MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Procházková

Diskrétní lineární dynamické systémy s řízením

Kategra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Chtěla bych poděkovat doc. RNDr. Jiřímu Tůmovi, DrSc. za jeho trpělivost, cenné rady, vstřícnost a vždy dobrou náladu při vedení mé bakalářské práce.

Název práce: Diskrétní lineární dynamické systémy s řízením

Autor: Zuzana Procházková

Katedra: Kategra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., Kategra algebry

Abstrakt: Tato práce se zabývá základními vlastnostmi diskrétního lineárního dynamického systému. Zadefinujeme diskrétní lineární dynamický systém s řízením a jeho kontrolovatelnost, následně diskrétní lineární dynamický systém s výstupem a jeho pozorovatelnost. Dále je ukázaná dualita kontrolovatelnosti a pozorovatelnosti pomocí definice duálního systému a jeho vlastnosti. V poslední kapitole jsou vyřešeny tři příklady.

Klíčová slova: diskrétní lineární dynamický systém, řízení, měření, kontrolovatelnost, pozorovatelnost, dualita

Title: Discrete linear dynamical systems with control

Author: Zuzana Procházková

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., Department of Algebra

Abstract: In this thesis we describe elementary property of discrete linear dynamical system. We define discrete linear dynamical system with control and its controllability and then we define descrete linear dynamical system with output and its observability. After that we show the duality of observability and controllability with definition of dual system and its description. There are three problems solved in the last chapter.

Keywords: discrete linear dynamical systems, control, measure, controllability, observability, duality

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá základními vlastnostmi diskrétních lineárních dynamických systémů.

V první kapitole jsou definovány diskrétní lineární dynamický systém s řízením a kontrolovatelnost systému pomocí definování kontrolovatelnosti systému v čase t. Tvrzení, že pokud je systém dimenze n kontrolovatelný v jakémkoli čase t, pak je kontrolovatelný v čase n, je obvykle dokazováno pomocí Cayley–Hamiltonovy věty, zde je ale dokázáno pomocí několika lemmat. Dále je uveden PBH test kontrolovatelnosti a pro jeho důkaz podstatná lemmata.

V druhé kapitole je definován diskrétní lineární dynamický systém s výstupem a pozorovatelnost systému opět pomocí definování pozorovatelnosti systému v čase t. Tvrzení o souvislosti pozorovatelnosti systému dimenze n v čase t a v čase n se opět obvykle dokazuje pomocí Cayley–Hamiltonovy věty, v této práci je dokázáno pomocí lemmat.

Duálnímu systému je věnována třetí kapitola, je dokázán vztah mezi kontrolovatelností, respektive pozorovatelností systému a pozorovatelností, respektive kontrolovatelností duálního systému.

Čtvrtá kapitola obsahuje doplňující tvrzení, která jsou pouze potřebná k řešení příkladů z páté kapitoly.

Pátá a poslední kapitola obsahuje tři řešené příklady, kde první ukazuje základní vlastnosti diskrétního lineárního dynamického systému s řízením, druhý řeší otázku konvergence diskrétního lineárního dynamického systému s řízením, třetí se zabývá otázkou konvergence diskrétního lineárního dynamického systému, který není časově invariantní, tedy přechodová matice se mění v každém kroku.

1. Diskrétní lineární dynamický systém s řízením

Dynamický systém je systém, jehož stav se vyvíjí v čase. Může to být například vozítko, které se pohybuje v rovině. Nebo se může jednat o vzduch ve vznětovém motoru, jehož teplota a hustota se mění podle toho, v jaké fázi se zrovna motor nachází.

Stav dynamického systému v čase t popisujeme vektorem $x(t) \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbb{R}^n$ nazýváme *stavovým prostorem.* Stav v čase $t = 0$, tedy $x(0)$, nazýváme *počátečním stavem.* Každé $x(t)$ určuje další vývoj systému, v případu našeho vozítka by mohlo $x(t)$ náležet $\mathbb{R}^4$, kde první dvě souřadnice vektoru by udávaly polohu a třetí a čtvrtá rychlost pohybu. V případě vzduchu ve vznětovém motoru můžeme za $x(t) \in \mathbb{R}^2$ považovat teplotu a hustotu vzduchu.

