Posudek vedoucího diplomové práce

Zdeněk Silber: *Konvexní množiny v duálních Banachových prostorech*

Cílem diplomové práce bylo zpracovat a případně rozvinout známé výsledky o uzávěrech konvexních podmnožin duálních Banachových prostorů ve slabé* topologii, zejména výsledky M.I. Ostrovského z článků [10,12]. Je známým důsledkem Banach-Dieudonného věty, že konvexní množina je slabě* uzavřená, právě když je uzavřená na slabé* limity omezených netů. Na druhou stranu slabé* limity omezených netů ne vždy stačí k tomu, aby v jednom kroku popsaly slabý* uzávěr. Proto je přirozené zavést pojem w^*-derivované množiny – je-li X Banachův prostor a $A \subset X^*$, pak její w^*-derivovaná množina je

$$A^{(1)} = \bigcup_{c>0} \overline{A \cap cB_{X^*}}^{w^*},$$

tj. $A^{(1)}$ je množina všech limit slabě* konvergentních omezených netů z množiny A. Právě vztah mezi $\overline{A}^{w^*}$, $A^{(1)}$ a iterovanými w^*-derivovanými množinami byl hlavním předmětem předložené práce.

Kapitola 1 je úvodní, zavádějí se v ní základní pojmy a značení – polárový kalkulus, oddělování bodů, normující podprostory, w^*-derivované množiny a biortogonální systémy. Jsou shrnuty základní vlastnosti těchto pojmů a vztahy mezi nimi, které se používají ve zbytku práce.

V Kapitole 2 jsou zpracovány pozitivní výsledky o kvazireflexivních prostorech. První oddíl obsahuje podrobný důkaz zachovávání kvazireflexity na podprostory a kvocienty. Ve druhém oddílu je ukázáno, že v duálu kvazireflexivního prostoru je každý slabě* hustý podprostor již normující (Tvrzení 2.8), přičemž důkaz je proveden pomocí obecnějšího Tvrzení 2.7. Za pozornost stojí, že důkaz tohoto obecnějšího tvrzení byl zpracován výrazně podrobněji než je uveden v článku vedoucího [8], některé chybějící kroky byly doplněny. Třetí oddíl se již týká vztahu mezi $\overline{A}^{w^*}$, $A^{(1)}$ v duálu kvazireflexivního prostoru. Nejprve je uvedena Věta 2.9, která říká, že obě množiny splývají, je-li A lineární podprostor, což snadno plyne z Tvrzení 2.8. Zbytek oddílu je věnován zobecnění Věty 2.9 na případ absolutně konvexní množiny A, které je obsahem Věty 2.15. Věta 2.15 je formulována a velmi stručně dokázána v [10], uchazeč důkaz podrobně rozpracoval, včetně doplnění kroků, které jsou v [10] zmíněny pouze stručně a v náznaku.

Kapitola 3 obsahuje negativní výsledky, které lze interpretovat jako určení mezí výsledků z předchozích kapitol či jejich obrácení. Hlavním výsledkem oddílu 3.1 je Věta 3.7, která říká, že pro každý nereflexivní prostor X existuje konvexní množina $A \subset X^*$, pro kterou $A^{(1)} \neq \overline{A}^{w^*}$. To jednak ukazuje, že Věta 2.15 nelze zobecnit na konvexní množiny, jednak to lze chápat jako obrácení Tvrzení 1.6, které je snadným důsledkem Mazurovy věty. Rovněž Věta 3.7 pochází z [10] a důkaz je podrobně rozpracován. Oddíl 3.2 obsahuje Větu 3.12, která je obrácením Věty 2.9 (resp. Tvrzení 2.8) a říká, že v duálu nekvazireflexivního prostoru existuje lineární podprostor, který je slabě* hustý, ale není normující. Důkaz je rozpracováním postupu W.J. Davise a J. Lindenstrausse z [3]. Kromě toho tento oddíl obsahuje Větu 3.17, která charakterizuje Banachovy prostory X, pro které existuje takový podprostor A duálního prostoru X^*, že $A^{(1)}$ je vlastní normově hustý podprostor X^*. (Toto je na první pohled trochu speciální výsledek, nicméně je motivován otázkou rozšiřování holomorfních funkcí, která je mimo rámec předložené práce.) Důkaz Věty 3.17 je zpracován podle [10], přičemž byl zpřesněn a zjednodušen.

V Kapitole 4 je zpracováno zesílení Věty 3.12 pro separabilní prostory, které je obsahem Věty 4.8. Ta říká, že pro každý separabilní nekvazireflexivní prostor X a každý spočetný ordinál α existuje podprostor D prostoru X^* splňující $D^{(\alpha)} \subsetneq D^{(\alpha+1)} = X^*$. Přitom $D^{(\alpha)}$ označuje přirozeným způsobem definované iterované w^*-derivované množiny. Důkaz je zpracován podrobně s využitím postupu z [12].

Celkově lze říci, že zadaných cílů bylo dosaženo. Byly podrobně zpracovány výsledky z [3,10,12] s využitím dalších zdrojů. Důkazy jsou provedeny korektně, důkladně a srozumitelně, jsou doplněny a podrobně vysvětleny kroky, které v původních článcích chybí nebo jsou jen stručně načrtnuty. Některé kroky původních důkazů byly zjednodušeny. K vlastnímu rozvíjení výsledků se uchazeč již nedostal, jednak z důvodů časových, jednak z důvodu stávajícího rozsahu práce. Lze očekávat, že na svou práci naváže v rámci postgraduálního doktorandského studia. S ohledem na uvedené hodnocení se domnívám, že předložená práce jednoznačně splňuje požadavky kladené na diplomovou práci a doporučuji její uznání.

V Praze, 31. srpna 2018

Prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK