosti. Její charakter může být v konkrétních případech pociťován různě naléhavě. Považujeme za důležité tento druh nemožnosti uvažovat zvlášť vedle nemožnosti empirické pro odlišné důvody, které k jejímu respektování vedou. Vedle nemožnosti plynoucí z nerespektování přírodních zákonů chceme tedy brát v úvahu i kategorickou nemožnost nerespektování konvencí a norem, jakkoli jsou ony vázány na určitý zavedený způsob společenského kontaktu a mohou se proto v různých společnostech významně lišit. Spory tohoto druhu spadají do oblasti právní a etické, a podaří-li se je formulovat tak, aby se protivníkův názor ukázal jako společensky nepřijatelný, lze jej jako takový zamítnout.*

Je ještě něco, co pokládáme za nemožné? Z logického hlediska je nemožné, aby auto mělo současně tři a čtyři kola, *aby* byl určitý obrazec současně čtverec i kruh. *Je například nemožné tvrdit, že* Štěpánka Hilgertová vyhrála a současně nevyhrála zlatou olympijskou medaili. *Nemožné je to proto, že se v uvedených příkladech prohřešujeme proti klasickému bezespornému způsobu vyjadřování. (. . .) Chceme-li vypovídat o skutečnosti, pak logická nemožnost představuje na jedné straně vyhrocenou formulaci dvou protikladných alternativ, a na druhé straně výzvu vybrat jednu z nich, totiž tu, která vyjadřuje skutečnost, a zavrhnout tu druhou, empiricky, právně nebo eticky nemožnou. Logická nemožnost a spor je tedy z hlediska klasické logiky totéž. Příklady jako* auto má právě tři a právě čtyři kola, tento obrazec je současně čtverec a kruh, Štěpánka Hilbertová vyhrála a také nevyhrála zlatou olympijskou medaili se *prohřešují proti zákonu sporu, který je základním zákonem klasické logiky.*

Co rozumíme matematickou nemožností? Pokud věříme, že matematika je ve své podstatě empirická věda, pak matematická nemožnost je totéž co empirická nemožnost. Pokud věříme, že matematické pravdy mají charakter logických (analytických) pravd, pak je matematická nemožnost totéž co logická nemožnost. Mezi významnými mysliteli minulými i současnými lze nalézt zastánce obou hledisek.

Božena Švandová: Explikace termínu spor v logice. Ve sborníku Miscellanea logica IV, str. 8-10.

Co je možné a nutné?

Hranice možného jsou hranice smysluplného, hranice smysluplné věty, užití jazyka ve vší jeho různorodosti a flexibilitě. Nutná jsou pravidla, jimiž se při tomto užití implicitně řídíme, staletími vyjeté koleje, do nichž jsme výchovou uvedeni, abychom v souladu s našimi stávajícími potřebami pomalu, ale jistě měnili jejich dráhu a směr.

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 33.

Je na nutnosti něco vznešeného?

Quine o tom, v jakém kontextu obvykle používáme slůvko „nutně“, napsal:

Větu modifikujeme příslovcem „nutně“ tehdy, je-li to věta, kterou pokládáme za přijatelnou pro toho, s kým mluvíme, a je-li vyslovena jenom jako krok k úvahám o větách sporných. Nebo píšeme „nutně“, abychom naznačili něco, co plyne z obecností již vyložených v kontrastu s hypotézami novými. Taková užitečnost je lokální, dočasná a neproblematická, jako užitečnost indexických výrazů.[23] *Vznešenost nutných pravd se tedy obrací ne zcela v prach, ale v docela obyčejnou hlínu.*

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 42.[24]

Proč se bavit o různých druzích modalit?

Jestliže se v souladu s Quinovou dikcí ukazuje být tradiční „nutnost“ filozofů a metafyziků alespoň kritickému oku jako prázdná a ve svém smysluplném užití všední, snad je naopak dílčí rozbor všedního užití slov jako „možný“ a „nutný“ v jeho rozmanitosti dokladem toho, jak významnou a netriviální složkou našeho jazyka modality jsou, a jak netriviální musí být příslušná analýza, abychom byli schopni případné konflikty vzniklé z jejich neopatrného, nekritického úzu úspěšně řešit. Nárys této rozmanitosti spolu s pokusnou sémantickou rekonstrukcí je také v duchu Wittgensteinovy pozdní filosofie jediné, co v dané věci můžeme skutečně dělat, totiž před vlastním hlásáním toho, co je nutné a co jenom možné, dokázat rozlišit přípustku („mohlo to být jak říkáte, nevím …“) od irealis („mohli jsme být osvobozeni Američany (ale nebyli)“) a kontrafaktuálního kondicionálu („kdyby lidé byli nesmrtelní, byl by nesmrtelný i Sókratés“), praktickou modalitu od teoretické, deontickou od ontické atd.

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 48-49.

Jak si představit kripkovský model

Peter Volek vysvětluje sémantiku možných světů pomocí následujícího přirovnání:

<u>Teóriu možných svetov</u> si možno <u>predstaviť</u> ako budovu s mnohými izbami, z ktorých čiastočne vidno do iných izieb. Každá izba predstavuje možný svet. V každej izbe stojí jedna tabuľa, na ktorej sú popísané výroky pravdivé v tejto izbe. Ak sa postavíme do jednej z týchto izieb, stojíme v aktuálnom svete a vidíme pritom do ostatných izieb. Výroky, ktoré uvidíme napísané na tabuľkách vo všetkých izbách, sú nutne pravdivé výroky, a výroky, ktoré nájdeme aspoň na tabule v jednej izbe, sú možne pravdivé výroky.

Pritom si možno predstaviť rozličné druhy relácie prístupnosti medzi jednotlivými izbami. Podľa toho, ako sa chápe relácia prístupnosti medzi jednotlivými možnými svetmi, jestvujú rozličné systémy modálnej logiky.

<u>Situácia, v ktorej sú všetky možné svety prístupné zo všetkých,</u> zodpovedá <u>modálnemu systému S5</u>.

Peter Volek: Úvod do logiky a teórie vedy, str. 114-115.

[23] *Indexický výraz* je slovo, které k něčemu odkazuje; k čemu odkazuje závisí na kontextu. Například slova jako „tam“ nebo „on“ jsou indexické výrazy.

[24] Kolman cituje z Peregrinova překladu článku Willard Van Orman Quine: Hledání pravdy, nakladatelství Hermann a synové, Praha 1994.

Je náš svět nejlepší?

Leibniz, jak známo, považoval náš svět za „nejlepší" z možných světů, což Schopenhauer pohotově opravil na věrohodnější „když už, tak nejhorší".

Vojtěch Kolman: Elementy kritiky modalit. Ve sborníku Možnost, skutečnost, nutnost, str. 25.

Gödelův důkaz Boží existence

V pozůstalosti významného logika Kurta Gödela se našel následující důkaz Boží existence, který se v mnohém podobá důkazům středověkým, ale využívá notaci moderní modální logiky (a to predikátové logiky druhého řádu).

Uvažujme o vlastnosti `být božský`; to, že nějaký objekt x je božský, označíme Gx. Podobně $\mathrm{V}x$ a $\mathrm{W}x$ značí, že objekt x má vlastnost V, respektive W.

Dále předpokládejme, že některé vlastnosti jsou pozitivní; množinu pozitivních vlastností značme $\wp$. Důkaz vychází ze čtyřech axiomů:

Je-li nějaká vlastnost V pozitivní, pak ¬V není pozitivní. $\mathrm{V} \in \wp \;\Rightarrow\; (\neg\mathrm{V}) \notin \wp$ (1)

Všechny vlastnosti, které nutně vyplývají z pozitivních vlastností, jsou pozitivní.

$$\{\mathrm{V} \in \wp \wedge \Box(\mathrm{V}x \Rightarrow \mathrm{W}x)\} \;\Rightarrow\; \mathrm{W} \in \wp \quad (2)$$

Božská bytost má nutně všechny dobré vlastnosti. $Gx \;\Rightarrow\; \Box(\mathrm{V} \in \wp \Rightarrow \mathrm{V}x)$ (3)

Být božský je pozitivní vlastnost. $G \in \wp$ (4)

Na základě těchto axiomů lze dokázat, že je-li nějaká vlastnost pozitivní, pak je možné, že existuje objekt s touto vlastností: $\mathrm{V} \in \wp \;\Rightarrow\; \Diamond\exists x \mathrm{V}x$ (5)

pro spor předpokládejme, že $\Box\forall x \neg\mathrm{V}x$

implikace s nepravdivým předním členem je pravdivá, takže $\Box(\mathrm{V}x \Rightarrow \neg\mathrm{V}x)$

Podle axiomu (2) a předpokladu $\mathrm{V} \in \wp$ dostáváme $\neg\mathrm{V} \in \wp$, což je spor s axiomem (1).

Takže $\mathrm{V} \in \wp \;\Rightarrow\; \Diamond\exists x \mathrm{V}x$.

Z (4) a (5) plyne, že možná existuje něco božského. $\Diamond\exists x Gx$ (6)

Nyní ukážeme, že je-li něco božské, pak to je nutně božské: $Gx \Rightarrow \Box Gx$ (7)

Dle (4) $G \in \wp$.

Dle (3) tedy $Gx \Rightarrow \Box Gx$.

Nyní ukážeme, že `nutně existuje nějaký božský objekt:` $\Box\exists x Gx$

Podle (6) a (7) $\Diamond\exists x \Box Gx$. Z toho lze na základě predikátové modální logiky S5 odvodit, že $\Diamond\Box\exists x Gx$. V logice S5 je ovšem formule začínající více modalitami ekvivalentní formuli začínající poslední z těchto modalit, taže dostáváme $\Box\exists x Gx$.

Poznámka k Rossově paradoxu

Osobně mne velmi překvapilo zjištění, že některým čtenářům tohoto textu se na Rossově paradoxu nezdálo nic podivného. Zdá se, že mezi matematiky je rozšířená představa, že sémantika klasické logiky „správně" vystihuje povahu spojek přirozeného jazyka; z tohoto hlediska samozřejmě není na Rossově paradoxu nic paradoxního - pokud ke splnění úkolu musím donést dopis na poštu, tak jej musím donést na poštu nebo spálit, takže z příkaz „dones tento dopis na poštu!" vyplývá příkaz „dones tento dopis na poštu nebo jej spal!".

Proč se nám tato implikace nelíbí? Dostanu-li příkaz „rozdělej oheň!", budu v duchu uvažovat asi takto: „nejprve musím donést nějaké dřevo, sehnat papír na podpal a sirky nebo zapalovač". V tomto smyslu z příkazu „rozdělej oheň!" vyplývají příkazy „dones nějaké dřevo! sežeň papír na podpal! sežeň sirky nebo zapalovač!". Mohu nyní postupovat tak, že „zapomenu" na původní příkaz a nejprve splním příkazy, které jsou jeho důsledkem; potom se mohu znovu rozpomenout, proč jsem si donesla dřevo, papír a sirky a splnit původní zadání. Rossův paradox spočívá v tom, že vykonáním implikovaného příkazu si mohu znemožnit vykonání původního příkazu.

Na druhou stranu je názor, že na Rossově paradoxu není nic paradoxního, dobře obhájitelný na základě srovnání logiky příkazů s logikou oznamovacích vět. Tento paradox zřejmě souvisí s rozdílem mezi (logickou) sémantikou a pragmatickým užitím jazyka. Při praktickém užití jazyka totiž většinou předpokládáme, že s námi náš partner v dialogu spolupracuje v tom smyslu, že nám podává právě ty informace, které potřebujeme např. k úspěšnému zvládnutí úkolu - tedy ani žádné důležité informace nevynechá, ani nám nedává žádné navíc. Od implikace intuitivně očekáváme, že se tímto principem kooperace[25] bude

[25] Principy konverzační kooperace poprvé formuloval lingvista H. P. Grice.

řídit v následujícím smyslu: je-li implikace A $\Rightarrow$ B obecně známá a můj partner v diskuzi mi říká B, dělá to proto, že nepotřebuji vědět A. Kdyby mi totiž řekl A, dokázala bych si (na základě znalosti implikace A $\Rightarrow$ B) domyslet i B; musí tedy mít nějaký důvod, proč neřekl A: pravděpodobně by mi tím sdělil nepotřebnou informaci navíc.

Obdobou Rossova paradoxu pro oznamovací věty je implikace A $\Rightarrow$ (A $\vee$ B). Přítel, kterému řeknu „musím tento dopis odnést na poštu nebo jej musím spálit" předpokládá, že si mohu libovolně vybrat, kterou z těchto možností uskutečním; v opačném případě jsem se ve svém proslovu neřídila principem kooperace (lze se na to dívat tak, že jsem mu nesdělila všechny relevantní informace, nebo naopak tak, že jsem přidala zbytečnou „informaci" navíc). Vidíme tedy, že Rossův paradox není vázán na deontickou logiku, ale je obecnou vlastností disjunkce. Pokud přijmeme klasickou logiku za základ svého uvažování a nebudeme na ní shledávat nic paradoxního, měli bychom bez výhrad přijmout i tento aspekt deontické logiky.

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Řešení cvičení 1

Samozřejmě, že se jedná o důkaz Boží existence. Akvinský podává ne jeden, ale hned pět důkazů, v nichž Bůh vystupuje postupně jako prvotní hybatel (původce všeho pohybu), prvotní příčina, něco samo sebou nutného (ten jsme citovali), nejpravdivější a nejušlechtilejší jsoucno a konečně původce přírodních zákonů.

Za chybu by bylo možné považovat například tvrzení „co může nebýti, někdy není". Je ale důležité si uvědomit, že Akvinský o něčem řekne, že to „může nebýt", právě když to skutečně někdy nebylo či nebude (či to není právě teď), což je vidět z první věty. Později tento způsob porozumění slůvku možný nazveme redukcionistický - „možná A" znamená totéž jako „někdy je pravda, že A".

Za nejslabší místo tohoto důkazu považuji větu „jestliže tedy všechno může nebýti, někdy nebylo skutečně nic". Přeložíme-li si „může nebýti" jako „někdy není", bude tato věta znít „jestliže tedy o každé věci platí, že někdy nebyla, tak někdy nebylo skutečně nic". Jenže my si dovedeme docela dobře představit, že každá věc si svůj „čas nebytí" vybrala někdy jindy a tedy žádný společný okamžik, kdy nebylo nic, nastat nemusel!

Poznámka ke cvičení 1

Pro zajímavost uveďme výklad tohoto důkazu, jak jej podává Diogenes Allen; čtenář by měl vědět, že Akvinský ve svém myšlení vycházel z důkladné znalosti Aristotela. (Osobně se mi zdá, že porozumět tomuto výkladu je mnohem náročnější než porozumět původnímu důkazu, ale myslím, že stojí za to si jej přečíst.)

Tomáš charakterizuje Boha jako „nutnou" bytost i ve své třetí cestě. Aristotelés rozlišuje mezi bytostmi, které vznikají a zanikají, a bytostmi věčnými. Pro Aristotela jsou nebeská tělesa a první hybatel věční. V tomto smyslu o nich mluví jako o „nutných" bytostech a nazývá je bohy (jak bylo pro Řeky běžné u všeho nesmrtelného). Tomáš jde v tomto bodě mnohem dále. I když existují věčné bytosti, jsou kontingentní *(nahodilé, podmíněné), protože jejich esence (to, co jsou) a existence (to, že jsou) může být odlišena. I když existují věčně, je možné, že by nebyly, neboť jejich esence jim neumožňuje sama o sobě existovat. Abychom mohli vysvětlit existenci bytostí, u nichž je možno rozlišit esenci a existenci, musí existovat bytost, u které je esence a existence identická. Touto bytostí je Bůh, který je odlišen od všech bytostí, neboť je nejen věčný, ale jeho věčnost je zakotvena v Boží esenci, která je identická s Božím aktem existence.*

Diogenes Allen: Filosofie jako brána k teologii, str. 127.

Řešení cvičení 2 Nutnost (necessarium) je samozřejmě symbolizována znakem $\Box$A; nemožné (impossibile) je to, co musí nebýt, což odpovídá značení $\Box\neg$A; a do třetice možné (possibile) je to, co není nemožné, tedy $\neg\Box\neg$A.

Poznámka ke cvičení 2 Formuli $\Diamond\neg$A, samozřejmě odpovídá čtvrtá formule se symbolem $\Box$: $\neg\Box$A.

1. nápověda ke cvičení 3 Uvědom si, že ($\heartsuit$1) a ($\heartsuit$2) mají platit nejen pro výrok A, ale pro každý výrok, takže za A klidně můžeme dosadit C.

2. nápověda ke cvičení 3

Nejprve použij (A3) zvlášť na formuli ($\heartsuit$1) a zvlášť na formuli ($\heartsuit$2).

Řešení cvičení 3 Použitím axiomu (A3) na ($\heartsuit$1) (a dosazením C místo A) dostaneme

$$\mathrm{C} \Rightarrow \Diamond \mathrm{C},$$

použitím na ($\heartsuit$2) dostaneme formuli

$$\Diamond \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C}.$$

Protože víme, že ekvivalence je konjunkcí dvou implikací, můžeme odvodit požadovanou formuli

$$\mathrm{C} \Leftrightarrow \Diamond \mathrm{C}.$$

Řešení cvičení 4 Výsledkem vymazání všech výskytů symbolu $\Diamond$ z formule ($\heartsuit$3) je formule B$\wedge\neg$B, což je kontradiktorická formule (spor).

Řešení cvičení 5 Části (1) a (2) dokážeme prostým doplněním následující tabulky:

A	$\Box$**A**	$\Diamond$A	$\neg$A	$\Box\neg$A	$\Diamond\neg$A	$\neg\Box\neg$A	$\neg\Diamond\neg$**A**
1	**1**	1	0	0	0	1	**1**
x	**0**	1	x	0	1	1	**0**
0	**0**	0	1	1	1	0	**0**

Vidíme, že ve sloupečcích $\Box$A a $\neg\Diamond\neg$A jsou stejné hodnoty, a ve sloupečcích $\Diamond$A a $\neg\Box\neg$A jsou také stejné hodnoty. Úplně stejně bychom ověřili i platnost axiomu **K**, akorát bychom museli vyplnit tabulku s devíti řádky.

Pravidlo modus ponens dokážeme takto: Je-li A tautologií této logiky, znamená to, že má při všech ohodnoceních proměnných[26] hodnotu 1. Má-li A $\Rightarrow$ B také hodnotu 1 (což jako tautologie musí), musí B také mít hodnotu 1 (v tabulce pro implikaci se totiž v řádku, ve kterém má A hodnotu 1, nachází jen jedna jednička - a to ve sloupečku, ve kterém má B hodnotu 1). Takže B je také tautologie.

Pravidlo necesitace dokážeme podobně: jestliže je A tautologie, má vždycky hodnotu 1, a tedy i $\Box$A má vždycky hodnotu 1 a je to tautologie.

Poznámka ke cvičení 5 Později si řekneme, že výrokové modální logiky, které obsahují klasickou logiku[27], axiom **K** a pravidla modus ponens a necesitace, se nazývají normální. Łukasiewiczova trojhodnotová logika není normální, protože existují formule, které jsou tautologiemi klasické logiky, ale nejsou tautologiemi této logiky.

Řešení cvičení 6 Opět prostě vyplníme tabulku:

A	$\Box$A	$\Diamond$A	$\Box$**A** $\Rightarrow$ **A**	**A** $\Rightarrow$ $\Diamond$**A**	$\Diamond\Diamond$A	$\Diamond\Diamond$**A** $\Leftrightarrow$ $\Diamond$**A**	$\Box\Box$A	$\Box\Box$**A** $\Leftrightarrow$ $\Box$**A**
1	1	1	**1**	**1**	1	**1**	1	**1**
x	0	1	**1**	**1**	1	**1**	0	**1**
0	0	0	**1**	**1**	0	**1**	0	**1**

Vidíme, že všechny zadané formule jsou tautologie.

Poznámka ke cvičení 6 Zatímco první dvě formule, totiž $\Box$A $\Rightarrow$ A a A $\Rightarrow$ $\Diamond$A znějí rozumně i v překladu do lidské řeči (platí-li něco nutně, tak to platí; jestliže něco platí, tak je možné, aby to platilo), druhá dvojice formulí se jeví poněkud podezřelá: „Možná pravdivé jsou právě ty výroky, které mohou být možná pravdivé. Nutně pravdivé jsou právě ty výroky, které nutně jsou nutně pravdivé.“ Později uvidíme modální logiky, ve kterých žádná z těchto formulí neplatí.