Nadále budeme pouze uvažovat *diskrétní dynamický systém*, kde čas bereme v nezáporných celočíselných násobcích nějakého časového intervalu h, $x(t)$ je stav v čase $t \cdot h, t \in \mathbb{N}$. Napíšeme-li pouze systém, budeme tím mít na mysli diskrétní dynamický systém.

Při popisu systému musíme rozlišit dva různé případy, a to jestli jej dokážeme nějak ovlivnit v průběhu času, nebo nikoli. Pokud nemáme možnost systém nějak řídit, neumíme jej v průběhu času ovlivnit, pak mluvíme o *autonomním systému.* Jedná se o systém, kdy stav v čase $t + 1$ je jednoznačně určen stavem v čase t. Lze jej popsat rovnicí

$$x(t + 1) = F(x(t)),$$

kde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazýváme *přechodovou funkcí* a budeme předpokládat, že F nezávisí na t, neboli systém je *časově invariantní.* Řekneme, že autonomní systém je *lineární*, pokud F je lineární funkce, lze jej zapsat jako $x(t + 1) = Ax(t)$, pro nějakou matici $A \in R^{n\times n}$, matici A nazýváme *přechodovou maticí.* Potom v autonomním systému získáme stav v čase t jako $x(t) = A^t x(0)$ a proto stav $x(t)$ závisí pouze na počátečním stavu $x(0)$. Pokud chceme předpovědět stav systému v čase t, tak se úloha mění na vypočítání A^t pro každé t.

Nás budou zajímat *systémy s řízením*, což je systém, kde dokážeme stav systému v čase $t + 1$ ovlivnit pomocí vstupu v čase t. *Vstup* v čase t je $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Jak ovlivní vstup v čase t stav v čase $t + 1$ je dáno rovností

$$x(t + 1) = F(x(t)) + E(u(t)),$$

kde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
Mluvíme o *lineární systému s řízením*, pokud F a E jsou lineární zobrazení. V tom případě

$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t),$$

pro nějaké matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, kde matici B nazýváme *řídící maticí.* To nás vede k následující definici.

Definice 1 (Diskrétní lineární dynamický systém s řízením)**.** Diskrétní lineární dynamický systém s řízením dimenze *n je zadán rovnicí*

$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t),$$

pro $t \in \mathbb{N}$, a počátečním stavem $x(0)$, kde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ je stav systému v čase t a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, u \in \mathbb{R}^m$. Stručně budeme diskrétní lineární dynamický systém zapisovat jako systém s řízením (A, B) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$.

1.1 Kontrolovatelnost systému

Následující definice a vlastnosti jsou známé a lze je najít zhruba sepsané v Boyd (zima 2008-2009c).

Definice 2. Dosažitelný stav v čase t *systému s řízením (A, B) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ je vektor $y \in \mathbb{R}^n$, pro který existují vstupy $u(0), \dots, u(t-1)$ takové, že $y = x(t)$.* Dosažitelná množina $\Re_t$ *v čase t je množina všech dosažitelných stavů v čase t. Řekneme, že systém je* kontrolovatelný v čase t*, pokud platí $\Re_t = \mathbb{R}^n$.*

Lemma 1. *Nechť máme systém s řízením (A, B) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$. Potom platí $\Re_t = A^t x(0) + \mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$.*

Důkaz. Podívejme se, jak můžou vypadat první dva stavy, v čase $t = 1, 2$.
Máme
$$x(1) = Ax(0) + Bu(0),$$
proto $x(1) \in Ax(0) + \mathrm{Im}(B)$. Dále
$$\begin{aligned} x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\ &= A(Ax(0) + Bu(0)) + Bu(1) \\ &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1), \end{aligned}$$
tedy $x(2) \in A^2(0) + \mathrm{Im}(AB \mid B)$.
Dokážeme indukcí, že $x(t+1) \in A^{t+1}x(0) + \mathrm{Im}(A^tB \mid A^{t-1}B \mid \cdots \mid AB \mid \ B\ )$.
Můžeme předpokládat, že pro $x(t)$ platí
$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i}Bu(i) \in A^t x(0) + \mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B).$$
Pak
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= A(A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i}Bu(i)) + Bu(t) \\ &= A^{t+1}x(0) + \left(\sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i}Bu(i)\right) + \ Bu(t) \\ &= A^{t+1}x(0) + \left(\sum_{i=0}^{t} A^{t-i}Bu(i)\right). \end{aligned}$$
Proto $x(t+1) \in A^{t+1}x(0) + \mathrm{Im}(A^tB \mid A^{t-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$. □

Poznámka. Z Lemmatu (1) je $\Re_t = A^t x(0) + Im(A^{t-1}B \mid \ A^{t-2}B \mid \ \dots \ \mid \ AB \mid \ B)$, tudíž $\Re_t$ je afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Jedná se o lineární podprostor právě tehdy, když $A^t x(0) \in \mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$. Speciálně $\Re_t$ je lineární podprostor, pokud $x(0) = \mathbf{o}$.

Lemma 2. *Rovnost* $\Re_t = \mathbf{R}^n$ *je ekvivalentní s podmínkou, že* $\dim(\mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = n$.

Důkaz. Víme, že $\Re_t = A^t x(0) + \mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, proto $\Re_t = \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) = \mathbb{R}^n$, což je právě když $\dim(\mathrm{Im}(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = n$. $\square$

Poznámka. Matici tvaru

$$(A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$$

budeme značit jako B_t.

Lemma 3. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *Pokud pro nějaké* l *platí, že*

$$\mathrm{Im}(B_l) = \mathrm{Im}(B_{l+1}),$$

pak

$$\mathrm{Im}(B_l) = \mathrm{Im}(B_k)$$

pro každé $k \geq l$.

Důkaz. Stačí dokázat, že z předpokladu

$$\mathrm{Im}(B_l) = \mathrm{Im}(B_{l+1})$$

plyne, že

$$\mathrm{Im}(B_{l+1}) = \mathrm{Im}(B_{l+2}).$$

Nechť platí, že $\mathrm{Im}(B_l) = \mathrm{Im}(B_{l+1})$. Ukážeme, že $\mathrm{Im}(B_{l+1}) = \mathrm{Im}(B_{l+2})$. Zřejmě $\mathrm{Im}(B_{l+1}) \subseteq \mathrm{Im}(B_{l+2})$ a díky struktuře matic B_{l+1} a B_{l+2} platí

$$\mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \subseteq \mathrm{Im}(A^{l+1}B \mid A^lB \mid \cdots \mid AB \mid B).$$

Jelikož prostor $\mathrm{Im}(B_{l+2})$ se liší od prostoru $\mathrm{Im}(B_{l+1})$ pouze o podprostor generovaný sloupci matice $A^{l+1}B$, tak stačí ukázat, že

$$A^{l+1}\mathbf{b}_i \in \mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$, kde $\mathbf{b}_i$ je i-tý sloupcový vektor matice B. Z předpokladu máme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$A^l\mathbf{b}_i \in \mathrm{Im}(A^{l-1}B \mid A^{l-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B),$$

proto

$$\begin{aligned} A^l\mathbf{b}_i =& c_{l-1,1}A^{l-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{l-1,m}A^{l-1}\mathbf{b}_m + c_{l-2,1}A^{l-2}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{l-2,m}A^{l-2}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}\mathbf{b}_m, \end{aligned}$$

kde $c_{l-1,1}, \ldots, c_{0,m} \in \mathbb{R}$. Díky tomu získáváme

$$\begin{aligned} A^{l+1}\mathbf{b}_i =& AA^l\mathbf{b}_i \\ =& A(c_{l-1,1}A^{l-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{l-1,m}A^{l-1}\mathbf{b}_m + c_{l-2,1}A^{l-2}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{l-2,m}A^{l-2}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}\mathbf{b}_m) \\ =& c_{l-1,1}A^l\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{l-1,m}A^l\mathbf{b}_m + c_{l-2,1}A^{l-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{l-2,m}A^{l-1}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}A\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}A\mathbf{b}_m \in \\ &\in \mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB). \end{aligned}$$

Ale $\mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB) \subseteq \mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, tudíž $A^{l+1}\mathbf{b}_i \in \mathrm{Im}(A^lB \mid A^{l-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B) = \mathrm{Im}(B_{l+1})$. $\square$

Lemma 4. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pak existuje $k < n+1$ takové, že*

$$\mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_{k+1})$$

a vždy platí, že

$$\mathrm{Im}(B_n) = \mathrm{Im}(B_{n+1}).$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$\mathrm{Im}(B_1) \subseteq \mathrm{Im}(B_2) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Im}(B_{n-1}) \subseteq \mathrm{Im}(B_n) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Pokud existuje $k < n$ takové, že $\mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_{k+1})$, pak z Lemmatu (3) víme, že $\mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_r)$ pro každé $r \geq k$, tedy i $\mathrm{Im}(B_n) = \mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_{n+1})$.

Pokud takové k neexistuje, tak máme posloupnost prostorů

$$\mathrm{Im}(B_1) \subset \mathrm{Im}(B_2) \subset \cdots \subset \mathrm{Im}(B_{n-1}) \subset \mathrm{Im}(B_n) \leq \mathbb{R}^n.$$

Pro dimenze prostorů platí, že

$$0 < \dim(\mathrm{Im}(B_1)) < \cdots < \dim(\mathrm{Im}(B_{n-1})) < \dim(\mathrm{Im}(B_n)) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Vidíme, že jelikož se v každém z n kroků zvětší dimenze aspoň o jedna a zároveň je shora omezená hodnotou n, tak musí platit, že $\dim(\mathrm{Im}(B_n)) = n$, proto $\mathrm{Im}(B_n) = \mathbb{R}^n$. Jelikož $\mathrm{Im}(B_n) \subseteq \mathrm{Im}(B_{n+1}) \subseteq \mathbb{R}^n$, tak platí $\mathrm{Im}(B_n) = \mathrm{Im}(B_{n+1})$. Můžeme položit k rovno n. □

Důsledek. Nechť (A, B) je systém s řízením dimenze n s počátečním stavem $x(0)$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pokud pro nějaké t platí, že systém je kontrolovatelný v čase t, pak platí, že systém je kontrolovatelný v čase n.

Důkaz. Nechť je systém kontrolovatelný v čase t, proto platí

$$\Re_t = A^t x(0) + \mathrm{Im}(B_t) = \mathbb{R}^n,$$

tudíž $\mathrm{Im}(B_t) = \mathbb{R}^n$. Z Lemmatu (4) víme, že existuje $k < n+1$ takové, že $\mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_{k+1})$. Pokud $k \leq t$, pak dle Lemmatu (3) víme, že určitě platí $\mathrm{Im}(B_n) = \mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_t) = \mathbb{R}^n$. Pokud je $k > t$, pak

$$\mathrm{Im}(B_t) = \mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Im}(B_k) = \mathrm{Im}(B_n),$$

proto $\mathrm{Im}(B_n) = \mathbb{R}^n$. V obou případech je $\mathrm{Im}(B_n)$ rovno $\mathbb{R}^n$, pak i $\Re_n = \mathbb{R}^n$ a systém je kontrolovatelný v čase n. □

Definice 3. *Systém s řízením (A, B) dimenze n a počátečním stavem $x(0)$ nazveme* kontrolovatelný, *pokud je kontrolovatelný v čase n, $\Re_n = \mathbb{R}^n$.*

1.2 PBH test kontrolovatelnosti

Následující definice a věty vedou k důkazu PBH testu kontrolovatelnosti. PBH test kontrolovatelnosti lze najít v Boyd (zima 2008-2009b) a pro něj důležitá lemmata jsou zhruba v Boyd (zima 2008-2009a), zde jsou podrobněji přepsána do matematického značení a přesných formulací.

Poznámka. Připomeňme, že každý lineární operátor f na $\mathbb{R}^n$ je vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ určen jednoznačně maticí $A = (f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$, což zapisujeme $f = f_A$.

Definice 4. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární operátor na $\mathbb{R}^n$. Pak řekneme, že* prostor $W \leq \mathbb{R}^n$ je f-invariantní*, pokud pro každé $\boldsymbol{w} \in W$ platí, že $f(\boldsymbol{w}) \in W$. Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ řekneme, že W je* A-invariantní*, pokud je f_A-invariantní, tudíž pro každé $\boldsymbol{w} \in W$ platí $f_A(\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{w} \in W$.*

Příklad. Pokud $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je blokově horní trojúhelníková matice

$$A = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

kde $D \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $E \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $F \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, pak

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}^k \right\}$$

je A-invariantní.

Lemma 5. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pak prostor* $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$ *je A-invariantní.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{v}$ je vektor z prostoru $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, chceme ukázat, že $A\mathbf{v}$ je také v prostoru $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$. Jelikož $\mathbf{v}$ leží v $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, tak existují $c_{n-1,1}, \dots, c_{0,m} \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{v} =& c_{n-1,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{n-1,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{n-2,m}A^{n-2}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}\mathbf{b}_m, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{b}_i$ je i-tý sloupec matice B. Pak máme, že

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} =& A(c_{n-1,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{n-1,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{n-2,m}A^{n-2}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}\mathbf{b}_m) \\ =& c_{n-1,1}A^{n}\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{n-1,m}A^{n}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + \\ &+ c_{n-2,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + \cdots + c_{0,1}A\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{0,m}A\mathbf{b}_m. \end{aligned}$$

Pak $A\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(A^nB \mid A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB) \subseteq \mathrm{Im}(A^nB \mid A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$. Z Lemmatu (4) víme, že platí $\mathrm{Im}(A^nB \mid A^{n-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B) = \mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, proto $A\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$. □

Lemma 6. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární operátor na $\mathbb{R}^n$ a $W \leq \mathbb{R}^n$ je f-invariantní prostor,* $\dim(W) = k$*. Pak existuje báze C prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že $[f]_C^C$ je blokově horní trojúhelníková matice.*

Důkaz. Nechť $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze prostoru W. Doplníme ji na bázi prostoru $\mathbb{R}^n$: $C = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$. Pro každý vektor $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$ platí, že $f(\mathbf{v}_i) \in W$, proto $[f(\mathbf{v}_i)]_B$ bude mít posledních $k + 1, \dots, n$ složek nulových. Potom má matice zobrazení f vzhledem k bázi C blokový tvar

$$[id]_C^{K_n}\,[f]_{K_n}^{K_n}\,[id]_{K_n}^C = [f]_C^C = \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}.$$

□

Lemma 7. *Nechť systém s řízením* (A, B) *dimenze* n *s počátečním stavem* $x(0)$ *není kontrolovatelný,* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *a* $\dim(\mathrm{Im}(B)) = r$*. Pak existuje regulární matice* T *řádu* n *taková, že*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \ \text{a} \ T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{r\times m} \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $D_{k\times k} \in \mathbb{R}^{k\times k}$*,* $E_{k\times(n-k)} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$*,* $F_{(n-k)\times(n-k)} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$*,* $B_{r\times m} \in \mathbb{R}^{r\times m}$*.*

