



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vojtěch Jurka

Modelování volatility

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucí mé práce, doc. RNDr. Zuzaně Práškové, CSc. od které jsem získal mnoho užitečných rad a která se mi věnovala i nad rámec svých povinností.

Název práce: Modelování volatility

Autor: Vojtěch Jurka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci se zabýváme modelováním podmíněné volatility finančních časových řad. Nejprve se věnujeme vlastnostem klasických ARCH a GARCH modelů, navržených v Engle (1982) a Bollerslev (1986), a uvádíme několik zobecněných variant, které umožňují zachytit asymetrickou reakci volatility na pozitivní a negativní šoky. Konkrétně jde o modely GJR-GARCH, TGARCH a EGARCH. V aplikační části zkoumáme predikovatelnost realizované volatility čtyř významných komodit obchodovaných na Chicago Mercantile Exchange, které reprezentují rozdílné sektory komoditního trhu. Zjišťujeme, že, co do přesnosti predikce, dávají modely v krátkém časovém horizontu podobné výsledky, zatímco v delším časovém horizontu modelu TGARCH a EGARCH předpovídají volatilitu komodit o něco lépe. Za druhé, srovnáme-li přesnost predikce volatility vybraných komodit pomocí průměrné procentuální chyby v odhadu, mezi komoditami nepozorujeme významný rozdíl.

Klíčová slova: ARCH, GARCH, volatilita

Title: Volatility modeling

Author: Vojtěch Jurka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the thesis we deal with modelling volatility conditional on past shocks. Traditional ARCH and GARCH models proposed by Engle (1982) and Bollerslev (1986) are investigated as well as several generalizations of GARCH model that capture asymmetric reaction on positive and negative excess returns, namely GJR-GARCH, TGARCH and EGARCH. Selected models are then applied to four commodities traded on Chicago Mercantile Exchange that represent various sectors of commodity market. Our first key finding is that in short horizon all considered models have similar performance, while in longer horizon, EGARCH and TGARCH give more precise results. The second is that, measured by an average percentage error, there is no significant difference in quality of predictions among selected assets across commodity sectors.

Keywords: ARCH, GARCH, Volatility

Obsah

1	Úvod	2
2	Časové řady a ARMA modely	3
2.1	Základní pojmy z časových řad	3
2.2	ARMA modely	4
2.3	$MA(\infty)$ reprezentace	5
2.4	Autokorelace v ARMA procesech	6
2.5	Kritéria pro identifikaci řádu ARMA modelu	8
3	Vlastnosti logaritmických výnosů	9
4	Modely volatility	12
4.1	Odhad koeficientů metodou maximální věrohodnosti	15
4.2	Predikce volatility v ARCH a GARCH	16
4.3	Některá zobecnění GARCH modelu	18
5	Data	20
6	Výsledky	22
6.1	Stacionarita výnosů	22
6.2	Parametry GARCH modelu	24
6.3	Modifikované GARCH modely	26
6.4	5-denní předpověď volatility	28
6.5	Předpověď versus realizovaná volatilita	33
7	Závěr	36
	Seznam použité literatury	37
	Seznam obrázků	39
	Seznam tabulek	40
	Seznam použitých zkratk	41
A	Přílohy	42
A.1	Odhad GARCH, GJR-GARCH, T-GARCH a E-GARCH	42
A.2	Výběrová ACF a PACF reziduí v modelu výnosů ropy a mědi	50

1. Úvod

Volatilita trhu, neboli kolísavost cen, je v ekonomické literatuře chápána jako základní míra nejistoty na trhu. Její predikce je nutná pro správné vyhodnocení podstupovaného rizika ze strany investorů, stejně tak, jako pro vhodné nastavení regulace ze strany centrálních bank. Přímé uplatnění nachází například v modelování Value-at-risk (VaR) a v zátěžovém testování institucí. Kromě toho, má volatilita svou cenu, protože investoři si obvykle žádají prémii za podstupování rizika a zejména v případě derivátů je volatilita důležitou složkou jejich oceňování. Navíc je možné volatilitu přímo obchodovat pomocí SWAP kontraktů na realizovanou volatilitu.

Přestože denní výnosy finančních aktiv obvykle vykazují statisticky nevýznamnou korelaci s předchozími hodnotami, ukazuje se, že veličiny nejsou nezávislé a závislost výnosů se projevuje v momentech vyššího řádu. Speciálně podmíněný rozptyl denních výnosů není konstantní (heteroskedasticita výnosů). Ukazuje se, že na rozdíl od očekávaného výnosu je volatilita výnosů predikovatelná pomocí předcházejících pozorování a vyšší nebo nižší míra volatility obvykle trvá po jistou dobu.

V této práci se věnujeme modelování podmíněné volatility za pomoci ARCH a GARCH modelů. Nejprve se zabýváme obecnými teoretickými vlastnostmi modelů a jejich souvislostí s ARMA procesy. Uvádíme zde několik zobecnění, která mohou zachytit asymetrickou reakci na pozitivní a negativní změny cen, jelikož propad cen může mít jiný dopad na podmíněný rozptyl než její nárůst. Hlavní přínos práce spočívá v aplikaci modelů na výnosy futures z amerického komoditního trhu a ve srovnání predikce volatility s realizovanou volatilitou komodit, počítanou na 5-minutových výnosech. Jelikož je realizovaná volatilita (RV) chápána jako ex-post míra denní volatility trhu, porovnáním ARCH a GARCH modelů s realizovanou volatilitou trhu je možné vyhodnotit přesnost predikce.

Zbytek práce je strukturován následovně: V kapitole 2 definujeme základní pojmy pro studium finančních časových řad. Popisujeme zde autoregresní modely a modely klouzavých součtů, které jsou základním nástrojem pro studium časových řad. V kapitole 3 definujeme hrubý a logaritmický výnos a uvádíme některá fakta týkající se log-výnosů. Kapitola 4 je věnována modelům volatility. Teoreticky zde popíšeme modely ARCH a GARCH, jejich odhad a predikci a definujeme i několik rozšíření GARCH modelu, která zachycují dopad pákového efektu na volatilitu. Následně pokračujeme aplikací metod na data z komoditní burzy. Použitá data jsou popsána v kapitole 5. V kapitole 6 pomocí GARCH modelů modelujeme volatilitu klíčových komodit na americkém trhu. Předpovídaná volatilita je následně porovnána s realizovanou volatilitou komoditního trhu. Poslední kapitola shrnuje výsledky, diskutuje přínos práce a navrhuje případná její rozšíření.

2. Časové řady a ARMA modely

2.1 Základní pojmy z časových řad

V této sekci uvádíme přehled základních definic, se kterými budeme dále pracovat (zpracováno podle Prášková (2016)).

Definice 1. *Náhodný proces s diskrétním časem $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je rodina náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) .*

V práci se omezujeme na náhodné procesy s diskrétním časem a reálnými hodnotami, které se také nazývají časové řady. Příkladem takového procesu je vývoj denních výnosů, na který lze nahlížet jako na náhodnou veličinu v čase. Ve zbytku textu proto předpokládáme, že $\{X_t\}$ značí proces s diskrétním časem.

Některé náhodné procesy vykazují tu vlastnost, že jejich rozdělení je invariantní vzhledem k posunutí v čase. Vlastnost formalizuje následující definice.

Definice 2. *Proces $\{X_t\}$ je (silně) stacionární, pokud pro všechna $s \in \mathbb{Z}$ a libovolně zvolená $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$F_{(t_1, \dots, t_n)} = F_{(t_1+s, \dots, t_n+s)},$$

kde $F_{(t_1, \dots, t_n)}$ značí sdruženou distribuční funkci náhodných veličin X_{t_1}, \dots, X_{t_n} .

U náhodných procesů nás často zajímá, jaká je korelace mezi minulou a současnou hodnotou časové řady, což nazýváme autokorelace.

Definice 3. *Pro náhodný proces $\{X_t\}$ s konečnými druhými momenty ($E(X_t^2) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$) definujeme autokovarianční funkci jako*

$$\gamma(t, h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}).$$

Označme $\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t^2)$. Autokorelační funkcí (ACF) budeme rozumět funkci

$$\rho(t, h) = \frac{\gamma(t, h)}{\sigma_t \sigma_{t-h}}.$$

Pro stacionární proces je funkce $\gamma(t, h)$ pouze funkcí h . To nás vede k definici slabě stacionárního procesu, kde je vlastnost $\gamma(t, h) = \gamma(h)$ zachována a podmínka na identickou distribuci uvolněna.

Definice 4. *Proces $\{X_t\}$ nazveme slabě stacionární, pokud pro libovolné $t \in \mathbb{Z}$*

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2, \sigma^2 \in (0, \infty),$$

$$E(X_t) = \mu, \mu \in \mathbb{R},$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_s, X_{s+h}), \text{ kde } s, t \in \mathbb{Z}.$$

Pro slabě stacionární proces platí, že nepodmíněná střední hodnota a rozptyl X_t se v čase nemění a autokovariance X_t a X_{t+h} je invariantní vzhledem k posunutí v čase. Za podmínky, že první a druhý moment existuje, silná stacionarita implikuje slabou stacionaritu.

Definice 5. *Bud $\{X_t\}$ centrováný stacionární náhodný proces. Parciální autokorelační funkci (PACF) definujeme pro $k \in \mathbb{N}$ jako*

$$\alpha_k = \text{Corr}(X_1, X_2), k = 1,$$

$$\alpha_k = \text{Corr}(X_1 - \tilde{X}_1, X_{k+1} - \tilde{X}_{k+1}), k > 1,$$

kde \tilde{X}_1 , respektive \tilde{X}_{k+1} , je projekce X_1 , resp. X_{k+1} , do Hilbertova prostoru \mathcal{H} generovaného veličinami X_2, \dots, X_k .

Jak uvádí Prášková (2016), z vlastnosti projekce plyne $\tilde{X}_1 = c_2 X_2 + \dots + c_k X_k$, kde c_j splňují $E(X_1 - \tilde{X}_1)X_j = 0$. Proto \tilde{X}_1 odpovídá nejlepší lineární aproximaci pomocí veličin X_2, \dots, X_k (analogicky \tilde{X}_k odpovídá nejlepší lineární aproximaci X_k). Konstanta α_k tedy udává, jaká je korelace mezi veličinami X_1 a X_{k+1} , které jsou očištěné o lineární aproximaci pomocí veličin X_2, \dots, X_k . Více o Hilbertových prostorech generovaných náhodnými veličinami nalezne čtenář v Prášková (2016), v kapitole 3 a 10.

2.2 ARMA modely

Základním teoretickým východiskem pro studium finančních časových řad jsou autoregresní modely (AR) a modely klouzavých součtů (MA), na kterých jsou posléze postaveny další, více komplexní modely časových řad. ARMA modely jsou schopné zachytit autokovarianční strukturu časových řad, předpokládáme u nich ovšem homoskedasticitu reziduí, která ale bývá ve finančních časových řadách často porušena. V této práci se soustředíme na jejich jednorozměrnou variantu, modely lze ale zobecnit pro vyšší dimenze.

Definice 6. *Bílý šum, anglicky white noise (WN), je proces $\{\epsilon_t\}$ splňující následující vlastnosti:*

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-q}) = 0, q \neq 0,$$

$$E(\epsilon_t) = 0,$$

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 \in (0, \infty).$$

Definice 7. *Autoregresní proces řádu p (AR(p)) definujeme jako proces $\{X_t\}$, který splňuje*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

kde $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum.

Proces klouzavých součtů řádu q (MA(q)) je definován jako proces splňující

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t. \quad (2.2)$$

Proces ARMA(p, q) je definován jako proces splňující

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t. \quad (2.3)$$

Poznámka. ARMA proces zde definujeme jako proces s nulovou střední hodnotou. Obecně lze uvažovat i ARMA model s nenulovou střední hodnotou, ve tvaru $X_t = \nu + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$, kde $\nu \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Pro zjednodušení práce s autoregresními modely definujeme *operátor zpětného posunutí (lag operator)* jako

$$L(X_t) = X_{t-1}.$$

Pak $L^k(X_t) = X_{t-k}$, což umožňuje zapisovat $ARMA(p,q)$ proces ve tvaru

$$P(L)X_t = Q(L)\epsilon_t,$$

kde $P(L) = (1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_p L^p)$ nazýváme AR polynom a $Q(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)$ nazýváme MA polynom.

Obdobně AR a MA procesy definované v 2.1 resp. 2.2 lze zapsat zkráceně ve tvaru

$$AR: P(L)X_t = \epsilon_t,$$

$$MA: X_t = Q(L)\epsilon_t.$$

2.3 $MA(\infty)$ reprezentace

ARMA procesy nejsou určeny jednoznačně. Za určitých podmínek lze stejný proces vyjádřit pomocí AR nebo MA zápisu. Pro některé účely je vhodné najít MA reprezentaci, pomocí které je možné vyjádřit X_t jako lineární kombinaci bílého šumu.

Pro slabě stacionární autoregresní proces prvního řádu

$$P(L)X_t = (1 - \phi L)X_t = \epsilon_t,$$

kde $|\phi| < 1$, dostaneme pomocí inverze lineárního operátoru $(1 - \phi L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k L^k$, že

$$X_t = (P(L))^{-1} \epsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}.$$

Vyjádření procesu $\{X_t\}$ ve tvaru $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \epsilon_{t-k}$ nazýváme $MA(\infty)$ reprezentaci procesu $\{X_t\}$. Pro nalezení $MA(\infty)$ reprezentace autoregresního procesu vyššího řádu je potřeba nalézt kořeny příslušného AR polynomu.

Podmínkou pro existenci $MA(\infty)$ reprezentace je, že kořeny AR polynomu leží mimo jednotkový kruh. Takový proces je zároveň slabě stacionární, proces pak má $MA(\infty)$ reprezentaci ve tvaru $X_t = P^{-1}(L)\epsilon_t$, což formalizuje následující věta.