Řešení cvičení 7 a 8 Asi Tě nepřekvapí, že opět budeme vyplňovat tabulku:

A	$\Diamond$A	$\neg$A	$\neg$A $\Rightarrow$ A	$\Diamond$**A** $\Leftrightarrow$ ($\neg$**A** $\Rightarrow$ **A**)		$\neg\Diamond$A	($\heartsuit$1) $\neg\Diamond$**A** $\Rightarrow$ $\neg$**A**	($\heartsuit$2) $\neg$**A** $\Rightarrow$ $\neg\Diamond$**A**
1	1	0	1	**1**		0	**1**	**1**
x	1	x	1	**1**		0	**1**	**x**
0	0	1	0	**1**		1	**1**	**1**

Poznámka ke cvičení 8 Výrok A s pravdivostní hodnotou x má vlastnost ($\heartsuit$3) $\Diamond$A $\wedge$ $\Diamond\neg$A.

Řešení cvičení 9

První věta vyplývá z našich fyzikálních poznatků, jedná se tedy o fyzikální nutnost.

Druhá věta se týká našich znalostí o uvažování rozumných lidí: tuto větu považujeme za pravdivou na základě zkušenosti, že rozumní lidé vědí, že když spadnou z velké výšky, zabijí se. Zároveň předpokládáme, že rozumný člověk dokáže rozpoznat, že pád z Eiffelovy věže je pádem z velké výšky, a domyslet si důsledky, které pro něj v této situaci má jeho obecný poznatek. Mohli bychom říct, že se jedná o psychologickou nutnost, nebo o epistemickou nutnost (nutnost zde vyplývá z toho, co víme o poznatcích lidí a o tom, jak s těmito poznatky zacházejí).

Třetí větu bychom opět mohli klasifikovat jako fyzikální nutnost, budeme-li fyziku chápat v širším smyslu slova jako vědu zabývající se všemi přírodními zákony a tedy zahrnující i chemii a biologii.

Čtvrtá věta nevypovídá nic o fyzikální realitě (ačkoli na první pohled mluví o něčem podobném jako třetí věta), ale o Jirkově domněnkách a přesvědčeních. Mohli bychom však také říct, že se jedná o nutnost logickou: „jestliže Jirka věří všemu, co je napsáno v té knize, věří i nějakému konkrétnímu tvrzení, které

[26] Slovo *ohodnocení* znamená přiřazení pravdivostních hodnot proměnným.

[27] O nějaké logice řekneme, že *obsahuje* klasickou logiku, pokud každá klasická tautologie je tautologií této logiky.

se v té knize vyskytuje“ je totiž tvrzení pravdivé na základě čisté logiky, i když se nejedná o logiku výrokovou, ale predikátovou: $(\forall x V(J,x)) \Rightarrow V(J,A)$.

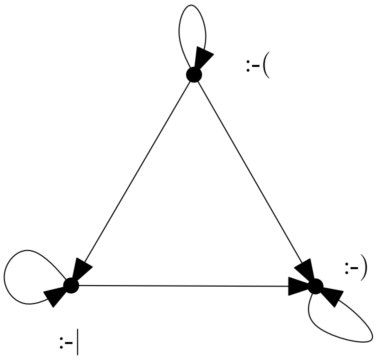
Páté tvrzení je ukázkovým příkladem logické nutnosti.

Řešení cvičení 10 $\Box$A znamená, že z našich poznatků je odvoditelné A; nemáme-li dojít ke sporu, $\neg$A odvoditelné není a tedy podle našich znalostí je A možné ($\Diamond$A).

Řešení cvičení 11 V situaci, kdy A už je pravdivý výrok, mohu samozřejmě snadno dosáhnout toho, aby byl pravdivý - prostě nechám všechny věci tak, jak jsou. Takže A $\Rightarrow$ $\Diamond$A platí. (Pravděpodobně už se Ti stalo, že se s Tebou někdo vsadil, že docílí něčeho neuvěřitelného, ve skutečnosti však už ve chvíli sázky byla ta neuvěřitelná věc realitou.)

Řešení cvičení 14

Samozřejmě, že ze světa :-(jsou dosažitelné všechny ostatní světy (v žádném už to nemůže být horší), zatímco svět :-) je dosažitelný ze všech světů (nejsou v něm porušeny žádné morální principy). Ze světa :-| je dosažitelný on sám a svět :-), ze světa :-) jen on sám. Pro přehlednost si můžeme nakreslit obrázek, ve kterém šipka z jednoho světa do druhého znázorňuje, že druhý je dosažitelný z prvního:



Poznámka ke cvičení 14

Všimni si, že má-li relace dosažitelnosti mít význam „v dosažitelném světě není porušováno víc pravidel než v původním“, bude určitě *reflexivní* - každý svět bude dosažitelný alespoň sám ze sebe. Mohli bychom ji ovšem definovat také tak, že dosažitelný svět je dokonalý (žádná pravidla v něm nejsou porušena). V tom případě by se ovšem mohlo stát, že žádný svět dosažitelný nebude, protože v každém možném světě je porušeno nějaké pravidlo. (Například pokud si pravidla zvolíme tak, že nebude možné řídit se oběma současně: odvážnému štěstí přeje, ale opatrnosti nikdy nezbývá.)

Řešení cvičení 15 Z definice modelu je vidět, že $S \Vdash \neg$A právě když $S \nVdash$ A.

Řešení cvičení 16 Jestliže není dosažitelný žádný možný svět, tak samozřejmě žádný výrok nemůže být pravdivý v nějakém dosažitelném světě (takže nic není možné), ale zato je každý výrok pravdivý ve všech nula dosažitelných světech (takže všechno je nutné).

Řešení cvičení 17 Hloubka formule je celočíselný údaj, který se počítá následovně:

1°. Atomické formule mají hloubku 1.

2°. Jestliže formule F vznikne z formulí A a B, které mají hloubku n a m, pomocí spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, je její hloubka rovna většímu z čísel n a m. Je-li hloubka A rovna n, je hloubka formulí F = $\Box$A a F = $\Diamond$A rovna $n+1$.

Tvrzení budeme dokazovat indukcí podle hloubky h formule F.

1°. Je-li $h = 0$, závisí pravdivost F ve světě S pouze na možném světě S. Spojení formulí navzájem pomocí negace, konjunkce, disjunkce nebo implikace nijak nezmění množinu možných světů, do kterých se musíme „podívat“, abychom zjistili, je-li daná formule pravdivá.

2°. Předpokládejme, že hloubka formulí A a B je nejvýše h. Je-li F = $\Box$A nebo F = $\Diamond$A, musíme se při vyhodnocování pravdivosti F ve světě S podívat, zda je A pravdivá ve světech T, které jsou z S dosažitelné po 1 šipce; k tomu musíme (podle indukčního předpokladu) nahlédnout nejdál do světů vzdálených o h kroků po šipkách z T, tedy nejvýše $h+1$ kroků z S, což přesně odpovídá hloubce F. Spojení formulí hloubky nejvýše $h+1$ navzájem pomocí negace, konjunkce, disjunkce nebo implikace opět nijak nezmění množinu možných světů, do kterých se musíme „podívat“, abychom zjistili, je-li daná formule pravdivá.

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že hloubka formule je vždy menší nebo rovna počtu výskytů symbolů $\Box$ a $\Diamond$.

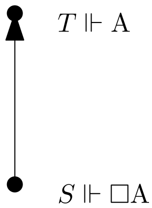
Nápověda ke cvičení 18 Rozhodni, zda lze vybrat množinu modelů, ve které neplatí $\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{A}$. Tato formule totiž není tautologií Łukasiewiczovy trojhodnotové modální logiky.

Řešení cvičení 20 To, že A platí, znamená, že je pravdivá ve všech možných světech všech modelů. Speciálně tedy pro každý možný svět S každého modelu dostáváme, že A je pravdivá ve všech možných světech, které jsou z něj dosažitelné - což podle definice modelu znamená, že $S \Vdash \Box\mathrm{A}$.

Řešení cvičení 22

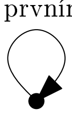
($\Rightarrow$) Nejprve ukážeme, že pokud v nějakém rámci platí $\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Diamond\mathrm{A}$, tak je z každého možného světa dosažitelný nějaký možný svět. Kdyby ze světa S nebyl dosažitelný žádný možný svět, byl by v S pravdivý každý výrok tvaru $\Box\mathrm{A}$, ale žádný výrok tvaru $\Diamond\mathrm{A}$, což by byl spor s předpokladem $\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Diamond\mathrm{A}$.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že v daném rámci je z každého možného světa S dosažitelný nějaký možný svět T. Pokud nyní $S \Vdash \Box\mathrm{A}$, musí podle definice být A pravdivé ve všech možných světech dosažitelných z S, speciálně tedy $T \Vdash \mathrm{A}$. Vidíme, že existuje možný svět dosažitelný z S, kde je A pravdivé, takže $S \Vdash \Diamond\mathrm{A}$.



Nápověda ke cvičení 24 Pro ukázání, že $\mathrm{A} \Rightarrow \Diamond\mathrm{A}$ použij větu o korektnosti a úplnosti: víme, že logika T obsahuje právě ty formule, které jsou pravdivé ve všech reflexivních rámcích.

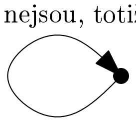
Řešení cvičení 24 Reflexivita relace dosažitelnosti znamená, že každý svět je dosažitelný sám ze sebe. Platí-li ve světě S formule A ($S \Vdash \mathrm{A}$), je z něj dosažitelný nějaký svět (totiž on sám), kde platí A, takže $S \Vdash \Diamond\mathrm{A}$ a tedy $S \Vdash \mathrm{A} \Rightarrow \Diamond\mathrm{A}$. (Případ $S \nVdash \mathrm{A}$ nemusíme rozebírat, protože implikace s nepravdivým prvním členem je vždy pravdivá.)



$S \Vdash \mathrm{A}$

Axiom **D** můžeme odvodit z právě dokázané formule a axiomu **T** na základě klasické tautologie $((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})$.

1. nápověda ke cvičení 25 Opět je vhodné použít větu o korektnosti a o úplnosti. K ukázání, že formule není dokazatelná v T, stačí najít model logiky T, tedy model s reflexivní relací dosažitelnosti, v jehož některém světě daná formule není pravdivá. Můžeš začít tím, že si nakreslíš svět S, ve kterém tato formule neplatí, a budeš přikreslovat světy, které z něj jsou dosažitelné - světy, které z něj dosažitelné nejsou, totiž na pravdivost formulí v S nemají vliv.

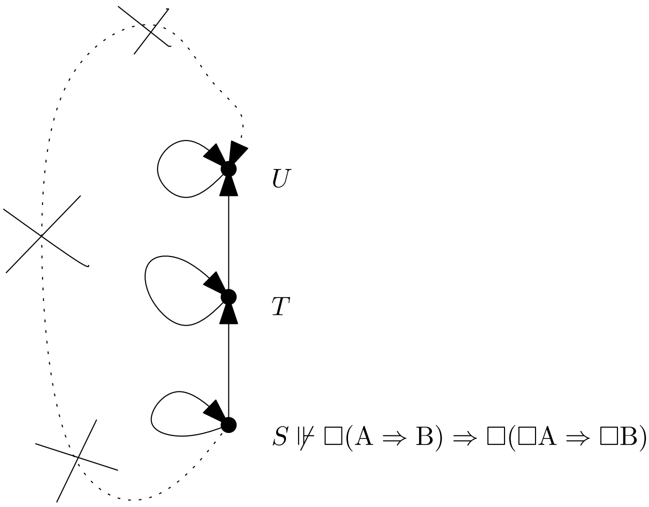


$S \nVdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \Box(\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B})$

$$S \nVdash \Box(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \Box(\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B})$$

Při dokazování, že tato formule je dokazatelná v S4, můžeš zkusit postupovat sporem: ukaž, že každý pokus nakreslit reflexivní a tranzitivní protipříklad na tuto formuli vede ke sporu. Jinou možností je zkusit sepsat formální důkaz této formule v kalkulu logiky S4.

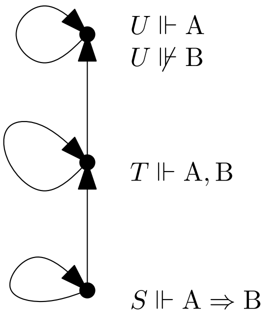
2. nápověda ke cvičení 25 Všimni si, že ze zadání je zřejmé, že reflexivní protipříklad, který máš najít, není tranzitivní (protože máš dokázat, že tranzitivní protipříklad najít nelze). Speciálně to znamená, že hledaný protipříklad bude obsahovat alespoň tři světy seřazené do řetízku podle následujícího obrázku:



$S \leq T, T \leq U, S \not\leq U$ reflexivní smyčky u všech tří světů

Řešení cvičení 25

Reflexivním protipříkladem pro formuli $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$ je následující model:



$T \Vdash A, B; U \Vdash A, U \nVdash B, S \Vdash A \Rightarrow B$

Ověřme, že ve světě S skutečně není zadaná formule splněna. Všimni si, že není důležité, jestli výroky A a B jsou ve světě S pravdivé, důležité je jen to, aby tam byla pravdivá implikace $A \Rightarrow B$. Budeme postupně k jednotlivým světům doplňovat informaci o tom, které složitější formule v nich jsou a nejsou splněny. (Doporučuji Ti zakreslovat si získané informace přímo do obrázku.)

$T \Vdash \Box A$	protože $T \Vdash A$ a také $U \Vdash A$
$T \nVdash \Box B$	protože $U \nVdash B$
$T \nVdash \Box A \Rightarrow \Box B$	protože $T \Vdash \Box A$, ale $T \nVdash \Box B$
$T \Vdash A \Rightarrow B$	protože $T \Vdash A$ a také $T \Vdash B$
$S \Vdash \Box(A \Rightarrow B)$	protože $S \Vdash A \Rightarrow B$ a také $T \Vdash A \Rightarrow B$
$S \nVdash \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$	protože $T \nVdash \Box A \Rightarrow \Box B$
$S \nVdash \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$	protože $S \Vdash \Box(A \Rightarrow B)$, ale $S \nVdash \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$

Zbývá dokázat, že zadaná formule je dokazatelná v logice S4. Ukážeme si formální důkaz:

1 $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ axiom **K**

2 $(\Box A \Rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$ dosazení do axiomu **4**

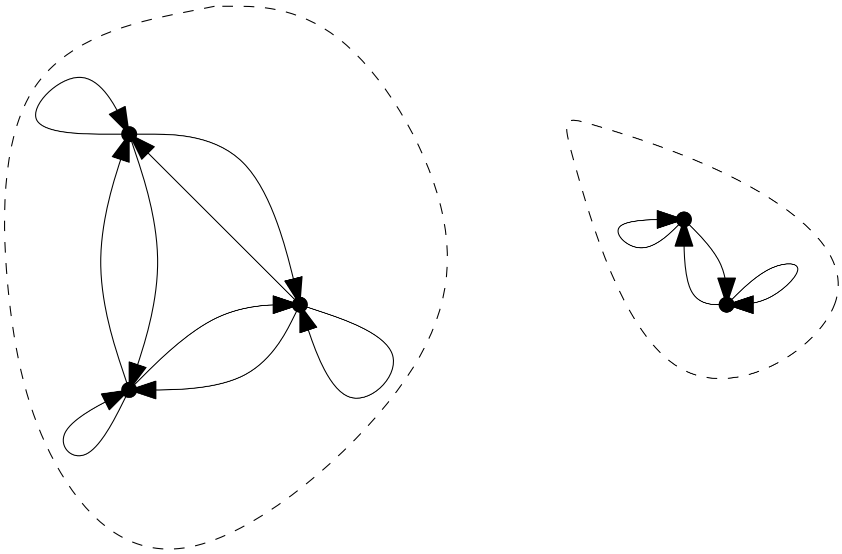
3 $\{[A \Rightarrow B] \wedge [B \Rightarrow C]\} \Rightarrow [A \Rightarrow C]$ tautologie klasické logiky

4 $\{[\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)] \wedge [(\Box A \Rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)]\} \Rightarrow [\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)]$ dosazení do 3

5 $[\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)] \wedge [(\Box A \Rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)]$ z 1 a 2

6 $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow \Box B)$ pravidlem MP z 4 a 5

Řešení cvičení 26 Zkusme nejprve zjistit, jestli relace ze zadání je ekvivalence. Reflexivita plyne z toho, že svět se samozřejmě nachází ve své vlastní skupině. Symetrie plyne z toho, že nachází-li se svět S ve stejné skupině jako svět T, tak se svět T nachází ve stejné skupině jako svět S. Tranzitivita neříká nic jiného, než že nachází-li se svět S ve stejné skupině jako svět T a svět T ve stejné skupině jako svět U, tak se světy S a U nacházejí ve stejné skupině, což je očividně pravda.



Předpokládejme naopak, že je zadaná nějaká reflexivní, symetrická a tranzitivní relace a zkusme rozdělit světy do skupin[28] tak, aby z každého světa byly dosažitelné právě světy v jeho skupině. Množinu všech světů, které jsou dosažitelné ze světa S, označíme $[S]$. Naším úkolem je ukázat, že každé dva světy ze skupiny $[S]$ jsou navzájem dosažitelné, tedy že $T, U \in [S]$ implikuje $T \leq U$. Ovšem $T \in [S]$ znamená, že $S \leq T$. Pomocí symetrie víme také, že $T \leq S$. Nyní na základě tranzitivity a faktu $S \leq U$ vidíme, že $T \leq U$, což jsme chtěli dokázat.

Také se Ti zdá, že jsme nikde nevyužili reflexivitu? Ta říká to, že $S \in [S]$ a tedy $S \leq S$.

Řešení cvičení 27 Nejprve dokážeme, že reflexivní eukleidovská relace je ekvivalencí. K tomu musíme dokázat, že je symetrická a tranzitivní.

Symetrie: Je-li $S \leq T$, využijeme eukleidovskost $(S \leq T \wedge S \leq S) \Rightarrow T \leq S$ a dostaneme $T \leq S$.

Tranzitivita: Je-li $S \leq T \leq U$, použijeme nejprve právě dokázanou symetrii na první polovinu a dostaneme $T \leq S, T \leq U$. Nyní už z eukleidovskosti plyne $S \leq U$, což jsme chtěli dokázat.

K důkazu, že ekvivalence je eukleidovská, nám pomůže předešlé cvičení. Předpoklady $S \leq T \wedge S \leq U$ totiž znamenají, že $T, U \in [S]$ a tedy $T \leq U$.

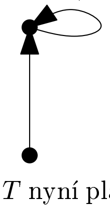
Řešení části a) cvičení 28

Potřebujeme ukázat dvě implikace: má-li daný model vlastnost

$$(\heartsuit) \qquad \forall S, T \in W \quad S \leq T \;\Rightarrow\; T \leq T,$$

tak v něm platí $\Box(\Box A \Rightarrow A)$ a naopak.

($\Rightarrow$) Nechť nejprve daný model má vlastnost ($\heartsuit$). Ukážeme, že ve všech možných světech S je pravdivé $\Box(\Box A \Rightarrow A)$. Podle předpokladu jsou všechny možné světy $T, S \leq T$ doažitelné samy ze sebe:

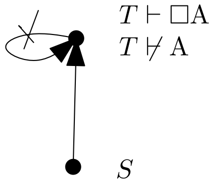


V T nyní platí $\Box A \Rightarrow A$: pokud je $T \Vdash \Box A$, je A pravdivé ve všech možných světech dosažitelných z T a tedy i v T. Tedy ve všech možných světech dosažitelných z S je $\Box A \Rightarrow A$ pravdivé a tedy $S \Vdash \Box(\Box A \Rightarrow A)$.

($\Leftarrow$) Druhou implikaci ukážeme v matematice obvyklým postupem: místo $B \Rightarrow C$ ukážeme $\neg C \Rightarrow \neg B$. Podrobněji řečeno: ukážeme, že pokud relace dosažitelnosti v nějakém rámci nemá vlastnost ($\heartsuit$), lze vytvořit model (s tímto rámcem a nějakým přiřazením pravdivostních hodnot výrokům), ve kterém neplatí $\Box(\Box A \Rightarrow A)$. Z toho bude vidět, že platí-li ve všech modelech na daném rámci $\Box(\Box A \Rightarrow A)$, relace dosažielnosti má vlastnost ($\heartsuit$).

