MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Nováková

k-výběrový problém s uspořádanou alternativou

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych poděkovala mému vedoucímu doc. RNDr. Zdeňku Hlávkovi, Ph.D. za odborné vedení, rady a vstřícnost při psaní bakalářské práce.

Název práce: k-výběrový problém s uspořádanou alternativou

Autor: Martina Nováková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci jsou popsány statistické testy pro k-výběrový problém s uspořádanou alternativou. Na začátku práce je zavedena isotonická regrese a ukázáno její využití pro maximálně věrohodné odhady uspořádaných parametrů. Ve druhé kapitole jsou uvedeny testy $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$, které využívají znalost isotonické regrese a jsou založeny na věrohodnostním poměru. Přesná rozdělení jejich testových statistik za platnosti nulové hypotézy jsou podrobně odvozena. Dalším uvedeným testem je jednostranný studentizovaný test rozsahu. Na konci práce je na příkladu ilustrováno použití $\overline{E}^2$ testu.

Klíčová slova: analýza rozptylu, k-výběrový problém, uspořádaná alternativa

Title: k-sample problem with ordered alternative

Author: Martina Nováková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zdeněk Hlávka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we deal with k-sample problem with ordered alternative. At the beginning of the thesis isotonic regression is introduced. We use isotonic regression for maximum likelihood estimation of ordered parameters. In the second chapter, we describe the $\overline{\chi}^2$ and $\overline{E}^2$ tests that use the knowledge of isotonic regression and are based on the likelihood ratio. The exact null hypothesis distributions of their test statistics are derived in detail. The one-sided studentized range test is also further described. At the end of the thesis, we show the use of the $\overline{E}^2$ test on the real data.

Keywords: analysis of variance, k-sample problem, ordered alternative

Obsah

Úvod

Mějme k nezávislých náhodných výběrů, kde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$,

$$\begin{aligned} & X_{11}, \ldots, X_{1n_1} \text{ z rozdělení } F_1, \\ & X_{21}, \ldots, X_{2n_2} \text{ z rozdělení } F_2, \\ & \vdots \\ \text{a } & X_{k1}, \ldots, X_{kn_k} \text{ z rozdělení } F_k. \end{aligned}$$

U těchto výběrů chceme ověřovat, zda se jejich nějaká charakteristika liší, typicky chceme porovnávat jejich střední hodnotu. Označme μ_i střední hodnotu i-tého výběru, $i = 1, \ldots, k$. V klasickém k-výběrovém problému testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k$ proti alternativě $\overline{H}_0 : \exists i \neq j : \mu_i \neq \mu_j$.

V praxi se ale můžeme setkat s náhodnými výběry, u kterých na základě zkušeností či teorie očekáváme,že jejich střední hodnoty jsou uspořádané. Pro tuto situaci by mohly být navrženy silnější testy. Máme tedy k-výběrový problém s uspořádanou alternativou, ve kterém chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k$ *s alespoň jednou ostrou nerovností.* Jonckheere (1954) uvádí jako motivaci pro tyto testy studii měřící vliv různých stupňů stresu na manuální zručnost, další ukázkou je experiment z knihy Milliken a Johnson (2009) uvedený v kapitole 2 zabývající se účinkem nadmořské výšky na objem plic ptáků.

k-výběrový problém má praktické využití během toxikologických experimentů. Předpokládejme, že $y_1, \ldots, y_k$ jsou náhodné vektory s normálním rozdělením a uspořádanými středními hodnotami $u_1 \leq \ldots \leq u_k$. Účinky léku nebo toxinu jsou odhadovány pomocí experimentu, ve kterém jsou k skupinám zvířat podávány zvyšující se dávky léku či toxinu $d_1 \leq \ldots \leq d_k$. Užitečným shrnutím tohoto experimentu je graf odhadované křivky závislosti odezvy na dávce spolu s intervalovými odhady pro průměrnou odezvu u_i na dávku d_i. Více se tímto tématem zabývá práce Schoenfeld (1986).

V první kapitole zavedeme isotonickou regresi, kterou využijeme pro výpočet maximálně věrohodných odhadů středních hodnot za platnosti alternativy. Ve druhé kapitole odvodíme $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ testy, které vychází z testu poměrem věrohodnosti a byly uvedeny v knize Barlow a kol. (1972). Rozdělení jejich testových statistik za platnosti nulové hypotézy podrobně dokážeme. Dalším uvedeným testem je jednostranný studentizovaný test rozsahu podle článku Hayter (1990).

Na konci druhé kapitoly uvedeme příklad, na kterém předvedeme použití $\overline{E}^2$ testu na data z experimentu zabývajícím se závislostí objemu plic ptáků na nadmořské výšce, ve které vyrůstají. Použitá data pochází z knihy Milliken a Johnson (2009).

1. Isotonická regrese

V celé první kapitole čerpáme z knihy Barlow a kol. (1972).

1.1 Isotonická regrese na lineárně uspořádané množině

Definice 1 (Barlow a kol., 1972, str. 9)**.** *Nechť $N = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ je konečná množina s lineárním uspořádáním $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Reálná funkce f definovaná na N je* isotonická *vzhledem k lineárnímu uspořádání na N, pokud $f(n_1) \leq f(n_2) \leq \dots \leq f(n_k)$.*

Nechť g je funkce definovaná na N, $w : N \to \mathbb{R}^+$ a V je systém všech funkcí definovaných na N, které jsou isotonické vzhledem k lineárnímu uspořádání na N. Funkce $g^* \in V$ je isotonická regrese *funkce g s vahami w vzhledem k danému uspořádání, právě když minimalizuje výraz*

$$\sum_{n \in N} [g(n) - f(n)]^2 \, w(n)$$

přes všechny funkce $f \in V$.

Využití isotonické regrese pro uspořádanou alternativu ilustruje Barlow a kol. (1972) na příkladu inspirovaným studií Bhattacharyya a Klotz (1966), která se zabývala daty zamrznutí a rozmrznutí jezera Mendota po dobu 111 let a testovala proti alternativě, která odpovídá trendu oteplování.

Barlow a kol. (1972) uvažoval ke každému roku pouze počet dní, po které bylo jezero zamrzlé, tyto počty označil X_i, $i = 1, \dots, 111$. Předpokládal, že $X_1, \dots, X_{111}$ jsou nezávislá pozorování z normálních rozdělení s neznámými středními hodnotami μ_i, $i = 1, \dots, 111$, a se shodným rozptylem σ^2, který je známý. Pro sestavení testu maximální věrohodnosti hypotézy $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_{111}$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{111}$ s alespoň jednou ostrou nerovností je potřeba znát maximálně věrohodné odhady středních hodnot μ_i, $i = 1, \dots, 111$, za platnosti H_0 a H_1.

Za platnosti H_0 tvoří $X_1, \dots, X_{111}$ náhodný výběr z rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = \mu_1 = \dots = \mu_{111}$. Jejich odhady získáme běžným postupem pro výpočet maximálně věrohodných odhadů

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{111}(\mu) &= \prod_{i=1}^{111} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-(X_i-\mu)^2/2\sigma^2}, \\
\ell_{111}(\mu) &= -\frac{111}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{111} (X_i - \mu)^2, \\
\ell'(\mu) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{111} (X_i - \mu), \qquad \ell'(\hat{\mu}) = 0,
\end{aligned}$$

a tedy $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \dots = \hat{\mu}_{111} = \frac{1}{111} \sum_{i=1}^{111} X_i$.

Maximálně věrohodné odhady středních hodnot $\mu_1, \ldots, \mu_{111}$ za platnosti H_1 maximalizují logaritmickou věrohodnost

$$\ell_{111}(\mu_1, \ldots, \mu_{111}) = -\frac{111}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{111}(X_i - \mu_i)^2, \quad \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{111},$$

tedy minimalizují výraz $\sum_{i=1}^{111}(X_i - \mu_i)^2$ za podmínky $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{111}$, což je právě úloha nalezení isotonické regrese.

1.2 Isotonická regrese na částečně a kvazi-uspořádané množině

V některých případech nemáme k dispozici lineární uspořádání, ale například známe pouze uspořádání některých prvků. Taková situace nastane při sestavování $\overline{\chi}^2$ testu, ve kterém budeme uvažovat alternativy s částečně uspořádanými středními hodnotami jednotlivých rozdělení.

V následující definici připomeneme lineární a částečné uspořádání a zavedeme kvazi-uspořádání.

Definice 2 (Barlow a kol., 1972, str. 24)**.** *Nechť N je konečná množina. Binární relace $\preceq$ na N je* lineární uspořádání*, pokud*

1. *je reflexivní: $i \preceq i$ pro $i \in N$,*
2. *je tranzitivní: $i, j, k \in X$ $i \preceq j$, $j \preceq k \implies i \preceq k$,*
3. *je slabě antisymetrická: $i, j \in N$ $i \preceq j$, $j \preceq i \implies i = j$,*
4. *každé dva prvky jsou porovnatelné: i, $j \in N \implies i \preceq j$ nebo $j \preceq i$.*

Relace $\preceq$ je částečné uspořádání*, pokud je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrické. Relace $\preceq$ je* kvazi-uspořádání*, pokud je reflexivní a tranzitivní.*

V částečném uspořádání tedy mohou existovat prvky, které nelze porovnat a v kvazi-uspořádání navíc mohou existovat prvky i, j, $i \neq j$ takové, že platí $i \preceq j$ a zároveň $j \preceq i$. Zřejmě každé lineární uspořádání je částečné uspořádání a každé částečné uspořádání je kvazi-uspořádání. Relaci lineárního uspořádání budeme značit pouze symbolem $\leq$.

Při výpočtu maximálně věrohodných odhadů za platnosti alternativy s částečně uspořádanými středními hodnotami jednotlivých rozdělení a při sestavování testových statistik $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ testu budeme používat věty, které platí nejen pro částečné uspořádání, ale obecněji i pro kvazi-uspořádání a také Barlow a kol. (1972) je formuluje pro kvazi-uspořádání. Zavedení isotonické regrese a formulaci vět proto provedeme pro kvazi-uspořádání.

Definice 3 (Barlow a kol., 1972, str. 24)**.** *Nechť N je konečná množina. Reálná funkce f definovaná na N je* isotonická *vzhledem ke kvazi-uspořádání $\preceq$ na N, pokud pro i, $j \in N$, $i \preceq j$ platí $f(i) \leq f(j)$.*

Nechť g je funkce definovaná na N, $w : N \to \mathbb{R}^+$ a V je systém všech funkcí definovaných na N, které jsou isotonické vzhledem ke kvazi-uspořádání na N. Funkce $g^* \in V$ je isotonická regrese *funkce g s vahami w vzhledem k danému uspořádání, právě když minimalizuje výraz*

$$\sum_{n \in N} [g(n) - f(n)]^2 \, w(n)$$

přes všechny funkce $f \in V$.

V případě, kdy je zřejmé, které uspořádání a váhy uvažujeme, nazýváme funkci g^* *isotonickou regresí* funkce g. Dále Barlow a kol. (1972) uvádí, že isotonická regrese existuje nejvýše jedna. Nyní, se značením jako výše, uvedeme větu, kterou použijeme při sestavování testové statistiky $\overline{\chi}^2$ testu.

Věta 1 (Barlow a kol., 1972, str. 35)**.** *Pro libovolnou reálnou funkci ψ na $\mathbb{R}$, platí*

$$\sum_{n \in N} [g(n) - g^*(n)] \psi[g^*(n)] w(n) = 0.$$

Důkaz. Důkaz je proveden v knize Barlow a kol. (1972, str. 35). □

Poznámka. Nalezení isotonické regrese je úloha kvadratického programování. Mezi metody pro její nalezení na lineárním uspořádání patří například algoritmus *Pool-Adjacent-Violators* nebo *Algoritmus minimálních dolních množin* uvedené v knize Barlow a kol. (1972), který použijeme v části 2.3 při důkazu rozdělení testových statistik $\overline{\chi}^2_k$ a $\overline{E}^2_k$ za platnosti hypotézy. Více se však těmito metodami v práci zabývat nebudeme.

1.3 Maximálně věrohodné odhady parametrů v exponenciálním systému hustot

Při odvozování testů s uspořádanou alternativou budeme často používat maximálně věrohodné odhady parametrů, které jsou kvazi-uspořádané. V této a v další části proto uvedeme tyto odhady odvozené v knize Barlow a kol. (1972) pro rozdělení s hustotou exponenciálního typu.

Exponenciální systém hustot s dvěma parametry tvoří hustoty tvaru

$$f(x;\, \theta,\, h) = \exp\{[\Phi(\theta) + (x - \theta)\phi(\theta)]\, h\}, \tag{1.1}$$

kde Φ je ryze konvexní, ϕ je derivace Φ (v případě nespojitosti derivace zprava), $\theta \in \mathbb{R}$ a $h > 0$, vzhledem k nějaké míře $\nu_h(\mathrm{d}x)$, která smí záviset pouze na parametru h.

Poznámka. Poznamenejme, že například hustotu normálního rozdělení se střední hodnotou θ a rozptylem σ^2 dostaneme volbou $\Phi(\theta) = \theta^2/2$, $\phi(\theta) = \theta$, $h = 1/\sigma^2$ a

$$\nu_h(dx) = (h/2\pi)^{1/2} \exp(-hx^2/2)\, \mathrm{d}x.$$

Poznámka. Připomeňme, že výběrový průměr náhodného výběru $X_{i1}, \ldots, X_{in(i)}$ o rozsahu $n(i)$, kde $i \in N$, je definován výrazem

$$\overline{X}(i) = \frac{1}{n(i)} \sum_{j=1}^{n(i)} X_{ij}.$$

Symbolem $\overline{X}(.)$ budeme značit výběrové průměry $\overline{X}(i)$ uvažované jako funkci parametru i, kde $i \in N$.

Věta 2 (Barlow a kol., 1972, str. 93)**.** *Nechť N je konečná množina s kvazi-uspořádáním $\preceq$. Pro každé $i \in N$ nechť rozdělení $X(i)$ má hustotu tvaru (1.1) s $\theta = \mu(i)$ a $h = a\lambda(i)$, kde $\lambda(i) > 0$ je známé pro všechna $i \in N$ a $a > 0$ může být neznámé. Předpokládejme, že z těchto podmíněných rozdělení jsou napozorovány nezávislé náhodné výběry o rozsahu $n(i) > 0$ a označme $\overline{X}(i)$ jejich výběrový průměr, $i \in N$. Potom maximálně věrohodný odhad $\mu(.)$ za podmínky, že $\mu(.)$ je isotonická vzhledem ke kvazi-uspořádání $\preceq$ na N, je jednoznačně tvořen isotonickou regresí výběrových průměrů, které uvažujeme jako funkci parametru i, s vahami $w(i) = \lambda(i)n(i)$, $i \in N$.*

Důkaz. Důkaz je popsán v knize Barlow a kol. (1972, str. 93).

□

1.3.1 Odhady v normálním rozdělení

Nechť F_h má hustotu $(h/2\pi)^{1/2} \exp\{-hx^2/2\}\, dx$ vzhledem k Lebesgueově míře a $\Phi(\theta) = \theta^2/2$, $\phi(\theta) = \theta$. Potom z (1.1) plyne, že náhodná veličina s touto hustotou má normální rozdělení se střední hodnotou θ a rozptylem $1/h$, neboť

$$f(x;\, \theta,\, h)F_h(dx) = (h/2\pi)^{1/2} \exp\{-h(x-\theta)^2/2\}\, \mathrm{d}x.$$

Uvažujme situaci, kdy máme náhodné výběry $X_{i1}, \ldots, X_{in(i)}$ o rozsahu $n(i)$ z normálního rozdělení se střední hodnotou $\theta = \mu(i)$ a rozptylem $1/[a\lambda(i)]$, tedy $h = a\lambda(i)$, a předpokládejme, že $\lambda(i)$ je známé, $i \in N$. Chceme získat maximálně věrohodné odhady středních hodnot $\mu(i)$ pro $i \in N$ za podmínky, že $\mu(i)$ je isotonická vzhledem ke kvazi-upořádání $\preceq$ na N. Označme $\overline{X}(i)$ výběrový průměr i-tého výběru. Poté z Věty 2 plyne, že *maximálně věrohodný odhad $\mu(.)$ je isotonická regrese $\hat{\mu}^*(.)$ funkce $\overline{X}(.)$ s vahami* $n(i)\lambda(i)$ vzhledem ke kvazi-uspořádání $\preceq$ na N.

V případě, že a je neznámé, počítejme jeho maximálně věrohodný odhad:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\mu(i), a) &= \prod_{i\in N} \prod_{j=1}^{n(i)} \frac{\sqrt{a\lambda(i)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a\lambda(i)}{2}\left(X_{ij}-\mu(i)\right)^2\right\}, \\
\ell(\mu(i), a) &= -\, n \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{n}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\sum_{i\in N} n(i) \ln\left(\lambda(i)\right) \\
&\quad - \frac{a}{2}\sum_{i\in N} \lambda(i) \sum_{j=1}^{n(i)} \left(X_{ij}-\mu(i)\right)^2, \\
\frac{\partial}{\partial a}\ell(\mu(i), a) &= \frac{n}{2a} - \frac{1}{2}\sum_{i\in N} \lambda(i) \sum_{j=1}^{n(i)} \left(X_{ij}-\mu(i)\right)^2.
\end{aligned}$$

Tedy maximálně věrohodný odhad a je

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum\limits_{i \in N} \lambda(i) \sum\limits_{j=1}^{n(i)} \left(X_{ij} - \hat{\mu}(i)^*\right)^2},$$

kde $\hat{\mu}(i)^*$ jsou hodnoty isotonické regrese $\hat{\mu}(.)^*$ funkce $\overline{X}(.)$ s vahami $n(i)\lambda(i)$, $i \in N$, a $n = \sum\limits_{i \in N} n(i)$.

Pro sestavení maximálně věrohodného odhadu rozptylu u $\overline{E}^2$ testu budeme potřebovat maximálně věrohodný odhad hodnoty $1/a$. Podle principu invariance pro maximálně věrohodné odhady platí

$$(1/\hat{a}) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \lambda(i) \sum_{j=1}^{n(i)} \left(X_{ij} - \hat{\mu}(i)^*\right)^2. \tag{1.2}$$

V dalším textu budeme pro zjednodušení místo $\mu(i)$ psát μ_i, místo $n(i)$ budeme psát n_i a místo $\overline{X}(i)$ pouze $\overline{X}_i$ apod.