Věta 1. Mějme autoregresní proces n -tého řádu ve tvaru $P(L)X_t = \epsilon_t$, kde $P(L) = 1 + \phi_1L + \phi_2L^2 + \dots + \phi_nL^n$. Pokud všechny kořeny AR polynomu $P(z) = 1 + \phi_1z + \phi_2z^2 + \dots + \phi_nz^n$ leží vně jednotkového kruhu, AR(n) proces je slabě stacionární a pro $\{X_t\}$ existuje MA(∞) reprezentace $\{X_t\}$ ve tvaru

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \epsilon_{t-j},$$

kde θ_j jsou definovány vztahem

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j z^j = \frac{1}{P(z)}, \text{ pro } z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.$$

Důkaz. Prášková (2016), věta 5.5. □

Poznámka. MA(∞) proces se také někdy nazývá kauzální lineární proces.

2.4 Autokorelace v ARMA procesech

Mezi konečnými autoregresními modely a modely klouzavých součtů je zásadní rozdíl v autokorelačních funkcích, který bude mít později význam v modelech volatility. MA(q) proces je proces s tzv. konečnou pamětí, tedy od jistého $k > 0$, je autokorelace $\gamma(k)$ rovna nule. Na druhou stranu, pro AR(p) procesy mohou být všechny autokorelace nenulové.

Autokorelace v MA procesech

Pro centrovaný MA(p) proces $X_t = (1 + \theta_1L + \dots + \theta_pL^p)\epsilon_t = Q(L)\epsilon_t$ plyne z $E(\epsilon_t\epsilon_{t+k}) = 0$, $k \neq 0$, že

$$E(X_t X_{t+k}) = E\left(\sum_{i=0}^p \theta_i \epsilon_{t-i} \sum_{i=0}^p \theta_i \epsilon_{t-i+k}\right) = \sum_{j=0}^p \theta_j \theta_{j+k} \sigma_\epsilon^2 = \gamma(k),$$

kde klademe $\theta_0 = 1$ a $\theta_n = 0$ pro $n > p$. Navíc máme $\gamma(k) = \gamma(-k)$. Speciálně platí

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \sum_{j=0}^p \theta_j^2 \sigma_\epsilon^2.$$

Autokorelační funkce MA(q) procesu je tedy

$$\rho(k) = \frac{\sum_{j=0}^p \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2},$$

pro $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ a $\rho(k) = 0$ pro $k > q$.

Autokorelace v AR procesech

Autokorelační funkce slabě stacionárního autoregresního procesu lze spočítat z MA(∞) reprezentace pomocí předchozího vzorce. Lze jí ale také vyjádřit přímo

z tzv. Yule-Walkerových rovnic. Nejprve si zde ukážeme výpočet pomocí $MA(\infty)$ reprezentace pro slabě stacionární autoregresní proces prvního řádu.

Mějme AR(1) proces tvaru $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$ kde $|\phi| < 1$. Lze psát $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}$ a tedy pro $k \geq 0$ platí

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j} \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j-k}\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \phi^i \phi^j E(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j-k}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} \sigma_{\epsilon}^2 = \frac{\phi^k}{1 - \phi^2} \sigma_{\epsilon}^2. \end{aligned}$$

Podrobněji je rozepsáno v Prášková (2016), kapitola 5. Rozptyl X_t je tedy

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \frac{1}{1 - \phi^2} \sigma_{\epsilon}^2$$

a autokorelace

$$\rho(k) = \phi^k.$$

V autoregresním procesu prvního řádu je tedy autokorelační funkce geometrická posloupnost. Obecně pro autoregresní procesy vyššího řádu je vhodné hledat autokorelace $\rho(k)$ jako řešení tzv. Yule-Walkerových rovnic.

Mějme centrovaný slabě stacionární autoregresní proces p -tého řádu

$$X_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t, \quad (2.4)$$

kde $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum a kořeny příslušného AR polynomu jsou vně jednotkového kruhu.

Rovnici vynásobíme ϵ_t a vezmeme střední hodnotu. Pak

$$E(X_t \epsilon_t) + \phi_1 E(X_{t-1} \epsilon_t) + \phi_2 E(X_{t-2} \epsilon_t) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} \epsilon_t) = E(\epsilon_t \epsilon_t)$$

Protože $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum a platí věta 1, je $E(X_{t-k}, \epsilon_t) = 0$, pro $k \geq 1$. Máme tedy

$$E(X_t \epsilon_t) = \sigma_{\epsilon}^2.$$

Nyní rovnici (2.4) vynásobíme X_{t-j} a opět vezmeme střední hodnotu. Dostáváme, že

$$E(X_t X_{t-j}) + \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-j}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} X_{t-j}) = E(X_{t-j} \epsilon_t).$$

Díky stacionaritě procesu můžeme psát $\gamma(t, j) = \gamma(j)$. Pro $j = 0, \dots, p-1$ dostáváme soustavu rovnic

$$\gamma(0) + \phi_1 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p) = \sigma_{\epsilon}^2, j = 0,$$

$$\gamma(j) + \phi_1 \gamma(j-1) + \dots + \phi_p \gamma(j-p) = 0, j \geq 1,$$

které nazýváme *Yule-Walkerovy rovnice*. Z první rovnice můžeme vyjádřit nepodmíněný rozptyl jako:

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 + \phi_1\gamma(1) + \dots + \phi_p\gamma(p)}.$$

Pro $j \in \{1, \dots, p-1\}$ vydělíme Yule-Walkerovy rovnice $\gamma(0) = \text{Var}(X_t)$ a dostaneme, že

$$\rho(1) + \phi_1\rho(2) + \dots + \phi_p\rho(p-1) = 0,$$

...

$$\rho(p-1) + \phi_1\rho(p-2) + \dots + \phi_p\rho(1) = 0,$$

z čehož dopočteme hodnoty $\rho(1), \dots, \rho(p-1)$. Ty mohou sloužit jako počáteční podmínky pro obecné řešení diferenční rovnice

$$\rho(j) + \phi_1\rho(j-1) + \dots + \phi_p\rho(j-p) = 0, \text{ kde } j \geq p,$$

nebo k dopočtení dalších autokorelací.

2.5 Kritéria pro identifikaci řádu ARMA modelu

Předpokládejme, že data sledují ARMA(p,q) proces s neznámými p,q. K nalezení vhodného řádu ARMA(p,q) modelu se obvykle v literatuře využívají dvě kritéria - Akaikeovo informační kritérium (AIC) a Bayesovo informační kritérium (BIC). Princip kritérií v obou případech spočívá v minimalizaci rozptylu reziduí v ARMA modelu s penalizací za příliš vysoké stupně modelu (Cipra (2008)). V aplikacích hledáme model s nejnižší hodnotou AIC nebo BIC kritéria.

Definice 8. *Definujeme Akaikeovo informační kritérium jako*

$$AIC(k,l) = \log \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{2(k+l+1)}{N},$$

kde $\hat{\sigma}_{k,l}^2$ značí výběrový rozptyl bílého šumu v odhadnutém modelu ARMA(k,l) na základě dat X_1, \dots, X_N .

Definice 9. *Bayesovo informační kritérium definujeme jako*

$$BIC(k,l) = \log \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{2(k+l+1) \log N}{N},$$

kde $\hat{\sigma}_{k,l}^2$ je jako v předchozí definici.

Kromě uvedených kritérií lze také k nalezení vhodného stupně modelu použít odhad autokorelační a parciální autokorelační funkce. Pokud v modelu existuje významná autokorelace v reziduích, znamená to, že část informace o X_t nebyla zachycena.

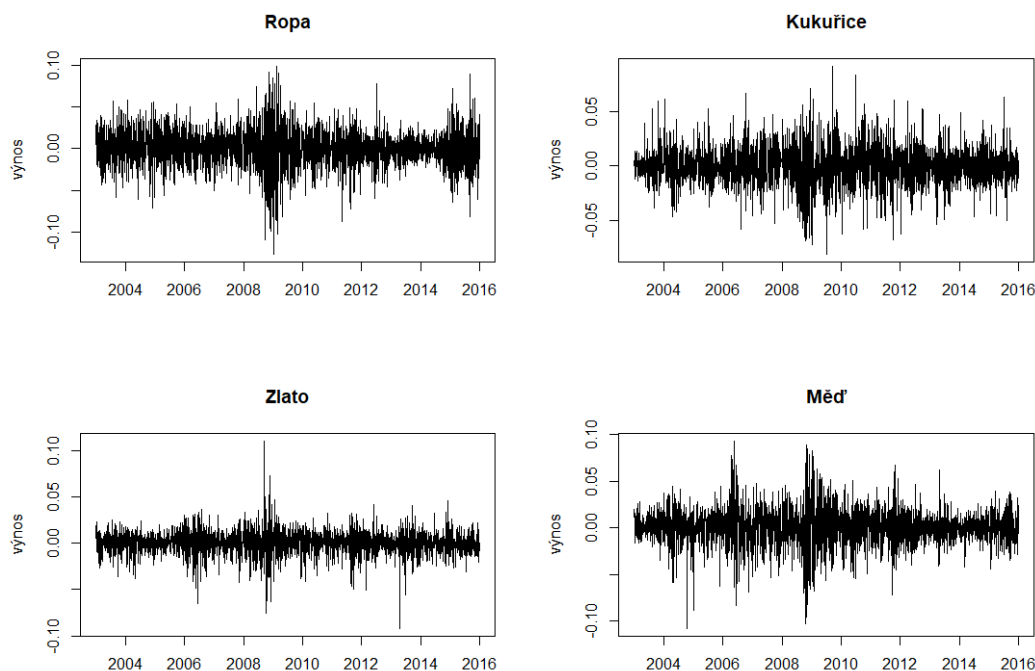
3. Vlastnosti logaritmických výnosů

V této sekci definujeme výnos z aktiva a popíšeme některé vlastnosti výnosů s ohledem na výše uvedené definice.

Denní hrubé výnosy z aktiv jsou standardně v literatuře definovány jako procentuální denní změna v ceně aktiva. Označíme-li X_t cenu aktiva v čase t , pak logaritmický výnos definujeme jako $r_t = \ln(X_t/X_{t-1}) = \ln(X_t) - \ln(X_{t-1})$. Jelikož denní rozdíly cen aktiv se pohybují řádově v jednotkách procent (obr. 3.1), rozdíl ve hrubých výnosech a logaritmických výnosech je zanedbatelný. Pro aplikace tedy nemá rozdíl mezi hrubými a logaritmickými výnosy významný dopad, přestože teoreticky jde o různé hodnoty. Z teoretického hlediska je výhodnější pracovat s logaritmickými výnosy, jelikož lépe odpovídají normálnímu rozdělení (hrubé výnosy jsou zdola omezené) a snižují význam extrémních hodnot. Pokud tedy není řečeno jinak, myslíme výnosem vždy logaritmický výnos.

Přesnou procentuální změnu ceny lze z logaritmických výnosů spočítat jako

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \exp(r_t) - 1 .$$



Zdroj: TickData, Inc.

Obrázek 3.1: Log-výnosy futures významných komodit obchodovaných na Chicago Mercantile Exchange

Jak uvádí např. Franke a kol. (2008), Zivot (2009) a Taylor (2007) logaritmické výnosy finančních aktiv jako jsou akcie, akciové indexy, dluhopisy a další, mají několik specifických vlastností:

- Rozdělení logaritmických výnosů je leptokurtické, tedy log-výnosy mají těžké chvosty ve srovnání s normálním rozdělením. Špičatost r_t je obvykle vyšší než 3.
- Autokorelace mezi výnosy je nesignifikantní, střední hodnotu denních logaritmických výnosů nelze předpovídat.
- Existuje autokorelace mezi druhými mocninami výnosů.
- Volatilita výnosů má tendenci se shlukovat (volatility clustering), období nízké volatility střídají období vysoké volatility.

Následující výpočty naznačují, že ceny komodit mají výnosy jen málo korelované (obr. 3.2), zatímco druhé momenty jsou významně korelované (obr. 3.3), což nás motivuje k modelování budoucí volatility komodit v závislosti na minulých šocích do volatility.

Pro testování, zda je autokorelace mezi výnosy statisticky významná, lze použít Ljung-Boxův test (Ljung a Box (1978)).

Definice 10. *Bud' $\{X_t\}$ náhodný proces s autokorelační funkcí $\rho(k)$, $k > 1$ a X_1, \dots, X_N pozorované hodnoty v čase. Ljung-Boxovou statistikou rozumíme*

$$Q = N(N + 2) \sum_{k=1}^m \rho(k).$$

Ljung-Boxův test testuje nulovou hypotézu

$$H_0 : \rho(1) = 0, \dots, \rho(m) = 0$$

proti alternativě

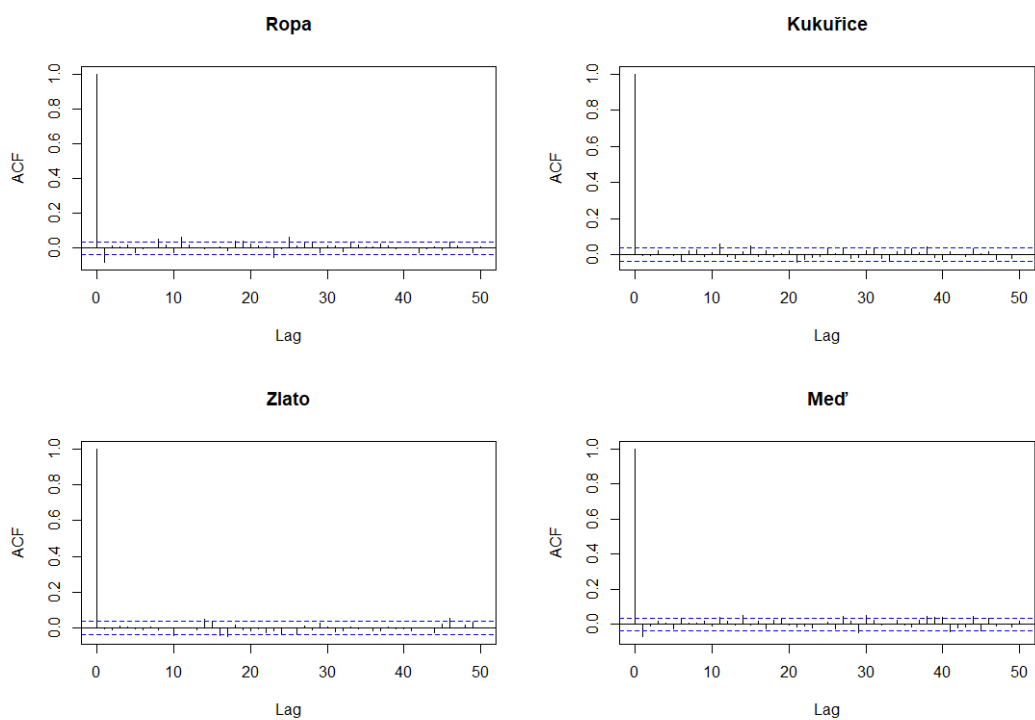
$$H_1 : \rho(1) \neq 0 \vee \dots \vee \rho(m) \neq 0.$$

Za platnosti H_0 je

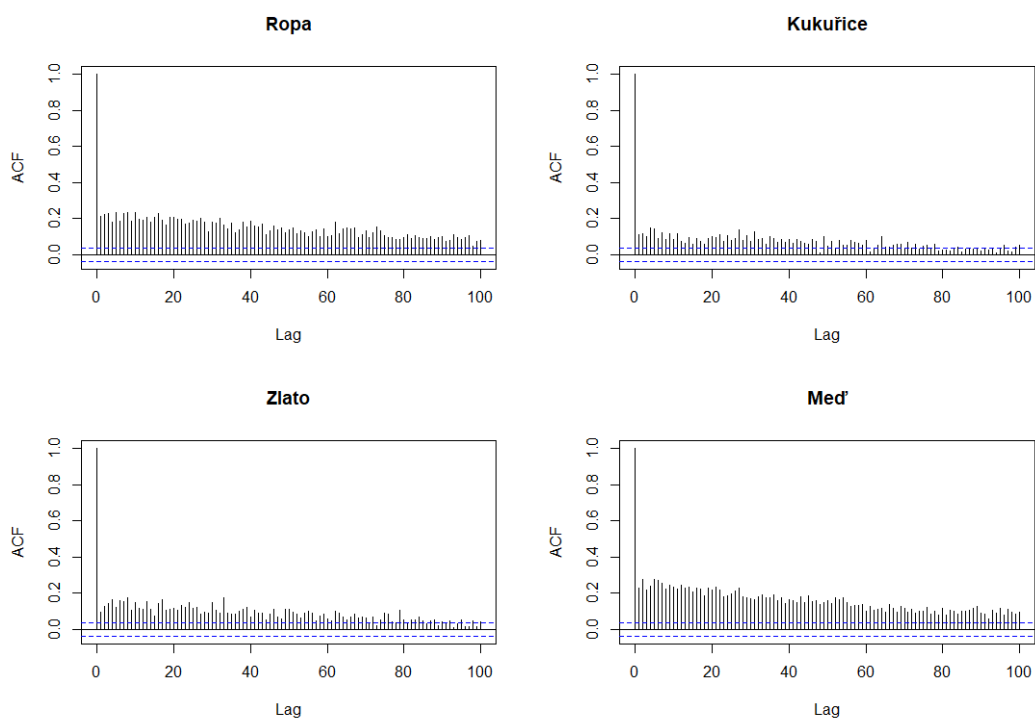
$$Q = N(N + 2) \sum_{k=1}^m \rho(k) \xrightarrow{d} \chi_m^2 \text{ pro } N \rightarrow \infty,$$

kde χ_m^2 značí náhodnou veličinu s chí-kvadrát rozdělením s m stupni volnosti a d značí konvergenci v distribuci.

Hypotézu H_0 zamítáme na hladině α , pokud $Q > \chi_m^2(1 - \alpha)$, kde $\chi_m^2(1 - \alpha)$ značí $1 - \alpha$ kvantil rozdělení χ_m^2 .



Obrázek 3.2: Výběrová autokorelace výnosů r_t



Obrázek 3.3: Výběrová autokorelace druhých mocnin výnosů r_t^2

4. Modely volatility

V této kapitole se dostáváme k modelům, které umožňují zachytit autokorelační strukturu rozptylu logaritmických výnosů. Kromě standardních ARCH a GARCH modelů zde uvádíme i některé modifikace, které předpokládají asymetrickou reakci volatility na propad, respektive nárůst ceny aktiv.

ARCH model

ARCH model poprvé navržený v Engle (1982) se stal základem pro řadu dalších modelů, které umožňují modelovat volatilitu ve finančních časových řadách. V předchozí části jsme definovali logaritmický výnos jako rozdíl logaritmů ceny v čase t a $t-1$. Dále budeme pracovat s posloupností $\{\epsilon_t\}$, kterou definujeme jako rozdíl mezi logaritmickým výnosem a očekáváním, tedy

$$\epsilon_t = r_t - E_{t-1}(r_t),$$

kde $E_{t-1}(\cdot)$ značí střední hodnotu podmíněnou dostupnou informací v čase $t-1$. Formálně, $E_{t-1}(r_t) = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$, kde \mathcal{F}_{t-1} je σ -algebra generovaná náhodnými veličinami $\{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$.

Směrodatnou odchylku veličiny ϵ_t podmíněnou informací v čase $t-1$ nazýváme (*podmíněná*) *volatilita* výnosů $\{r_t\}$ v čase t . Následující definice uvádí základní model volatility.

Definice 11. *ARCH proces řádu p (ARCH(p)) definujeme jako proces $\{\epsilon_t\}$ splňující*

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t, \quad (4.1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2, \quad (4.2)$$

kde $\sigma_t > 0$, $\{z_t\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, nezávislých na σ_t a předpokládáme, že $\omega, a_1, \dots, a_p > 0$.

Obvykle se navíc předpokládá, že z_t jsou normálně rozdělené. Abychom lépe zachytili těžké chvosty rozdělení reziduí je možné namísto normálního rozdělení použít například Studentovo rozdělení z_t .

Jak uvádí následující věta, za určitých podmínek lze na ARCH proces ϵ_t nahlížet jako na proces AR(p). Pro ARCH(1) a $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ je tvrzení dokázáno v Franke a kol. (2008), zde uvádíme obecnější verzi.

Věta 2. *Bud' $\{\epsilon_t\}$ ARCH(p) proces jako v definici 11, $E(\epsilon_t^4) < \infty$ a $E(z_t^4) < \infty$. Pak ϵ_t^2 je autoregresní proces tvaru*

$$\epsilon_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2 + \nu_t, \quad (4.3)$$

kde $\nu_t = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem.

Důkaz. Pro $\nu_t = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$ můžeme psát

$$\epsilon_t^2 = \sigma_t^2 z_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2(z_t^2 - 1) = \sigma_t^2 + \nu_t .$$

Protože

$$\sigma_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2 ,$$

platí

$$\epsilon_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2 + \nu_t .$$

Zbývá ověřit vlastnosti ν_t . Protože z_t jsou i.i.d. a $E(z_t^2) = 1$, vzhledem k nezávislosti z_t a σ_t máme

$$E(\nu_t) = E(\sigma_t^2)E(z_t^2 - 1) = 0 .$$

Dále pro $h > 0$

$$Cov(\nu_t, \nu_{t+h}) = Cov(\sigma_t^2(z_t^2 - 1), \sigma_{t+h}^2(z_{t+h}^2 - 1)) .$$

Z předchozího bodu a díky nezávislosti z_{t+h} na ostatních náhodných veličinách máme

$$\begin{aligned} Cov(\nu_t, \nu_{t+h}) &= E(\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t+h}^2(Z_{t+h}^2 - 1)) \\ &= E(\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t+h}^2)E(z_{t+h}^2 - 1) = 0 . \end{aligned}$$

Pro rozptyl platí

$$\begin{aligned} Var(\nu_t) &= E(\sigma_t^2(z_t^2 - 1))^2 = E(\omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2)^2 E(z_t^2 - 1)^2 \\ &= \left(\omega^2 + 2\omega \sum_{i=1}^p a_i E(\epsilon_{t-i}^2) + \sum_{i,j=1}^p a_i a_j E(\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t-j}^2) \right) E(z_t^2 - 1)^2 < \infty , \end{aligned}$$

protože $E(z_t^4) < \infty$, $E(\epsilon_t^4) < \infty$ a z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti

$$E(\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t-j}^2) \leq \sqrt{E(\epsilon_{t-i}^4)} \sqrt{E(\epsilon_{t-j}^4)} < \infty .$$

□

Poznámka. Pokud bychom chtěli ukázat, že ν_{t+h} z předchozí věty je bílý šum, potřebovali bychom k tomu ještě silnou stacionaritu procesu ϵ_t .

GARCH model

Definice GARCH modelu přirozeně navazuje na ARCH model.

Definice 12. *GARCH(p,q) procesem rozumíme náhodný proces $\{\epsilon_t\}$ splňující:*

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t ,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 , \quad (4.4)$$

kde $z_t, \epsilon_t, \sigma_t$ je jako v předchozí definici 11, navíc předpokládejme, že $\omega > 0$, $a_1, \dots, a_p > 0$ a $b_1, \dots, b_q > 0$

Speciálně procesem GARCH(1,1) procesem rozumíme

$$\sigma_t^2 = \omega + a \epsilon_{t-1}^2 + b \sigma_{t-1}^2. \quad (4.5)$$

V praxi se nejčastěji využívá právě GARCH(1,1). Za jistých podmínek lze na GARCH(p,q) proces nahlížet jako na ARMA(m,p) proces

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) \epsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p b_j u_{t-j} + u_t, \quad (4.6)$$

kde $m = \max(p, q)$, $a_i := 0$ pro $i > q$ a $b_i := 0$ pro $i > p$ a u_t jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou (Franke a kol. (2008)).

Podmínky stacionarity

Věta 3. Necht $\{\epsilon_t\}$ je GARCH(p,q) proces. $\{\epsilon_t\}$ je slabě stacionární právě tehdy, když $\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j < 1$.

Důkaz. Bollerslev (1986)

□

Z věty zároveň plyne podmínka pro slabou stacionaritu ARCH(p) procesu, jelikož ARCH proces je speciálním případem GARCH procesu. ARCH(p) proces je slabě stacionární právě, když $a_1 + \dots + a_p < 1$.

Nepodmíněný rozptyl

Věta 4. Necht $\{\epsilon_t\}$ je slabě stacionární ARCH proces, jako v definici 11. Pak platí

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - a_1 - \dots - a_p}.$$

Důkaz. Platí $\sigma^2 = E(\epsilon_t^2) = E_{t-1}(E\epsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = \omega + a_1\sigma^2 + \dots + a_p\sigma^2$. Stacionarita procesu implikuje, že $a_1 + \dots + a_p < 1$, tedy vyjádřením σ^2 dostáváme $\sigma^2 = \frac{\omega}{(1 - a_1 - \dots - a_p)}$.

□

Věta 5. Necht $\{\epsilon_t\}$ je slabě stacionární GARCH proces, jako v definici 12. Pak platí

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{(1 - \sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j)}.$$

Důkaz. Obdobný jako v případě ARCH modelu.

□

4.1 Odhad koeficientů metodou maximální věrohodnosti

K odhadu koeficientů v ARCH a GARCH modelech se obvykle používá princip maximální věrohodnosti. Připomeňme, že maximálně věrohodným odhadem se rozumí taková hodnota parametru, pro kterou jsou za daného rozdělení pozorovaná data nejpravděpodobnější.

Formálně, buď Θ parametrický prostor, $p(X, \theta)$ sdružená distribuční funkce náhodných veličin X_1, \dots, X_N . Maximálně věrohodným odhadem parametru $\theta \in \Theta$ na základě pozorování $x = (x_1, \dots, x_N)$ rozumíme $\hat{\theta}$ splňující

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} p(x, \theta).$$

Začněme s odhadem koeficientů v ARCH modelech. K odhadu pomocí metody maximální věrohodnosti je ještě potřeba přidat předpoklad na rozdělení reziduí. Prozatím předpokládejme, že podmíněné rozdělení reziduí ϵ_t je normální t.j.

$$f(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}}.$$

Označme si $\theta = (\omega, a_1, \dots, a_p)^T$ odhadovaný parametr. Věrohodnostní funkce pak je

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \theta) = f(\epsilon_N | \theta, \mathcal{F}_{N-1}) \dots f(\epsilon_{p+1} | \theta, \mathcal{F}_p) f(\epsilon_p \dots \epsilon_1 | \theta).$$

Z toho dostáváme, že logaritmická věrohodnostní funkce má tvar

$$l(\theta) = \sum_{t=p+1}^N \log f(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \log f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p | \theta).$$

Pokud podmíníme logaritmickou věrohodnost hodnotami $\epsilon_p, \dots, \epsilon_1$, získáme výraz, který už nezávisí na neznámém rozdělení $f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, \theta)$. Odhad pak nazýváme *podmíněný maximálně věrohodný odhad*. Pomocí simulací lze ukázat, že pro dostatečně velké N je rozdíl mezi podmíněným maximálně věrohodným odhadem a maximálně věrohodným odhadem zanedbatelný (Franke a kol. (2008)). Označme podmíněnou logaritmickou věrohodnost jako $l^b(\theta)$, tedy

$$l^b(\theta) = \sum_{t=p+1}^N \log f(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}).$$

Po dosazení máme

$$l^b(\theta) = \sum_{t=p+1}^N -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2},$$

kde $\sigma_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2$. Hledáme tedy takové $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^T$ pro které funkce

$$\sum_{t=p+1}^N -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2(\omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2)}$$

dosahuje svého maxima. Parciální derivace funkce máme

$$\frac{\partial l^b(\theta)}{\partial \omega} = \sum_{t=p+1}^N -\frac{1}{2(\omega + a_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p\epsilon_{t-p}^2)} + \frac{\epsilon_t^2}{2(\omega + a_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p\epsilon_{t-p}^2)^2},$$

$$\frac{\partial l^b(\theta)}{\partial a_i} = \sum_{t=p+1}^N -\frac{\epsilon_{t-i}^2}{2(\omega + a_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p\epsilon_{t-p}^2)} + \frac{\epsilon_t^2\epsilon_{t-i}^2}{2(\omega + a_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p\epsilon_{t-p}^2)^2},$$

pro $i \in \{1, \dots, p\}$. Věrohodnostní rovnice jsou

$$\sum_{t=p+1}^N -\frac{1}{2\sigma_t^2} + \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^4} = 0,$$

$$\sum_{t=p+1}^N \frac{\epsilon_{t-i}^2}{2\sigma_t^2} \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) = 0, i = 1, \dots, p.$$

Dostali jsme soustavu nelineárních rovnic, pro kterou přesné analytické řešení neznáme. Pro numerické řešení soustavy se nejčastěji používá Newton-Rapsonova iterační metoda, popsaná v Hamilton (1994), str. 138.