Když relace dosažitelnosti nemá vlastnost ($\heartsuit$), lze najít možné světy S a T, $S \leq T, T \not\leq T$:

[28] Těmto skupinám se obvykle říká *třídy ekvivalence.*



Pravdivostní hodnoty přiřaďmě výrokům tak, že $T \nVdash$ A$, T \Vdash \Box$A. Jinak řečeno, ve všech možných světech dosažitelných z T nechť je A pravdivé, ale v T nikoli. Potom zřejmě $S \nVdash \Box(\Box$A $\Rightarrow$ A$)$, protože $T \nVdash \Box$A $\Rightarrow$ A.

Řešení části b) cvičení 28 K ukázání, že $\Box(\Box$A $\Rightarrow$ A$)$ je dokazatelná v logice T, využijeme větu o korektnosti a úplnosti: ve všech modelech logiky T platí axiom **T** $\Box$A $\Rightarrow$ A a tedy ve všech těchto modelech platí také $\Box(\Box$A $\Rightarrow$ A$)$. (Zdůvodni, že pokud v nějakém modelu platí formule F, pak tam platí i $\Box$F.)

Řešení části c) cvičení 28 Axiom **T** říká, že vše, co je přikázáno, se skutečně děje, tedy že všechny možné světy jsou deonticky perfektní. Ze zkušenosti ale víme, že tomu tak není - porušování zákazů a pravidel je na denním pořádku.

5. KONEČNĚHODNOTOVÉ LOGIKY

V logice neexistuje morálka. Každý si může svou logiku (...) vybudovat, jak chce.
Rudolf Carnap: Logická syntax jazyka[1]

Stručné opakování

S několika vícehodnotovými logikami jsme se již setkali v předchozím výkladu. Zopakujme stručně, o jaké logiky se jednalo. Tabulky pro dvouargumentové spojky[2] budeme psát tak, že možné hodnoty výroku A napíšeme do levého sloupce a možné hodnoty výroku B do prvního řádku.

1) V kapitole o klasické logice ve cvičení 17 jsme zmínili logiku s následující čtveřicí hodnot:

1: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám důvod si myslet, že je nepravdivý.
X: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

2) V kapitole o intuicionismu ve cvičení 12 jsme se dověděli, že Arend Heyting navrhl pro intuicionistickou logiku následující tabulky:

A	¬A
1	0
x	x
0	1

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	0
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	0
0	0	0	1

Tyto tabulky ale nevystihují přesně množinu intuicionistických tautologií - formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ je tautologií této logiky (bez ohledu na pravdivostní hodnotu A a B je její hodnota 1), ale není tautologií intuicionistické logiky (lze k ní totiž sestrojit kripkovský protipříklad).

3) V kapitole o modálních logikách jsme se podrobně zabývali Łukasiewiczovou trojhodnotovou modální logikou s tabulkami

A	¬A	◇A	□A
1	0	1	1
x	x	1	0
0	1	0	0

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	x
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	x
0	0	x	1

Cvičení 1. Zvolený způsob zápisu se příliš nehodí pro zjišťování, zda je nějaká složitější formule tautologií té či oné vícehodnotové logiky, umožňuje ale vzájemně porovnávat tabulky pro jednotlivé spojky v různých logikách.

Zjisti, pro které spojky a které hodnoty argumentů se liší Łukasiewiczova a Heytingova trojhodnotová logika. Kolikařádovou tabulku potřebujeme pro zjištění, zda je formule

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (((B \Rightarrow A) \Rightarrow C) \Rightarrow C)$$

tautologií, jestliže každý řádek odpovídá jiné trojici hodnot A, B a C, jak je tomu obvyklé v klasické logice? Zkus vymyslet rychlejší způsob, jak zjistit, jestli je nějaká formule tautologií.

Pravdivostní hodnota x

Dříve, než se pustíme do důkladnějšího zkoumání trojhodnotových logik, musíme si rozmyslet, co to znamená, že výrok má pravdivostní hodnotu x. Jaké důvody nás vedou k tomu, že kromě pravdivých a nepravdivých výroků připouštíme ještě třetí možnost?

[1] Cituje Jaroslav Peregrin: Analytická filosofie (náčrt!), kapitola 4, str. 5.
[2] *Dvouargumentové spojky* jsou spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, které spojují vždy dva výroky.

1) Neznalost skutečné pravdivostní hodnoty

Výrok má pravdivostní hodnotu x, pokud nevíme, zda je pravdivý či nepravdivý. Do této kategorie spadají například výroky o budoucnosti, které vedly Łukasiewicze k vytvoření jeho trojhodnotové logiky.

Vypadají tabulky Łukasiewiczovy logiky tak, jak bychom čekali při tomto chápání významu hodnoty x? V případě, že nevíme, zda je výrok A pravdivý či nepravdivý, samozřejmě nevíme ani o jeho negaci, zda je pravdivá či nepravdivá, takže „$\neg x = x$“. Ale i v případě, že nevíme, zda je výrok A pravdivý či ne, víme, že je-li výrok B pravdivý, tak je pravdivý alespoň jeden z výroků A a B, takže $A \vee B$ by měl být pravdivý: „$x \vee 1 = 1$“.

Cvičení 2. Podívej se na tabulky negace, konjunkce a disjunkce v Heytingově a Łukasiewiczově logice a rozmysli si, že skutečně odpovídají tomuto chápání hodnoty x. Odpovídá tomuto pojetí lépe Heytingova nebo Łukasiewiczova implikace?

2) Nesmyslnost

Výrok s pravdivostní hodnotou x považujeme za úplně nesmyslný. K logickému folklóru patří třeba výroky „Caesar je prvočíslo“ a „bezbarvé zelené myšlenky zuřivě spí.“[3] Je zřejmé, že je-li výrok A nesmyslný, budou nesmyslné i všechny složitější výroky, které jej obsahují, třeba „bezbarvé zelené myšlenky zuřivě spí a sluníčko je žluté“. Doplníme-li na základě této úvahy na všechna nově vzniklá místa v tabulce hodnotu x, dostaneme **Bočvarovu trojhodnotovou logiku** z roku 1939:

A	¬A
1	0
x	x
0	1

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	x
0	0	x	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	x	1
x	x	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	x
0	1	x	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	x
0	0	x	1

Cvičení 3. Ukaž, že v této logice neexistují žádné tautologické výroky - výroky, jejichž pravdivostní hodnota je 1 při libovolném přiřazení pravdivostních hodnot jednoduchým výrokům.

3) Částečná pravdivost

Pravdivostní hodnotu x můžeme také přiřadit těm výrokům, které leží někde mezi pravdou a nepravdou - třeba výrokům jako „Praha je obrovská“ nebo „ráda poslouchám jazz“. Praha je určitě velká, rozhodně větší než Nová Ves, ale není tak obrovská jako New York. V tomto případě ale brzy narazíme na to, že bychom potřebovali více než tři pravdivostní hodnoty: cítíme, že výrok „Brno je obrovské“ by měl být *pravdivější* než výrok „Nová Ves je obrovská“ ale *méně pravdivý* než „Praha je obrovská“, což je výrok *méně pravdivý* než „New York je obrovský“. Pro tento typ výroků byly vytvořeny fuzzy logiky, o kterých si povíme v příští kapitole.

Návod, jak si vytvořit vlastní trojhodnotovou logiku

Logika je otázkou nabídky a poptávky.

Doc. Miroslav Jauris, CSC.[4]

Představme si, že ses v souladu Jaurisovým tvrzením rozhodl vytvořit a nabízet vlastní trojhodnotovou logiku. Ačkoli se to na první pohled může zdát jako odvážné rozhodnutí, jediné, co musíš udělat, je najít si kus papíru a sepsat tabulky pro výrokové spojky!

No dobrá, říkáš, jak ale zařídím, aby po té mé logice byla poptávka?

V prvé řadě se musíš postarat o to, aby tabulky Tvé logiky dávaly nějaký smysl. Například by bylo těžké zdůvodnit, proč ses rozhodl přisoudit negaci následující tabulku:

A	¬A
1	1
x	0
0	x

Málokdo by byl ochoten Ti uvěřit, že pravdivostní hodnota výroku s hodnotou 1 by se negováním neměla změnit, přinejmenším chceme-li se držet pravidla, že výroky s hodnotou 1 jsou „nejvíc pravdivé“

[3]Autorem prvního je rakouský filozof a logik Rudolf Carnap, autorem druhého je americký jazykovědec Noam Chomsky. Striktně řečeno se nejedná o výroky (ty jsou vždy buďto pravdivé nebo nepravdivé), ale o nesmyslné oznamovací věty.

[4]Přednáška z Logiky I, zimní semestr 2002/2003.

(tedy pravdivé) a výroky s hodnotou 0 jsou „nejméně pravdivé“ (tedy nepravdivé). Negací pravdivého výroku by samozřejmě měl být výrok nepravdivý a naopak.

Pro všechny logické spojky bývá nejrozumnější, aby v případě, že výroky, které spojují, mají pouze hodnoty 0 a 1, byly výsledné hodnoty stejné jako v klasické logice. Chceš-li si tedy vytvořit vlastní logiku, měla by vzniknout doplněním těchto tabulek:

A	¬A
1	0
x	
0	1

A ∧ B	1	x	0
1	1		0
x			
0	0		0

A ∨ B	1	x	0
1	1		1
x			
0	1		0

A ⇒ B	1	x	0
1	1		0
x			
0	1		1

A ⇔ B	1	x	0
1	1		0
x			
0	0		1

Ovšemže toto nejsou všechna omezení, kterými by ses měl řídit, chceš-li, aby po Tvé logice byla poptávka. Je například dobrým zvykem považovat ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ za pouhou zkratku za konjunkci implikací $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, takže tabulka pro ekvivalenci bude jednoznačně určena tím, jak budou vypadat tabulky pro konjunkci a implikaci.

V tabulce pro negaci zbývá jediné volné místo, podívejme se tedy nejprve na to, jaké hodnoty do něj můžeš doplnit. Máš tři možnosti:

A	$\neg_x A$	$\neg_1 A$	$\neg_0 A$
1	0	0	0
x	x	1	0
0	1	1	1

Cvičení 4. Łukasiewicz si pro svou trojhodnotovou logiku vybral první z nabízených negací; zjistěte, zda lze $\neg_1 A$ a $\neg_0 A$ vyjádřit pomocí symbolů $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \Diamond, \Box$, pro které Łukasiewicz definoval tabulky.

Cvičení 5. Rozhodni se, kterou z těchto tří negací bys zvolil, kdybys pravdivostní hodnotě x rozuměl výše navrženými způsoby.

Jakmile se rozhodneš pro některou z možných negací, můžeš začít vyplňovat další tabulky. Možná jsi se ve škole setkal s dvojicí ekvivalencí známou jako *de Morganovy zákony*:[5]

$(A \wedge B)$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako $\neg(\neg A \vee \neg B)$

$(A \vee B)$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

Pokud chceš, aby tyto dva zákony platily i ve tvé logice, musíš na to myslet při vyplňování tabulek pro konjunkci a pro disjunkci. Konkrétně stačí vyplnit tabulku pro jednu ze spojek $\wedge$, $\vee$ a tabulka pro druhou už je jednoznačně určena de Morganovými zákony.

Cvičení 6. Zjisti, jestli Bočvarova logika splňuje de Morganovy zákony.

Protože chceme, aby všechny spojky byly zobecněním spojek klasické logiky, můžeme si při vyplňování tabulek pomoci tím, že zkusíme najít nějaký popis chování klasických spojek, který by nám pomohl vyplnit tabulku i pro třetí hodnotu. V případě konjunkce a disjunkce se nejčastěji používají následující vyjádření:

$A \wedge B$ má hodnotu 1 právě tehdy, když A i B mají hodnotu 1.
$A \wedge B$ má hodnotu 0 právě tehdy, když alespoň jeden z výroků A, B má hodnotu 0.
$A \vee B$ má hodnotu 1 právě tehdy, když alespoň jeden z výroků A, B má hodnotu 1.
$A \vee B$ má hodnotu 0 právě tehdy, když A i B mají hodnotu 0.

Chování klasické konjunkce a disjunkce lze popsat i matematicky; pravdivostní hodnotu výroku A budeme značit $|A|$.

$|A \wedge B| = \min(|A|, |B|)$ — $A \wedge B$ má menší z hodnot výroků A, B.
$|A \vee B| = \max(|A|, |B|)$ — $A \vee B$ má větší z hodnot výroků A, B.

Abychom mohli použít toto matematické vyjádření, je potřeba pravdivostní hodnotě x přiřadit nějakou číselnou hodnotu; pro naše účely je vhodná hodnota $\frac{1}{2}$.

[5] Místo obvyklého zápisu $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ jsme zvolili slovní vyjádření, protože $A \Leftrightarrow B$ ve tvé logice nemusí vyjadřovat vztah „A má stejnou hodnotu jako B“.

Cvičení 7. Zkontroluj, že tabulky konjunkce a disjunkce v Łukasiewiczově i Heytingově logice odpovídají těmto dvěma popisům (slovnímu a matematickému). Jak bys matematicky popsal negaci v těchto logikách?

Nejsložitější je vymyslet tabulku pro implikaci. V historii logiky vzniklo téměř nepřeberné množství různých trojhodnotových implikací. Pro naše zkoumání fuzzy logiky v příští kapitole bude důležité rozmyslet si, jak bychom mohli matematicky popsat hodnotu výroku $A \Rightarrow B$. Máme opět několik možností:

(1) $|A \Rightarrow B| = 1$ jestliže $|A| \leq |B|$
$|A \Rightarrow B| = 0$ jinak

(2) $|A \Rightarrow B| = 1$ jestliže $|A| \leq |B|$
$|A \Rightarrow B| = 1 - |A| + |B|$ jinak

(3) $|A \Rightarrow B| = \max(1 - |A|, |B|)$ protože klasicky platí $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$[6]

Tato vyjádření vedou k následujícím tabulkám pro implikaci:

A ⇒ B	1	x	0
1	1	0	0
x	1	1	0
0	1	1	1

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	x
0	1	1	1

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	x	x
0	1	1	1

První z těchto tabulek je zajímavá tím, že pravdivostní hodnota implikace je vždy 0 nebo 1, i když do ní mohou vstupovat výroky s pravdivostní hodnotou x. Ve druhé z těchto tabulek jsi pravděpodobně rozpoznal Łukasiewiczovu implikaci; logiku s třetí z těchto implikací (a negací, konjunkcí a disjunkcí stejnou jako u Łukasiewicze a Heytinga) navrhl **Kleene** v roce 1952.

Cvičení 8. Vymysli si trojhodnotovou logiku se svou vlastní implikací (nesmí to tedy být Bočvarova, Heytingova, Kleenova ani Łukasiewiczova implikace) a ověř, jestli v ní jsou následující formule tautologické:

$A \Rightarrow A$
$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

* Bočvarova a Kleenova logika z pohledu programátora

Použití Bočvarovy logiky

Pokud se zabýváš programováním, mohla by Tě zaujmout tato interpretace Bočvarovy logiky: mějme několik programů, jejichž úkolem je najít odpověď na různé otázky typu ano - ne. To znamená, pokud pustíme kterýkoli z těchto programů, nastane jedna z následujících možností:

(1) Program chvilku počítá a pak odpoví „ano“.

(0) Program chvilku počítá a pak odpoví „ne“.

(x) Program počítá a počítá, ale nikdy žádnou odpověď nevydá - můžeme říci, že se „zacyklil“. Nebo chvíli počítá a pak se na obrazovce objeví chybové hlášení, program například nemůže pokračovat kvůli nedostatku paměti nebo protože se snažíme uložit číslo π jako celé číslo nebo protože voláme proceduru, která neexistuje . . .

Programy můžeme samozřejmě kombinovat, takže pokud už máme programy A a B, není těžké napsat program, který bude odpovídat na otázku „je pravda, že i A i B dají odpověď ano?“. Tento program můžeme označit $A \wedge B$. Co se stane, položíme-li tuto otázku, ale jeden z programů A a B se zacyklí? Pokud je náš program pro $A \wedge B$ napsán tak, že napřed pustí program A, potom program B a nakonec zjistí, jesli obě odpovědi jsou „ano“, zacyklí se určitě také.

Právě takto napsané programy popisuje Bočvarova trojhodnotová logika; mluvíme o *úplném vyhodnocování.*

[6] V tomto případě platí též $|A \Rightarrow B| = 1 - \min(|A|, 1 - |B|)$, což odpovídá klasické ekvivalenci $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Použití Kleenovy logiky

Kleenova logika je určena následujícími tabulkami:

A	¬A
1	0
x	x
0	1

$A \wedge B$	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

$A \vee B$	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

$A \Rightarrow B$	1	x	0
1	1	x	0
x	1	x	x
0	1	1	1

$A \Leftrightarrow B$	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	x
0	0	x	1

Cvičení 9. Ukaž, že ani v Kleenově logice neexistují žádné tautologie.

Také na Kleenovu logiku se můžeme dívat očima programátora. Program pro $A \wedge B$, o kterém byla řeč v odstavečku o Bočvarově logice, můžeme totiž napsat také tak, že programy pro A a pro B poběží současně (*paralelně*), například tak, že se vždy provede jeden krok programu A a jeden krok programu B. Pokud v některém okamžiku zjistíme, že odpověď jednoho z těchto programů je „ne“, je jistě i odpověď programu $A \wedge B$ také „ne“; výpočet můžeme ukončit a nemusíme čekat, až doběhne druhý program, takže si vlastně ani nevšimneme, že sám o sobě by běžel donekonečna. Tento způsob psaní složitějších programů nazýváme *částečné vyhodnocování*. Podobně svou logiku chápal i sám autor:

Kleene sám ovšem svou logiku považoval spíše za parciální *než za explicitně trojhodnotovou - onu třetí možnost vedle 1 a 0 považoval spíše za* absenci hodnoty *než za další hodnotu. Šlo mu totiž zejména o to, aby udělil specifický status těm aritmetickým výrokům, jejichž pravdivostní hodnoty neznáme nebo znát nemůžeme.*

Jaroslav Peregrin: Logika a logiky, str. 71.[7]

Součinové logiky

Vyhodnocování více výroků najednou

Představ si, že si chceš koupit auto. Sepíšeš si tedy seznam všech vlastností, které by mělo mít: cenu do 400 000 Kč, maximální rychlost alespoň 250km/h, velký zavazadlový prostor, airbagy pro řidiče i spolujezdce, zelenožlutou barvu, spotřebu nejvýš 5l/100km, otevírací střechu, zamykání na dálkové ovládání a přípojku pro karavan. Při průzkumu trhu pravděpodobně zjistíš, že většina aut má některé z těchto vlastností, ale ne všechny. Možná se proto rozhodneš udělat si přehlednou tabulku, která Ti umožní jednotlivá auta srovnávat:

	cena	rychlost	prostornost	airbagy	barva	spotřeba	střecha	...
trabant	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	...
mercedes	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	...
$\vdots$								

Můžeš také zkusit zavést pravdivostní hodnoty, které budou vyhodnocovat výrok „toto auto splňuje všechny mé požadavky“. Jedním ze způsobů by bylo přisoudit každému požadavku stejnou důležitost a říct, že pro auto, které splňuje sedm z deseti předpokladů, má tento výrok pravdivostní hodnotu $0,7$, zatímco pro auto, které splňuje tři předpoklady, má hodnotu jen $0,3$. Tímto způsobem ale ztratíš mnoho cenné informace o tom, které předpoklady auto splňuje a které ne.