2. Testy za předpokladu normality

Nechť $(X_{11},\dots,X_{1n_1}),\dots,(X_{k1},\dots,X_{kn_k})$ je k nezávislých náhodných výběrů, kde i-tý náhodný výběr je z rozdělení $\mathrm{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$ o rozsahu n_i, kde $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i^2 > 0$ a $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,k$. Označme $\overline{X}_i$ výběrový průměr i-tého výběru a $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. V uvedených testech budeme uvažovat, že rozptyl σ_i^2 je známý, nebo známý až na multiplikativní konstantu.

Poznámka. Obyčejný k-výběrový problém za předpokladu, že všechny náhodné výběry mají normální rozdělení se shodným rozptylem $\mathrm{N}(\mu_i,\sigma^2)$, kde μ_i a σ^2 jsou neznámé, řeší analýza rozptylu.

2.1 $\overline{\chi}^2$ test

$\overline{\chi}^2$ test uvedený v knize Barlow a kol. (1972) získal své jméno díky tvaru testové statistiky, která je podobná testové statistice χ^2 testu. Tento test můžeme použít v případě, že rozptyl σ_i^2 je známý pro všechna $i = 1,\dots, k$. $\overline{\chi}^2$ test je určený pro testování nulové hypotézy H_0 proti členům třídy alternativních hypotéz $\mathscr{H}$, které splňují $\overline{H}_0$ a navíc podmínku, že μ_i je isotonická funkce i vzhledem k částečnému uspořádání na množině $K = \{1, 2,\dots, k\}$. Speciálním případem je alternativa $H_1 : \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k$ s alespoň jednou ostrou nerovností. Symbolem H budeme značit členy třídy alternativních hypotéz $\mathscr{H}$.

$\overline{\chi}^2$ test vychází z testu poměrem věrohodnosti a tedy zamítá nulovou hypotézu H_0, když hodnota věrohodnostního poměru

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\mu\in H_0} \mathrm{L}(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k;\mu)}{\max\limits_{\mu\in H} \mathrm{L}(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k;\mu)}, \tag{2.1}$$

kde $\mathbb{X}_i = (X_{i1}, X_{i2},\dots,X_{in_i})^\top$, $\mu = (\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k)^\top$ a L je věrohodnost, je menší než nějaká kritická hodnota.

2.1.1 Maximálně věrohodné odhady μ za platnosti H_0 a H

Za platnosti nulové hypotézy H_0 $(\mu_1 = \cdots = \mu_k)$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\mu_1) &= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_i}^2}} \exp\left\{-\frac{(X_{ij}-\mu_1)^2}{2{\sigma_i}^2}\right\},\\
\ell(\mu_1) &= -N\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \ln({\sigma_i}^2) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{2{\sigma_i}^2}(X_{ij}-\mu_1)^2,\\
\ell'(\mu_1) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{{\sigma_i}^2}\mu_1,
\end{aligned}$$

a tedy maximálně věrohodné odhady za platnosti hypotézy jsou

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \cdots = \hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{{\sigma_i}^2} \overline{X}_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{{\sigma_i}^2}}.$$

V části 1.3.1 na straně 6 jsme ukázali, že za platnosti H maximálně věrohodné odhady středních hodnot μ_i jsou hodnoty $\hat{\mu}_i^*$ isotonické regrese funkce $\overline{X}_{(.)}$ s vahami $w_i = n_i/{\sigma_i}^2$ vzhledem k částečnému uspořádání na K pro všechna $i = 1, \ldots, k$. Uvědomíme si, že tyto odhady platí pro jakékoliv částečné uspořádání na K i bez platnosti H_0.

2.1.2 Testová statistika $\overline{\chi}_k^2$

Dosadíme do (2.1) a dostaneme

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi {\sigma_i}^2}} \exp\left\{ -\frac{(X_{ij} - \hat{\mu})^2}{2{\sigma_i}^2} \right\}}{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi {\sigma_i}^2}} \exp\left\{ -\frac{(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}{2{\sigma_i}^2} \right\}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{n_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}))^2 \right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{n_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*))^2 \right\}}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2 \right) \right\}.$$

Testová statistika je značena symbolem $\overline{\chi}_k^2$ a je rovna

$$\begin{aligned}
\overline{\chi}_k^2 = -2 \ln\lambda &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left[(X_{ij} - \hat{\mu})^2 - (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ [(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*) + (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})]^2 - (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2 \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ 2\,(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}) + (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}_i)^2 \right\} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{k} w_i \left(\overline{X}_i - \hat{\mu}_i^* \right) (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}) + \sum_{i=1}^{k} w_i \, (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2 \qquad (2.2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} w_i \, (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\sigma_i^2} \, (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2 ,
\end{aligned}$$

protože první člen ve (2.2) je roven 0 z Věty 1. $\overline{\chi}^2$ test zamítá nulovou hypotézu H_0, pokud hodnota testové statistiky $\overline{\chi}_k^2$ je větší, než nějaká kritická hodnota.

2.2 $\overline{E}^2$ test

V případě, že neznáme přesné hodnoty rozptylů σ_i^2, $i = 1, \dots, k$, ale pouze jejich hodnotu až na multiplikativní konstantu, tj.

$$\sigma_i^2 = a_i \sigma^2 \qquad \text{pro } i = 1, \dots, k,$$

kde a_i jsou známé konstanty a σ^2 je neznámé, můžeme použít $\overline{E}^2$ test, který je zobecněním $\overline{\chi}^2$ testu za těchto podmínek a popsal jej Barlow a kol. (1972). Tento test tedy také testuje nulovou hypotézu H_0 proti alternativám $H \in \mathscr{H}$. Stejně jako v $\overline{\chi}^2$ testu potřebujeme znát maximálně věrohodné odhady parametrů za platnosti hypotézy a alternativy.

2.2.1 Maximálně věrohodné odhady parametrů μ a σ^2 za platnosti H_0 a H

Za platnosti nulové hypotézy H_0 ($\mu_1 = \cdots = \mu_k$) počítáme

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\mu_1, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi a_i \sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(X_{ij} - \mu_1)^2}{2a_i\sigma^2} \right\}, \\
\ell(\mu_1, \sigma^2) &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i \ln(a_i) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_1)^2, \\
\frac{\partial}{\partial \mu_1} \ell(\mu_1, \sigma^2) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{a_i} \mu_1, \\
\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(\mu_1, \sigma^2) &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_1)^2,
\end{aligned}$$

a tedy věrohodnost je za platnosti H_0 maximalizována pro

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \cdots = \hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{a_i} \overline{X}_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{a_i}}, \tag{2.3}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2.$$

Za platnosti H opět podle části 1.3.1 platí, že maximálně věrohodné odhady středních hodnot μ_i jsou hodnoty $\hat{\mu}_i^*$ isotonické regrese výběrových průměrů $\overline{X}_{(.)}$, nyní s vahami $w_i = n_i/a_i$, pro všechna $i = 1, \dots, k$. Opět tyto odhady platí pro jakékoliv částečné uspořádání na K i bez platnosti $\overline{H}_0$. Dále, podle vzorce (1.2) na straně 7, maximálně věrohodný odhad σ^2 je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*\right)^2.$$

2.2.2 Testová statistika $\overline{E}_k^2$

Počítejme věrohodnostní poměr

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\substack{\mu \in H_0 \\ \sigma^2}} \mathrm{L}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k; \mu, \sigma^2)}{\max\limits_{\substack{\mu \in H \\ \sigma^2}} \mathrm{L}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k; \mu, \sigma^2)},$$

kde $\mathbb{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i})^\top$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)^\top$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2)^\top$ a L je věrohodnost. Potom

$$\lambda = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi a_i \hat{\sigma}_0^2}} \exp\left\{ -\frac{(X_{ij} - \hat{\mu})^2}{2a_i \hat{\sigma}_0^2} \right\}}{\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi a_i \hat{\sigma}^2}} \exp\left\{ -\frac{(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}{2a_i \hat{\sigma}^2} \right\}}$$

$$= \frac{(\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}))^2 / \hat{\sigma}_0^2 \right\}}{(\hat{\sigma}^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*))^2 / \hat{\sigma}^2 \right\}}$$

$$= \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right)^{\frac{N}{2}},$$

díky vzorcům pro $\hat{\sigma}^2$ a $\hat{\sigma}_0^2$. Z toho plyne, že

$$\lambda^{2/N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2}.$$

Ve většině případů předpokládáme, že všechny náhodné výběry mají stejný rozptyl, tedy že $a_i = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$. V tom případě platí

$$\lambda^{2/N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2}.$$

Z hlediska výpočtu rozdělení je výhodnější testovou statistiku definovat hodnotou

$$\begin{aligned}
\overline{E}_k^2 = 1 - \lambda^{2/N} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} [(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*) + (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})]^2 - \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} 2\,(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} 2\,n_i\,(\overline{X}_i - \hat{\mu}_i^*)(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2} \qquad (2.4) \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

neboť první člen v (2.4) je roven 0 z Věty 1. Všimneme si, že testovou statistiku $\overline{E}_k^2$ lze zapsat také pomocí $\overline{\chi}_k^2$:

$$\overline{E}_k^2 = \frac{\sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\sigma^2}\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij},\right)^2} = \frac{\sigma^2\,\overline{\chi}_k^2}{SS_C},$$

kde SS_C je celkový součet čtverců. $\overline{E}^2$ test zamítá nulovou hypotézu H_0, pokud hodnota testové statistiky $\overline{E}_k^2$ překročí nějakou kritickou hodnotu.

2.3 Rozdělení testových statistik $\overline{\chi}_k^2$ a $\overline{E}_k^2$ za platnosti H_0

V této části práce jsou tvrzení a důkazy převzaty z knihy Barlow a kol. (1972, sekce 2.3 a 3.3), důkaz rozdělení testových statistik za platnosti hypotézy H_0 je podrobněji rozepsán.

Testy $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ jsou založené na principu testu poměrem věrohodností, bohužel však neplatí některé žádoucí výsledky jako u testu poměrem věrohodnosti. Například asymptotické rozdělení testových statistik za platnosti hypotézy H_0 není vždy χ^2 rozdělení. Důvodem je, že při testování (lineárně či částečně) uspořádaných parametrů nelze v množině, do které patří takto uspořádané parametry, nalézt otevřenou podmnožinu, ve které leží skutečné hodnoty parametrů. K úplnému odvození testů $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ tedy musíme zjistit rozdělení jejich testových statistik za platnosti H_0. Tato rozdělení jsou formulována v následujících větách.

Věta 3 (Barlow a kol., 1972, str. 126)**.** *Za platnosti hypotézy H_0 platí*

$$P\left(\overline{\chi}_k^2 \geq C\right) = \sum_{l=2}^{k} P(l,\, k)\; P\left(\chi_{l-1}^2 \geq C\right), \qquad C > 0,$$
$$P\left(\overline{\chi}_k^2 = 0\right) = P(1,\, k),$$

kde $P(l,k)$ je pravděpodobnost, že isotonická regrese $\hat{\mu}_i^*$ nabývá přesně l různých hodnot a χ_ν^2 značí náhodnou veličinu s rozdělením χ^2 s ν stupni volnosti.

Věta 4 (Barlow a kol., 1972, str. 127)**.** *Za platnosti hypotézy H_0 platí*

$$P\left(\overline{E}_k^2 \geq C\right) = \sum_{l=2}^{k} P(l,\, k)\, P\left(B_{\frac{1}{2}(l-1),\frac{1}{2}(N-l)} \geq C\right), \qquad C > 0,$$
$$P\left(\overline{E}_k^2 = 0\right) = P(1,\, k),$$

kde $P(l,k)$ je pravděpodobnost, že isotonická regrese $\hat{\mu}_i^*$ nabývá přesně l různých hodnot a $B_{a,b}$ značí náhodnou veličinu s Beta rozdělením s parametry a *a* b*.*

Při důkazu se omezíme na případ, ve kterém rozptyly všech rozdělení, ze kterých pocházejí náhodné výběry, jsou shodné (tedy $a_i = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$ u $\overline{E}^2$ testu a $\sigma_i^2 = \sigma^2$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$ u $\overline{\chi}^2$ testu). V tom případě mají testové statistiky tvar

$$\overline{\chi}_k^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}\right)^2, \tag{2.6}$$

$$\overline{E}_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \hat{\mu}\right)^2}. \tag{2.7}$$

Nyní zavedeme pojmy a uvedeme větu a lemmata, která budeme v důkazu používat. Připomeňme, že $K = \{1,\, 2, \ldots,\, k\}$. Pro $A \subset K$, $A \neq \emptyset$ definujme

$$N_A = \sum_{i \in A} n_i \qquad \text{a} \qquad \operatorname{Av} A = \frac{1}{N_A} \sum_{i \in A} n_i \overline{X}_i.$$

Funkce Av(.) se nazývá *průměrující funkce.*

Definice 4 (Barlow a kol., 1972, str. 75)**.** *Nechť L a U jsou podmnožiny K. Řekneme, že L je* dolní množina *vzhledem k částečnému uspořádání $\preceq$, pokud*

$$y \in L,\, x \in K,\, x \preceq y \implies x \in L.$$

Řekneme, že U je horní množina *vzhledem k částečnému uspořádání $\preceq$, pokud*

$$y \in U,\, x \in K,\, x \succeq y \implies x \in U.$$

Systém všech dolních množin značíme symbolem $\mathscr{L}$, systém všech horních množin symbolem $\mathscr{U}$.

Platí, že systémy $\mathscr{L}$ a $\mathscr{U}$ jsou uzavřené na sjednocení a průniky.

Definice 5 (Barlow a kol., 1972, str. 76)**.** *Nechť B je podmnožina K. Řekneme, že B je* úrovňová množina*, pokud existují dolní množina L a horní množina U takové, že $B = L \cap U$. Systém všech úrovňových množin značíme symbolem $\mathscr{LS}$.*

Věta 5 (Barlow a kol., 1972, str. 76)**.** *Nechť B je podmnožina K. Potom B je úrovňová množina právě tehdy, když existují isotonická funkce f a číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $B = [f = c]$.*

Důkaz. Důkaz je uveden v knize Barlow a kol. (1972, str. 76).

□

Lemma 6 (Barlow a kol., 1972, str. 128)**.** *Nechť A a B jsou neprázdné podmnožiny K takové, že $A \supset B$, $A \neq B$. Potom* $\operatorname{cov}(\operatorname{Av} A, \operatorname{Av} A - \operatorname{Av} B) = 0$.

Důkaz. Důkaz je sepsán v knize Barlow a kol. (1972, str. 128).

□

Lemma 7 (Barlow a kol., 1972, str. 128)**.** *Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_r$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptyly, které jsou rovny jedné. Nechť R je množina omezení na veličiny u_i, $i = 1, \ldots, r$, která je tvaru*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i \geq 0,$$

a nechť pravděpodobnost, že podmínka R je splněna, je kladná. Potom podmíněné rozdělení náhodné veličiny

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^2$$

za podmínky R je χ^2 rozdělení s r stupni volnosti.

Důkaz. Důkaz je předveden v knize Barlow a kol. (1972, str. 129).

□

Lemma 8 (Barlow a kol., 1972, str. 129)**.** *Nechť $z_1, z_2, \ldots, z_r$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením se známými středními hodnotami a s rozptyly po řadě $b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, b_r^{-1}$. Potom podmíněné rozdělení náhodné veličiny*

$$\sum_{i=1}^{r} b_i (z_i - \overline{z})^2$$

za podmínky, že $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_r$, je χ^2 rozdělení s $r - 1$ stupni volnosti, kde

$$\overline{z} = \sum_{i=1}^{r} b_i z_i / \sum_{i=1}^{r} b_i.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v knize Barlow a kol. (1972, str. 129).

□

Důkaz Věty 3 a 4. V první fázi důkazu zkonstruujeme isotonickou regresi $\hat{\mu}^*_{(.)}$ funkce $\overline{X}_{(.)}$. Zvolme neprázdnou dolní množinu $B_1 \in K$ takovou, že platí

$$\mathrm{Av}\, B_1 = \min\{\mathrm{Av}\, L : \, L \in \mathscr{L}\}.$$

Pokud takových množin existuje více, zvolíme jejich sjednocení. Z Věty 5 plyne, že B_1 je úrovňová množina. Pro $i \in B_1$ definujme

$$\hat{\mu}^*_i = \mathrm{Av}\, B_1.$$

Dále zvolíme maximální dolní množinu $B_2 \in K \setminus B_1$ takovou, že platí

$$\mathrm{Av}\, B_2 = \min\{\mathrm{Av}\, (L \setminus B_1) : \, L \in \mathscr{L}\}.$$

Množina B_2 je opět úrovňová množina a pro $i \in B_2$ definujeme

$$\hat{\mu}^*_i = \mathrm{Av}\, B_2.$$

V obecném $(m+1)$-ním kroku (kde $m + 1 \leq k$) předpokládejme, že již máme nalezené úrovňové množiny $B_1, \ldots, B_m$ takové, že pro všechna $j = 1, \ldots, m$ platí

$$\mathrm{Av}\, B_j = \min\{\mathrm{Av}\, (L \setminus \bigcup_{l=1}^{m-1} B_l) : \, L \in \mathscr{L}\} \qquad \text{a} \qquad \hat{\mu}^*_j = \mathrm{Av}\, B_j.$$

Nalezneme dolní množinu $B_{m+1} \in (K \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l)$ takovou, že platí

$$\mathrm{Av}\, B_{m+1} = \min\{\mathrm{Av}\, (L \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l) : \, L \in \mathscr{L}\}.$$

Množina B_{m+1} je úrovňová množina podle Věty 5 a pro $i \in B_{m+1}$ definujeme

$$\hat{\mu}^*_{m+1} = \mathrm{Av}\, B_{m+1}.$$

Tímto způsobem pokračujeme, dokud nevyčerpáme celou množinu K, což nastane v konečně mnoha krocích, jelikož K je konečná množina. Sestrojili jsme ℓ úrovňových množin $B_1, B_2, \ldots, B_\ell$ takových, že platí

$$\mathrm{Av}\, B_1 < \mathrm{Av}\, B_2 < \ldots < \mathrm{Av}\, B_\ell$$

a $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq k$. Na každé z těchto úrovňových množin je isotonická regrese $\hat{\mu}^*_{(.)}$ konstantní a platí $\hat{\mu}^*_i = \mathrm{Av}\, B_j$ pro všechna $i \in B_j$. Korektnost této konstrukce ověřil Barlow a kol. (1972, sekce 2.3). Definujme dolní množiny

$$L_0 = \emptyset \qquad \text{a} \qquad L_i = \bigcup_{j=1}^{i} B_j, \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

Pomocí těchto dolních množin lze i-tý krok konstrukce isotonické regrese popsat jako hledání maximální dolní množiny B_i mezi množinami tvaru $L \setminus L_{i-1}$. Bez újmy na obecnosti lze říci, že L_{i-1} je vlastní podmnožina L. Funkce $\hat{\mu}^*_{(.)}$ definovaná pomocí této konstrukce je isotonická, pokud pro všechna $i = 1, \ldots, \ell$ množina B_i je úrovňová množina, na které průměrující funkce nabývá nejnižší možné hodnoty přes všechny množiny, které jsou k dispozici, a také pokud B_i je největší možná taková množina. Lze tedy zformulovat následující nutné a postačující A-podmínky:

(A.1) Když $L \supset L_{i-1}$, $L \setminus L_{i-1} \neq \emptyset$, potom

$$\mathrm{Av}\, B_i \leq \mathrm{Av}\,(L \setminus L_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

(A.2) Když $L \supset L_i$, $L \setminus L_i \neq \emptyset$, potom

$$\mathrm{Av}\, B_i < \mathrm{Av}\,(L \setminus L_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, \ell - 1.$$

Barlow a kol. (1972, str. 131-132) ověřil, že tyto A-podmínky jsou ekvivalentní s B-podmínkami:

(B.1) Když $L_i \supset L \supset L_{i-1}$, $L_i \setminus L \neq \emptyset$, $L \setminus L_{i-1} \neq \emptyset$, potom

$$\mathrm{Av}\, B_i \leq \mathrm{Av}\,(L \setminus L_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

(B.2)

$$\mathrm{Av}\, B_i < \mathrm{Av}\, B_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, \ell - 1.$$

Nyní upravíme výraz pro celkový součet čtverců:

$$\begin{aligned}
SS_C =& \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu})^2 \\
=& \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*) + (\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})\right]^2 \\
=& \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i\,(\overline{X}_i - \hat{\mu}_i^*)(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu}) + \sum_{i=1}^{k} n_i\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2 \qquad (2.8) \\
=& \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2}_{Q_2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2}_{Q_1}, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

neboť druhý člen v (2.8) je roven 0 z Věty 1. První člen ve výrazu (2.9) označíme Q_2, druhý člen výrazu (2.9) označíme Q_1 a do obou výrazů dosadíme hodnoty $\hat{\mu}_i^*$ z konstrukce isotonické regrese. Tedy

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i\,(\hat{\mu}_i^* - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i}\left(\mathrm{Av}\, B_i - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_m} X_{mj}\right)^2 \qquad (2.10)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu}_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{h\in B_i}\sum_{j=1}^{n_h}(X_{hj} - \mathrm{Av}\, B_i)^2. \qquad (2.11)$$

Pomocí těchto výrazů můžeme vyjádřit testové statistiky

$$\overline{\chi}_k^2 = \frac{Q_1}{\sigma^2}, \qquad \overline{E}_k^2 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}. \qquad (2.12)$$

Označme

$$Y_{ij} = \frac{X_{ij} - \mu_1}{\sigma} \qquad i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n_i.$$

Potom pro všechna $i = 1, \ldots, k$ a $j = 1, \ldots, n_i$, náhodné veličiny Y_{ij} mají N(0,1) rozdělení. Položme

$$\mathbb{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n_1}, Y_{21}, \ldots, Y_{kn_k})',$$
$$\mathbb{X} = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}, X_{21}, \ldots, X_{kn_k})'.$$

Dále položíme matici $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, která obsahuje následující prvky:

$$h_{ij} = \begin{cases} N_{B_i}^{-1/2} = \left(\sum_{i \in B_i} n_i \right)^{-1/2} & \text{pokud } p \in B_i, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, \ell,$$

kde p je první index j-té složky náhodného vektoru $\mathbb{Y}$, ostatní prvky mohou být libovolné tak, aby matice $\mathbf{H}$ byla ortogonální. Provedeme ortogonální transformaci $\mathbb{Z}_1 = \mathbf{H}\mathbb{Y}$. Potom $\mathbb{Z}_1$ má N-rozměrné normální rozdělení $\mathrm{N}(\mathbf{0},\mathbf{H}\mathbf{H}^\top)$. Z ortogonality matice $\mathbf{H}$ plyne, že $\mathbf{H}\mathbf{H}^\top = \mathbf{I}_N$. Odtud plyne, že pokud provedeme stejnou ortogonální transformaci náhodného vektoru $\mathbb{X}$, tedy $\mathbb{Z}_2 = \mathbf{H}\mathbb{X}$, potom $\mathbb{Z}_2$ má N-rozměrné normální rozdělení $\mathrm{N}(\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_N)$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_1)$. Dále platí

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mu_1(N_{B_1}^{-1/2}, N_{B_2}^{-1/2}, \ldots, N_{B_\ell}^{-1/2}, 0, \ldots, 0).$$

Dále označme popořadě z_i, $i = 1, \ldots, N$, složky vektoru $\mathbb{Z}_2$. Potom platí

$$z_i = N_{B_i}^{-1/2} \sum_{h \in B_i} \sum_{j=1}^{n_h} X_{hj} = N_{B_i}^{1/2} \operatorname{Av} B_i \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, \ell,$$

a tedy také

$$\sum_{i=1}^{\ell} z_i^2 = \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i} (\operatorname{Av} B_i)^2. \tag{2.13}$$

Upravíme vzorec (2.11) pro Q_2:

$$\begin{aligned} Q_2 =& \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{h \in B_i} \sum_{j=1}^{n_h} \left[(X_{hj})^2 - 2X_{hj} \operatorname{Av} B_i + (\operatorname{Av} B_i)^2 \right] \\ =& \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{hj})^2 - 2 \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{Av} B_i \sum_{h \in B_i} n_h \overline{X}_h + \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i} (\operatorname{Av} B_i)^2 \\ =& \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{hj})^2 - 2 \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i} (\operatorname{Av} B_i)^2 + \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i} (\operatorname{Av} B_i)^2 \\ =& \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{hj})^2 - \sum_{i=1}^{\ell} z_i^2 \qquad (2.14) \\ =& \sum_{i=1}^{N} z_i^2 - \sum_{i=1}^{\ell} z_i^2 = \sum_{i=\ell+1}^{N} z_i^2, \qquad (2.15) \end{aligned}$$

kde (2.14) platí díky rovnosti (2.13) a v (2.15) využíváme vlastnosti ortogonální transformace o zachování normy.

Nyní se vrátíme k B-podmínkám. Podmínka (B.1) lze také zapsat tvarem $\operatorname{Av} B_i - \operatorname{Av}(L \setminus L_{i-1}) \leq 0$, kde $B_i \supset (L \setminus L_{i-1})$ a $B_i \neq (L \setminus L_{i-1})$. Z Lemmatu 6 plyne, že podmínka (B.1) může být vyjádřena pomocí náhodných veličin, které jsou pro všechna $i = 1, \dots, \ell$ nekorelované s $\operatorname{Av} B_i$, tudíž jsou s nimi i nezávislé, neboť $\operatorname{Av} B_i = N_{B_i}^{-1/2} z_i$ a vektor $\mathbb{Z}_2$ má N-rozměrné normální rozdělení. Dané náhodné veličiny závisí pouze na pozorování, která odpovídají nenulovým prvkům v i-tém řádku matice $\mathbf{H}$, proto jsou nezávislé s veličinami $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_\ell$ a závisí tedy pouze na $z_{\ell+1}, \dots, z_N$. Proto podmínku (B.1) lze zapsat jako množinu omezení, která je tvaru

$$\sum_{i=\ell+1}^{N} a_i z_i \geq 0.$$

Díky rovnosti $\operatorname{Av} B_i = N_{B_i}^{-1/2} z_i$ vidíme, že podmínka (B.2) zahrnuje pouze náhodné veličiny $z_1, \dots, z_\ell$.

Upravujme následující výraz:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_m} X_{mj} &= \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{h\in B_m}\sum_{j=1}^{n_h} X_{hj} = \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{h\in B_m} n_h \overline{X}_h \\ &= \sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m} \operatorname{Av} B_m = \sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m}^{1/2} z_m. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dále platí $N = \sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m}$. Víme, že $\operatorname{Av} B_i = N_{B_i}^{-1/2} z_i$ pro $i = 1, \dots, \ell$. Jejich rozptyl je roven $\operatorname{var}(\operatorname{Av} B_i) = N_{B_i}^{-1} \operatorname{var}(z_i) = N_{B_i}^{-1}\sigma^2$, tedy náhodné veličiny $\operatorname{Av} B_i$ pro $i = 1, \dots, \ell$ mají rozdělení $\mathrm{N}(N_{B_i}^{-1/2}\mu_1, N_{B_i}^{-1}\sigma^2)$. Podle vyjádření (2.10) platí

$$\begin{aligned} Q_1 =& \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i}\left(\operatorname{Av} B_i - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_m} X_{mj}\right)^2 \\ =& \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i}\left(N_{B_i}^{-1/2} z_i - \frac{\sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m}^{1/2} z_m}{\sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m}}\right)^2 \end{aligned}$$

Výraz Q_1 tedy lze zapsat pomocí pouze prvních ℓ náhodných veličin $z_1, \dots, z_\ell$, a tedy podmínka (B.1) jej nijak neovlivňuje. S pomocí (2.16) upravíme

$$\begin{aligned} Q_1 =& \sum_{i=1}^{\ell} N_{B_i}\left(\operatorname{Av} B_i - \frac{\sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m} \operatorname{Av} B_m}{\sum_{m=1}^{\ell} N_{B_m}}\right)^2 \\ =& \sigma^2 \sum_{i=1}^{\ell} \frac{N_{B_i}}{\sigma^2}\left(\operatorname{Av} B_i - \frac{\sum_{m=1}^{\ell} \frac{N_{B_m}}{\sigma^2} \operatorname{Av} B_m}{\sum_{m=1}^{\ell} \frac{N_{B_m}}{\sigma^2}}\right)^2 = \sigma^2 T, \end{aligned}$$

kde T za podmínky $\operatorname{Av} B_1 < \operatorname{Av} B_2 < \ldots < \operatorname{Av} B_\ell$ splňuje předpoklady Lemmatu 8. Náhodná veličina T má tedy $\chi^2_{\ell-1}$ rozdělení. Odtud plyne, že Q_1 má rozdělení $\sigma^2\chi^2_{\ell-1}$.