V případě GARCH(p,q) odhadujeme parametr $\theta = (\omega, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)^T$. Stejným postupem jako u ARCH modelu můžeme odvodit soustavu podmínek prvního řádu pro maximálně věrohodný odhad θ a následně soustavu numericky vyřešit. Při odvozování maximálně věrohodného odhadu na základě Studentova rozdělení podmíněných reziduí ϵ_t bychom použili stejný postup a společně s parametry modelu bychom odhadovali i stupeň Studentova rozdělení.

Věta 6. *Za předpokladu normality $\epsilon_t = z_t\sigma_t$ pro rozdělení maximálně věrohodného odhadu $\theta = (\omega, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)^T$ v modelu GARCH(p,q) platí*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{p+q+1}(0, J^{-1}),$$

kde J značí Fisherovu informační matici.

Důkaz. viz. Franke a kol. (2008)

□

Poznámka. Pokud předpokládáme jiné, než normální rozdělení reziduí, je odhad založený na předpokladu normality konzistentní, ale už ne eficientní (Franke a kol. (2008), kapitola 13).

4.2 Predikce volatility v ARCH a GARCH

Jedním z cílů modelování podmíněné volatility je predikovat její budoucí vývoj. Predikcí se zde rozumí extrapolace do budoucnosti na základě daného modelu s co nejmenší chybou. Cipra (2008) rozlišuje kvantitativní predikci založenou na stochastickém modelu a kvalitativní predikci, aby upozornil na fakt, že k předpovídání budoucího vývoje může být někdy vhodnější použít například průzkum mezi experty, než tvořit odhad pouze na základě modelu. Predikci na základě pozorování dat X_1, \dots, X_T můžeme definovat následovně:

Definice 13. Bud X_1, \dots, X_T pozorování náhodného procesu $\{X_t\}$. Predikcí X_{T+h} , pro $h > 0$ ve smyslu nejmenší čtvercové chyby (MSE) rozumíme měřitelnou funkci $f(X_1, \dots, X_T)$ takovou, že

$$f = \arg \min_{g \text{ měř.}} E|X_{T+h} - g(X_1, \dots, X_T)|^2.$$

Lze ukázat (Prášková (2016)), že predikcí ve smyslu definice 13 je

$$g(X_1, \dots, X_T) = E(X_{T+h} | X_1, \dots, X_T). \quad (4.7)$$

Věta 7. Mějme ARCH(m) model jako v definici 11 splňující $\sum_{i=1}^m a_i < 1$. Nejlepší predikce σ_t^2 vzhledem k $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \dots$ ve smyslu nejmenší střední čtvercové chyby je

$$\hat{\sigma}_t^2(t-1) = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_m \epsilon_{t-m}^2.$$

Důkaz. Protože platí $E_{t-1}(\epsilon_t)^2 = \sigma_t^2$ a pro AR(m) proces podle věty 2

$$\epsilon_t^2 = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_m \epsilon_{t-m}^2 + u_t,$$

máme

$$E_{t-1}(\epsilon_t^2) = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_m \epsilon_{t-m}^2.$$

Z toho a z 4.7 dostáváme, že

$$\hat{\sigma}_t^2(t-1) = E_{t-1}(\epsilon_t^2) = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_m \epsilon_{t-m}^2.$$

□

Predikci $\hat{\sigma}_{t+1}(t-1)$ dostaneme stejným postupem.

$$\hat{\sigma}_{t+1}(t-1) = E_{t-1}(\epsilon_{t+1}^2) = E_{t-1}(\omega + a_1 \epsilon_t^2 + \dots + a_m \epsilon_{t-m+1}^2)$$

$$= \omega + a_1 E_{t-1}(\epsilon_t^2) + \dots + a_m \epsilon_{t-m+1}^2 = \omega + a_1 \hat{\sigma}_t^2(t-1) + \dots + a_m \epsilon_{t-m+1}^2.$$

Podobně lze odvodit predikce pro GARCH model. Jak ukazuje Cipra (2008), speciálně pro GARCH(1,1) splňující $a_1 + b_1 < 1$ máme, že

$$\hat{\sigma}_t^2(t-1) = \omega + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Protože $\epsilon_t = z_t \sigma_t$ pro predikci na dvě období dopředu máme

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + a_1 \epsilon_t^2 + b_1 \sigma_t^2 = \omega + a_1 z_t^2 \sigma_t^2 + b_1 \sigma_t^2 = \omega + a_1 (z_t^2 - 1) \sigma_t^2 + (a_1 + b_1) \sigma_t^2$$

a díky vlastnosti $E_{t-1}(\epsilon_t^2 - 1) = 0$ máme, že

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2(t-1) = \omega + (a_1 + b_1) \hat{\sigma}_t^2(t-1).$$

Obecně lze snadno ukázat, že $\sigma_{t+h}^2(t-1) = \omega + (a_1 + b_1) \sigma_{t+h-1}^2(t-1)$. Rekurzivní substitucí dále dostaneme, že predikce volatility se asymptoticky blíží k nepodmíněnému rozptylu ϵ_t ,

$$\sigma_{t+h}^2(t-1) = \omega \frac{1 - (a_1 + b_1)^h}{1 - a_1 - b_1} + (a_1 + b_1)^h \rightarrow \frac{\omega}{1 - a_1 - b_1},$$

pro $h \rightarrow \infty$.

4.3 Některá zobecnění GARCH modelu

V této sekci uvedeme některé nejčastěji používané modifikace GARCH modelu. Vlastností GARCH modelu je, že model přikládá stejnou váhu, jak poklesu ceny, tak nárůstu, protože v regresi figuruje pouze druhá mocnina minulých šoků. V praxi se ale ukazuje, že pokles ceny může mít jiný efekt na volatilitu, než její nárůst. Empirické studie Christie (1982) a Bekaert a Wu (2000) ukazují, že volatilita akcií má tendenci růst, pokud cena aktiva výrazně poklesne, a naopak klesat, pokud ceny rostou (někdy se označuje jako pozitivní a negativní volatilita). Jednorozměrných GARCH modelů, které umožňují asymetrickou reakci je celá řada, jejich přehled lze nalézt v Teräsvirta (2009).

Konstrukce předpovědi na základě modifikovaných GARCH modelů je obdobná jako v klasickém GARCH modelu. Více o predikci v asymetrickém GARCH modelu viz. Zivot (2009).

GJR-GARCH model

Přirozeným způsobem jak zobecnit GARCH model, aby zohlednil pozitivní a negativní šoky, je přidat indikátor udávající, jestli rozdíl mezi výnosem a očekávaným výnosem v čase $t-h$ byl kladný nebo záporný. GJR-GARCH model navržený v Glosten a kol. (1993) je definován následovně.

Definice 14. *GJR-GARCH(m,n) model definujeme jako model, ve kterém*

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (a_i + \gamma_i I(\epsilon_{t-i} < 0)) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n b_j \sigma_{t-j}^2,$$

kde $I(\epsilon_{t-i} < 0)$ značí indikátor jevu, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ a $z_t, \epsilon_t, \sigma_t$ jako v definici ARCH modelu 11, str. 12.

TGARCH model

Myšlenka threshold GARCH modelu (TGARCH) vychází z předchozího GJR-GARCH modelu. Narozdíl od GJR-GARCH modelu, TGARCH modeluje podmíněnou směrodatnou odchylku namísto podmíněného rozptylu.

Definice 15. *(Zakoian (1994)). TGARCH(m,n) model definujeme podobně jako model, ve kterém*

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^m (c_i \epsilon_{t-i}^+ + d_i \epsilon_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^n b_j \sigma_{t-j}, \quad (4.8)$$

kde $\omega > 0, b_1, \dots, b_n > 0$, ϵ_t^+ značí kladnou část ϵ_t , t.j. $\max(0, \epsilon_t)$, a ϵ_t^- značí zápornou část, t.j. $\max(0, -\epsilon_t)$, a $c_i, d_i \in \mathbb{R}$. $z_t, \epsilon_t, \sigma_t$ jako v definici 11 na str. 12.

Poznámka. Alternativně můžeme místo (4.8) psát ¹

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| + \eta_i \epsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j},$$

kde $\omega, \alpha_i, \beta_j > 0$ pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ a $\eta_i \in \mathbb{R}$.

EGARCH model

Motivací pro zavedení EGARCH modelu je odstranit dvě základní omezení klasického GARCH modelu. Podobně jako předchozí dva modely, rozlišuje pozitivní a negativní volatilitu. Zároveň model odstraňuje omezení na nezápornost koeficientů v GARCH modelu. Jak uvádí Nelson (1991), model tím umožňuje zachytit možné oscilace v podmíněném rozptylu.

Definice 16. *EGARCH model řádu (m, n) definujeme jako model splňující*

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (a_i z_t + \gamma_i (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)) + \sum_{j=1}^n b_j \log(\sigma_{t-j}^2), \quad (4.9)$$

kde $\omega \in \mathbb{R}$, $a_i, \gamma_i, b_j \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. $z_t, \epsilon_t, \sigma_t$ jako v definici 11 na str. 12.

¹Tato varianta je implementována v balíku "rugarch" v R. software, se kterým pracujeme v kapitole 6.

5. Data

Ve zbytku práce se věnujeme aplikaci GARCH modelů na komoditní trh, reprezentovaný čtyřmi významnými komoditami - ropou, kukuřicí, zlatem a mědí, které zastupují čtyři sektory komoditního trhu: energetické komodity, cenné kovy, industriální kovy a zemědělské komodity. Konkrétně se zabýváme výnosy futures kontraktů na surovou ropu (CL), kukuřici (CN), zlato (GC) a měď (HG) v období od 2.1.2003 do 31.12.2015, obchodovaných na komoditní burze Chicago Mercantile Exchange (CME). Při výběru komodit jsme se zaměřili na komodity s vysokou likviditou, aby bylo možné spolehlivě odhadnout realizovanou volatilitu a zároveň zachytit velkou variabilitu komoditního trhu. Následující tabulka uvádí základní charakteristiky logaritmických výnosů použitých pro analýzu.

Komodita	Ticker	N	Prům.	Odchylka	Šikmost	Špičatost
Ropa	CL	2955	-0.0003	0.0218	-0.20	2.10
Kukuřice	CN	2955	0.0000	0.0171	-0.03	1.96
Zlato	GC	2955	0.0000	0.0123	-0.34	6.01
Měď	HG	2955	0.0001	0.0189	-0.29	3.36

Tabulka 5.1: Deskriptivní statistika log-výnosů vybraných komodit

Pro srovnání predikce volatilitu na základě denních výnosů pracujeme s realizovanou volatilitou čtyř vybraných komodit, počítanou z 5-minutových intradenních log-výnosů.¹ *Realizovaná variance* v den t je definována jako (Barndorff-Nielsen a Shephard (2002))

$$[R^*]_t = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t,i}^2.$$

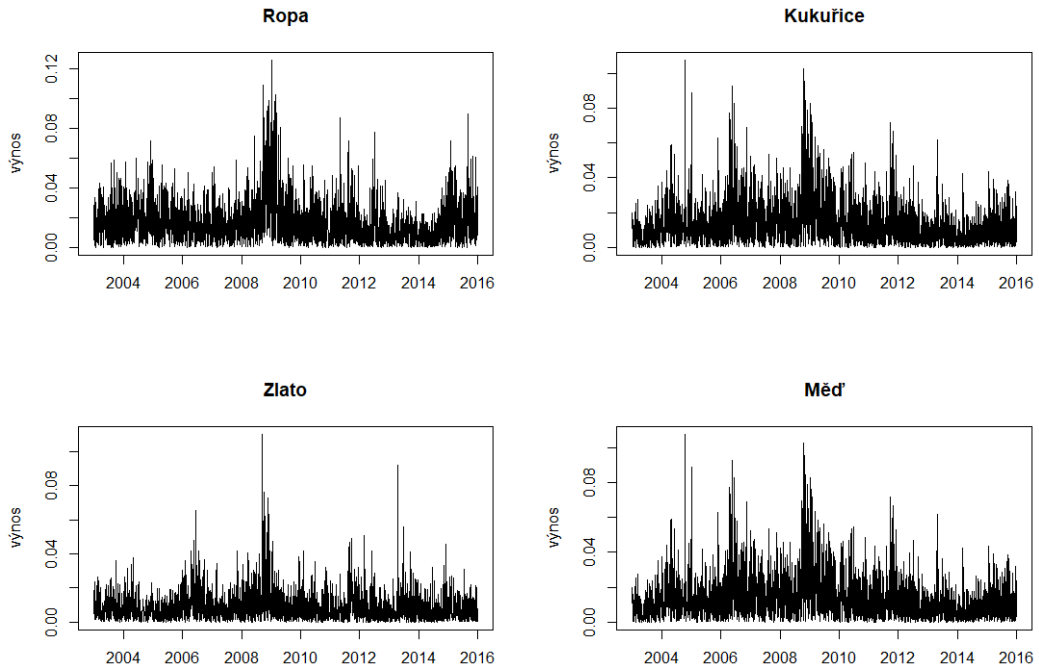
Realizovanou volatilitou (RV), která je odhadem denní volatilitu, rozumíme

$$RV_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_t} r_{t,i}^2},$$

kde $r_{t,i}$ jsou 5-minutové intradenní změny logaritmických cen, t.j. $r_{t,i} = \log p_{t,i} - \log p_{t,i-1}$, n_t značí počet pozorování v den t .