Jinou možností je zavést pravdivostní hodnoty, které mají více složek. Každá složka pak bude vypovídat o jednom požadavku. Pro trabant a mercedes dostaneme pravdivostní hodnoty

$$trabant = (1,0,0,0,1,0,0,\dots),$$

$$mercedes = (0,1,1,1,0,0,1,\dots),$$

Zajímavou a užitečnou vlastností tohoto typu pravdivostních hodnot je to, že pravdivostní hodnotu složeného výroku lze počítat po složkách. To znamená, že nejprve vyhodnotíme pravdivostní hodnotu každého požadavku zvlášť - stejně jako v klasické logice - a pak dáme tyto pravdivostní hodnoty dohromady. Například pohledem do předchozí tabulky snadno zjistíme, že téměř ideálním autem by byl kříženec trabantu s mercedesem, protože výrok „téměř všechny mé předpoklady splňuje buď trabant nebo mercedes“ má pravdivostní hodnotu

$$trabant \vee mercedes = (1,1,1,1,1,0,1,\dots).$$

[7]Peregrin označuje pravdivostní hodnoty P a N místo našeho 1 a 0.

Vidíme ale také, že nevhodnou kombinací vlastností trabantu a mercedesu bychom dostali zcela nepoužitelné auto:

$$trabant \wedge mercedes = (0,0,0,0,0,0,0,\dots).$$

Při interpretaci součinových pravdivostních hodnot musíme být velmi opatrní. Například jsme viděli, že vysoká hodnota výroku *trabant* ∨ *mercedes* neříká, že „buď trabant nebo mercedes splňuje všechny mé předpoklady“ ale pouze „téměř všechny mé předpoklady jsou splněny alespoň jedním z aut trabant a mercedes“.

V následující matematické definici shrňme důležité vlastnosti součinových logik:

1. Pravdivostní hodnoty vznikají kombinací pravdivostních hodnot jednodušších logik (v našem příkladě to byla vždy dvouhodnotová logika, ale klidně bychom mohli uvažovat i vícehodnotové logiky: třeba barva nějakého auta se mi může líbit (1), nelíbit (0) nebo mi být lhostejná (x)).

2. Pravdivostní hodnota výroku obsahujícího nějakou spojku se počítá po složkách, tedy zvlášť v každé jednodušší logice, ze kterých se skládá součinová logika.

Definice 10. Zvolme si n logik A_i (ne nutně různých). Nechť logika A_i má množinu pravdivostních hodnot P_i. Pak ***součin logik*** $\prod_{i=1}^{n} A_i$ má množinu pravdivostních hodnot $\{(p_1, p_2, \dots, p_n), p_i \in P_i\}$. Pravdivostní hodnota složeného výroku se z pravdivostních hodnot jednodušších výroků určuje po složkách podle pravidel platných v jednotlivých logikách.

Nic nám nebrání dosazovat na jednotlivé složky hodnoty některé vícehodnotové logiky. Například míru své spokojenosti s maximální rychlostí auta mohu vyjádřit na šestistupňové škále (0 - nedá se s ním jezdit víc než šedesátkou, $\frac{1}{5}$ - na dálnici bych se musel držet v pravém pruhu, $\frac{2}{5}$ - maximální rychlost 110-130 km/h, … 1 - maximální rychlost přes 250 km/h), spokojenost s barvou auta na třístupňové škále (1 - zelenožluté, $\frac{1}{2}$ - zelené nebo žluté, 0 - ostatní barvy) a spokojenost s airbagy na dvoustupňové škále (1 - má airbagy, 0 - nemá airbagy).

Je zřejmé, že některé hodnoty součinové logiky lze jen těžko porovnávat: je lepší auto, které má airbagy, ale není zelenožluté, nebo zelenožluté auto bez airbagů? Je lepší auto, které jezdí rychle za cenu vysoké spotřeby, a nebo pomalé auto s nízkou spotřebou? Proto nebývají hodnoty součinové logiky uspořádané *lineárně* (tj. do řady od nejmenší po největší), ale jen částečně: auto A, které je ve všech aspektech lepší než auto B, je určitě celkově lepší než auto B. Je-li $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ hodnota auta A a $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ hodnota auta B, můžeme naši úvahu shrnout takto:

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) \geq (B_1, B_2, \dots, B_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{pro každé } i \leq n \ A_i \geq B_i.$$

Cvičení 11. Rozhodni, jestli lze čtyřhodnotovou logiku z první kapitoly s následujícími hodnotami považovat za součinovou logiku:

1=(1,0): Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0=(0,1): Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám důvod si myslet, že je nepravdivý.
X=(1,1): Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?=(0,0): Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

Výroky s presupozicí

Jedním z největších oříšků, s nimiž se logikové potýkají již celá desetiletí, jsou takzvané *presupozice*. Presupozice je předpoklad, který musí být splněn, aby daný výrok vůbec mohl být pravdivý nebo nepravdivý. Třeba věta „současná královna Anglie je stará paní“ je pravdivá, ale věta „součaný král Francie je holohlavý“ není pravdivá, ale ani nepravdivá, protože to by musela být pravdivá věta „současný král Francie není holohlavý), ale Francie nemá žádného krále. Věta „současný král Francie je holohlavý“ totiž obsahuje presupozici „Francie má v tuto chvíli krále“.

Součinové logiky nabízejí poměrně elegantní řešení tohoto problému: výrok A s presupozicí B budeme považovat za výrok o dvou složkách, z nichž první odpovídá presupozici a druhá implikaci „jestliže je presupozice pravdivá, tak je pravdivý i výrok“. Jinak řečeno, místo výroku A budeme vyhodnocovat dvojici (B, B ⇒ A). Na příkladu francouzského krále si ukážeme význam jednotlivých pravdivostních hodnot:

(1,1) Francie má v tuto chvíli krále a tento král je holohlavý.
(1,0) Francie má v tuto chvíli krále a tento král není holohlavý.
(0,1) Francie v tuto chvíli nemá krále (a tudíž nemá smysl ptát se, zda je holohlavý).
(0,0) Tato varianta nastat nemůže, protože implikace s nepravdivým prvním členem je vždy pravdivá.

Směsice poznámek a citátů

Šestihodnotová teologická logika

Pro zkoumání různé závažnosti pravdivých výroků lze v teologii použít šestihodnotovou logiku, ve které jsou pravdivostní hodnoty interpretovány následovně:

1 logicky pravdivý
$\frac{4}{5}$ teologicky pravdivý (pravda na základě víry)
$\frac{3}{5}$ fakticky pravdivý
$\frac{2}{5}$ fakticky nepravdivý
$\frac{1}{5}$ teologicky nepravdivý (v protikladu s pravdou víry)
0 logicky nepravdivý

4 trojhodnotové implikace[8]

V našem povídání o tom, jaké vlastnosti by měly mít tabulky pro jednotlivé spojky, jsme toho o implikaci mnoho neřekli, protože popsat „rozumné“ vlastnosti implikace je o něco náročnější než popsat „rozumné“ vlastnosti ostatních spojek.

Jedním ze způsobů, jak se dívat na vícehodnotové logické spojky, je tento: existuje jedna *vybraná hodnota*, která odpovídá situaci, kdy výrok je pravdivý. Ostatní hodnoty zachycují rozdíly v důvodech, proč výrok pravdivý není (je nepravdivý, nesmyslný, jeho pravdivostní hodnota je neznámá a podobně).

Jeví se jako celkem rozumné požadovat, aby vícehodnotové spojky splňovaly následující kritérium: pokud všechny nevybrané hodnoty (v našem případě hodnoty x a 0) nahradíme jedinou hodnotou (označíme ji také 0, k mýlce nemůže dojít), stanou se z vícehodnotových tabulek tabulky klasické logiky.

Na první pohled vidíme, že například tabulka pro negaci $\neg_{\mathrm{x}}$ toto kritérium nesplňuje:

A	$\neg_{\mathrm{x}}$A
1	0
x	x
0	1

$\longrightarrow$

A	„$\neg_{\mathrm{x}}$A“
1	0
0	**0**
0	**1**

$\neq$

A	$\neg$A
1	0
0	**1**
0	**1**

Vidíme, že se v takto vzniklé tabulce objevily dvě různé výsledné hodnoty pro původní hodnotu 0!

Cvičení 12. Ani žádná ze čtyř implikací, o kterých jsme již mluvili (Łukasiewiczova, Heytingova, Bočvarova a Kleenova) nesplňuje toto přísné kritérium! Existují jen 4 implikace, které je splňují - dokážeš je najít?

11 trojhodnotových implikací[9]

Milan Matoušek a Petr Jirků navrhují následující méně přísná kritéria pro implikaci (písmena a, b, c označují pravdivostní hodnoty):

(1) Předpokládáme, že $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$; například můžeme ztotožnit pravdivostní hodnotu x s hodnotou $\frac{1}{2}$.

(2) Je-li $a < 1$, potom $(1 \Rightarrow a) < 1$.

(3) Je-li $a < b$, potom $a \Rightarrow b = 1$.

(4) Je-li $a < b$, potom pro každé c platí $(c \Rightarrow a) \leq (c \Rightarrow b)$.

(5) Je-li $a < b$, potom pro každé c platí $(a \Rightarrow c) \geq (b \Rightarrow c)$.

Cvičení 13. Ověř, že klasická implikace splňuje kritéria (2)-(5). Které ze čtyř trojhodnotových implikací, o nichž byla řeč v textu, splňují tyto podmínky?

Těchto pět kritérií je jedním ze způsobů, jak matematicky popsat klasickou implikaci tak, abychom ji mohli zobecnit na více hodnot. Matoušek a Jirků dále ukazují, že existuje právě jedenáct implikací, které těmto kritériím vyhovují. Jsou to:

[8] Miroslav Mleziva: O trojhodnotové logice, str. 6-11.
[9] Milan Matoušek, Petr Jirků: Three-Element Implicative Matrices, Miscellanea logica V, str. 85-102. Jirků, slidy 112-113.

A	B		$\Rightarrow_W$	$\Rightarrow_J$	$\Rightarrow_3$	$\Rightarrow_A$	$\Rightarrow_K$	$\Rightarrow_P$	$\Rightarrow_4$	$\Rightarrow_Y$	$\Rightarrow_H$	$\Rightarrow_L$	$\Rightarrow_S$
1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	x		**0**	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**	**x**	**x**
1	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x		**0**	**x**	**x**	**x**	**x**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
x	0		**0**	**0**	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	**1**	**0**	**x**	**1**
0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	x		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Autory logik s jednotlivými implikacemi jsou Lewis, Jaskowski, Avron, Kleene, Przymuszinski, Jirků, Heyting, Łukasiewicz, Slupecki. Není známo, že by se někdo podrobněji zabýval studiem dvou implikací označených $\Rightarrow_3$ a $\Rightarrow_4$. Čtvercové tabulky pro těchto jedenáct implikací vypadají takto (řadíme je podle počtu výskytů hodnoty x v tabulce; hodnoty, kterými se jednotlivé implikace liší, jsou zvýrazněny):

A $\Rightarrow_W$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**0**	**0**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_P$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**1**	**0**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_Y$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**1**	**1**
0	1	1	1

“

A $\Rightarrow_J$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**x**	**1**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_4$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**1**	**x**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_H$ B	1	x	0
1	1	**x**	0
x	1	**1**	**0**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_S$ B	1	x	0
1	1	**x**	0
x	1	**1**	**1**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_3$ B	1	x	0
1	1	**0**	0
x	1	**x**	**x**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_A$ B	1	x	0
1	1	**x**	0
x	1	**x**	**0**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_L$ B	1	x	0
1	1	**x**	0
x	1	**1**	**x**
0	1	1	1

A $\Rightarrow_K$ B	1	x	0
1	1	**x**	0
x	1	**x**	**x**
0	1	1	1

Funkční úplnost

V povídání o klasické logice jsme si řekli, že všechny spojky lze vyjádřit pomocí $\Rightarrow$ a $\neg$ nebo třeba pomocí $\wedge$ a $\neg$. Dokonce lze vyjádřit nejen spojky $\vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$, ale i jakoukoli další spojku, jejíž tabulka obsahuje pouze nuly a jedničky. Proto řekneme, že množina spojek $\{\wedge, \neg\}$ je *funkčně úplná.*

Naopak spojku $\neg$ nelze vyjádřit pomocí spojek $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Vidíme tedy, že existuje logická spojka s tabulkou, která obsahuje pouze dvě hodnoty, kterou nelze vyjádřit pomocí dvouhodnotových spojek $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Proto řekneme, že množina spojek $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ je *funkčně neúplná.*

Následující tabulky ukazují všechny jednoargumentové a dvouargumentové dvouhodnotové spojky:

A		True	A	$\neg$	False
1		1	1	0	0
0		1	0	1	0

A	B		True	$\vee$	?	A	$\Rightarrow$	B	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	$\otimes$	$\neg$B	$\neg\Rightarrow$	$\neg$A	?	$\downarrow$	False
1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0		1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1		1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Připomeňme si, že se spojkami $|, \downarrow a\times$ jsme se seznámili ve cvičeních první kapitoly: $|$ je Shefferovo lomítko (cvičení 18), $\downarrow$ je Peircův symbol (cvičení 8) a $\otimes$ je vylučovací nebo čili xor (cvičení 2).

V tabulce nalezneš i několik spojek, se kterými jsme se dosud nesetkali. Výrok utvořený pomocí spojky True je vždy pravdivý, naopak výrok utvořený pomocí spojky False je vždy nepravdivý. Všimni si, že obě spojky mohou být jedno-, dvou- i víceargumentové, takže můžeme psát True(A) = A $\vee$ $\neg$A nebo třeba True(A,B,C,D,E) = A $\vee$ $\neg$A. Můžeme je dokonce považovat za „bezargumentové spojky“: takovým spojkám se říká *konstanty* a lze je použít při tvorbě výroků místo nějakého vždy pravdivého či vždy nepravdivého výroku. Například výrok False $\Rightarrow$ A je tautologií klasické logiky, protože implikace s nepravdivým prvním členem je vždy pravdivá.

Spojka $\neg_{\mathrm{B}}$ značí dvouargumentovou negaci druhého argumentu: je to černá skříňka, do které strčím dva výroky a ona vyplivne negaci druhého z nich: $\neg_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \neg\mathrm{B}$.

Přesná definice funkční úplnosti je tato:

Definice 14. *Řekneme, že množina k-hodnotových spojek M je funkčně úplná, jestliže pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ je každá n-ární k-hodnotová spojka ekvivalentní nějaké formuli obsahující pouze spojky z M.*

Například v případě klasické logiky je spojka A|B ekvivalentní formuli $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$, která obsahuje pouze spojky $\neg$ a $\wedge$.

Cvičení 15. Ke všem jedno- a dvouargumentovým spojkám z předchozích tabulek najdi ekvivalentní formule obsahující pouze spojky $\neg$ a $\wedge$!

Logiky vždy zajímá, zda jsou vícehodnotové logiky funkčně úplné. V případě tříhodnotové logiky to znamená, že pomocí spojek zkoumané logiky musíme umět vyjádřit všech 27 jednoargumentových funkcí (rozmysli si, že jich je opravdu tolik!), všechny dvouargumentové funkce a tak dále!

Cvičení 16. Kolik je trojhodnotových dvouargumentových funkcí?

Zdá se skoro nemožné, že by se podařilo něčeho takového dosáhnout pomocí rozumného počtu spojek. Proto Tě jistě nijak nepřekvapí výsledek následujícího cvičení:

Cvičení 17. Ukaž, že v Łukasiewiczově logice nelze vyjádřit jednoargumentovou funkci $\times$:

A		$\times$A
1		x
x		x
0		x

O to víc Tě pravděpodobně překvapí věta, kterou dokázal J. Slupecki:

Věta 18. *Množina spojek $\{\Rightarrow_L, \neg_{\mathrm{X}}, \times\}$ je funkčně úplná.*

Lidsky řečeno: přidáme-li k Łukasiewiczově logice ještě spojku $\times$, dostaneme funkčně úplnou logiku! Slupecki dále ukázal, že také trojice spojek $\Rightarrow_S, \neg_1, R$ je funkčně úplná; R je přitom jedna z těch spojek, které pravděpodobně nemají žádný snadno vysvětlitelný význam:

A		RA
1		x
x		1
0		0

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Řešení cvičení 1 Tabulky pro negaci $\neg$A, konjunkci A $\wedge$ B a disjunkci A $\vee$ B se v obou logikách shodují; tabulka pro implikaci se liší v jediné hodnotě, a to x $\Rightarrow$ 0; v důsledku toho se tabulka pro ekvivalenci[10] liší v obou případech, ve kterých hodnota jednoho z výroků A a B je x a hodnota druhého je 0.

A, B i C mohou mít každá tři různé pravdivostní hodnoty, celkem tedy existuje $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ různých přiřazení pravdivostních hodnot. Pro zjištění, zda je nějaká formule tautologií, bychom tedy museli vyplnit 27-řádkovou tabulku! Existuje ale o něco rychlejší způsob, jak to udělat:

Zkusíme předpokládat, že zadaná formule (v našem případě ((A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ (((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C), ale postup je zcela obecný) není tautologií, to znamená, že při nějakém přiřazení hodnot 1, x a 0 výrokům A, B a C má hodnotu 0 nebo x. Zkusme nyní určit, jaké ohodnocení by to mohlo být třeba v případě Łukasiewiczovy logiky. V následujícím odstavci je slovy vysvětleno, jaké úvahy byly potřebné k vyplnění tabulky pod ním.

Zkoumejme nejprve možnost, že hodnota této formule je 0. Protože se jedná o implikaci „(A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C implikuje ((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C", musí být první člen pravdivý a druhý nepravdivý (v tabulce implikace je jediná 0). Zkoumejme nejprve druhý člen. Opět vidíme, že se jedná o implikaci, jejíž druhý člen, totiž C, musí být nepravdivý. První člen (B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C musí být pravdivá implikace; v tabulce implikace je mnoho jedniček, ale jen jedna z nich se vyskytuje ve sloupečku, ve kterém má druhý člen hodnotu 0. Z toho můžeme usoudit, že B $\Rightarrow$ A musí být 0, takže B je 1 a A je 0. Když nyní tyto hodnoty doplníme do implikace (A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C, zjistíme, že je nepravdivá, ačkoli jsme ji dříve označili za pravdivou. To je spor: formule ((A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ (((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C) tedy nemůže mít pravdivostní hodnotu 0.

((	A	⇒	B	)	⇒	C	)	⇒	(((	B	⇒	A	)	⇒	C	)	⇒	C	)
								0											
					1			0									**0**		
					1	0		0						**1**	0		0	**0**	
					1	0		0			**0**			1	0		0	0	
	0		1		1	0		0		**1**	0	**0**		1	0		0	0	
	0	**1**	1		1	0		0		1	0	0		1	0		0	0	
	0	1	1		**0**, 1	0		0		1	0	0		1	0		0	0	

Podobnou úvahu můžeme provést i pro oba případy, kdy má formule ((A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ (((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C) pravdivostní hodnotu x. V případě, že první člen je x a druhý 0 dostaneme na základě druhého členu opět pravdivostní hodnoty pro A, B a C po řadě 0, 1 a 0; jak již víme, má při tomto ohodnocení implikace (A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C hodnotu 1 a ne x, jak bychom potřebovali.

Doporučuji Ti zkusit prozkoumat případ, že (A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C má hodnotu 1 a ((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C má hodnotu x samostatně a porovnat svůj výsledek s následující tabulkou:

((	A	⇒	B	)	⇒	C	)	⇒	(((	B	⇒	A	)	⇒	C	)	⇒	C	)
					1			x									x		

1. možnost:

((	A	⇒	B	)	⇒	C	)	⇒	(((	B	⇒	A	)	⇒	C	)	⇒	C	)
					1	x		x						**1**	x		x	**x**	

Implikace A $\Rightarrow$ B má buďto hodnotu x, nebo hodnotu 0. Máme tedy tři možnosti: A=1, B=x; A=x, B=0; A=1, B=0. Ve všech třech případech má B $\Rightarrow$ A hodnotu 1, takže (B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C má hodnotu x a ne 1, jak bychom potřebovali.

2. možnost:

((	A	⇒	B	)	⇒	C	)	⇒	(((	B	⇒	A	)	⇒	C	)	⇒	C	)
					1	0		x						**x**	0		x	**0**	
		0			1	0		x						x	0		x	0	
	1	0	**0**		1	0		x		0		1		x	0		x	0	
	1	0	0		1	0		x		0	**1**	1		x	0		x	0	
	1	0	0		1	0		x		0	1	1		**0**,x	0		x	0	

Vyzkoušeli jsme všechny možnosti, jak formuli ((A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ (((B $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ C) přiřadit jinou pravdivostní hodnotu než 1 a pokaždé jsme dospěli ke sporu; z toho je vidět, že tato formule

[10] Téměř ve všech logikách, trojhodnotové nevyjímaje, je A $\Leftrightarrow$ B považováno za zkratku za formuli (A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A).

je tautologií Łukasiewiczovy trojhodnotové logiky. K tomu, abychom to zjistili, jsme popsali pouze 14 řádků tabulky, což dalo o něco méně práce, než vyplnit všech 27 řádků tabulky, abychom zjistili, jestli má zkoumaná formule ve všech hodnotu 1.