Důkaz. Nechť systém (A, B), $x(0)$, není kontrolovatelný, proto existuje $k < n$ takové, že $\dim(\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = k$. Nechť f_A je lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí A. Z Lemmatu (5) víme, že je prostor $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$ f_A-invariantní. Dále použijeme Lemma (6). Bázi C sestrojíme tak, že vezmeme za prvních r vektorů bázi $\mathrm{Im}(B)$ a následně doplníme na bázi celého $\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \ldots \mid AB \mid B)$. Tím jsme získali

$$[f_A]_C^C = [id]_C^{K_n} [f_A]_{K_n}^{K_n} [id]_{K_n}^C = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix},$$

při označení $[id]_{K_n}^C$ jako T.

Jelikož prvních r vektorů $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ tvoří bázi prostoru $\mathrm{Im}(B)$, tak každý sloupec $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ matice B je nějakou lineární kombinací vektorů $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$. Tudíž pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ platí

$$[\mathbf{b}_j]_C = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\beta_j^1, \ldots, \beta_j^r \in \mathbb{R}$. Položme

$$B_{r\times m} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \ldots & \beta_{rm} \end{pmatrix}.$$

Pak máme

$$B = [f_B]_{K_n}^{K_n} = [id]_{K_n}^C [f_B]_C^{K_n} = [id]_{K_n}^C ([\mathbf{b}_1]_C, \ldots, [\mathbf{b}_m]_C) = T \begin{pmatrix} B_{r\times m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka. V následujícím textu budeme uvažovat jako skalární součin pouze standardní skalární součin, ortogonalita bude uvažována vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu a za normu budeme uvažovat Eukleidovskou normu. Pokud $\mathbf{v}$ je vektor, pak $\mathbf{v}^\perp$ značí jeho ortogonální doplněk

Věta 8 (PBH test kontrolovatelnosti). *Systém s řízením* $(A{,}B)$ *dimenze* n *s počátečním stavem* $x(0)$ *není kontrolovatelný právě tehdy, když existuje levý vlastní vektor* w *příslušný nenulovému vlastnímu číslu* λ *matice* A*, který je ortogonální k sloupcům matice* B*.*

Důkaz. Levý vlastní vektor matice A příslušný nenulovému vlastnímu číslu λ definujeme jako vektor $\mathbf{w}$, pro který platí, že $\mathbf{w}^T A = \lambda \mathbf{w}^T$. Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou, že vektor $\mathbf{w}$ je vlastní vektor matice A^T příslušný vlastnímu číslu λ, $A^T\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, kde λ je vlastní číslo matice A.

Nejdříve dokážeme, že pokud existuje levý vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ ortogonální ke sloupcům matice B, pak systém (A, B) není kontrolovatelný. Předpokládejme, že $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \neq 0$, je levý vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ, tj.:

$$\mathbf{w}^T A = \lambda \mathbf{w}^T,$$

který je ortogonální ke sloupcům matice B, a proto pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$\mathbf{w}^T \mathbf{b}_j = 0.$$

Nechť $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)$, tj. existují $c_{n-1,1}, \dots, c_{0,m} \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned}\mathbf{v} =& c_{n-1,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{n-1,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \\ &+ c_{n-2,m}A^{n-2}\mathbf{b}_m + \dots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{0,m}\mathbf{b}_m.\end{aligned}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{v} =& \mathbf{w}^T(c_{n-1,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{n-1,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \\ &+ c_{n-2,m}A^{n-2}\mathbf{b}_m + \dots + c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{0,m}\mathbf{b}_m),\end{aligned}$$

roznásobením získáme

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{v} =& \mathbf{w}^T c_{n-1,1}A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{w}^T c_{n-1,m}A^{n-1}\mathbf{b}_m + \mathbf{w}^T c_{n-2,1}A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \\ &+ \mathbf{w}^T c_{n-2,m}A^{n-2}\mathbf{b}_m + \dots + \mathbf{w}^T c_{0,1}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{w}^T c_{0,m}\mathbf{b}_m.\end{aligned}$$