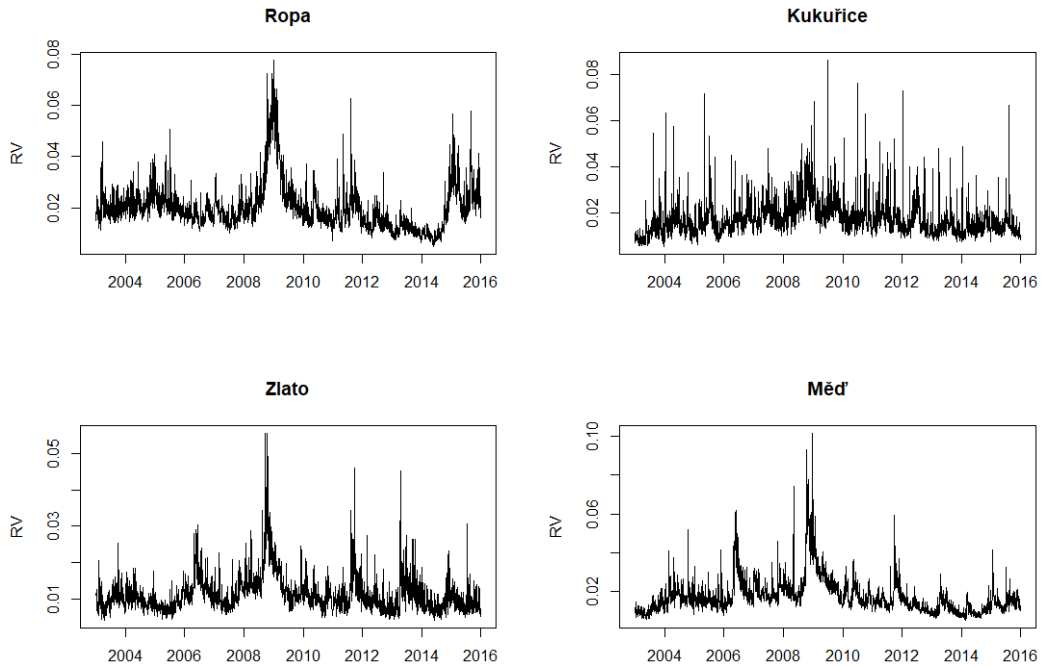
Jak uvádí Liu a kol. (2015), realizovaná volatilita počítaná z 5-minutových intradenních výnosů je zatím nepřekonaná ex-post míra denní volatilitu. Koncept realizované volatilitu vychází z teorie stochastického kalkulu, která přesahuje rozsah této práce. Vlastnosti a odvození realizované volatilitu čtenář nalezne v Barndorff-Nielsen a Shephard (2002) a Andersen a Teräsvirta (2009).

¹Děkuji doc. PhDr. Jozefu Baruníkovi Ph.D. z Fakulty sociálních věd Univerzity Karlovy za poskytnutí realizované volatilitu počítané z vysoko-frekvenčních dat pořizovaných od společnosti Tick Data Inc.



Zdroj: TickData, Inc.

Obrázek 5.1: Absolutní hodnota log-výnosů



Zdroj: TickData, Inc.

Obrázek 5.2: Realizovaná volatilita

6. Výsledky

V této kapitole aplikujeme vybrané modely volatility na komoditní data s cílem vyhodnotit vhodnost modelů pro predikci budoucí realizované volatility trhu. Je potřeba dodat, že denní volatilita je obecně nepozorovaná náhodná veličina, realizovaná volatilita je pouze odhadem skutečné volatility trhu. Predikce realizované volatility trhu je ale užitečná sama o sobě, například pro ocenění derivátů na RV. Výpočty provádíme pomocí R. software s použitím balíčků "data.table", "tseries", "MLmetrics" a "rugarch".

6.1 Stacionarita výnosů

Než začneme se samotnou analýzou volatility, je nutné ověřit předpoklad, zda jsou výnosy během zkoumaného období stacionární. Uvažujme, že výnosy sledují autoregresní proces s heteroskedasticitou v reziduích. Pro testování stacionarity používáme jak klasický Dickeyův-Fullerův test, popsáný např. v Cipra (2008) tak rozšířený Dickeyův-Fullerův (ADF) test, u kterého se předpokládá právě heteroskedasticita reziduí. Dickeyův-Fullerův test, respektive rozšířený Dickeyův-Fullerův test testují hypotézu, zda data neobsahují jednotkový kořen. Existují různé varianty testů, podle toho jaká je nulová hypotéza a alternativa. V našem případě za nulové hypotézy proces obsahuje jednotkový kořen a je tedy nestacionární, alternativou je, že proces je slabě stacionární (Cipra (2008)). Hypotézu chceme zamítnout na hladině 5% . Řád modelu v ADF testu je zvolený jako $\lfloor (N - 1)^{(1/3)} \rfloor$, kde N značí počet pozorování.¹

	D-F Stat.	P-hodnota
CL	- 16.74	0.01*
CN	- 39.88	0.01*
GC	- 21.51	0.01*
HG	- 20.25	0.01*

*P-hodnota je menší než 0.01

Tabulka 6.1: Dickeyův-Fullerův test stacionarity

	ADF Stat.	P-hodnota
CL	- 12.74	0.01*
CN	- 12.59	0.01*
GC	- 13.65	0.01*
HG	- 12.47	0.01*

*P-hodnota je menší než 0.01

Zpožděných proměnných: 14

Tabulka 6.2: ADF test stacionarity

¹Package tseries, R. dokumentation

Závěr obou testů je, že přítomnost jednotkového kořenu v datech můžeme na hladině 5 % zamítnout (zamítáme dokonce na hladině 1%), t.j. můžeme předpokládat že výnosy jsou stacionární.

Výsledky Ljung-Boxova testu, definovaného v kapitole 3, ukazují na sériovou autokorelaci ve výnosech ropy a mědi (tab. 6.3). Test zamítá hypotézu o nulové autokorelaci výnosů ropy a mědi na hladině 1 %.

Abychom odstranili autokorelaci, použijeme pro výnosy ropy a mědi autoregresní model prvního řádu, odhadnutý metodou nejmenších čtverců, a spočteme rezidua. Odhadujeme tedy model ve tvaru

$$r_t = \mu + \phi r_{t-1} + \epsilon_t .$$

Po úpravě je už autokorelace reziduí nesignifikantní (tab. 6.4). Pro kontrolu se ještě podíváme na autokorelační funkce, resp. parciální autokorelační funkce modelů (příloha A.2). Výběrové autokorelace a parciální autokorelace jsou slabé a rozložené nahodile. Pro výnosy futures ropy a mědi tedy budeme uvažovat model očekávaného výnosu:

$$r_t = \mu + \phi r_{t-1} + \epsilon_t ,$$

kde μ je konstanta, $|\phi| < 1$, $\epsilon_t = z_t \sigma_t$ jako v definici 11 na str. 12, zatímco pro zlato a kukuřici uvažujeme model

$$r_t = \mu + \epsilon_t ,$$

kde μ a ϵ_t je jako v předchozím.

	L-B Stat.	P-hodnota
CL	22.09	0.01*
CN	1.67	0.89
GC	1.21	0.94
HG	16.89	0.01*

*P-hodnota je menší než 0.01
Zpožděných proměnných: 5

Tabulka 6.3: Ljung-Boxův test nekorelovanosti výnosů

	L-B Stat.	P-hodnota
CL	3.03	0.69
HG	2.83	0.73

Zpožděných proměnných: 5

Tabulka 6.4: Ljung-Boxův test nekorelovanosti reziduí v AR(1) modelu pro CL a HG

6.2 Parametry GARCH modelu

Nyní přistoupíme k modelování volatility. Volbu řádu GARCH modelu provedeme pomocí AIC a BIC kritéria. V případě, že obě kritéria preferují stejnou variantu, je volba modelu jasná. V případě, že kritéria preferují různé řády modelu, bereme variantu s menším počtem parametrů. Odhady provádíme na základě Studentova rozdělení, které zohledňuje možnou leptokurtičnost rozdělení. Stupeň volnosti Studentova rozdělení je odhadován společně s ostatními parametry metodou maximální věrohodnosti (ve výsledcích uváděný jako koeficient shape). Výpočet provádíme v R. software, s použitím balíčku "rugarch". Parametry odhadujeme přes všech 2955 pozorování.

Zatímco Akaikeovo informační kritérium preferuje v případě zlata a mědi modely GARCH(2,2) resp. GARCH(2,1) (tab. 6.5), Bayesovo informační kritérium ve všech případech volí model GARCH(1,1) (tab. 6.6). Budeme tedy budeme pracovat s GARCH(1,1) modelem pro všechny komodity. Náš model pro volatilitu má tvar

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (6.1)$$

kde $\omega, \alpha_1, \beta_1 > 0$.

	CL AIC	CN AIC	GC AIC	HG AIC
GARCH(1,1)	-5.0468	-5.4424	-6.2039	-5.4360
GARCH(1,2)	-5.0463	-5.4415	-6.2032	-5.4354
GARCH(2,1)	-5.0462	-5.4416	-6.2043	-5.4361
GARCH(2,2)	-5.0456	-5.4410	-6.2050	-5.4303

Tabulka 6.5: AIC kritérium pro GARCH model

	CL BIC	CN BIC	GC BIC	HG BIC
GARCH(1,1)	-5.0347	-5.4323	-6.1937	-5.4239
GARCH(1,2)	-5.0321	-5.4293	-6.1910	-5.4212
GARCH(2,1)	-5.0320	-5.4294	-6.1921	-5.4219
GARCH(2,2)	-5.0294	-5.4268	6.1908	-5.4231

Tabulka 6.6: BIC kritérium pro GARCH model

	μ	ϕ	ω	α_1	β_1
CL	0.0001	-0.075	0.000002	0.059	0.938
CN	0.0001	-	0.000002	0.058	0.936
GC	0.0001	-	0.000002	0.044	0.947
HG	0.0003	-0.069	0.000002	0.063	0.936

Tabulka 6.7: Odhady koeficientů v GARCH(1,1) modelu

V tabulce (6.7) uvádíme odhad koeficientů GARCH(1,1) modelu. Ukazuje se, že nejvýznamnějším koeficientem je tzv. GARCH složka β_1 . Ve všech případech vyšly konstanty ω a μ nízké a statisticky nesignifikantní (příloha A.1). V případě μ je to očekávaný výsledek, protože průměrné denní výnosy lze očekávat nulové. Naopak z povahy modelu musí být ω kladné. Veliký rozptyl v odhadu ω znamená také špatný odhad nepodmíněného (asymptotického) rozptylu ϵ_t , který lze podle věty 5 ze str. 14 lze vyjádřit jako

$$Var(\epsilon_t) = \frac{\omega}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Srovnání s výběrovým rozptylem ukazuje, že odhady se shodují pouze řádově, tedy má smysl počítat pouze krátkodobé predikce. Jak uvidíme později srovnáním predikce 5 dní dopředu a 30 dní dopředu, kvalita predikce se u GARCH modelu zhoršuje víc, než u TGARCH a EGARCH modelu.

6.3 Modifikované GARCH modely

Stejně jako v předchozí části odhadujeme modely řádu (1,1) abychom mohli výsledky snadno porovnat. Zkoumáme tři modifikace GARCH modelu, které umožňují zachytit tzv. "pákový efekt"² v ϵ_t^2 .

Odhad modelu GJR-GARCH

Model GJR-GARCH(1,1) má tvar:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \gamma_1 I(\epsilon_{t-1} < 0)) \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (6.2)$$

kde $\omega, \alpha_1, \beta_1 > 0$ a $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

Odhady koeficientů vycházejí následovně (tab. 6.8).

	μ	ϕ	ω	α_1	β_1	γ_1
CL	-0.00004	-0.074	0.0000014	0.033	0.941	0.044
CN	0.00010	-	0.0000021	0.056	0.935	0.005
GC	0.00010	-	0.0000027	0.060	0.951	-0.033
HG	0.00020	-0.070	0.0000013	0.047	0.937	0.028

Tabulka 6.8: Odhady koeficientů v GJR-GARCH(1,1) modelu

Koeficient β_1 vychází velmi podobně jako v klasickém GARCH modelu, rozdíl se dá čekat u α_1 koeficientu, který udává lineární závislost σ_t^2 na ϵ_{t-1}^2 za předpokladu, že šok ϵ_{t-1} byl kladný. Nejznatelnější rozdíl je v případě ropy. Naopak u kukuřice je koeficient α_1 téměř stejný jako v GARCH(1,1) a γ_1 zanedbatelný. T-statistika pro γ_1 (příloha A.1) uvádí, že pro ropu a měď je "pákový efekt" statisticky významný (na hladině 5%). Pro zlato pozorujeme opačný efekt, tedy vyšší ARCH koeficient v případě, že výnos v čase t-1 byl vyšší než očekávaný výnos. U kukuřice nelze zamítnout hypotézu, že $\gamma_1 = 0$, asymetrická reakce se tedy neprokázala.

Odhad TGARCH modelu

TGARCH model uvažujeme ve tvaru:

$$\sigma_t = \omega + \alpha_1 (|\epsilon_{t-1}| + \eta_1 \epsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}, \quad (6.3)$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \omega > 0$ a $\eta \in \mathbb{R}$.

TGARCH(1,1) model vede ke stejným závěrům jako GJR-GARCH(1,1). U kukuřice je opět pákový efekt zanedbatelný a nesignifikantní. U ropy a mědi je η_1 kladné, což značí vyšší nárůst volatility při poklesu ceny, zatímco u zlata je η_1 negativní. Konstanta ω vyšla řádově větší a statisticky signifikantní, což souvisí

²Pákový efekt je v uvozovkách, protože v ekonomické literatuře nepanuje shoda o tom, jestli se skutečně jedná o vliv pákového efektu na volatilitu. "Pákovým efektem" zde proto rozumíme rozdílnou reakci volatility na pozitivní resp. negativní šok v minulosti.

s tím, že v modelu odhadujeme podmíněnou směrodatnou odchylku namísto rozptylu. TGARCH v tomto ohledu dává přesnější odhad nepodmíněné směrodatné odchylky (tab. 6.9).