Předvedený postup lze použít v libovolné logice, ve které určujeme pravdivost složených výroků pomocí tabulky, tedy i v klasické logice.

Řešení cvičení 2 Je-li výrok A pravdivý a výrok B nepravdivý, je implikace nepravdivá („$1 \Rightarrow 0 = 0$“), ale je-li výrok A nepravdivý a B také, je implikace pravdivá („$0 \Rightarrow 0 = 1$“). Proto se domnívám, že pojetí hodnoty x jako „nevíme, zda 0 nebo 1“ lépe odpovídá Łukasiewiczova implikace, pro kterou platí „$\mathrm{x} \Rightarrow 0 = \mathrm{x}$“.

Řešení cvičení 3 Pokud nějakému jednoduchému výroku přiřadíme pravdivostní hodnotu x, bude i libovolný složitější výrok, který jej obsahuje, mít pravdivostní hodnotu x. Díky tomu pravdivostní hodnota každého výroku může být x, stačí prohlásit za nesmyslný nějaký jednodušší výrok, který obsahuje. (Zjednodušeně se na to můžeš dívat takto: pokud jedna z vět tvořících nějaké souvětí nedává smysl, pak ani celé souvětí nedává smysl.)

Řešení cvičení 4

$$\neg_1 \mathrm{A} \quad \text{má stejnou tabulku jako} \quad \Diamond\neg \mathrm{A}$$

$$\neg_0 \mathrm{A} \quad \text{má stejnou tabulku jako} \quad \Box\neg \mathrm{A}$$

Řešení a poznámka ke cvičení 5 Ve všech třech případech se jako nejvhodnější jeví negace $\neg_{\mathrm{X}}$. Tato negace se někdy nazývá *interní negace*, zatímco $\neg_1$ se nazývá *optimistická externí negace* a $\neg_0$ *pesimistická externí negace*. Externí negace odpovídají představě, že každý výrok má pravdivostní hodnotu 1 nebo 0; x znamená pouze to, že tuto skutečnou pravdivostní hodnotu neznáme. V optimistické negaci můžeme vidět tvrzení „není známo, že A je pravdivé“. Pesimistická negace odpovídá tvrzení „je známo, že A je nepravdivé“.

Řešení cvičení 5 Jsou-li pravdivostní hodnoty výroků A i B buďto 0 nebo 1, počítá se pravdivostní hodnota složitějších výroků stejně jako v klasické logice a platnost de Morganových zákonů tedy není narušena. Je-li pravdivostní hodnota některého z výroků x, je pravdivostní hodnota libovolného složitějšího výroku také x a de Morganovy zákony tedy platí také.

Řešení a poznámka ke cvičení 7 Nejčastěji používaným matematickým vyjádřením (interní) negace je $|\neg \mathrm{A}| = 1 - |\mathrm{A}|$. Optimistickou externí negaci lze vyjádřit pomocí $|\neg_0 \mathrm{A}| = 1 - \operatorname{sgn}|\mathrm{A}|$, kde funkce $\operatorname{sgn} x$ určuje znaménko čísla x:

$\operatorname{sgn} 0 = 0$
$\operatorname{sgn} x = 1$ $\quad x$ kladné
$\operatorname{sgn} x = -1$ $\quad x$ záporné

Nápověda ke cvičení 9 Zvol přiřazení pravdivostních hodnot výrokům A a B tak, aby žádný z výroků $\neg\mathrm{A}, \neg\mathrm{B}, \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \mathrm{A} \vee \mathrm{B}, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}, \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ neměl pravdivostní hodnotu 1.

Řešení cvičení 9 Zvolíme-li pravdivostní hodnotu všech jednoduchých výroků rovnou x, bude také pravdivostní hodnota všech složitějších výroků x, jak se snadno přesvědčíme pohledem do tabulek: je-li $|\mathrm{A}| = \mathrm{x}$ a $|\mathrm{B}| = \mathrm{x}$, je také $|\neg\mathrm{A}| = |\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}| = |\mathrm{A} \vee \mathrm{B}| = |\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = |\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}| = \mathrm{x}$.

Řešení cvičení 11 Domnívám se, že tato logika není součinovou logikou, ač za ni někdy bývá vydávána. Tak, jak jsou hodnoty označeny v zadání, by totiž konjunkcí výroků A a B s pravdivostními hodnotami 1=(1,0) a X=(1,1) byl výrok s pravdivostní hodnotou 1=(1,0); ale mám-li důvod věřit, že B není pravdivý, mám tím spíš důvod věřit, že $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ není pravdivý. Konjunkci je tedy třeba vyhodnocovat jako konjunkci na 1. složce, ale jako disjunkci na 2. složce, takže není obvyklou součinovou konjunkcí.

Ještě závažnější problém vidím v tom, že negace ve skutečnosti prohazuje složky: negací výroku s hodnotou 1=(1,0) je výrok s hodnotou 0=(0,1), což odpovídá součinové negaci, ale negací výroku s pravdivostní hodnotou X=(1,1) je opět výrok s pravdivostní hodnotou X=(1,1), jak dokládám v 1. kapitole ve cvičení 17.

Na první pohled by se mohlo zdát, že pohled na tuto logiku jako součinovou logiku obhájíme otočením hodnot ve druhé složce: 1=(1,1), 0=(0,0), X=(1,0), ?=(0,1). Při tomto přiřazení složených hodnot původním hodnotám se totiž konjunkce skutečně chová jako součinová konjunkce (provedení konjunkce na opačné hodnoty dává totiž opačnou hodnotu než je hodnota disjunkce díky de Morganovým zákonům:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, takže vyhodnocení druhých složek je tentokrát v pořádku). Ale ani při tomto přiřazení nebude negace prostou součinovou negací, protože součinovou negací hodnoty (1,0) je hodnota (0,1), ale negací hodnoty X je opět hodnota X.

Nápověda ke cvičení 12 Nejprve vyplň označená políčka tabulky:

$A \Rightarrow B$	1	x	0
1	$*$		
x	$*$	$*$	$*$
0	$*$	$*$	$*$

Řešení cvičení 12

$A \Rightarrow_1 B$	1	x	0
1	1	**x**	**x**
x	1	1	1
0	1	1	1

$A \Rightarrow_S B$	1	x	0
1	1	**x**	**0**
x	1	1	1
0	1	1	1

$A \Rightarrow_2 B$	1	x	0
1	1	**0**	**x**
x	1	1	1
0	1	1	1

$A \Rightarrow_Y B$	1	x	0
1	1	**0**	**0**
x	1	1	1
0	1	1	1

O implikaci $\Rightarrow_S$ ještě uslyšíme v souvislosti s funkční úplností. Jejím autorem je logik J. Slupecki. Implikací $\Rightarrow_Y$ se zabýval současný český logik Petr Jirků. Není mi známo, že by někdo důkladněji studoval vlastnosti implikací $\Rightarrow_1$ a $\Rightarrow_2$ kromě Miroslava Mlezivy ve zmiňovaném článku; jsou „podezřelé“, protože pro ně platí „$1 \Rightarrow 0 = x$“, zatímco v klasické logice platí „$1 \Rightarrow 0 = 0$“.

Řešení cvičení 13
Uváděli jsme si jen jedinou implikaci, která tato kritéria nesplňuje, a to implikaci Bočvarovu.

Řešení cvičení 15 Uveďme jen formule pro prvních několik spojek, ostatní lze získat podobně:
$False(A) \Leftrightarrow False(A, B) \Leftrightarrow A \wedge \neg A$
$True(A) \Leftrightarrow True(A, B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A)$
$A \Leftrightarrow A, B \Leftrightarrow B$ $A \vee B \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A?B \;\Leftrightarrow\; B \Rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \wedge B)$
$\neg_A(A, B) \Leftrightarrow \neg A$

Řešení cvičení 16
Všech dvouargumentových funkcí je skoro 20 000! Přesněji, je jich $3^9 = 19683$.
Vysvětleme si, proč tomu tak je. Už jsme si všimli, že tabulka trojhodnotové dvouargumentové funkce má devět řádků (nebo políček) odpovídajících devíti možným kombinacím tří základních hodnot. Do prvního řádku můžeme napsat tři různé hodnoty; pro každou z těchto hodnot můžeme do druhého řádku opět napsat tři různé hodnoty (to je celkem devět možností, jak vyplnit první dva řádky); pro každou z těchto devíti možností máme opět tři možnosti, jak vyplnit třetí řádek (celkem $3^3 = 27$ možností, jak vyplnit první tři řádky). Budeme-li takto pokračovat dál, zjistíme, že máme celkem $3^9 = 19683$ možností, jak vyplnit celou tabulku!

Řešení a poznámka ke cvičení 17 Všechny spojky Łukasiewiczovy logiky mají následující vlastnost: je-li hodnota všech argumentů buď 0 nebo 1, je i hodnota výsledku buď 0 nebo 1. Ale hodnota funkce $\times$ je vždy x - tedy i v případě, že argument má hodnotu 0 nebo 1.

Výsledek lze zformulovat i takto: požadovali jsme, aby se na „klasických“ hodnotách 0 a 1 spojky chovaly stejně jako v klasické logice. Ovšem v klasické logice neexistuje hodnota x, takže rozhodně není možné, aby hodnota nějaké formule dávala pro $|A| = 1$ hodnotu x.

6. FUZZY LOGIKY

Fuzzy teorie je nesprávná a zhoubná. Potřebujeme více logického myšlení, ne méně. Nebezpečí fuzzy logiky spočívá v tom, že bude podporovat ten typ nepřesného myšlení, který nám způsobil tolik potíží. Fuzzy logika je kokainem vědy.

Prof. Wiliam Kahan, University of California at Berkeley[1]

Zatímco zejména ve svých počátcích byla fuzzy logika předmětem vášnivých sporů mezi matematiky, dnes patří k nejrychleji se rozvíjejícím odvětvím logiky. K tomu vede zejména její hojné využívání v různých technologiích.

Fuzzy logiky: nekonečný počet pravdivostních hodnot

V kapitole o vícehodnotových logikách jsme nalezli následující vzorečky pro hodnoty složených výroků na základě hodnot jednodušších výroků:

$|\neg \mathrm{A}| = 1 - |\mathrm{A}|$

$|\neg_0 \mathrm{A}| = 1 - \operatorname{sgn} |\mathrm{A}|$ $\qquad$ $|\neg_0 \mathrm{A}| = 1$ pokud $|\mathrm{A}| = 0$, jinak $|\neg_0 \mathrm{A}| = 0$

$|\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}| = \min(|\mathrm{A}|, |\mathrm{B}|)$ $\qquad$ $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ má menší z hodnot výroků A, B.

$|\mathrm{A} \vee \mathrm{B}| = \max(|\mathrm{A}|, |\mathrm{B}|)$ $\qquad$ $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ má větší z hodnot výroků A, B.

Dále jsme našli několik způsobů, jak matematicky popsat implikaci:

(1) $|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = 1$ jestliže $|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B}|$
$|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = 0$ jinak

(2) $|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = 1$ jestliže $|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B}|$
$|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = 1 - |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$ jinak

(3) $|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = \max(1 - |\mathrm{A}|, |\mathrm{B}|)$ $\qquad$ protože klasicky platí $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B})$[2]

Od matematické formulace našich požadavků na vlastnosti tabulek pro jednotlivé spojky je již jen nepatrný krůček k logikám s více hodnotami. Tento krůček se v mnohém podobá kroku od dvouhodnotové logiky k logice trojhodnotové. Ze všeho nejdříve se musíme rozhodnout, kolik různých hodnot má naše logika připouštět a jak je budeme interpretovat.

Můžeme se například rozhodnout pro následujících pět pravdivostních hodnot:

(0) Výrok je nepravdivý.

($\frac{1}{4}$) Výrok není ani pravdivý ani nepravdivý, ale je spíš nepravdivý.

($\frac{1}{2}$) Výrok není ani pravdivý ani nepravdivý.

($\frac{3}{4}$) Výrok není ani pravdivý ani nepravdivý, ale je spíš pravdivý.

(1) Výrok je pravdivý.

Těchto pět pravdivostních hodnot můžeme přisuzovat například výrokům o budoucnosti: výrok „za rok budu v Praze“ má pravdivostní hodnotu $\frac{3}{4}$, zatímco výrok „za rok budu v Číně“ má pravdivostní hodnotu $\frac{1}{4}$. Spokojíme-li se s rozdělením měst podle velikosti do pěti skupin, bude nám těchto pět pravdivostních hodnot stačit i k ohodnocení výroků typu „Praha je obrovská“. Jenže tady narazíme - určitě není těžké najít deset i více různě velkých měst, takže použitím pouhých pěti pravdivostních hodnot nemůžeme vyčerpat celou škálu rozdílů ve velikosti měst. No dobrá, možná by nám stačilo deset pravdivostních hodnot … nebo dvacet …

Bez ohledu na to, jaký konečný počet pravdivostních hodnot použijeme, může se nám stát, že budeme potřebovat ještě jemnější rozlišení. Máme ale štěstí: nic nám nebrání prohlásit všechna čísla z uzavřeného intervalu $[0, 1]$[3] za možné pravdivostní hodnoty! Logiky s touto množinou pravdivostních hodnot se nazývají *fuzzy logiky.*

Hned na počátku úvah o fuzzy logikách je důležité si uvědomit, že pravdivostní hodnota výroku A není totožná s pravděpodobností, že výrok A je pravdivý. Například řekneme-li, že pravdivostní hodnota

---

[1] Překlad je můj vlastní: *„Fuzzy theory is wrong and pernicious. What we need is more logical thinking, not less. The danger of fuzzy logic is that it will encourage the sort of imprecise thinking that has brought us so much trouble. Fuzzy logic is the cocaine of science.“*

Bart Kosko: Fuzzy Thinking, Flamingo, London 1994, str. 3.

[2] V tomto případě platí též $|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = 1 - \min(|\mathrm{A}|, 1 - |\mathrm{B}|)$, což odpovídá klasické ekvivalenci $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$.

[3] Možná ve škole používáte označení $< 0, 1 >$; máme na mysli množinu všech reálných čísel x splňujících $0 \leq x \leq 1$.

výroku „Praha je obrovská“ je $\frac{2}{3}$, nemáme tím na mysli tvrzení „Praha je obrovská s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ obrovská není“.

Cvičení 19.

a) Přiřaď následujícím výrokům hodnotu mezi 0 a 1 podle toho, jak moc odpovídají pravdě:

- Mám rád / ráda buchtičky se šodó (guláš, svíčkovou, kuře, pizzu, velrybí tuk, bramborové placky, palačinky, vajíčka, jogurt, ovocné knedlíky ...)
- Myslím, že náš matikář (angličtinář, němčinář, tělocvikář ...) je dobrý učitel.
- Paroubek (Karel IV., George Bush) je mým oblíbeným politikem.

◦ Mám ráda pizzu i guláš (vajíčka i jogurt, ovocné knedlíky i svíčkovou ...).
◦ Myslím, že náš matikář (angličtinář ...) není dobrý učitel.
◦ Jestliže je Paroubek mým oblíbeným politikem, tak je také Karel IV. mým oblíbeným politikem. Jestliže je Karel IV. mým oblíbeným politikem, tak také Paroubek je mým oblíbeným politikem.

b) Nyní se podívej na to, jak jsi ohodnotil věty v části a) a zamysli se nad tím, jaké jsou vztahy mezi hodnotami, které jsi přiřadil jednoduchým výrokům, a hodnotami, které jsi přiřadil jejich konjunkcím, negacím a implikacím.

Teď, když jsme se rozhodli pro pravdivostní hodnoty z intervalu $[0, 1]$, musíme určit závislost pravdivostních hodnot složených výroků $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B$ a $A \Leftrightarrow B$ na pravdivostních hodnotách výroků A a B. Je zřejmé, že při nekonečném počtu pravdivostních hodnot to nemůžeme udělat pomocí tabulky; protože pravdivostní hodnoty jsou číselné, jeví se jako nejvhodnější matematické vyjádření. Podívejme se na tři základní typy fuzzy logik:

	Łukasiewiczova fuzzy logika	**Gödelova** fuzzy logika	**Produktová** fuzzy logika
$\lvert\neg \mathbf{A}\rvert$	$1 - \lvert A\rvert$	0 jestliže $\lvert A\rvert > 0$ 1 jestliže $\lvert A\rvert = 0$	0 jestliže $\lvert A\rvert > 0$ 1 jestliže $\lvert A\rvert = 0$
$\lvert\mathbf{A}\&\mathbf{B}\rvert$	$\max(0, \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - 1)$	$\min(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$	$\lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$
$\lvert\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}\rvert$	1 jestliže $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$ $1 - \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$ jinak	1 jestliže $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$ $\lvert B\rvert$ jinak	1 jestliže $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$ $\frac{\lvert B\rvert}{\lvert A\rvert}$ jinak
$\lvert\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\rvert$	$\min(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$	$\min(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$	$\min(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$
$\lvert\mathbf{A} \vee \mathbf{B}\rvert$	$\max(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$	$\max(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$	$\max(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert)$

Za *tautologie* té či oné fuzzy logiky budeme opět považovat pouze ty formule, jejichž hodnota je 1 bez ohledu na to, jaké pravdivostní hodnoty mají jednotlivé jednoduché výroky.

Jednou ze zvláštností fuzzy logik je to, že obvykle mají dvě konjunkce: A&B se nazývá *silná konjunkce*, zatímco $A \wedge B$ *slabá konjukce*. Pouze v Gödelově logice obě tyto konjukce splývají. Přesto má většina fuzzy logik jen jednu disjunkci.

Možná Tě překvapí zjištění, že v Łukasiewiczově ani produktové logice nemusí být pravda, že $|A| = |A\&A|$. (Například pro $|A| = 0,5$ je v produktové logice $|A\&A| = 0,25$. V Łukasiewiczově logice dokonce platí, že je-li $|A| + |B| < 1$, tak je $|A\&B| = 0$.) S nadsázkou můžeme říci, že fuzzy logiky tímto způsobem zachycují rozdíl mezi větami „je to pravda“ a „je to pravda a je to pravda!!!“. První větu si troufnu říct tehdy, když A považuji za celkem pravdivé, ale druhou jen tehdy, když A považuji za `velmi` pravdivé.

Jinak řečeno, výrok A&A klade na pravdivost výroku A přísnější nároky, takže jeho pravdivostní hodnota je obecně nižší.

Také Gödelova negace (která se používá i v produktové logice) má jednu zvláštní vlastnost: není pravda, že $|\neg\neg A| = |A|$. (Je-li například $|A| = 0,5$, je $|\neg\neg A| = 1$!) Proto se v mnoha fuzzy logikách používají obě navržené negace, Łukasiewiczova i Gödelova.[4]

Cvičení 20. Ukaž, že ve všech třech logikách je silná konjunkce „přísnější" než slabá v následujícím smyslu: $|A\&B| \leq |A \wedge B|$ pro každou dvojici výroků A, B.

Cvičení 21. Rozhodni, ve kterých z těchto tří logik platí de Morganovy zákony:

$$|\neg(A \wedge B)| = |\neg A \vee \neg B|$$

$$|\neg(A \vee B)| = |\neg A \wedge \neg B|$$

* Kalkuly fuzzy logik

Všechny fuzzy logiky mají společné následující tautologie, které jsou proto nazývány *axiomy základní fuzzy logiky*:[5]

(A1)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	tranzitivita implikace
(A2)	$(A\&B) \Rightarrow A$	základní vlastnost konjunkce
(A3)	$(A\&B) \Rightarrow (B\&A)$	komutativita konjunkce
(A4)	$(A\&(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B\&(B \Rightarrow A))$	
(A5a)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A\&B) \Rightarrow C)$	
(A5b)	$((A\&B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	
(A6)	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (((B \Rightarrow A) \Rightarrow C) \Rightarrow C)$	
(A7)	$\perp \Rightarrow A$	spor implikuje cokoli

Následující poučka se někdy nazývá *pravidlo dosazení*:

`Za písmenka A, B a C v axiomech můžeš dosadit libovolnou formuli.`

Kalkul základní fuzzy logiky obsahuje také pravidlo modus ponens:

`Jestliže už jsi dokázal A ⇒ B a také A, můžeš použít toto pravidlo k dokázání B.`

Ukažme si, jak lze pomocí těchto axiomů a pravidel dokázat například formuli $V \Rightarrow (W \Rightarrow V)$.

(1)	$(V\&W) \Rightarrow V$	axiom (A2), pravidlo dosazení
(2)	$((V\&W) \Rightarrow V) \Rightarrow (V \Rightarrow (W \Rightarrow V))$	axiom (A5), pravidlo dosazení
(3)	$V \Rightarrow (W \Rightarrow V)$	(1), (2), modus ponens

Paradox hromady

Paradox hromady pochází již se starověkého Řecka:

Jediné zrnko písku není hromadou a přidáme-li jediné zrníčko k něčemu, co není hromadou, jistě tím `nevznikne` hromada; jak je tedy možné, že přidáváním jednotlivých zrnek nakonec `vznikne` hromada?!

Odpověď na tuto otázku dává fuzzy logika: Pravdivostní hodnota výroku „k zrnek písku tvoří hromadu" s rostoucím k přeci jen nepatrně roste. Nahlíženo z opačné strany: pravdivostní hodnota výroku „přidáním jediného zrníčka k něčemu, co není hromadou, nevznikne hromada" není 1, ale jen skoro 1. Nyní můžeme postupovat indukcí:

A. k zrníček písku netvoří hromadu.

B. Přidáním jednoho zrníčka nevznikne z k zrníček písku hromada.

C. Z toho plyne, že $k + 1$ zrníček také netvoří hromadu.

---

[4] Łukasiewiczova negace se na trojici hodnot $0, x = \frac{1}{2}, 1$ chová stejně jako interní negace $\neg_x$, zatímco Gödelova negace odpovídá pesimistické externí negaci $\neg_0$.

[5] V angličtině se používá označení *basic fuzzy logic* a proto se tato logika značívá BL.

Protože je pravdivostní hodnota předpokladu B menší než 1, je také pravdivostní hodnota předpokladu C menší než pravdivostní hodnota předpokladu A a s rostoucím k klesá k nule.[6] Pro nějaké velké k je tedy výrok „$k + 1$ zrníček netvoří hromadu“ nepravdivý.

Technické aplikace fuzzy logik

Pračky a myčky

Při pohledu do katalogu domácích spotřebičů Tě možná překvapí logo „fuzzy logic“ u některých praček a myček nádobí. Co má logika společného s praním, k tomu ještě fuzzy logika, která v prvé řadě slouží k zachycení neurčitosti?

Přístroje s touto technologií jsou vybaveny celou řadou přesných senzorů, které snímají například teplotu a znečištění vody, hmotnost vloženého prádla (či nádobí) a výšku hladiny. Uživatel nemusí složitě vybírat z velké nabídky různých programů jako dřív - prostě jen zadá o jaký druh prádla se jedná (senzor by si pravděpodobně musel kousek utrhnout, aby mohl provést důkladnou analýzu, což by se uživateli nelíbilo), o vše ostatní se postará malý počítač uvnitř.

Fuzzy logika se v těchto přístrojích používá k naplánování a průběžnému dolaďování pracího programu (množství a teplota vody, délka praní, máchání a ždímání). Na rozdíl od starších typů praček, ve kterých musel uživatel předem určit, jak dlouho se bude prát, máchat a ždímat, mohou tyto přístroje měnit program i za běhu (například když zjistí, že prádlo je stále špinavé i po delším praní, nebo naopak že z něj už po krátkém ždímání neodchází žádná voda). V tomto smyslu je řízení těchto praček fuzzy: uživatel si nemusí vybírat z nabídky ždímat (1) / neždímat (0), ale má k dispozici celou škálu různě dlouhého a různě důrazného ždímání.

Massive

Pravděpodobně nejúspěšnějším komerčním programem využívajícím fuzzy logiku je Massive - software umožňující animaci davových scén v reklamách a filmech. (Jmenujme například všechny tři díly Pána prstenů, filmy Já, robot, Lev, čarodějnice a skříň, King Kong.)

Animátor zde má k dispozici širokou nabídku postav (používá se pro ně označení agenti), jejichž charakter si může sám dotvořit volbou ze škály nabídek (velikost a tvar kostry, typy oblečení, dokonce i náladu a rychlost reakcí). Díky fuzzy logice může animátor určit typ hrdinů, kteří se mají vyskytovat v jeho davu, a program sám vytvoří velmi rozdílné agenty, kteří tomuto zadání odpovídají. Agenti působí zcela přirozeně a každý z nich se i uvnitř davu chová jako individualita: animátor totiž nevybírá ze dvou možností (agent danou vlastnost má či nemá), ale z nekonečně mnoha mezistupňů.

[6] Vycházíme z předpokladu, že hodnota implikace $(A \wedge B) \Rightarrow C$ je 1. Potom musí být $|A \wedge B| \leq |C|$ bez ohledu na použitou logiku. Úvahu o snižování pravdivostní hodnoty výroku C tedy můžeme provést v těch logikách, v nichž je $|A \wedge B| < |A|$ kdykoli $|B| < 1$. Takovou logikou není Gödelova logika, ale druhé dvě logiky, se kterými jsme se seznámili, toto kritérium splňují.

Směsice poznámek a citátů

Proč fuzzy logika není totéž co pravděpodobnost

Na příkladu věty „Praha je obrovská“ jsme si ukázali, že fuzzy hodnoty neodpovídají pravděpodobnosti, že daný výrok je pravdivý. Základní rozdíly mezi pravděpodobností a fuzzy logikou jsou tyto:

1. Fuzzy logika zachycuje *míru pravdivosti* nějakého výroku (tedy to, zda výrok je více či méně pravdivý), zatímco pravděpodobnost zachycuje *míru důvěryhodnosti* nějakého výroku. Například výrok „pacientka do roka zemře“ je buďto pravdivý nebo nepravdivý (pacientka nemůže napůl zemřít a napůl nezemřít), ale nevíme, co z toho. Dejme tomu, že víme, že třetina pacientů s podobnou diagnózou do roka zemřela. Pravděpodobnost, že pacientka do roka zemře, tedy je $\frac{1}{3}$.

2. Ve fuzzy logice závisí pravdivostní hodnota složeného výroku pouze na pravdivostních hodnotách jednodušších výroků. Naproti tomu v pravděpodobnosti tomu tak není.

Například náhodně vybraná žena je blondýna s pravděpodobností 0,1, zatímco náhodně vybraná žena je chytrá s pravděpodobností 0,6. Náhodně vybraná žena je chytrá blondýna s pravděpodobností 0,1 (protože všechny blondýnky jsou chytré). Tedy $P(\mathrm{B}) = 0,1, P(\mathrm{CH}) = 0,6, P(\mathrm{B} \wedge \mathrm{CH}) = 0,1$. Kdyby byly všechny blondýnky hloupé, bylo by $P(\mathrm{B} \wedge \mathrm{H}) = 0$, a kdyby chytrost nezávisela na barvě vlasů, bylo by $P(\mathrm{B} \wedge \mathrm{H}) = 0,06$. Vidíme tedy, že pravděpodobnost výroku $\mathrm{B} \wedge \mathrm{H}$ nezávisí jen na pravděpodobnostech jednotlivých částí.

Vyberme si nyní ženu Evu, která má světle hnědé vlasy a je celkem chytrá. Nechť například pravdivostní hodnota výroku „Eva je blondýna“ je 0,1 a pravdivostní hodnota výroku „Eva je chytrá“ je 0,6. Ve všech třech logikách je pravdivostní hodnota výroku „Eva je blondýna a ještě k tomu chytrá“ rovna 0,1.

t-normy

Při budování fuzzy logik se nejčastěji začíná stanovením pravdivostní funkce pro konjunkci. Hledáme tedy funkci $*$ takovou, že

$$|\mathrm{A}\&\mathrm{B}| = |\mathrm{A}| * |\mathrm{B}|.$$

Zřejmě musí mít následující vlastnosti:

- komutativita, aby $|\mathrm{A}\&\mathrm{B}| = |\mathrm{B}\&\mathrm{A}|$:

$$x * y = y * x$$

- asociativita, aby $|\mathrm{A}\&(\mathrm{B}\&\mathrm{C})| = |(\mathrm{A}\&\mathrm{B})\&\mathrm{C}|$:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- hodnota konjunkce je tím menší, čím menší je hodnota jednotlivých výroků:

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{potom} \quad x_1 * y \leq x_2 * y$$

$$y_1 \leq y_2 \quad \text{potom} \quad x * y_1 \leq x * y_2$$

- konjunkce s úplně pravdivým výrokem nemění hodnotu výroku:

$$1 * x = x$$

- konjunkce s nepravdivým výrokem je nepravdivá:

$$0 * x = 0$$

Dvouargumentové funkce splňující tato kritéria, do kterých lze dosazovat čísla z intervalu $[0,1]$ a výsledek bude opět číslo z $[0,1]$, se nazývají *t-normy.*

Cvičení 22. Ověř, že pravdivostní funkce konjunkce ve všech třech fuzzy logikách jsou t-normy:
Łukasiewiczova: $x * y = \max(0, x + y - 1)$
Gödelova: $x * y = \min(x, y)$
produktová: $x * y = x \cdot y$.

Vztah konjunkce a implikace ve fuzzy logikách

Ve všech fuzzy logikách založených na t-normách je pravdivostní hodnota implikace určena takto:

$$|\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}| = \max\{z, |\mathrm{A}| * z \;\; \leq |\mathrm{B}|\}$$

Implikace tedy má největší hodnotu, při které $|\mathrm{A}\&(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})| \leq |\mathrm{B}|$.

Ověřme, že takto určená implikace se na hodnotách 0 a 1 shoduje s klasickou implikací. Vidíme, že je-li výrok B pravdivý, můžeme pro implikaci vybrat větší z hodnot 0 a 1 (protože obě přípustné hodnoty konjunkce jsou menší nebo rovné 1). Naopak, je-li výrok B nepravdivý, musí buďto výrok A nebo výrok A $\Rightarrow$ B být nepravdivý. Je-li A pravdivý, musí být hodnota A $\Rightarrow$ B být nepravdivé (aby byla hodnota konjunkce menší nebo rovna 0), zatímco je-li A nepravdivý, zvolíme pro A $\Rightarrow$ B větší z hodnot 0 a 1.

Nápovědy, řešení a poznámky k některým cvičením

Poznámka ke cvičení 19

Je jasné, že hodnoty, které intuitivně přiřadíme složeným výrokům, neodpovídají hodnotám, které by složeným výrokům přiřadila některá z fuzzy logik na základě hodnot jednodušších výroků. Přes to by už zde měly být patrné určité zákonitosti: například konjunkce pravděpodobně nebude mít vyšší hodnotu než výroky, ze kterých se skládá. Vskutku by nás překvapilo, kdyby výrok „mám ráda vajíčka“ měl hodnotu 0,3, výrok „mám ráda špenát“ hodnotu 0,5 a výrok „mám ráda vajíčka i špenát“ hodnotu 0,9.

Přehled soutěžních úloh

1. úloha - Klasická logika, cvičení 17 - 4 hodnotová logika[1]

Zadání

Předpokládejme, že místo obvyklých pravdivostních hodnot „pravda / nepravda“ budeme pracovat s následujícími čtyřmi pravdivostními hodnotami:

1: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám důvod si myslet, že je nepravdivý.
X: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

a) Napiš tabulku pro negaci (tedy pro každou ze čtyř možných „pravdivostních hodnot“ výroku A urči, jakou hodnotu bude mít ¬A). (2 body)

b) Zkus určit, jaké hodnoty může mít konjunkce A ∧ B v následujících případech. Nezapomeň při tom na to, že v této logice nemusí pravdivostní hodnota A ∧ B záviset pouze na pravdivostních hodnotách výroků A, B.[2] (3 body)

A	B	A ∧ B
1	X	
1	?	
X	?	
0	X	

Vzorové řešení

a) Mám-li důvod si myslet, že výrok A je nepravdivý, mám současně důvod si myslet, že jeho negace je pravdivá – vždyť od negace očekáváme právě to, že bude vyjadřovat tvrzení „A je nepravdivé“.

Naopak, mám-li důvod si myslet, že výrok A je pravdivý, mám současně také důvod si myslet, že jeho negace je nepravdivá. Díky tomu by tabulka pro čtyřhodnotovou negaci měla vypadat takto:

A	¬A
1	0
0	1
X	X
?	?

b) U konjunkce je situace o trošku zapeklitější, podívejme se ale nejprve na některé dílčí případy:

Víme, že když je některý z výroků A, B nepravdivý, je také celý výrok A ∧ B nepravdivý. Naopak, jistotu o tom, že výrok A ∧ B je pravdivý, máme pouze tehdy, když víme, že oba výroky A i B jsou pravdivé. Můžeme tedy zformulovat následující pravidla:

(i) Mám-li nějaký důvod věřit, že výrok A je pravdivý, a také nějaký důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak mám důvod věřit, že jejich konjunkce je pravdivá.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků buďto 1 nebo X.)

(ii) Mám-li důvod věřit, že jeden z výroků A, B je nepravdivý, tak mám také důvod věřit, že jejich konjunkce je nepravdivá.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo X.)

Obrácením druhého pravidla dostaneme třetí pravidlo:

(iii) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je nepravdivý, ani nemám důvod věřit, že výrok B je nepravdivý, tak nemám důvod věřit, že výrok A a B je nepravdivý.
(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 1 nebo ?.)

Pokud se rozhodneme řídit se podle těchto pravidel, můžeme začít vyplňovat tabulku:

[1] James D. McCawley: Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic; tam podle Nuel Belnap: A useful four-valued logic. Ve sborníku M. Cunn and G. Epstein: Modern uses of multiple-valued logic, strany 5-37. Reidel, Dordrecht 1977.

[2] Tedy ∧ nemusí být extenzionální spojka.

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B$
1	X	podle (i) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	X
1	?	podle (iii) nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	1 nebo ?
X	?	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	0 nebo X
0	X	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý	0 nebo X

Vidíme, že naše pravidla umožňují určit pravdivostní hodnotu v prvním řádku. Navíc říkají, jestli máme důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý výrok.

Možná se ptáš, proč jsme neobrátili také první pravidlo – dostali bychom tak následující pravidlo:

(iv) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, nebo nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

Pomocí pravidla (iv) dostaneme nejčastěji přijímané řešení naší úlohy:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	?
X	?	0
0	X	0

Můžeme se ale rozhodnout pravidla (i) a (iv) pozměnit a být raději optimističtí:[3]

(i') Když mám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá. (Mohu argumentovat třeba takhle: už vím, že „aspoň půlka“ výroku $A \wedge B$ je pravdivá.)

Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 1 nebo X.

Pravidlo (iv) tedy přijmeme jen ve slabším znění:

(iv') Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je pravdivý a také nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

V tom případě bychom tabulku doplnili takto:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	X

Vidíme, že při vyplňování druhého až čtvrtého řádku si můžeme vybrat, zda budeme pesimističtí (raději nebudeme konjunkci $A \wedge B$ věřit, pokud pro to nemáme opravdu pádné důvody), nebo optimističtí (pokud první tři pravidla neurčují jasně, zda konjunkci věřit či ne, prostě jí uvěříme). Čtvrté pravidlo bychom mohli zformulovat ještě alespoň jedním způsobem:

(iv") Když mám důvod věřit, že jeden z výroků je pravdivý, a nemám důvod věřit, že druhý výrok je nepravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce je pravdivá.

(Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota jednoho z výroků A, B buďto 1 nebo X a pravdivostní hodnota druhého je 1, X nebo ?.)

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	0

Asi bychom dokázali vymyslet ještě další verze čtvrtého pravidla. Můžeme také říci, že v těchto případech nelze pravdivostní hodnotu výroku $A \wedge B$ určit pouze na základě pravdivostních hodnot výroků A a B.

[3] Ve skutečnosti je toto řešení spíše naivní než optimistické: uvěříme skoro všemu, co nám kdo napovídá.

Poznámky k došlým řešením

Velmi mne překvapilo, že většina řešitelů si neuvědomila rozdíl mezi pravdivostní hodnotou negovaného výroku (resp. konjunkce) a negací věty (resp. konjunkcí vět), která popisuje význam pravdivostní hodnoty. S tím se pojila další chyba, totiž nesprávné znegování konjunkce (pravdivostní hodnoty jsou totiž popsány výroky ve tvaru konjunkcí, jejichž negacemi by měly být disjunkce).

Většina řešitelů tak objevila součinovou logiku: každé pravdivostní hodnotě odpovídá dvojice klasických pravdivostních hodnot výroků „mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý“ a „mám důvod si myslet, že výrok je nepravdivý“ a logické operace se provádějí po složkách. Tabulka pro negaci v součinové logice vypadá takto:

A	¬A
1 = (1,0)	0 = (0,1)
0 = (0,1)	1 = (1,0)
X = (1,1)	? = (0,0)
? = (0,0)	X = (1,1)

Zatímco věty popisující pravdivostní hodnoty šlo snadno negovat (ač výsledkem nebyla žádna z nabízených pravdivostních hodnot), část řešitelů si všimla, že je nelze spojovat konjunkcí. Jak napsal jeden řešitel: *„Tato část mi přijde dosti diskutabilní, řekl bych totiž, že je otázkou citu pro češtinu. Jak totiž vnímat souvětí: „Mám důvod si myslet, že je výrok pravdivý i nepravdivý, ale zároveň nemám důvod myslet si, že je pravdivý ani nepravdivý.“ (X∧?) ?!“* Díky tomu byla část b) ve skutečnosti jednodušší než část a).

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravoval Vítězslav Kala.

Počet došlých řešení: 44

Průměr: 0,89

Medián: 0

body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	29	6	2	3	0	4

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	11	11	10	11	1

2. úloha - Klasická logika, cvičení 18 - Shefferovo lomítko

Zadání

Podívej se na tabulku výrokové spojky, jejíž význam je „*A a B jsou neslučitelné*“. Tato spojka se obvykle nazývá „Shefferovo lomítko“.

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Ukaž, že pomocí této jediné spojky lze vyjádřit všechny spojky výrokové logiky, tedy najdi formule, které obsahují pouze spojku | a jsou ekvivalentní s $\neg$A, A $\wedge$ B, A $\Rightarrow$ B, A $\vee$ B, A $\Leftrightarrow$ B.

Vzorové řešení

Formule pro negaci a konjunkci vytvoříme vcelku jednoduše:

$$\neg \mathrm{A} \Leftrightarrow (\mathrm{A}|\mathrm{A})$$

$$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{A}|\mathrm{B})|(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

Pro nalezení formule pro disjunkci můžeme použít známé de Morganovy zákony:

$$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \Leftrightarrow \neg(\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \Leftrightarrow [(\mathrm{A}|\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{B}|\mathrm{B})]|[(\mathrm{A}|\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{B}|\mathrm{B})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))|((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))]|[((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))|((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))]$$

Dostali jsme sáhodlouhé a krkolomné vyjádření. Když si budeme chvilku hrát s tabulkou, najdeme i kratší vyjádření: $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{A}|\neg \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B})$.

Toto vyjádření bychom objevili i pomocí de Morganových zákonů, kdybychom si uvědomili, že $\neg\neg \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$, což v řeči Shefferova lomítka zní $(\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{A}|\mathrm{A}) \Leftrightarrow \mathrm{A}$. Díky tomu můžeme zkrátit dlouhou formuli na krátkou:

$$[((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))|((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))]|[((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))|((\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}))] \Leftrightarrow (\mathrm{A}|\mathrm{A})|(\mathrm{B}|\mathrm{B}).$$

Formuli pro implikaci bychom mohli zkusit napsat pomocí některé z ekvivalencí

$$\neg(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}).$$

Kratší vyjádření zní:[4] $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{B}|\mathrm{A}) \Leftrightarrow (\mathrm{B}|\mathrm{B})|\mathrm{A}$.