Nyní vypočítáme rozdělení Q_2. Podle (2.15) platí

$$Q_2 = \sum_{i=\ell+1}^{N} z_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=\ell+1}^{N} \left(\frac{z_i}{\sigma}\right)^2 = \sigma^2 \sum_{i=\ell+1}^{N} {u_i}^2,$$

kde náhodné veličiny splňují předpoklady Lemmatu 7. Z toho plyne, že $\sum\limits_{i=\ell+1}^{N} {u_i}^2$ má rozdělení $\chi^2_{N-\ell}$, a tedy Q_2 má $\sigma^2\chi^2_{N-\ell}$ rozdělení. Navíc, protože z_i jsou nezávislé pro $i = 1, \ldots, N$, platí, že Q_1 a Q_2 jsou také nezávislé.

K určení rozdělení testové statistiky $\overline{E}_k^2$ potřebujeme podle vzorce (2.12) ukázat, že symbolicky značené $\dfrac{\chi^2_{\ell-1}}{\chi^2_{\ell-1} + \chi^2_{N-\ell}}$ rozdělení je Beta rozdělení s požadovanými parametry. Označme Y náhodnou veličinu s $\chi^2_{\ell-1}$ rozdělením a Z náhodnou veličinu s $\chi^2_{N-\ell}$ rozdělením a nechť jsou vzájemně nezávislé. Potom jejich sdružená hustota je rovna

$$f_{Y,Z}(y,\, z) = \frac{y^{\frac{\ell-1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-y/2}\, z^{\frac{N-\ell}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-z/2}}{2^{(\ell-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{\ell-1}{2}\right) 2^{(N-\ell)/2}\,\Gamma\left(\frac{N-\ell}{2}\right)} \qquad y > 0,\, z > 0.$$

Určíme sdruženou hustotu náhodných veličin $U = \dfrac{Y}{Y+Z}$ a $V = Z$. Inverzní transformace je $Y = \dfrac{UV}{1-U}$, $Z = V$ a absolutní hodnota jejího jakobiánu je $\dfrac{V}{(1-U)^2}$. Dosazením do $f_{Y,Z}(y,\, z)$ a vynásobením absolutní hodnotou jakobiánu získáme sdruženou hustotu veličin U a V:

$$f_{U,V}(u,\, v) = \frac{u^{\frac{\ell-1}{2}-1}\,(1-u)^{-\frac{\ell-1}{2}-1}\, v^{\frac{N-1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-v/[2(1-u)]}}{2^{(N-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{\ell-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\ell}{2}\right)}, \qquad 0 < u < 1,\, v > 0.$$

Integrováním této sdružené hustoty podle proměnné v potom získáme marginální hustotu veličiny U:

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^\infty f_{U,V}(u,\, v)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{u^{\frac{\ell-1}{2}-1}\,(1-u)^{-\frac{\ell-1}{2}-1}}{2^{(N-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{\ell-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\ell}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{N-1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-v/[2(1-u)]}\,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{substituce } t = \frac{v}{2\,(1-u)} \in (0,\infty),\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\,(1-u)}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{u^{\frac{\ell-1}{2}-1}\,(1-u)^{\frac{N-\ell}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\ell}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{N-1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\ell}{2}\right)}\, u^{\frac{\ell-1}{2}-1}\,(1-u)^{\frac{N-\ell}{2}-1}, \qquad 0 < u < 1,
\end{aligned}$$

což je hustota Beta rozdělení s parametry $\dfrac{\ell-1}{2}$ a $\dfrac{N-\ell}{2}$.

Ze vzorce (2.12) vidíme, že testová statistika $\overline{\chi}_k^2$ má rozdělení χ^2 s $\ell - 1$ stupni volnosti za podmínky, že isotonická regrese $\hat{\mu}_{(.)}^*$ nabývá přesně ℓ různých hodnot. Navíc rozdělení χ_n^2 je definováno pro $n \geq 1$, proto $\overline{\chi}_k^2$ má rozdělení $\chi_{\ell-1}^2$ pouze pro $\ell \geq 2$. Navíc $\hat{\mu}_{(.)}^*$ může nabývat maximálně k hodnot. Z toho plyne, že

$$\mathsf{P}\left(\overline{\chi}_k^2 \geq C\right) = \sum_{l=2}^{k} P(l,\, k)\, \mathsf{P}\left(\chi_{l-1}^2 \geq C\right) \quad \text{pro } C > 0.$$

Testová statistika $\overline{\chi}_k^2$ může také nabývat 0, a to podle vzorce (2.6) v případě, že isotonická regrese $\hat{\mu}_{(.)}^*$ je rovna $\hat{\mu}$, což znamená, že nabývá právě jedné hodnoty. Tedy

$$\mathsf{P}\left(\overline{\chi}_k^2 = 0\right) = P(1,\, k).$$

Podle vzorce (2.12) platí, že testová statistika $\overline{E}_k^2$ má Beta rozdělení s parametry $\dfrac{\ell - 1}{2}$ a $\dfrac{N - \ell}{2}$ za podmínky, že isotonická regrese $\hat{\mu}_{(.)}^*$ nabývá přesně ℓ různých hodnot. Podobně jako u $\overline{\chi}_k^2$ a protože parametry Beta rozdělení musí být kladné, dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\overline{E}_k^2 \geq C\right) = \sum_{l=2}^{k} P(l,\, k)\, \mathsf{P}\left(B_{\frac{1}{2}(l-1),\frac{1}{2}(N-l)} \geq C\right) \quad \text{pro } C > 0.$$

Analogicky jako u $\overline{\chi}_k^2$ statistiky, podle vzorce (2.7), $\overline{E}_k^2$ nabývá hodnotu 0 v případě, že $\hat{\mu}_{(.)}^*$ je rovna $\hat{\mu}$, tedy nabývá právě jedné hodnoty. Z toho platí

$$\mathsf{P}\left(\overline{E}_k^2 = 0\right) = P(1,\, k).$$

□

Poznámka. Postup pro nalezení isotonické regrese použitý v důkazu se nazývá *Algoritmus minimálních dolních množin.*

Pro testování proti lineárně uspořádané alternativě H_1 za situace, ve které jsou váhy w_i shodné pro všechna $i = 1, \ldots, k$, což pro shodné rozptyly znamená, že i rozsahy všech náhodných výběrů musí být shodné, platí pro pravděpodobnosti $P(l,k)$ následující věta.

Věta 9 (Barlow a kol., 1972, str. 145)**.** *Pro pravděpodobnosti $P(l,k)$ platí*

$$\begin{aligned} P(1,k) &= \frac{1}{k}, \\ P(k,k) &= \frac{1}{k!}, \\ P(\ell,k) &= \frac{1}{k}\, P(\ell-1, k-1) + \frac{k-1}{k}\, P(\ell, k-1), \quad \ell = 2, 3, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz je uveden v knize Barlow a kol. (1972, str. 145).

□

Tabulka 2.1 uvádí hodnoty pravděpodobností $P(l,k)$ pro $k \leq 12$ pro shodné váhy w_i, $i = 1, \ldots, k$.