	μ	ϕ	ω	α_1	β_1	η_1
CL	-0.0001	-0.074	0.0001	0.057	0.948	0.362
CN	0.0001	-	0.0001	0.061	0.946	-0.035
GC	0.0001	-	0.0001	0.054	0.951	-0.240
HG	0.0002	-0.067	0.0001	0.071	0.939	0.235

Tabulka 6.9: Odhady koeficientů v TGARCH(1,1) modelu

Odhad EGARCH modelu

EGARCH model uvažujeme ve tvaru:

$$\log \sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 z_t + \gamma_1 (|z_{t-1}| - E|z_{t-i}|)) + \beta_1 \log(\sigma_t^2), \quad (6.4)$$

kde $\omega \in \mathbb{R}$ a $\alpha_i, \gamma_i, \beta_j \in \mathbb{R}$.

Odhad EGARCH modelu shnuje tabulka 6.10. Ukazuje se, že oproti předchozím modelům se v EGARCH modelu asymetrická reakce volatility na pozitivní a negativní šoky projevuje ve všech komoditách včetně kukuřice. Odhad konstanty ω je přesnější než v předchozích modelech (příloha A.1).

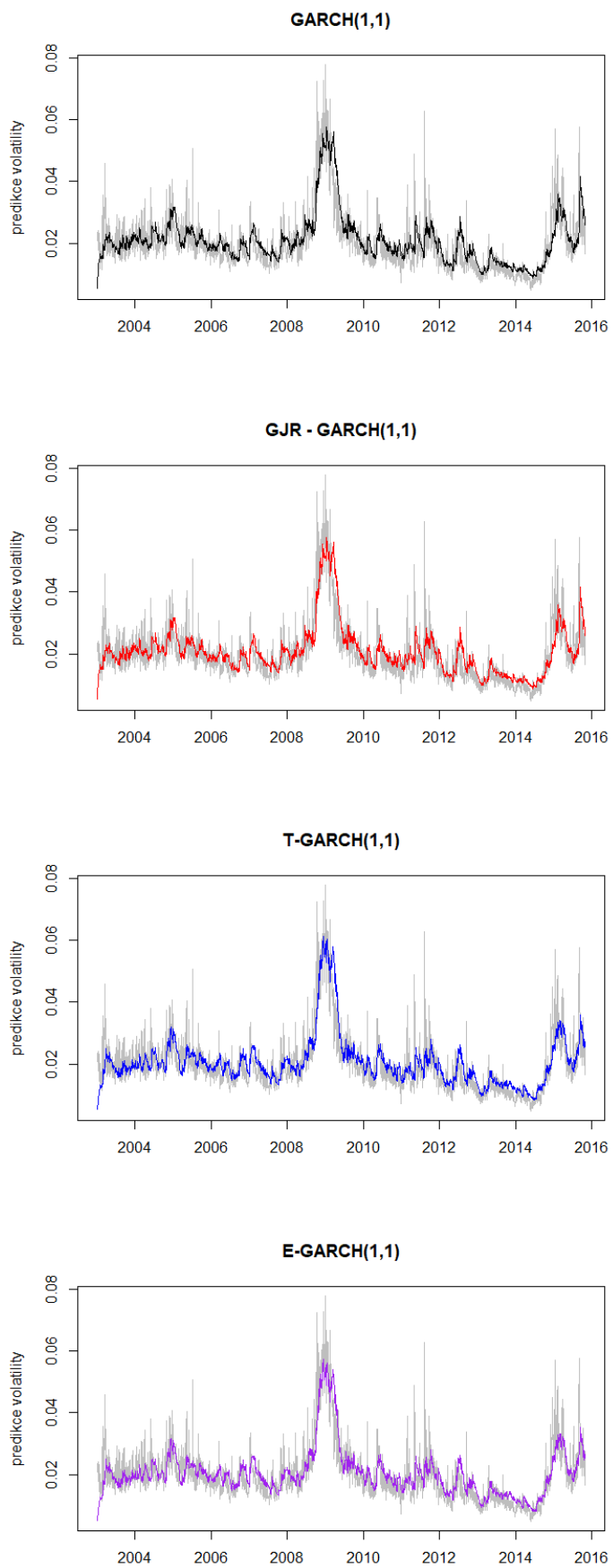
	μ	ϕ	ω	α_1	β_1	γ_1
CL	-0.0001	-0.073	-0.065	-0.041	0.992	0.108
CN	0.0001	-	-0.084	0.002	0.990	0.128
GC	0.0001	-	-0.076	0.024	0.991	0.105
HG	0.0001	-0.067	-0.066	-0.031	0.992	0.138

Tabulka 6.10: Odhady koeficientů v EGARCH(1,1) modelu

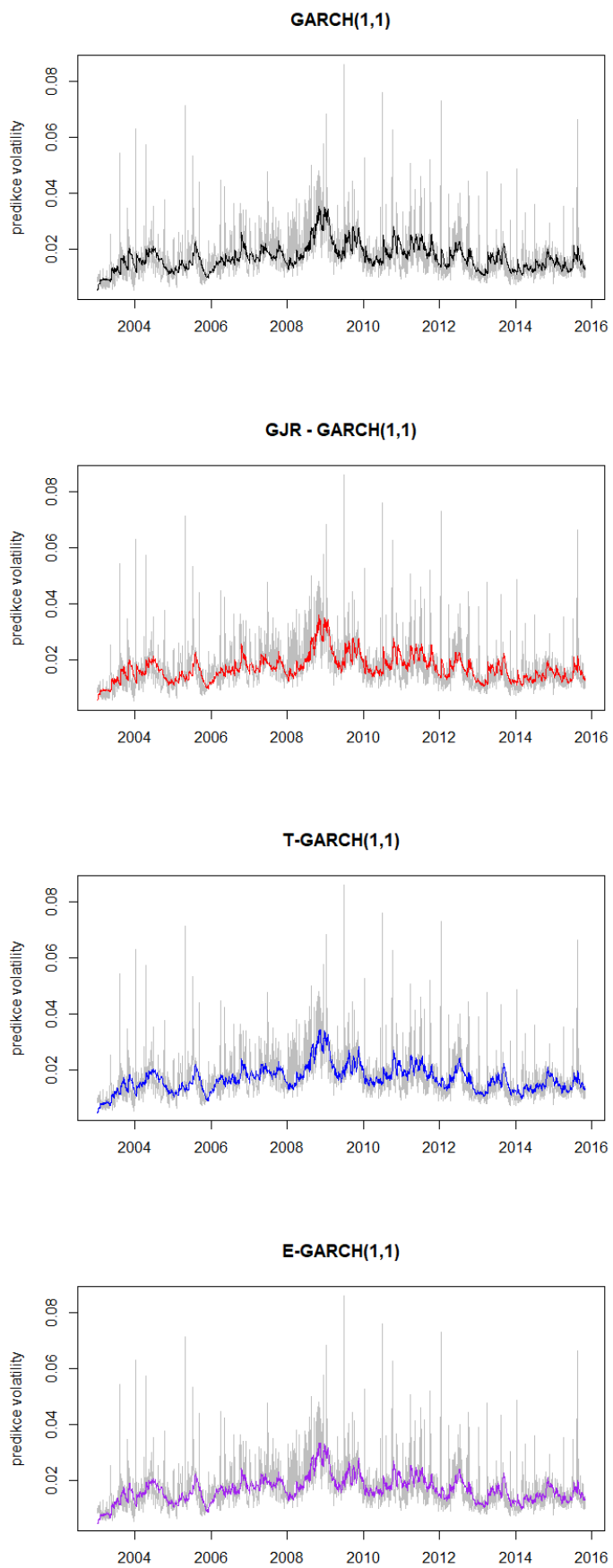
6.4 5-denní předpověď volatility

Následující grafy (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) uvádějí predikci volatility ropy, kukuřice, zlata a mědi na pět dní dopředu, která je konstruovaná na základě odhadu GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1), TGARCH(1,1) a EGARCH(1,1). Ukazuje se, že rozdíly v predikcích těchto čtyř modelů jsou minimální. Predikce volatility na pět dní dopředu je zpožděná za realizovanou volatilitou, ale modely úspěšně zachycují trendy v realizované volatilitě, zejména dlouhodobý nárůst volatility během globální finanční krize v letech 2008-2009. Ta je nejvíce patrná na nárůstu volatility ropy a mědi, nejméně se pak dotkla volatility kukuřice. Z grafů je dále patrné, že všechny typy GARCH modelů podhodnotily nárůst volatility komodit během let 2008-2009, obzvláště nárůst volatility zlata.

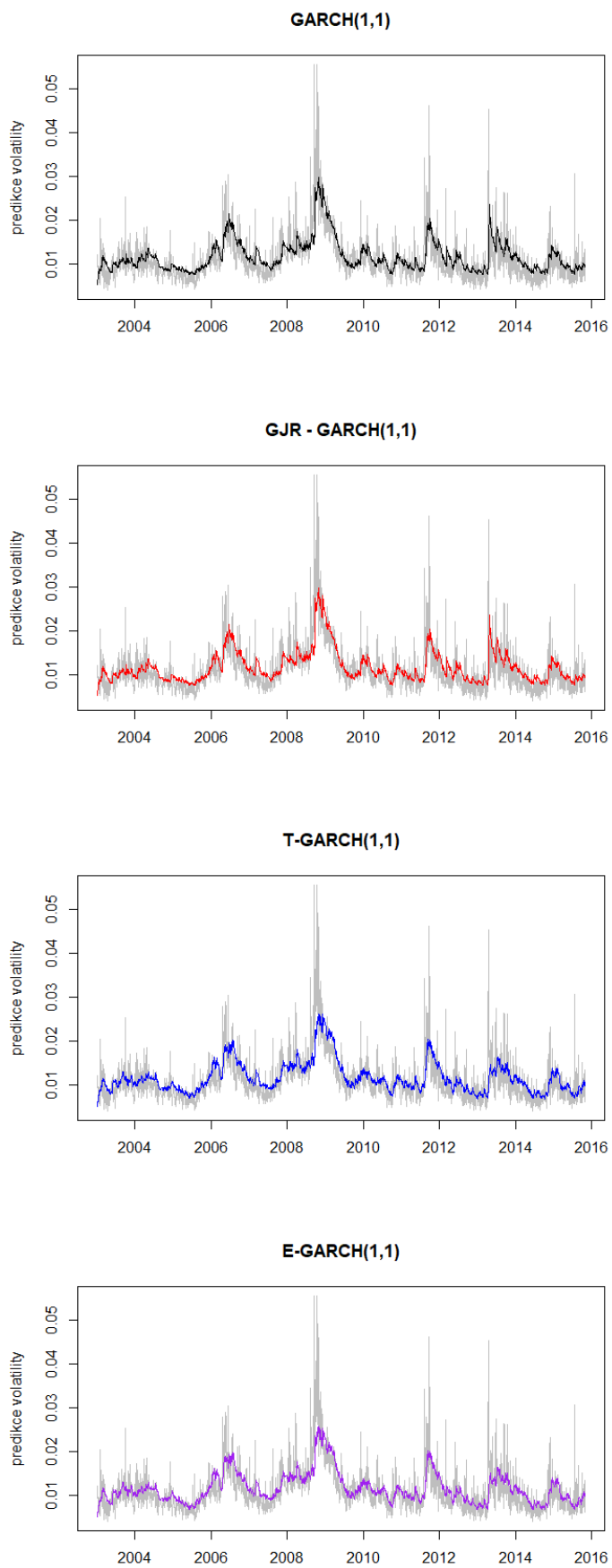
Vysoká volatilita ropy v letech 2008-2009 je spojená s kolapsem cenové bubliny, kdy se cena ropy 150 \$ za barel propadla na 40 \$ za barel. Podobně cena mědi spadla na přelomu roku 2008 a 2009 z 800 \$/kg pod 400 \$/kg. Hypotéza, že volatilita komoditního trhu je ovlivněná volatilitou akciových trhů kvůli vysokému objemu investic institucionálních investorů do komodit, se označuje jako financionalizace komodit. Tato hypotéza by vysvětlovala, proč během finanční krize roste i volatilita na komoditním trhu. Alternativní hypotéza je, že komoditní trh reaguje na nejistotu ohledně výstupu reálné ekonomiky.



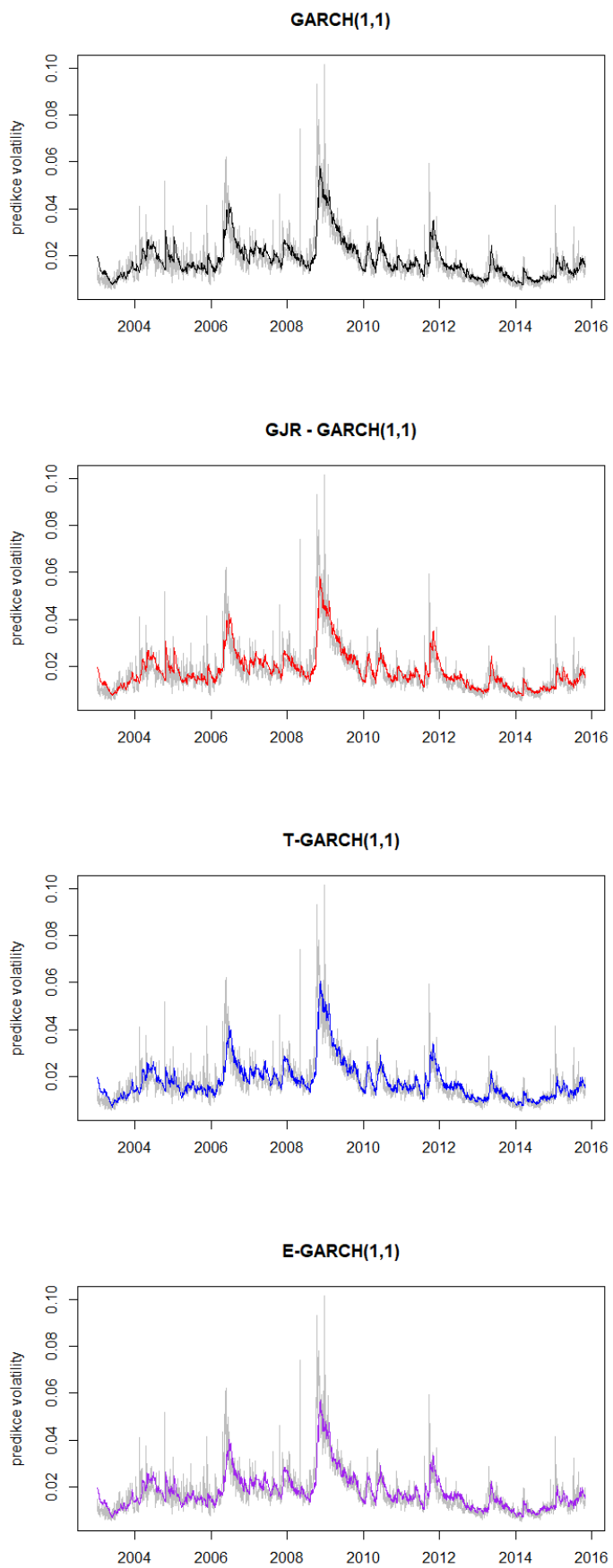
Obrázek 6.1: Predikce volatility ropy 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita



Obrázek 6.2: Predikce volatilita kukuřice 5-dní dopředu, šedě realizovaná volatilita



Obrázek 6.3: Predikce volatilita zlata 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita



Obrázek 6.4: Predikce volatility mědi 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita

6.5 Předpověď versus realizovaná volatilita

Pro porovnání přesnosti predikce se nejvíc používají tři kritéria: průměrná střední čtvercová chyba (mean square error), průměrná absolutní chyba (mean absolute error) a průměrná absolutní procentuální chyba (mean absolute percentage error). Nejprve je zde stručně popíšeme, pro srovnání předpovědi s realizovanou volatilitou pak volíme průměrnou absolutní procentuální chybu, která je v našem případě dobře interpretovatelná.