Formuli pro ekvivalenci už určitě sám dokážeš napsat pomocí jedné ze dvou následujících ekvivalencí:

$$((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A})) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}).$$

Poznámka Opravovatel Pavel Paták mne upozornil na to, že nejjednodušší cestou k výše popsaným formulím je vyjádřit si slovy, co spojky znamenají v řeči neslučitelnosti:

$\neg$A znamená, že A je neslučitelné samo se sebou: A|A.

A $\vee$ B znamená, že $\neg$A a $\neg$B jsou neslučitelné: (A|A)|(B|B).

A $\Rightarrow$ B znamená, že A a $\neg$B jsou neslučitelné: A|(B|B).

A $\Leftrightarrow$ B znamená, že A $\vee$ B je neslučitelné s A|B (tedy, pokud je pravda A $\vee$ B, tak musí být A a B slučitelné, a pokud nejsou A a B slučitelné, tak nemůže být pravdivý ani jeden z nich): [(A|A)|(B|B)]|(A|B).

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravoval Pavel Paták.

Počet došlých řešení: 48

Průměr: 4,38

Medián: 5

Většina došlých řešení byla správná, body se strhávaly hlavně za nedostatečné zdůvodnění a chyby z přehlédnutí.

body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	0	0	1	7	13	27

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	12	10	12	13	1

[4] K objevení tohoto vyjádření nám může pomoci si všimnout, že v druhém řádku chceme dostat nulu, což lze jedině tak, že spojíme dvě formule, které mají hodnotu 1. Protože B má v tomto řádku hodnotu 0, zkusíme ho nejdřív znegovat, takže nejjednodušší formule, u které máme naději na úspěch, je (B|B)|A.

3. úloha - Klasická logika, cvičení 19 - Hintikkova hra

Zadání

a) Zdůvodni, že hrají-li proponent i oponent dobře (tedy neudělají-li chybu), pak platí, že proponent vyhraje právě tehdy, když jeho tvrzení je pravdivé (a v opačném případě vyhraje oponent). Můžeš předpokládat, že oba hráči jsou vševědoucí - o každém výroku vědí, zda je pravdivý nebo ne. (3 body)

b) V pravidlech pro hru chybí pravidla pro implikaci a pro ekvivalenci. My ale víme, že obě lze považovat jen za zkratku za formuli se spojkami $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, pro které pravidla máme. Navrhni pravidlo pro hru s výrokem, který je implikací.

(2 body)

Vzorové řešení

a)

Věta 23. *Pokud proponent ani oponent neudělají chybu a oba jsou vševědoucí, vyhraje proponent právě tehdy, je-li jeho tvrzení pravdivé; jinak vyhraje oponent.*

Důkaz. Nejprve si řekneme, jakou asi úvahu bys měl udělat, abys vymyslel následující důkaz: představme si nejprve, že proponentovo tvrzení je pravdivá negace $\neg$A. Oponent může na toto tvrzení zaútočit jedině tím, že bude tvrdit A, což je nepravdivý výrok. Je-li A věta jednoduchá, okamžitě prohraje. Kdyby A bylo nějaké složitější souvětí, stejně by se nakonec ukázalo, že je nepravdivé, takže by oponent nakonec prohrál. (V poslední větě jsme jaksi mimochodem použili dokazované tvrzení. V pořádném důkazu, který najdeš o kousek dále, uvidíme, že si to můžeme dovolit!)

Kdyby proponent tvrdil nepravdivou negaci, bude oponent tvrdit pravdivý výrok A, takže by vyhrál oponent.

Představme si ještě, že proponentovo tvrzení je konjunkce A $\wedge$ B. Kdyby byla nepravdivá, byl by alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, a právě ten by si vychytrale vybral oponent. Proponent by byl nucen tvrdit nějaký nepravdivý výrok a prohrál by. Kdyby ale konjunkce A $\wedge$ B byla pravdivá, nedostane oponent proponenta do úzkých.

Pořádný důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu spojek v proponentově tvrzení. (Vůbec se nelekej, pokud předchozí větě nerozumíš.) Z pravidel hry je jasné, že dokazované tvrzení platí pro všechny jednoduché výroky, tedy pro všechny výroky, které neobsahují žádné spojky. Ukážeme, že jestli dokazované tvrzení platí pro všechny výroky, které obsahují nejvýš k spojek, platí i pro všechny výroky, které obsahují nejvýš $k+1$ spojek. Díky tomu budeme vědět, že platí pro výroky s libovolným počtem spojek: platí totiž pro výroky s nula spojkami, a tedy i pro výroky s jednou spojkou, a tedy i pro výroky se dvěma spojkami, ... a tedy i pro výroky se sto třiceti pěti spojkami, ...

Předpokládejme, že už jsme tvrzení dokázali pro všechny výroky s k spojkami a že dostaneme výrok s $k+1$ spojkami. Ten může být negací $\neg$A, konjunkcí A $\wedge$ B nebo disjunkcí A $\vee$ B; v každém případě obsahují výroky A a B nejvýš k spojek.

Na negaci $\neg$A musí oponent zaútočit tvrzením výroku A. Hra bude pokračovat s prohozenými rolemi a nový proponent (tedy původní oponent) vyhraje právě tehdy, když výrok A je pravdivý (A má k spojek, takže pro něj jsme tvrzení už dokázali), tedy právě tehdy, když výrok $\neg$A je nepravdivý. Přesně to jsme chtěli ukázat.

Je-li proponentovo tvrzení tvaru A $\wedge$ B a je nepravdivé, vybere oponent ten z výroků A, B, který je nepravdivý (jsou-li nepravdivé oba, vybere si kterýkoli). Tím donutí proponenta tvrdit nepravdivý výrok s nejvýš k spojkami, takže víme, že proponent prohraje, což jsme chtěli ukázat. Kdyby ale tvrzení A $\wedge$ B bylo pravdivé, bude proponent muset tvrdit pravdivý výrok, a tedy vyhraje, což jsme chtěli ukázat.

Případ, kdy proponent tvrdí výrok tvaru A $\vee$ B je analogický a přenecháme ho čtenáři.

b) Nejjednodušší pravidlo pro implikaci, které mě napadá, využívá ekvivalenci (A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ ($\neg$A $\vee$ B). Pravidlo může znít třeba takto: „Pokud proponent tvrdí A $\Rightarrow$ B, může si vybrat, zda má dále tvrdit $\neg$A nebo B.“

Mohli bychom také využít ekvivalenci (A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ $\neg$(A $\wedge$ $\neg$B). Tomu by odpovídalo následující znění pravidla: „Pokud proponent tvrdí A $\Rightarrow$ B, může oponent tvrdit A $\wedge$ $\neg$B; dál se hraje s prohozenými rolemi.“

Poznámky k došlým řešením

V části a) si mnoho řešitelů neuvědomilo, že mají dokázat ekvivalenci (výrok je pravdivý, `právě když` proponent vyhraje) a dokazovali pouze implikaci „jestliže je výrok pravdivý, tak proponent vyhraje“.

Za zmínku stojí řešení několika řešitelů (konkrétně to byli *Pepa Tkadlec, Háňa Bendová* a *Michal Kenny Rolínek*), kteří tvrzení nedokazovali indukcí, ale pomocí následujícího *invariantu*:

Po celou dobu hry se nemění pravdivostní hodnota výroků, které hráč (proponent či oponent) říká. Pravdivostní hodnota oponentových výroků je opačná než pravdivostní hodnota proponentových výroků.

Pokud tedy proponent začne s pravdivým tvrzením, bude i v posledním kroku hry tvrdit pravdu (nebo bude oponent tvrdit nepravdu) a vyhraje, a pokud začne s nepravdivým tvrzením, bude v posledním kroku tvrdit nepravdu a prohraje (nebo bude oponent tvrdit pravdu a vyhraje oponent).

Snad ještě zajímavější bylo řešení *Mirka Olšáka*, který zavedl pojem *vyhrávající hodnota* a ukázal, že se z vyhrávajících hodnot jednodušších výroků počítá stejně jako pravdivostní hodnota. Z toho je vidět, že vyhrávající hodnota nějakého výroku je rovná jeho pravdivostní hodnotě, což je dokazované tvrzení.

Například pokud oponent řekne konjunkci dvou výroků, jejichž vyhrávající hodnota je 1, podle pravidel vyhraje, a tedy vyhrávající hodnota této konjunkce je opět 1; kdyby vyhrávající hodnota alespoň jednoho z těchto výroků byla 0, tak prohraje, takže vyhrávající hodnota celé konjunkce by opět byla 0. Přesně tak se ovšem chová i tabulka pro pravdivostní hodnoty konjunkce.

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravovala Anna Lauschmannová.

V části a) jsem udělovala 1 bod za rozumné zdůvodnění alespoň některé z implikací, 1 bod za dokazování ekvivalence a 1 bod za vysvětlení, že důkaz probíhá matematickou indukcí.

Počet došlých řešení: 41
Průměr: 3,71
Medián: 4

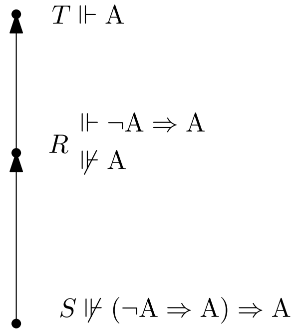
body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	0	2	2	13	13	11

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	8	8	12	12	1

4. úloha - Intuicionistická logika, cvičení 4 - Kripkovský model

Zadání

Zkontroluj, že v následujícím obrázku jsou splněny všechny podmínky z definice kripkovského modelu a že se tedy jedná o kripkovský protipříklad k formuli $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$:



Vzorové řešení

K obrázku je třeba přikreslit smyčky u každého světa a šipku z S do T; pak bude reflexivní (z každého světa je dosažitelný on sám) i tranzitivní (z S se lze dostat do R a z R do T, takže z S se lze dostat do T i přímo).

K jednotlivým světům doplníme, které jednoduché formule tam jsou a nejsou splněné podle definice. Konkrétně nás budou zajímat podformule formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ a jejich negace, tedy formule $A, \neg A, \neg A \Rightarrow A, \neg(\neg A \Rightarrow A), (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Formule A je splněná v T a v R splněná není; díky podmínce perzistence není splněná ani v S.

Formule $\neg A$ není splěná v žádném z možných světů, protože z každého je dosažitelný svět T, kde je splněná A.

Formule $\neg A \Rightarrow A$ je splněná ve všech světech, protože v žádném není splněný její předpoklad $\neg A$. (A tedy ve všech světech, které jsou dosažitelné z nějakého pevně zvoleného světa, je implikace $\neg A \Rightarrow A$ klasicky pravdivá.)

Formule $\neg(\neg A \Rightarrow A)$ není splněná v žádném světě, protože z každého světa je dosažitelný svět T, o kterém víme, že $T \Vdash \neg A \Rightarrow A$.

Formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ je splněná ve světě T (je zde splněn předpoklad i závěr), ale není splněná ve světě R (předpoklad $\neg A \Rightarrow A$ zde splněný je, ale závěr ne) a tedy ani ve světě S (z toho je dosažitelný svět R, kde předpoklad je splněný a závěr ne).

	A	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow A$	$\neg(\neg A \Rightarrow A)$	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
T	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$
R	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$
S	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$

Vidíme, že už samotný model se světy R a T by byl protipříkladem pro zadanou formuli; ve skutečnosti se světy S a R neliší platností žádné formule. Když jsme protipříklad vytvářeli, nepomyleli jsme totiž na to, že oním světem R dosažitelným z S, ve kterém platí $\neg A \Rightarrow A$, ale neplatí A, by mohl být svět S sám!

Nyní musíme ověřit platnost všech podmínek z definice.

perzistence. Ze světa T je dosažitelný pouze svět T, takže podmínka perzistence je zde splněna pro všechny formule.

Ve světech R a S se podmínka perzistence vztahuje pouze na jedinou formuli, která je v těchto světech pravdivá, totiž formuli $\neg A \Rightarrow A$. Ta je pravdivá ve všech dosažitelných světech, takže pomínka perzistence je splněna.

spojky. Podmínky pro jednotlivé spojky jsou splněné, což jsme ověřili při vyplňování tabulky.

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravovala Anna Lauschmannová.

Až na několik řešitelů, pro které byl zřejmě text seriálu příliš náročný, a jednoho nebo dva, kteří se spokojili s konstatováním, že „všechny podmínky byly na tomto příkladu názorně ukázány“ (za což jsem udělovala 0 bodů), prokázala většina řešitelů alespoň částečné porozumění pojmu kripkovského modelu a podmínkám, které musí splňovat.

Udělovala jsem po 1 bodě za ověření každé z následujících podmínek:

- reflexivita a tranzitivita relace dosažitelnosti
- perzistence pro $T \Vdash \mathrm{A}$
- perzistence pro $R \Vdash \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$
- konstatování, že z perzistence aplikované na svět S nevyplývají žádné podmínky pro R a T
- $R \nVdash \neg\mathrm{A}, T \nVdash \neg\mathrm{A}$
- $R \Vdash \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$
- $S \nVdash (\neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{A}$
- zjištění, že ve světě R jsou splněny tytéž formule jako ve světě S

Počet došlých řešení: 24
Průměr: 2,71
Medián: 3

body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	5	1	5	3	5	5

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	4	8	5	7	0

5. úloha - Intuicionistická logika, cvičení 10 - Nepřijatelný důkaz

Zadání

Vysvětli, proč je následující důkaz pro intuicionisty nepřijatelný:

Věta: Existuje dvojice čísel x, y, která nejsou racionální, ale x^y je racionální.

Důkaz: Uvažujme číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. V případě, že toto číslo je racionální, jsme hotovi ($x = y = \sqrt{2}$); v opačném případě uvažujme čísla $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$. Pak je $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2$.

Ve svých úvahách předpokládej, že intuicionisté přijímají známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Vzorové řešení

Problém tkví ve slůvcích „v opačném případě", za kterými se maskuje přesvědčení, že výrok „číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální" je buďto pravdivý, nebo nepravdivý. Intuicionista namítá, že dokud nebude dokázáno, že daný výrok je pravdivý, nebo nebude dokázáno, že je nepravdivý, nemůžeme se spolehnout na to, že nastane jedna z těchto možností.

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravoval Pavel Paták.
Počet došlých řešení: 26
Průměr: 4,69
Medián: 5

body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	0	1	0	1	2	22

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	6	7	5	7	1

6. úloha - Intuicionistická logika, cvičení 12 - Heytingova logika

Zadání Arend Heyting navrhl následující tříhodnotové tabulky pro intuicionistickou logiku.[5]

A	¬A
1	0
x	x
0	1

V následujících tabulkách je v levém sloupečku hodnota A a v prvním řádku je hodnota B:

$A \wedge B$	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

$A \vee B$	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

$A \Rightarrow B$	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	0
0	1	1	1

$A \Leftrightarrow B$	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	0
0	0	0	1

V této interpretaci hodnota 1 značí „pravda“, x značí „nevíme“ a 0 značí „nepravda“.

Lze ukázat, že všechny axiomy intuicionistické logiky mají v této interpretaci hodnotu 1 a pravidlo modus ponens je taktéž korektní. Cílem tohoto cvičení je ukázat, že tyto tabulky přesto nevystihují sémantiku intuicionistické logiky.

a) Ukaž, že formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ má podle těchto tabulek hodnotu 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A, B). (2 body)

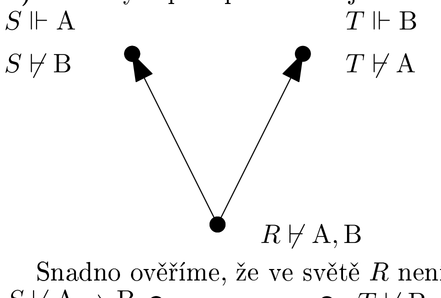
b) Najdi protipříklad pro tuto formuli. (3 body)

Vzorové řešení

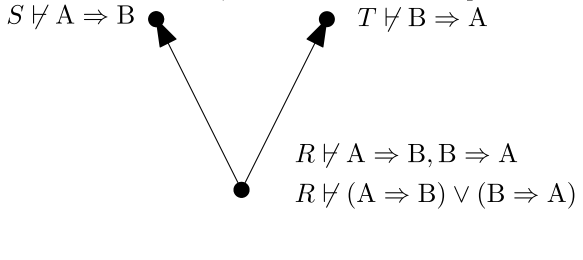
a) Následující tabulka dokazuje, že hodnota formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ je podle Heytingových tabulek 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A a B):

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	x	x	1	1
1	0	0	1	1
x	1	1	x	1
x	x	1	1	1
x	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	x	1	0	1
0	0	1	1	1

b) Hledaným protipříkladem je:



Snadno ověříme, že ve světě R není splněna zadaná formule:



[5] Miroslav Mleziva: Neklasické logiky, str. 91.

Poznámky k došlým řešením

Z diskuze na chatu na stránkách semináře i z některých řešení bylo zřejmé, že mnozí řešitelé se jen velmi těžko vyrovnávali s představou, že nějaká formule může současně být i nebýt tautologií, tj. že lze zkonstruovat protipříklad k formuli, jejíž hodnota podle tabulky vyšla 1.

V části a) nebylo nutné vyplňovat devítiřádkovou tabulku. V zásadě existovaly tři způsoby, jak dokazované tvrzení zdůvodnit elegantněji:

⋆ *Hanka Bílková* si všimla, že položíme-li na sebe čtvercovou tabulku pro $A \Rightarrow B$ a čtvercovou tabulku pro $B \Rightarrow A$, bude vždy alespoň jedna z hodnot, které jsou nad sebou, rovna jedné, což odpovídá podmínce pro hodnotu 1 u disjunkce.

⋆ *Petr Kratochvíl* si všiml, že implikace $A \Rightarrow B$ má hodnotu různou od 1 jen na třech místech, ale na místech k nim symetrických podle hlavní diagonály odpovídajících hodnotám $B \Rightarrow A$ jsou v těchto případech jedničky.

⋆ *Mirek Olšák* si hodnotu x představil jako $\frac{1}{2}$ a všiml si, že hodnota implikace $A \Rightarrow B$ je 1, právě když $A \leq B$. Protože vždy platí $A \leq B$ nebo $B \leq A$, je vždy hodnota alespoň jedné z implikací rovna 1.

Mirek Olšák zaslal také překvapivé řešení části b):

Podle textu k sérii je spousta možností, jak intuicionistickou logiku chápat. Najdu tedy protipříklad v Kolmogorově logice problémů. Pokud si zvolím dva problémy, které spolu moc nesouvisí, tak $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ *neplatí. Například šestá a osmá úloha šesté série. Není pravda, že když vyřeším šestou úlohu, budu mít vyřešenou i osmou a přitom není ani pravda, že když vyřeším osmou úlohu, budu mít vyřešenou šestou.*

Úspěšnost řešitelů

Úlohu opravovala Anna Lauschmannová.

7 řešitelů se pustilo pouze do části a) a 3 další řešitelé dostali za část b) 0 bodů, protože místo konstrukce protipříkladu zadanou formuli pouze znegovali. 16 řešitelů sestrojilo kripkovské protipříklady: za protipříklad ze vzorového řešení jsem udělovala 3 body, za modely obsahující zbytečné světy a za obrázky, z nichž nebylo jasné, jaké atomické formule platí v jednotlivých možných světech jsem udělovala 1 až 2 body.

Počet došlých řešení: 27
Průměr: 3,52
Medián: 4

body	0	1	2	3	4	5
počet řešitelů	0	1	9	2	5	10

ročník	1	2	3	4	?
počet řešitelů	5	10	6	6	0

7. úloha - Epistemické logiky, cvičení 5 - Neznalosti

Zadání

Najdi příklad, který by ukázal významový rozdíl mezi formulemi $K\neg\mathrm{V}$ a $\neg K\mathrm{V}$! Uveď alespoň jeden příklad „ze života“ a alespoň jeden kripkovský model a v něm nějaký svět, ve kterém je jedna z těchto formulí pravdivá a jedna nepravdivá. Jaké jsou v tomto světě pravdivostní hodnoty implikací $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}, \neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$ pravdivá? Myslíš, že tomu tak musí být vždy?