	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
$\ell = 1$	0,50000	0,33333	0,25000	0,20000	0,16667	0,14286
$\ell = 2$	0,50000	0,50000	0,45833	0,41667	0,38056	0,35000
$\ell = 3$		0,16667	0,25000	0,29167	0,31250	0,32222
$\ell = 4$			0,04167	0,08333	0,11806	0,14583
$\ell = 5$				0,00833	0,02083	0,03472
$\ell = 6$					0,00139	0,00417
$\ell = 7$						0,00020

	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
$\ell = 1$	0,12500	0,11111	0,10000	0,09091	0,08333
$\ell = 2$	0,32411	0,30198	0,28290	0,26627	0,25166
$\ell = 3$	0,32569	0,32552	0,32316	0,31950	0,31507
$\ell = 4$	0,16788	0,18542	0,19943	0,21068	0,21974
$\ell = 5$	0,04861	0,06186	0,07422	0,08560	0,09602
$\ell = 6$	0,00799	0,01250	0,01744	0,02260	0,02785
$\ell = 7$	0,00069	0,00150	0,00260	0,00395	0,00551
$\ell = 8$	0,00002	0,00010	0,00024	0,00045	0,00075
$\ell = 9$		0,00000	0,00001	0,00003	0,00007
$\ell = 10$			0,00000	0,00000	0,00000
$\ell = 11$				0,00000	0,00000
$\ell = 12$					0,00000

Tabulka 2.1: Hodnoty pravděpodobností $P(l,k)$ pro testování proti alternativě H_1 se shodnými vahami; tabulka převzata z knihy Barlow a kol. (1972)

2.4 Jednostranný studentizovaný test rozsahu

Nyní popíšeme test, který byl představen v článku Hayter (1990). Nechť $(X_{11}, \ldots, X_{1n}), \ldots, (X_{k1}, \ldots, X_{kn})$ je k náhodných výběrů, kde i-tý náhodný výběr pochází z rozdělení $\mathrm{N}(\mu_i,\sigma^2)$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé pro všechna $i = 1, \ldots, k$. Všimněme si, že pro všechny náhodné výběry předpokládáme shodný rozptyl. Budeme se zabývat vyváženým k-výběrovým problémem, tedy předpokládáme, že rozsah všech výběrů je shodně roven n. Označme $\overline{X}_i$ výběrový průměr i-tého výběru z n pozorování, $i = 1, \ldots, k$ a S^2 nestranný odhad σ^2, který má rozdělení $\sigma^2\chi^2_\nu/\nu$, nezávislé s $\overline{X}_i$. Výraz

$$\max_{1 \le i < j \le k} \frac{\overline{X}_j - \overline{X}_i}{S/\sqrt{n}}$$

bude naše testová statistika. Test zamítá nulovou hypotézu H_0 právě tehdy, když testová statistika překročí kritickou hodnotu $h_{k,\alpha,\nu}$ pro danou hladinu testu $\alpha \in (0,1)$ definovanou následující rovností:

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \le i < j \le k} \frac{\overline{X}_j - \overline{X}_i}{S/\sqrt{n}} \ge h_{k,\alpha,\nu} \;\middle|\; \mu_1 = \cdots = \mu_k\right) = \alpha. \tag{2.17}$$

2.4.1 Výpočet kritických hodnot $h_{k,\alpha,\nu}$

Pro výpočet kritických hodnot se snažíme upravit rovnost (2.17). Tato rovnost je ekvivalentní s rovností

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\le i<j\le k}\frac{\overline{X}_j-\overline{X}_i}{S/\sqrt{n}}\le h_{k,\alpha,\nu}\;\middle|\;\mu_1=\cdots=\mu_k\right)=1-\alpha,$$

a tedy také s rovností

$$\mathsf{P}\left(\frac{\overline{X}_j-\overline{X}_i}{S/\sqrt{n}}\le h_{k,\alpha,\nu}\;\middle|\;\mu_1=\cdots=\mu_k\right)=1-\alpha \qquad \text{pro } 1\le i<j\le k.$$

Za platnosti H_0 platí

$$\frac{\overline{X}_j-\overline{X}_i}{S/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X}_j-\mu_j)}{S}-\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X}_i-\mu_i)}{S}.$$

V odvozování kritických hodnot tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $\mu_i=0$ pro všechna $i=1,\dots,k$. Stále ale neznáme hodnotu rozptylu. Budeme tedy předpokládat, že rozptyl je roven 1 a tuto hodnotu vynásobíme odhadem S^2. Získáme tak následující nerovnost a uvědomíme si, že S má $\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}$ rozdělení:

$$\frac{\overline{X}_j-\overline{X}_i}{S/\sqrt{n}}\le h_{k,\alpha,\nu} \qquad\Longrightarrow\qquad \sqrt{n}\frac{\overline{X}_j-\overline{X}_i}{1}\le Sh_{k,\alpha,\nu}$$

Nyní můžeme přejít k výpočtu kritických hodnot $h_{k,\alpha,\nu}$. Nechť X_i, $i=1,\dots,k$, jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s rozdělením N(0,1) (tyto náhodné veličiny hrají roli výběrových průměrů pro původní náhodné výběry). Poté podle Hayter (1990) kritické hodnoty $h_{k,\alpha,\nu}$ lze vypočítat z výrazu

$$\int_0^\infty \mathsf{P}(-\infty\le X_i\le\infty,\,1\le i\le k;\\ X_j-X_i\le sh_{k,\alpha,\nu},\,1\le i<j\le k)\,f_\nu(s)\,\mathrm{d}x=1-\alpha,$$

kde $f_\nu(s)$ je hustota náhodné veličiny s $\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}$ rozdělením. Integrováním přecházíme od sdruženého rozdělení náhodných veličin X_i, $i=1,\dots,k$, a rozptylu k marginálnímu rozdělení veličin X_i. Dalším krokem je nalezení vhodného výrazu pro $\mathsf{P}(-\infty\le X_i\le\infty,\,1\le i\le k;\,X_j-X_i\le sh_{k,\alpha,\nu},\,1\le i<j\le k)$ tak, aby tento výraz mohl být rychle vyhodnocen pomocí numerické integrace, tedy výrazu s co nejmenším počtem vnořených integrálů.

Hayter (1990) pro tento účel definuje pro $c>0$ funkce

$$b_k(x,y;\,c)=\mathsf{P}(x\le X_i\le y,\,1\le i\le k;\,X_j-X_i\le c,\,1\le i<j\le k).$$

Cílem je najít pro $b_k(-\infty,\infty;\,c)$ vyjádření pomocí integrálu nižší dimenze. Zvolme pevné $c>0$. Pro zjednodušení budeme psát $b_k(x,y)=b_k(x,y;\,c)$. Symbolem $\varphi(x)$ budeme značit hustotu standardního normálního rozdělení a symbolem $\Phi(x)$ jeho distribuční funkci. Všimněme si, že $b_1(x,\,y)=\Phi(y)-\Phi(x)$ pro $x\le y$ a definujeme $b_0(x,\,y)=1$. Uvedeme lemma, které umožňuje vyjádřit funkci $b_k(-\infty,\infty)$ pomocí integrálu menší dimenze.

Lemma 10 (Hayter, 1990, Lemma B.1., str. 783). *Nechť $k, r \in \mathbb{N}$, $r \leq k$ a $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $y - x \geq c$. Potom*

$$b_k(x,y) = \int_x^{y-c} \varphi(z)\, b_{k-r}(x, z + c) \left[\sum_{m=1}^{r} [\Phi(z+c) - \Phi(z)]^{r-m}\, b_{m-1}(z, y) \right] \mathrm{d}z + b_{k-r}(x, y)\, [\Phi(y) - \Phi(y-c)]^r .$$

Důkaz. Důkaz je popsán v práci Hayter (1990, str. 783). □

Při volbě $k = 2, r = 1$ pro $y - x \geq c$ dostaneme

$$b_2(x,y) = \int_x^{y-c} \varphi(z)\, [\Phi(z+c) - \Phi(x)]\, \mathrm{d}z + [\Phi(y) - \Phi(x)] \cdot [\Phi(y) - \Phi(y-c)] ,$$

s volbou $k = 3, r = 2$ pro $y - x \geq c$ platí

$$b_3(x,y) = \int_x^{y-c} \varphi(z)\, [\Phi(z+c) - \Phi(x)] \cdot [\Phi(z+c) - \Phi(z) + \Phi(y) - \Phi(z)]\, \mathrm{d}z + [\Phi(y) - \Phi(x)] \cdot [\Phi(y) - \Phi(y-c)]^2 .$$

Hayter (1990) dále uvádí, že pro $y - x \geq c$ lze funkci $b_4(x,y)$ vypočítat také pomocí rovnice obsahující maximálně jednorozměrné integrály, u funkce $b_5(x,y)$ je to možné jen pro konkrétní hodnoty $x = -\infty$, $y = \infty$. Hodnoty $b_l(-\infty, \infty)$ pro $l = 6, \ldots, 9$ lze vyjádřit pomocí rovnic s maximálně dvourozměrnými integrály a hodnoty $b_l(-\infty, \infty)$, $l = 10, \ldots, 19$ pomocí rovnic s trojrozměrnými integrály. Kritické hodnoty $h_{k,\alpha,\nu}$ lze tedy najít řešením dvoudimenzionálních integrálních rovnic pro $k = 2, \ldots, 5$, třídimenzionálních integrálních rovnic pro $k = 6, \ldots, 9$ a čtyřdimenzionálních pro $k = 10, \ldots, 19$.

Tabulka 2.2 uvádí kritické hodnoty $h_{k,\alpha,\nu}$, kde $\alpha = 0.05$, pro některá k a ν.

2.4.2 Intervalové odhady pro rozdíly středních hodnot

Statistický test s hladinou významnosti přesně α daný rovnicí (2.17) můžeme převést na jednostranný intervalový odhad tvaru (d_{ij},∞) s přesnou pravděpodobností pokrytí $1 - \alpha$ pro všechny uspořádané párové rozdíly středních hodnot

	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$\nu = 5$	3,872	4,520	5,000	5,380	5,696	5,961	6,197
$\nu = 10$	3,353	3,833	4,180	4,452	4,676	4,864	5,029
$\nu = 15$	3,206	3,639	3,949	4,190	4,387	4,553	4,698
$\nu = 20$	3,137	3,548	3,840	4,067	4,252	4,406	4,542
$\nu = 25$	3,096	3,495	3,777	3,995	4,173	4,321	4,451
$\nu = 30$	3,070	3,460	3,736	3,948	4,121	4,265	4,391
$\nu = 40$	3,037	3,418	3,685	3,891	4,057	4,197	4,318
$\nu = 60$	3,005	3,376	3,636	3,835	3,996	4,130	4,246
$\nu = 120$	2,974	3,335	3,587	3,780	3,935	4,064	4,176
$\nu = \infty$	2,943	3,295	3,539	3,725	3,875	4,000	4,107

Tabulka 2.2: Kritické hodnoty $h_{k,\alpha,\nu}$ pro $\alpha = 0{,}05$; tabulka převzata z práce Hayter (1990)

$\mu_j - \mu_i$ $(1 \leq i < j \leq k)$, kde $d_{ij} = \overline{X}_j - \overline{X}_i - Sh_{k,\alpha,\nu}/\sqrt{n}$. Pokud při experimentu dojde k zamítnutí nulové hypotézy, zajímá nás, mezi kterými skupinami se jejich střední hodnoty lišily. Tuto informaci můžeme získat právě pomocí simultánních intervalů spolehlivosti pro uspořádané párové rozdíly.