Chybu predikce h-kroků dopředu v čase $t+h$ definujeme jako $er_{t,h} = \hat{\sigma}_{t+h}(t) - \sigma_{t+h}$.

Průměrnou střední čtvercovou chybou (MSE) rozumíme

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N er_{t,h}^2.$$

Průměrnou absolutní chybou (MAE) definujeme jako

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |er_{t,h}|.$$

Průměrnou procentuální absolutní chybou definujeme následovně

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|er_{t,h}|}{\sigma_{t+h}}.$$

Konstanta N značí počet pozorování, predikce $\hat{\sigma}_{t+h}^2(t)$ byla definována v kapitole 3. V tabulkách (6.11),(6.12),(6.13) postupně uvádíme, jaká byla chyba predikce 1 den, 5 dní a 30 dní dopředu pro jednotlivé komodity. Jak se ukazuje, volatilitu ropy a mědi se podařilo zachytit o něco lépe, než je tomu u kukuřice a zlata. V predikci na den dopředu nepozorujeme významný rozdíl mezi predikcí pomocí GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1), TGARCH(1,1) a EGARCH(1,1). Podobně u predikce 5-dní dopředu není výrazný rozdíl v MAPE vybraných čtyř modelů

Rozdíl začíná být patrný až při predikci 30 dní dopředu. I když existují testy na statistickou významnost takového rozdílu, např. Dieboldův-Marianův test (Diebold a Mariano (1995)), teorie potřebná k odhadnutí rozptylu testové statistiky přesahuje rámec této práce. Proto pouze konstatujeme, že chyba v predikci na 30 dní dopředu se u našich čtyř modelů liší řádově o jednotky procent. Spíš než horší predikce na třicetidenním horizontu modelů GARCH a GJR-GARCH, je problém nepřesný odhad nepodmíněného rozptylu v GARCH a GJR-GARCH modelu, ke kterému s rostoucím horizontem předpověď konverguje. Proto TGARCH a EGARCH modely jsou vhodnější k modelování volatility komodit na delším horizontu.

	CL MAPE	CN MAPE	GC MAPE	HG MAPE
GARCH(1,1)	0.1803	0.2169	0.2257	0.1843
GJR-GARCH(1,1)	0.1770	0.2169	0.2227	0.1835
TGARCH(1,1)	0.1772	0.2118	0.2241	0.1832
EGARCH(1,1)	0.1758	0.2125	0.2239	0.1824

Tabulka 6.11: Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility **1 den dopředu**

	CL MAPE	CN MAPE	GC MAPE	HG MAPE
GARCH(1,1)	0.2073	0.2402	0.2462	0.2128
GJR-GARCH(1,1)	0.2059	0.2401	0.2420	0.2135
T-GARCH(1,1)	0.2031	0.2309	0.2391	0.2101
E-GARCH(1,1)	0.2003	0.2313	0.2377	0.2072

Tabulka 6.12: Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility **5 dní dopředu**

	CL MAPE	CN MAPE	GC MAPE	HG MAPE
GARCH(1,1)	0.2852	0.2855	0.3126	0.3102
GJR-GARCH(1,1)	0.2793	0.2856	0.3214	0.3060
TGARCH(1,1)	0.2622	0.2592	0.2941	0.2801
EGARCH(1,1)	0.2501	0.2524	0.2851	0.2630

Tabulka 6.13: Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility **30 dní dopředu**

Shrňme tedy výsledky naší analýzy. Nejprve jsme zkoumali nekorelovanost log-výnosů v čase a testovali stacionaritu reziduí. Abychom očistili rezidua od autokorelace v případě ropy a mědi, použili jsme autoregresní model prvního řádu na log-výnosy. Poté jsme přistoupili k modelování volatility pomocí čtyř modelů, popsanych v teoretické části. Srovnání realizované volatility a predikcí modelů ukazuje, že modelování volatility komodit pomocí GARCH modelu a jeho modifikací dává smysluplné výsledky, které jsou v krátkém horizontu, t.j. do pěti dní, poměrně přesné a dobře zachycují trendy patrné z realizované volatility.

Při výjimečných událostech na trhu, jako byla finanční krize 2008-2009, mají ovšem GARCH modely tendenci podhodnocovat realizovanou volatilitu, což je patrné zejména při modelování volatility zlata. Z grafů je také patrné, že odhady volatility jsou zpožděné za realizovanou volatilitou trhu.

Rozdíly mezi modely se projevují až při delším časovém horizontu, jinak dávají všechny čtyři modely velmi podobné predikce. Při horizontu predikce do pěti dní se chyba predikce realizované volatility vybraných komodit pohybuje kolem 20%. Na 30-denním horizontu EGARCH model předpovídá RV o něco lépe než

ostatní modely, největší rozdíl pozorujeme v případě predikce volatility mědi, kdy EGARCH(1,1) model má procentuální chybu predikce o 5% nižší než klasický GARCH(1,1).

7. Závěr

ARCH a GARCH modely dnes patří k základním ekonometrickým nástrojům, které se používají v řízení rizik pro odhad volatility a pro měření podstupovaného rizika, například pomocí value-at-risk modelu. Není proto překvapivé, že článků o GARCH modelech je velmi mnoho a kromě klasického modelu se zkoumají různé možnosti, jak GARCH modely rozšířit. Pro aplikace se často využívá zobecnění GARCH modelů na vícerozměrné časové řady jako je BEKK-GARCH, DCC-GARCH a CCC-GARCH, abychom jmenovali alespoň některé. My jsme se v této práci soustředili na jednorozměrné varianty z rodiny GARCH modelů.

V teoretické části jsme se věnovali nejprve základům autoregresních modelů a jejich vlastnostem. Posléze jsme na základě teorie autoregresních modelů definovali autoregresní model podmíněné heteroskedasticity (ARCH) a zobecněný autoregresní model podmíněné heteroskedasticity (GARCH), které slouží k zachycení závislosti budoucí volatility aktiv na minulých šocích. Popsali jsme metodu odhadu koeficientů pomocí maximální věrohodnosti a také konstrukci predikce na základě modelů na několik dní dopředu. Kromě standardního ARCH a GARCH modelu jsme uvedli některá rozšíření, umožňující zachytit asymetrickou reakci volatility na pozitivní a negativní šok v minulosti.

V aplikační části se zabýváme modelováním volatility klíčových komodit obchodovaných na Chicago Mercantile Exchange. Volatilita je nejvíce sledována u akciových trhů, i když v případě komoditního trhu může nejistota ohledně ceny komodit dopadnout na široké spektrum agentů operujících na komoditním trhu. Volatilita komodit má dopad jak na investory, kteří využívají vzácných komodit pro diverzifikaci portfolia, a obchodníky s komoditními deriváty, tak na průmysl, kde volatilita komodit vede k nejistotě ohledně ceny produkčních faktorů a nákladů na transport.

Existující literaturu jsme proto obohatili o praktickou aplikaci GARCH modelů na komoditní trh s cílem porovnat nejvíce používané modely z rodiny jednorozměrných GARCH modelů a vyhodnotit přesnost jejich predikce srovnáním s realizovanou volatilitou trhu. Ukazujeme že, predikce modelů, které umožňují zachytit asymetrickou reakci volatility, jsou v krátkém horizontu téměř identické s klasickým GARCH modelem. Srovnáme-li naopak přesnost predikce realizované volatility napříč komoditními sektory, je přibližně stejná (měřeno procentuální chybou v predikci). Závěr aplikační části tedy je, že v krátkém horizontu se přesnost predikce zobecněných GARCH modelů napříč komoditními sektory významně neliší od standardního GARCH modelu. V delším časovém horizontu je nepřesnost GARCH modelu způsobená nepřesným odhadem nepodmíněného rozptylu a modely EGARCH a TGARCH tedy dávají lepší výsledky.

Na práci by se dalo navázat studiem predikce volatility pomocí vícerozměrných modelů podmíněné heteroskedasticity, které umožňují zachytit korelace druhých mocnin výnosů mezi aktivy. Aplikovat vícerozměrné GARCH modely na predikci volatility komoditního trhu by mohlo přinést zajímavé výsledky, protože se ukazuje, že volatilita komodit je značně provázána (Diebold a kol. (2017)). A nabízí se také příležitost v dalším výzkumu využít intradenních výnosů pro přesnější predikci volatility v krátkodobém horizontu.

Seznam použité literatury

- ANDERSEN, T. G. a TERÄSVIRTA, T. (2009). Realized volatility. In *Handbook of Financial Time Series*, pages 555–575. Springer Berlin Heidelberg.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E. a SHEPHARD, N. (2002). Estimating quadratic variation using realized variance. *Journal of Applied Econometrics*, **17**(5), 457–477.
- BEKAERT, G. a WU, G. (2000). Asymmetric volatility and risk in equity markets. *Review of Financial Studies*, **13**(1), 1–42.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**(3), 307–327.
- CHRISTIE, A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, **10**(4), 407–432.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-87865-24-8.
- DIEBOLD, F. X. a MARIANO, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, **13**(3), 253.
- DIEBOLD, F. X., LIU, L. a YILMAZ, K. (2017). Commodity Connectedness. Technical Report 23685, National Bureau of Economic Research.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, **50**(4), 987.
- FRANKE, J., HÄRDLE, W. K. a HAFNER, C. M. (2008). *Statistics of Financial Markets*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-16521-4.
- GHALANOS, A. *rugarch: Univariate GARCH models*. R package version 1.4-0.
- GLOSTEN, L. R., JAGNNATHAN, R. a RUNKLE, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, **48**(5), 1779–1801.
- HAMILTON, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University. Press. ISBN 0691042896.
- LIU, L. Y., PATTON, A. J. a SHEPPARD, K. (2015). Does anything beat 5-minute RV? A comparison of realized measures across multiple asset classes. *Journal of Econometrics*, **187**(1), 293–311.
- LJUNG, G. M. a BOX, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65**(2), 297–303.
- NELSON, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, **59**(2), 347.

- PRÁŠKOVÁ, Z. (2016). *Základy náhodných procesů*. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-0971-3.
- R CORE TEAM (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 3. 5. 0 edition.
- TAYLOR, S. J. (2007). *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. University Press Group Ltd. ISBN 0691134790.
- TERÄSVIRTA, T. (2009). An introduction to univariate garch models. In *Handbook of Financial Time Series*, pages 17–42. Springer Berlin Heidelberg.
- ZAKOIAN, J.-M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**(5), 931–955.
- ZIVOT, E. (2009). Practical issues in the analysis of univariate GARCH models. In *Handbook of Financial Time Series*, pages 113–155. Springer Berlin Heidelberg.