Vzorové řešení

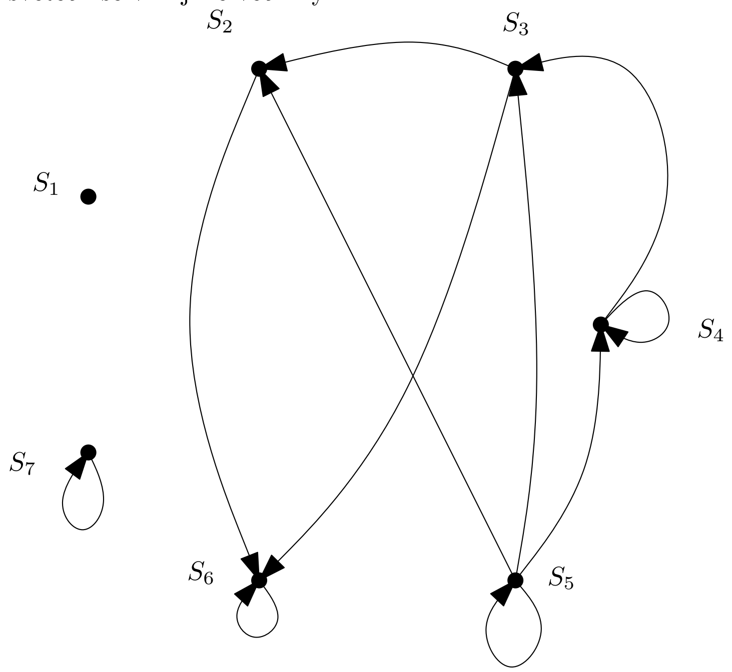
Implikace $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}$ musí být pravdivá vždy, když jsou agentovy poznatky bezesporné, tedy vždy, když platí axiom B. Protože jsme se dohodli označovat symbolem K pouze pravdivé domněnky (přijali jsme axiom T), musí tato implikace platit vždy.

Naopak, k implikaci $\neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$ snadno sestrojíme protipříklad. Stačí, aby z daného světa S byly dosažitelné dva možné světy takové, že v jednom z nich je V pravdivé a v druhém ne.

8. úloha - Epistemické logiky, cvičení 6 - (Ne)rozumný agent

Zadání

Představ si, že následující obrázek popisuje relaci dosažitelnosti nějakého agenta A_{008}. Urči, ve kterých možných světech jsou jeho domněnky v souladu s tím, jak se věci skutečně mají, a ve kterých možných světech se v nějaké věci mýlí.



Vzorové řešení

Znalosti agenta jsou v souladu s aktuálním stavem světa ve světech S_4, S_5, S_6 a S_7. Všechny tyto světy jsou totiž dosažitelné samy ze sebe.

9. úloha - Epistemické logiky, cvičení 11 - Věta o korektnosti

Zadání

Ukaž, že axiom **K:** $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$ jsme vybrali dobře - platí ve všech (kripkovských) modelech znalostí nějakých agentů.

Ve svém důkazu používej pouze definici kripkovských modelů - rozhodně nestačí prohlásit, že dokazované tvrzení je důsledkem věty o korektnosti, protože tu teprv dokazujeme!

Vzorové řešení

Předpokládejme, že máme nějaký kripkovský model a v něm nějaký svět S.

Jestliže $S \Vdash K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}$, tak pro všechny světy T dosažitelné z S platí $T \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a také $T \Vdash \mathrm{V}$. Ovšem podle definice pravdivosti implikace z toho plyne, že $T \Vdash \mathrm{W}$. Odtud $S \Vdash K\mathrm{W}$, protože ve všech světech dosažitelných z S je W pravdivé.

Shrnutí

úloha	1	2	3	4	5	6
počet došlých řešení	44	48	41	24	26	27
průměr	0,87	4,28	3,71	2,71	4,69	3,52
medián	0	5	4	3	5	4

Za podstatný ukazatel náročnosti seriálu považuji počet řešitelů z jednotlivých ročníků střední školy. První z následujících tabulek se týká seriálu o neklasických logikách, druhá se týká loňského seriálu o metrických prostorech, jehož autorem byl Martin Tancer.

ročník	1	2	3	4	?
průměrně	7,7	9	8,3	7,7	0,7
úloha					
1	11	11	10	1	1
2	12	10	12	13	1
3	8	8	12	12	1
4	4	8	5	7	0
5	6	7	5	7	1
6	5	10	6	6	0

ročník	1	2	3	4	?
průměrně	0,3	9,7	6,5	10,8	1,2
úloha					
1	0	12	9	12	2
2	0	11	7	12	2
3	0	9	7	12	1
4	1	9	5	11	1
5	1	10	6	11	1
6	0	7	5	7	0

Z tabulky je vidět, že ve srovnání s minulým ročníkem se podařilo oslovit více studentů prvních ročníků.

Doporučená literatura

Pokud Ti tento velmi stručný úvod nestačí, mohu Ti doporučit několik knih, které pravděpodobně najdeš v místní veřejné nebo školní knihovně. Pouze knihy označené * jsou určeny odborníkům a proto je hledej spíš v knihovnách univerzitních. Všechny knihy v tomto seznamu považuji za snadno srozumitelné (jedná se převážně o populárně-naučnou literaturu, pouze knihy označené * jsou o něco náročnější).

1. kapitola - Klasická logika

V tomto seznamu jsou populární a snadno čtivé knihy, které Ti v případě nesnází pomohou vyrovnat se s obtížemi klasické logiky, které jsme se v tomto úvodu mohli věnovat jen velmi stručně. Gödelovy věty, na které zde nezbylo místo, patří k nejzajímavějším problémům klasické logiky.

František Gahér: *Logika pre každého.* Vydavateľstvo IRIS, Bratislava 1998 (2. vydanie).
Krásná a dokonalá kniha. Vřele ji doporučuji každému, kdo chce poznat logiku v celé její šíři a kráse, a to jak z její matematické stránky, tak i z pohledu filozofických otázek a problémů. Vedle klasické výrokové a predikátové logiky je v knize hodně prostoru věnováno také transparentní intenzionální logice, která spadá do oblasti filozofické logiky a zásadně se odlišuje od logik, o kterých je řeč v tomto textu.

Douglas R. Hofstädter: *Gödel, Esher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Vintage Books, New York 1979.
Slavná populární kniha o Gödelových větách a bichle o sedmi set sedmdesáti sedmi stranách plná okouzlujících obrázků holandského grafika M. C. Eshera v jednom. Určitě stojí za to si ji potěžkat a prolistovat, i když pochybuji, že se Ti podaří ji přečíst.

Petr Jansa: *Logika jako součást předmětu "Základy společenských věd".* Diplomová práce, Katedra logiky, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, Praha 2003.
Důkladná práce, která obsahuje celou řadu zajímavých podnětů a postřehů ke všem tématům běžně vykládaným na středních školách.

Miroslav Jauris, Zdeněk Zastávka: *Základy neformální logiky.* S&M, Praha 1992.
Stručná brožurka určená zejména středoškolským učitelům pokrývá ta témata týkající se logiky a argumentace, která by se měla vyučovat na středních školách.

Michal Peliš: *Logika: učebnice pro přijímací zkoušky na právnické a humanitní fakulty.* AMOS, Praha 2002.
Ocení ji hlavně ti, kteří se potřebují rychle naučit něco do školy nebo k přijímačkám. Nepřesahuje rámec toho, co by měl vědět každý středoškolák.

Raymond Smullyan: *Jak se jmenuje tahle knížka?* Mladá fronta, Praha 1986. Překlad Hanuš Karlach, Antonín Vrba.
Klasika v oblasti logických hádanek a hříček, výborný a čtivý úvod do tajů výrokové logiky. Můžeš po ní sáhnout proto, že se chceš pobavit, nebo proto, že v těch logických spojkách máš zmatek, nebo proto, že se tu logiku musíš naučit do školy, ale v žádném případě Tě nezklame. (Kniha vyšla už dost dávno, takže spíš než v knihkupectvích ji hledej v knihovnách.)

Raymond Smullyan: *Na věky nerozhodnuto.* Academia, Praha 2003.
Volné pokračování předešlé knihy by mělo čtenáře dovést ke slavným Gödelovým výsledkům o neúplnosti klasické predikátové logiky. (Bez ohledu na to, jak dokonalý kalkul vymyslíme, pokud v něm budeme mít axiomy pro počítání, budou vždycky existovat pravdivé věty, které se nám nepodaří dokázat.) Je náročnější na čtení než předešlá.

Antonín Sochor: *Klasická matematická logika.* Karolinum, Univerzita Karlova, Praha 2001.
Doporučuji Tvé pozornosti úvod celé knihy a úvody jednotlivých kapitol; autor se v nich snaží bez použití velkého množství symboliky vysvětlit různá témata z oblasti matematické logiky, o kterých se jinak dočteš pouze v učebnicích plných neznámých symbolů a nesrozumitelné terminologie.

Prokop Sousedík: *Logika pro studenty humanitních oborů.* Vyšehrad, Praha 1999.
I tahle kniha se dobře čte a nezatěžuje čtenáře nadměrným matematických formalismem. Čtenář se seznámí s historickým vývojem logiky od Aristotela po současnost. Důkladněji jsou probrány zejména partie o aristotelovském sylogismu a o současné výrokové logice.

Zdeněk Zastávka: *Vše, co není zakázáno, se nesmí.* Radix, Praha 1998.
Učebnice klasické logiky určená středoškolákům, plná poutavých ukázek z tisku. Pokud se chceš pobavit nad tím, čeho všeho jsou novináři a manažeři schopni, určitě si ji sežeň. Zároveň se nemusíš bát, že by kladla velké nároky na Tvé matematické schopnosti.

2. kapitola - Intuicionismus a konstruktivistická matematika

John D. Barrow: *Pí na nebesích. O počítání, myšlení a bytí.* Mladá Fronta, 2000. Překlad Naďa Stehlíková. *Pi in the Sky.* Oxford University Press 1992.

Krásná a čtivá kniha o filozofii matematiky. Vedle intuicionismu a konstruktivismu se zde čtenář dozví o původu čísel, o formalismu, o invencionismu a o platónském realismu v matematice.

G. H. Hardy: *Obrana matematikova.* Překlad Josef Moník. Prostor, Praha 1999.

Jeden z nejvýznamnějších matematiků první poloviny 20. století napsal na sklonku svého života tuto obranu tvůrčí matematické práce. Matematiku nepojímá jako řemeslo či nástroj ostatních věd, ale jako umění s vlastními pravidly a kritérii krásy. V předmluvě od Hardyho přítele C. P. Snowa se dočteš, jak vypadal Hardyho všední život a proč si na smrtelné posteli nechal předčítat knihu o historii kriketu. S intuicionismem tato kniha příliš nesouvisí, ale pomůže Ti udělat si představu, v jaké době vznikl.

*** Paul Lorenzen:** *Pravidla rozumné argumentace.* Překlad Vojtěch Kolman. Ve sborníku **Kamila Bendová, Vítězslav Švejdar (editoři):** *Miscellanea logica III.* Karolinum, Praha 2002.

Původní Lorenzenův esej, ve kterém se zamýšlí nad rolí logiky v minulosti i současnosti. Na základě této úvahy potom předkládá pravidla své dialogické logické hry jako pravidla vhodná pro veškerou seriózní argumentaci.

4. kapitola - Modální logiky

*** Vojtěch Kolman (editor):** *Možnost, skutečnost, nutnost. Příspěvky k modální propedeutice.* Filosofia, nakladatelství Filosofického ústavu AV ČR, Praha 2005.

Pokud Tě zaujalo povídání o různých typech modalit, mohu Ti doporučit příspěvek editora s názvem *Elementy kritiky modalit*; nenecháš-li se odradit odborným jazykem, dočteš se o dalších vlastnostech různých typů modalit a o logických problémech, které s modalitami souvisí. Příspěvek **Libora Běhounka** nazvaný *Formální sémantika logiky modalit* se zabývá tvorbou modelů pro modální logiky a souvislostmi mezi vlastnostmi modelů a vlastnostmi jim odpovídajících logik.

6. kapitola - Fuzzy logiky

Erik Horstkotte: *Fuzzy.* `www.austinlinks.com/Fuzzy/`

Doporučuji ti trojici stručných a srozumitelných článků o fuzzy logice, fuzzy množinách a fuzzy řízení.

`www.esru.strath.ac.uk/Reference/concepts/fuzzy/fuzzy.htm`

Úvodní povídání o fuzzy množinách a jejich využití v technologii.

`www.seattlerobotics.org/org/encoder/mar98/fuz/flindex.html`

Náročnější úvodní text.

Miloš Chadt: *Technologie Fuzzy Logic.* `www.najdiservis.cz/cojeto.htm?clid=3913&strana=1`

Stručný článek o významu pojmu technologie Fuzzy Logic.

`www.massivesoftware.com`

Oficiální stránky komerčního software pro animaci davových scén.

Neklasické logiky obecně

Dan Cryan, Sharron Shatil, Bill Mayblin: *Logika.* Portál, s. r. o., Praha 2002.

Bohatě ilustrovaný přehled historie logiky od počátků do současnosti. Dočteš se zde o všech významných logicích a filozofech zabývajících se logikou, o problémech, které logiky trápí po celá tisíciletí i o možných využitích logiky v moderních technologiích.

*** Petr Jirků, Jiřina Vejnarová:** *Logika - Neformální výklad zakladů formální logiky.* (2. doplněné a rozšířené vydání). VSE, Praha 2000. `http://www.cuni.cz/~jirkup/logika/logika2.ps`

V těchto skriptech jsou velmi podrobně probrána různá témata z klasické výrokové i predikátové logiky, která ve svém studiu a další práci využijí hlavně programátoři a informatici. Následuje o něco stručnější výklad některých neklasických logik a výklad o nemonotónním usuzování (jedná se o oblast epistemických zkoumání, ve které připouštíme, že naše dosavadní znalosti byly mylné a potřebují „opravit“).

*** James D. McCawley:** *Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic but were ashamed to ask.* The University of Chicago Press, Chicago 1981.

Učebnice logiky určená studentům lingvistiky. Na celé řadě příkladů z přirozeného jazyka jsou zde ukázány silné i slabé stránky formálních logik (klasické výrokové i predikátové logiky, modálních, vícehodnotových a fuzzy logik, intensionální logiky a λ-kalkulu). Dostatek prostoru je věnován i filozofickým a lingvistickým otázkám. Za hlavní nedostatek knihy považuji to, že autor používá poněkud neobvyklý způsob zápisu formulí.

*** Jaroslav Peregrin:** *Logika a logiky. Systém klasické výrokové logiky, jeho rozšíření a alternativy.* Academia, Praha 2004.

Tato kniha podává podrobný přehled nejběžnějších výrokových logik (klasické, intuicionistické, modálních, relevančních a vícehodnotových). V textu jsou zmíněny důvody pro zavedení jednotlivých logik; velký důraz je ovšem kladen i na jejich matematické aspekty, takže se zde setkáš s důkazy mnoha vět typických pro matematické studium logických systémů.

Peter Volek: *Úvod do logiky a teórie vedy.* Update Studio, Bratislava 1999.

Učebnice logiky a metodologie vědy určená studentům teologie. V centru pozornosti stojí klasická výroková a predikátová logika, aristotelovský sylogismus a důležité vlastnosti relací. Kniha obsahuje také přehledy historie filozofie jazyka a metodologie vědy, které ale předpokládají, že se čtenář již orientuje ve filozofii. Následují stručné kapitolky o nejdůležitějších modálních logikách (deontické a preferenční, epistemické, temporální), dialogické logice, vícehodnotových logikách, intuicionistické a erotetické logice.[1] Zajímavostí této učebnice jsou příklady aplikace rozličných logik na teologické problémy.

Webové stránky

`www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/`

Rozsáhlá databáze podrobných životopisů významných matematiků; nechybí ani stručný souhrn jejich nejvýznamnějších matematických výsledků.

`www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/`

Výroky slavných matematiků.

Petr Jirků, Jiřina Vejnarová: *Logika - Neformální výklad zakladů formální logiky.* `www.cuni.cz/~jirkup/logika/logika2.ps`

On-line přístupná verze výše zmíněných skript.

Petr Jirků: *Slovníček.* `logika.ff.cuni.cz/~jirkup/logika/slovnicek.htm`

Slovníček základních pojmů z logiky.

Peter Suber: *Non-standard logics.* `www.earlham.edu/~peters/courses/logsys/nonstbib.htm`

Podrobný seznam knih (převážně v angličtině) o každém z asi 30 nejběžnějších typů neklasických logik. Obsahuje krátké charakteristiky jednotlivých typů, které Ti mohou pomoci udělat si představu o skutečně nepřehledném území moderní logiky. Za pozornost stojí také úvodní seznam charakteristik, které bývají považovány za „neklasické“.

Stanford Encyclopedia of Philosophy. `plato.stanford.edu/contents.html`

Tato internetová encyklopedie obsahuje celou řadu hesel týkajících se neklasických logik. Doporučuji začít u skupiny hesel „Logic“.

Další použitá literatura

Knihy a články o výuce matematiky a logiky

Kamila Bendová, Vítězlav Švejdar (editoři): *Miscellanea Logica III, IV.* Karolinum, Univerzita Karlova, Praha 2002.

Jiří Fiala: *Je elementární logika totéž co predikátová logika prvního řádu?* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 42 (1997), č. 3, str. 127-133.

František Gahér: *Provokácia ako motivácia k štúdiu logiky.* Ve sborníku **Petr Jirků, Vítězslav Švejdar (editoři):** *Miscellanea logica II.* Karolinum, Praha 1999.

Petr Hájek, Antonín Sochor: *Klasická logika v kontextu svých zobecnění a boj docenta Fialy proti větrným mlýnům.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 43 (1998), č. 1, str. 39-44.

Steven G. Krantz: *How to teach mathematics.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1991.

Jaroslav Peregrin: *Co je to elementární logika?* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 43 (1998), č. 1, str. 45-47.

[1] Erotetická logika zkoumá otázky.

Knihy a články o logice

Kamila Bendová, Petr Jirků (editoři): *Miscellanea Logica V.* Karolinum, Univerzita Karlova, Praha 2003.

Johan F. A. K. van Benthem: *Logic in Games. Lecture Notes.* Universiteit van Amsterdam, 2005.

Alexander Chargov, Michael Zakharyaschev: *Modal Logic.* Clarendon Press, Oxford 1997.

Jaakko Hintikka, Gabriel Sandu: *Game-Theoretical Semantics.* Přetištěno z **Johan van Benthem, Alice ter Meulen (editoři):** *Handbook of Logic and Language.* Elsevier Science B. B., 1997.

Laurent Keiff, Shahid Rahman: *On how to be a dialogician.* Ve sborníku **D. Vanderveken (editor):** *Logic, Thought and Action.* Springer, Dordrecht 2004.

John Nolt, Dennis Rohatyn: *Logic.* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., 1988.

Vladimír Mařík, Olga Štěpánková, Jiří Lažanský a kolektiv: *Umělá inteligence 3, 4.* Academia, Praha 2001 a 2003.

Miroslav Mleziva: *O trojhodnotové logice.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1964.

Ján Szomolányi: *Úvod do neklasických logik.* Univerzita Komenského v Bratislavě, 1979.

Knihy o filozofii, slovníky

Diogenes Allen: *Filosofie jako brána k teologii.* Mlýn, Třebenice 1999. Přeložil Tomáš Hančil.

Jiří Fuchs: *Filosife - Úvod do filosofie, 1. Filosofická logika.* Československá provincie Řádu bratří kazatelů, Praha 1993.

Doc. dr. Lumír Klimeš, CSc.: *Slovník cizích slov.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1986.

František Marek, Štěpán Zapletal: *Filosofická čítanka.* František Novák, Praha 1948.

Jaroslav Peregrin: *Analytická filosofie (náčrt!)*

Jaroslav Peregrin: *Logika ve filosofii, filosofie v logice - historický úvod do analytické filosofie.* Hermann a synové, Praha 1992.

Webové stránky

John Halleck: *Logic System Interrelationships.* `www.cc.utah.edu/~nahaj/logic/structures/`

John Halleck vytváří seznam všech známých modálních logik spolu s různými názvy, které v historii dostaly a jejich základními vlastnostmi. Jeho hlavním cílem je zmapovat vzájemné vztahy různých logik, zejména příslušných množin axiomů.

`home3.swipnet.se/~w-33552/logik/logic_ links.htm`

Seznam některých webových stránek o různých logikách.

Obsah