2.5 Experiment s objemy plic ptáků

Příkladem studie, ve které bychom uvedená data mohli považovat výběry z rozdělení s uspořádanými středními hodnotami, je experiment zmíněný v knize Milliken a Johnson (2009), který vyhodnocoval účinek nadmořské výšky na objem plic ptáků, kteří byli chováni v environmentálních komorách, ve kterých bylo možné simulovat různé hladiny nadmořské výšky pomocí změn tlaku vzduchu. Během experimentu byla ptáčata chována v pěti simulovaných nadmořských výškách a po dosažení věku dospělosti jim byl změřen objem plic. Naměřená data jsou uvedena v tabulce 2.3.

Předpokládejme, že naměřená data odpovídající nadmořské výšce $i * 1000$ ft tvoří náhodný výběr z rozdělení F_i a označme μ_i střední hodnotu rozdělení F_i, kde $i = 1, \ldots, 5$. Chtěli bychom testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \mu_5$ s alespoň jednou ostrou nerovností na hladině $\alpha = 0{,}05$.

Budeme předpokládat, že rozdělení F_i jsou normální rozdělení se střední hodnotou μ_i a rozptylem σ^2, $i = 1, \ldots, 5$. Rozpyl je neznámý, použijeme proto $\overline{E}^2$ test s hodnotami $a_i = 1$ pro $i = 1, \ldots, 5$. Označíme $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_5$ náhodné výběry tak, aby $\mathbb{X}_i$ odpovídal naměřeným datům pro nadmořskou výšku $i * 1000$ ft, $i = 1, \ldots, 5$. Spočítáme výběrové průměry a podle vzorce (2.3) na straně 10 také maximálně věrohodný odhad středních hodnot μ_i za platnosti H_0:

$$\overline{X}_1 = 156{,}8, \quad \overline{X}_2 = 155{,}8, \quad \overline{X}_3 = 166{,}2, \quad \overline{X}_4 = 169{,}2, \quad \overline{X}_5 = 176{,}8,$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_4 = \hat{\mu}_5 = 164{,}96.$$

Dále spočítáme hodnoty isotonické regrese funkce výběrových průměrů $\overline{X}_{(.)}$. Použijeme stejný postup, jako v důkazu Vět 3 a 4. Získáme hodnoty

$$\hat{\mu}_1^* = 156{,}3, \quad \hat{\mu}_2^* = 156{,}3, \quad \hat{\mu}_3^* = 166{,}2, \quad \hat{\mu}_4^* = 169{,}2, \quad \hat{\mu}_5^* = 176{,}8.$$

Podle vzorce (2.5) na straně 12 spočítáme hodnotu testové statistiky $\overline{E}_k^2$ a získáme $E = 0{,}776$ (kde E je naměřená hodnota $\overline{E}_k^2$). Zbývá vypočítat p-hodnotu

Elevation 1000 ft		Elevation 2000 ft		Elevation 3000 ft		Elevation 4000 ft		Elevation 5000 ft	
Bird	Volume	Bird	Volume	Bird	Volume	Bird	Volume	Bird	Volume
1	156	8	160	15	156	22	168	29	177
2	151	9	160	16	173	23	167	30	170
3	161	12	154	18	165	24	171	32	176
6	153	13	152	20	169	25	173	33	183
7	163	14	153	21	168	26	167	34	178

Tabulka 2.3: Objemy plic ptáků vyrůstajících v různých simulovaných nadmořských výškách; data jsou vybrána z příkladu z knihy Milliken a Johnson (2009)

s využitím rozdělení testové statistiky za platnosti hypotézy z Věty 4:

$$\begin{aligned} p(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5) = \mathsf{P}\left(\overline{E}_k^2 \geq E\right) &= \sum_{l=2}^{5} P(l,\,5)\,\mathsf{P}\left(B_{\frac{1}{2}(l-1),\frac{1}{2}(25-l)} \geq E\right) \\ &= \sum_{l=2}^{5} P(l,\,5)\,\left[1 - F_{\frac{1}{2}(l-1),\frac{1}{2}(25-l)}(E)\right] \\ &= 8{,}816 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

kde $F_{a,b}$ je distribuční funkce Beta rozdělení s parametry a a b a její hodnoty jsme spočetli v softwaru R pomocí funkce *pbeta*. Platí $p(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5) < \alpha$, proto zamítáme nulovou hypotézu H_0 na hladině $\alpha = 0{,}05$.

Závěr

V první části této práce jsme se seznámili s isotonickou regresí a ukázali jsme její využití pro maximálně věrohodné odhady uspořádaných parametrů. Na začátku druhé kapitoly jsme odvodili $\overline{\chi}^2$ test, který je určen pro data pocházejících z normálních rozdělení se známými rozptyly a testuje nulovou hypotézu H_0 proti alternativám $H \in \mathscr{H}$. Druhým představeným testem je $\overline{E}^2$ test, který je zobecněním $\overline{\chi}^2$ testu pro situaci, kdy rozptyly jednotlivých rozdělení jsou známé až na multiplikativní konstantu. Oba tyto testy jsou založené na testu poměrem věrohodnosti, ovšem neplatí pro ně žádoucí výsledky o asymptotickém rozdělení testové statistiky za platnosti nulové hypotézy. U $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ totiž testové statistiky za platnosti nulové hypotézy obecně nemají χ^2 rozdělení. Ve druhé kapitole jsme však podrobně odvodili jejich přesná rozdělení za platnosti nulové hypotézy.

Dalším představeným testem je jednostranný studentizovaný test rozsahu, který testuje nulovou hypotézu H_0 pouze proti alternativě H_1. Tento test požaduje, aby data pocházela z normálního rozdělení se shodnými rozptyly, které ovšem mohou být neznámé. Test zamítá nulovou hypotézu, pokud testová statistika překročí nějakou kritickou hodnotu. Tyto kritické hodnoty se získávají pomocí numerické integrace.

V závěru druhé kapitoly jsme ilustrovali použití $\overline{E}^2$ testu na data pocházející z experimentu, který zkoumal účinek různých nadmořských výšek na objem plic ptáků.

Všechny testy, které jsme uvedli, požadují normalitu dat. Jonckheere (1954) navrhl pořadový test na testování hypotézy H_0 proti alternativě H_1, který neklade žádné požadavky na rozdělení náhodných výběrů, se kterými pracujeme. Při odvozování testu používá Kendallovo S, které popsal Hendl (2015) následujícím způsobem. Předpokládejme, že $(X_1,Y_1)', \ldots, (X_n, Y_n)'$ jsou seřazeny tak, že hodnoty X_i tvoří rostoucí posloupnost. Pokud pro $i = 1, \ldots, n-1$; $j = i+1, \ldots, n$ platí $Y_i < Y_j$, nastává *konkordance*, pokud $Y_i > Y_j$, pak nastává *diskordance*. Počet všech konkordancí značíme P, počet všech diskordancí Q. Rozdíl $S = P - Q$ se nazývá *Kendallovo S*. Hodnota testové statistiky pořadového testu je stejná jako hodnota Kendallova S mezi dvěma pořadími, z nichž jedno obsahuje shody, a proto Jonckheere (1954) odvozuje její rozdělení pomocí pořadí.

Hlavním přínosem práce je představení a porovnání testů, které je možné použít na testování nulové hypotézy H_0 proti uspořádané alternativě a podrobně rozepsaný důkaz přesných rozdělení testových statistik $\overline{\chi}^2$ a $\overline{E}^2$ testu za platnosti nulové hypotézy.

Seznam použité literatury

Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. a Brunk, H. D. (1972). *Statistical inference under order restrictions. The theory and application of isotonic regression.* John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-04970-0.

Bhattacharyya, G. a Klotz, J. H. (1966). The bivariate trend of Lake Mendota. Technical report, University of Wisconsin–Madison, Department of Statistics.

Hayter, A. J. (1990). A one-sided Studentized range test for testing against a simple ordered alternative. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **85**(411), 778–785.

Hendl, J. (2015). *Přehled statistických metod. Analýza a metaanalýza dat.* Páté, rozšířené vydání. Portál, Praha. ISBN 978-80-262-0981-2.

Jonckheere, A. R. (1954). A distribution-free k-sample test against ordered alternatives. *Biometrika*, **41**, 133–145.

Milliken, G. A. a Johnson, D. E. (2009). *Analysis of messy data.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. ISBN 978-1-58488-334-0.

Schoenfeld, D. A. (1986). Confidence bounds for normal means under order restrictions, with application to dose-response curves, toxicology experiments, and low-dose extrapolation. *Journal of the American Statistical Association*, **81**(393), 186–195.