Seznam obrázků

3.1	Log-výnosy futures významných komodit obchodovaných na Chicago Mercantile Exchange	9
3.2	Výběrová autokorelace výnosů r_t	11
3.3	Výběrová autokorelace druhých mocnin výnosů r_t^2	11
5.1	Absolutní hodnota log-výnosů	21
5.2	Realizovaná volatilita	21
6.1	Predikce volatility ropy 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita .	29
6.2	Predikce volatility kukuřice 5-dní dopředu, šedě realizovaná volatilita	30
6.3	Predikce volatility zlata 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita	31
6.4	Predikce volatility mědi 5 dní dopředu, šedě realizovaná volatilita	32
A.1	Odhadnutá ACF reziduí v AR(1) modelu výnosů CL a HG . . .	50
A.2	Odhadnutá PACF reziduí v AR(1) modelu výnosů CL a HG . . .	51

Seznam tabulek

5.1	Deskriptivní statistika log-výnosů vybraných komodit	20
6.1	Dickeyův-Fullerův test stacionarity	22
6.2	ADF test stacionarity	22
6.3	Ljung-Boxův test nekorelovanosti výnosů	23
6.4	Ljung-Boxův test nekorelovanosti reziduí v AR(1) modelu pro CL a HG	23
6.5	AIC kritérium pro GARCH model	24
6.6	BIC kritérium pro GARCH model	24
6.7	Odhady koeficientů v GARCH(1,1) modelu	25
6.8	Odhady koeficientů v GJR-GARCH(1,1) modelu	26
6.9	Odhady koeficientů v TGARCH(1,1) modelu	27
6.10	Odhady koeficientů v EGARCH(1,1) modelu	27
6.11	Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility 1 den dopředu	34
6.12	Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility 5 dní dopředu	34
6.13	Průměrná procentuální absolutní chyba (MAPE) predikcí realizované volatility 30 dní dopředu	34
A.1	Ropa, GARCH(1,1). Výstup z R. software.	42
A.2	Kukuřice, GARCH(1,1). Výstup z R. software.	42
A.3	Zlato, GARCH(1,1). Výstup z R. software.	43
A.4	Měď, GARCH(1,1). Výstup z R. software.	43
A.5	Ropa, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.	44
A.6	Kukuřice, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.	44
A.7	Zlato, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.	45
A.8	Měď, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.	45
A.9	Ropa, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.	46
A.10	Kukuřice, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.	46
A.11	Zlato, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.	47
A.12	Měď, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.	47
A.13	Ropa, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.	48
A.14	Kukuřice, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.	48
A.15	Zlato, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.	49
A.16	Měď, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.	49

Seznam použitých zkratek

ACF	autokorelační funkce
ADF test	rozšířený Dickeyův-Fullerův test
AR	autoregresní model
ARMA	smíšený model autoregrese a klouzavých součtů
CL	surová ropa
CN	kukuřice
D-F test	Dickeyův-Fullerův test
$E_{t-1}(\cdot)$	střední hodnota podmíněná informací v čase t-1
GC	zlato
HG	měď
i.i.d.	náhodné stejně rozdělené veličiny
\xrightarrow{d}	konvergence v distribuci
L-B test	Ljung-Boxův test
MA	model klouzavých součtů
MAPE	průměrná absolutní procentuální chyba
MAE	průměrná absolutní chyba
MSE	průměrná střední čtvercová chyba
PACF	parciální autokorelační funkce
RV	realizovaná volatilita
WN	bílý šum

A. Přílohy

A.1 Odhad GARCH, GJR-GARCH, T-GARCH a E-GARCH

GARCH(1,1), CL: Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000145 0.000290 0.50057 0.616677
ar1 -0.074639 0.018707 -3.98981 0.000066
omega 0.000002 0.000003 0.72819 0.466497
alpha1 0.059410 0.016948 3.50535 0.000456
beta1 0.937790 0.018373 51.04129 0.000000
shape 19.249136 5.290233 3.63862 0.000274

Tabulka A.1: Ropa, GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GARCH(1,1) CN: Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000081 0.000261 0.3118 0.755194
omega 0.000003 0.000002 1.3206 0.186640
alpha1 0.057858 0.011922 4.8531 0.000001
beta1 0.935641 0.013999 66.8374 0.000000
shape 6.588111 0.651389 10.1139 0.000000

Tabulka A.2: Kukuřice, GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GARCH(1,1) GC

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000125 0.000177 0.70528 0.480636
omega 0.000001 0.000001 1.99971 0.045532
alpha1 0.043876 0.006014 7.29538 0.000000
beta1 0.947007 0.006494 145.83647 0.000000
shape 5.438182 0.490027 11.09772 0.000000

Tabulka A.3: Zlato, GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GARCH(1,1) HG

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000272 0.000228 1.19436 0.232336
ar1 -0.069326 0.018347 -3.77869 0.000158
omega 0.000001 0.000001 0.92716 0.353845
alpha1 0.062781 0.011896 5.27733 0.000000
beta1 0.936127 0.011905 78.63233 0.000000
shape 6.827014 0.757862 9.00826 0.000000

Tabulka A.4: Měď, GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GJR-GARCH(1,1) CL

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : gjrGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu -0.000038 0.000290 -0.13171 0.895217
ar1 -0.074152 0.018700 -3.96527 0.000073
omega 0.000002 0.000003 0.65085 0.515142
alpha1 0.033187 0.013277 2.49960 0.012433
beta1 0.941019 0.020191 46.60487 0.000000
gamma1 0.044291 0.008196 5.40397 0.000000
shape 20.831876 5.960470 3.49501 0.000474

Tabulka A.5: Ropa, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GJR-GARCH(1,1) CN

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : gjrGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000073 0.000262 0.27818 0.78087
omega 0.000003 0.000002 1.30161 0.19305
alpha1 0.055749 0.008416 6.62423 0.00000
beta1 0.935124 0.014490 64.53578 0.00000
gamma1 0.004814 0.012655 0.38042 0.70363
shape 6.588884 0.650914 10.12250 0.00000

Tabulka A.6: Kukuřice, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GJR-GARCH(1,1) GC

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : gjrGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000125 0.000178 0.70279 0.482184
omega 0.000001 0.000001 1.31576 0.188254
alpha1 0.059879 0.004713 12.70511 0.000000
beta1 0.951314 0.006453 147.41082 0.000000
gamma1 -0.033326 0.011007 -3.02779 0.002463
shape 5.443038 0.394659 13.79174 0.000000

Tabulka A.7: Zlato, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.

GJR-GARCH(1,1) HG

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : gjrGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000194 0.000230 0.84254 0.399487
ar1 -0.069804 0.018340 -3.80617 0.000141
omega 0.000001 0.000001 0.93328 0.350676
alpha1 0.047477 0.008522 5.57121 0.000000
beta1 0.936818 0.011950 78.39289 0.000000
gamma1 0.027850 0.012114 2.29887 0.021513
shape 6.931281 0.771569 8.98336 0.000000

Tabulka A.8: Měď, GJR-GARCH(1,1). Výstup z R. software.

TGARCH(1,1) CL

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model : TGARCH
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu -0.000098 0.000295 -0.33082 0.740779
ar1 -0.073525 0.018325 -4.01218 0.000060
omega 0.000147 0.000048 3.08097 0.002063
alpha1 0.056827 0.006772 8.39092 0.000000
beta1 0.947820 0.006210 152.63455 0.000000
eta11 0.362207 0.081217 4.45977 0.000008
shape 20.748860 6.281438 3.30320 0.000956

Tabulka A.9: Ropa, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.

TGARCH(1,1) CN

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model : TGARCH
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000065 0.000259 0.25226 0.800838
omega 0.000139 0.000058 2.39153 0.016779
alpha1 0.061028 0.008415 7.25243 0.000000
beta1 0.945552 0.007907 119.58474 0.000000
eta11 -0.034816 0.088197 -0.39476 0.693024
shape 6.754931 0.764497 8.83578 0.000000

Tabulka A.10: Kukuřice, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.

TGARCH(1,1) GC

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model : TGARCH
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000125 0.000177 0.70635 0.479967
omega 0.000108 0.000032 3.36660 0.000761
alpha1 0.054234 0.005770 9.40001 0.000000
beta1 0.950618 0.004775 199.06403 0.000000
eta11 -0.240116 0.098654 -2.43391 0.014937
shape 5.440610 0.539687 10.08104 0.000000

Tabulka A.11: Zlato, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.

TGARCH(1,1) HG

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model : TGARCH
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000156 0.000260 0.6023 0.546974
ar1 -0.066535 0.017986 -3.6993 0.000216
omega 0.000129 0.000048 2.6908 0.007128
alpha1 0.071251 0.009387 7.5902 0.000000
beta1 0.938759 0.008494 110.5169 0.000000
eta11 0.235297 0.072811 3.2316 0.001231
shape 7.096546 0.894912 7.9299 0.000000

Tabulka A.12: Měď, TGARCH(1,1). Výstup z R. software.

EGARCH(1,1) CL

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu -0.000132 0.000292 -0.44998 0.652728
ar1 -0.072593 0.017256 -4.20685 0.000026
omega -0.064896 0.000862 -75.30821 0.000000
alpha1 -0.040997 0.007948 -5.15832 0.000000
beta1 0.991843 0.000192 5156.26044 0.000000
gamma1 0.107763 0.003369 31.98982 0.000000
shape 21.026012 6.076077 3.46046 0.000539

Tabulka A.13: Ropa, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.

EGARCH(1,1) CN

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000061 0.000259 0.23436 0.81471
omega -0.084393 0.006235 -13.53522 0.00000
alpha1 0.002062 0.010102 0.20407 0.83830
beta1 0.989795 0.000760 1302.70390 0.00000
gamma1 0.127987 0.016348 7.82887 0.00000
shape 6.623665 0.803302 8.24555 0.00000

Tabulka A.14: Kukuřice, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.

EGARCH(1,1) GC

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000125 0.000171 0.7303 0.46521
omega -0.076398 0.003910 -19.5386 0.00000
alpha1 0.023920 0.009627 2.4846 0.01297
beta1 0.991457 0.000436 2271.8499 0.00000
gamma1 0.104516 0.013847 7.5477 0.00000
shape 5.396925 0.622265 8.6730 0.00000

Tabulka A.15: Zlato, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.

EGARCH(1,1) HG

Conditional Variance Dynamics

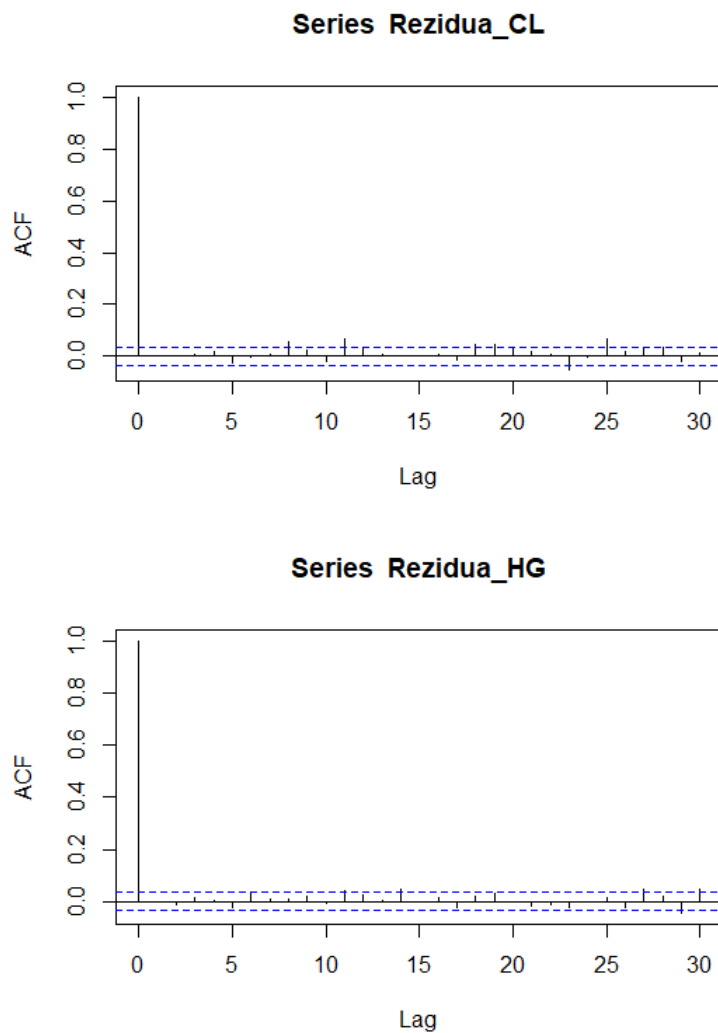
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
Distribution : std

Optimal Parameters

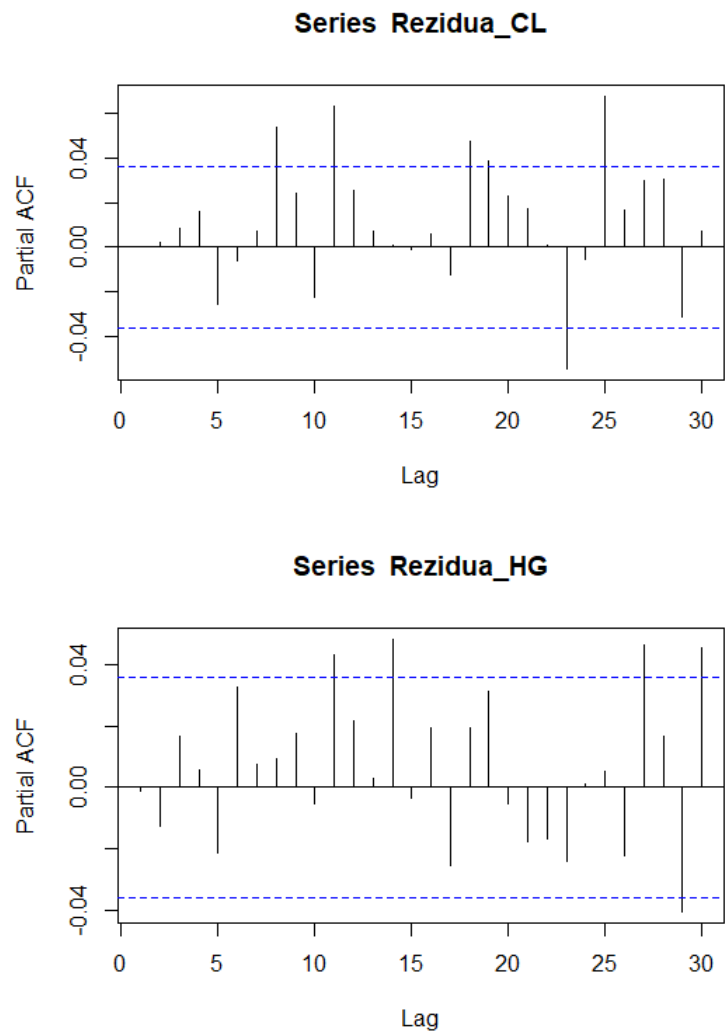
 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu 0.000146 0.000154 0.94962 0.342305
ar1 -0.067483 0.017817 -3.78765 0.000152
omega -0.066085 0.017275 -3.82539 0.000131
alpha1 -0.030718 0.009626 -3.19120 0.001417
beta1 0.991940 0.002244 441.99685 0.000000
gamma1 0.138384 0.034411 4.02151 0.000058
shape 7.039728 1.545710 4.55436 0.000005

Tabulka A.16: Měď, EGARCH(1,1). Výstup z R. software.

A.2 Výběrová ACF a PACF reziduí v modelu výnosů ropy a mědi



Obrázek A.1: Odhadnutá ACF reziduí v AR(1) modelu výnosů CL a HG



Obrázek A.2: Odhadnutá PACF reziduí v AR(1) modelu výnosů CL a HG