Vytkneme reálné koeficienty:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{v} =& c_{n-1,1}\mathbf{w}^T A^{n-1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{n-1,m}\mathbf{w}^T A^{n-1}\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}\mathbf{w}^T A^{n-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \\ &+ c_{n-2,m}\mathbf{w}^T A^{n-2}\mathbf{b}_m + \dots + c_{0,1}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_1 + \dots + c_{0,m}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_m.\end{aligned}$$

Použijeme předpoklad, že $\mathbf{w}$ je levý vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ, proto

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{v} =& c_{n-1,1}\lambda^{n-1}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_1 + \dots + c_{n-1,m}\lambda^{n-1}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_m + c_{n-2,1}\lambda^{n-2}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_1 + \dots + \\ &+ c_{n-2,m}\lambda^{n-2}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_m + \dots + c_{0,1}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_1 + \dots + c_{0,m}\mathbf{w}^T\mathbf{b}_m,\end{aligned}$$

ale z předpokladu víme, že pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ platí $\mathbf{w}^T\mathbf{b}_j = 0$, tím získáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{v} =& c_{n-1,1}\lambda^{n-1}0 + \dots + c_{n-1,m}\lambda^{n-1}0 + c_{n-2,1}\lambda^{n-2}0 + \dots + \\ &+ c_{n-2,m}\lambda^{n-2}0 + \dots + c_{0,1}0 + \dots + c_{0,m}0 = 0.\end{aligned}$$

Proto $\operatorname{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \subseteq \mathbf{w}^{\perp}$ a jelikož $\mathbf{w} \neq 0$, tak $\dim(\operatorname{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) < n$. Tím je dokázána implikace $\Leftarrow$. Nyní dokážeme implikaci $\Rightarrow$.

Nechť systém (A, B) není kontrolovatelný, $\dim(\operatorname{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = k < n$, $\dim(\operatorname{Im}(B)) = r$, $r \leq k$. Pak z Lemmatu (7) víme, že existuje regulární matice T řádu n taková, že

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \text{ a } T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{r\times m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť je $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n-k}$ levý vlastní vektor matice $F_{(n-k)\times(n-k)}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$, proto pro něj platí, že $\mathbf{f}^T F_{(n-k)\times(n-k)} = \lambda \mathbf{f}^T$. Matice F je sice reálná, ale můžeme ji uvažovat jako komplexní a jelikož každá komplexní matice má alespoň jedno vlastní číslo, tak i matice F má alespoň jedno vlastní číslo λ, které ale může být komplexní, a pak i příslušný vlastní vektor může být komplexní. Definujme

$$\mathbf{w}^T = \Big(\underbrace{0\dots0}_{k\text{-krát } 0, \text{ označíme jako } 0_{1\times k},} \mid \ \mathbf{f}^T\Big) T^{-1} \neq 0 \in \mathbb{R}^n,$$

pak získáme

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^T A &= \left(0_{1\times k} \mid \ \mathbf{f}^T\right) T^{-1}\left(T \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} T^{-1}\right) \\
&= \left(0_{1\times k} \mid \ \mathbf{f}^T\right) \begin{pmatrix} D_{k\times k} & E_{k\times(n-k)} \\ 0 & F_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} T^{-1} \\
&= \left(0_{1\times k} \mid \ \mathbf{f}^T F_{(n-k)\times(n-k)}\right) T^{-1} \\
&= \left(0_{1\times k} \mid \ \lambda\mathbf{f}^T\right) T^{-1} \\
&= \lambda\left(0_{1\times k} \mid \ \mathbf{f}^T\right) T^{-1} \\
&= \lambda \mathbf{w}^T.
\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^T B &= \left(0_{1\times k} \ \ \mathbf{f}^T\right) T^{-1}\left(T \begin{pmatrix} B_{r\times m} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(0_{1\times k} \ \ \mathbf{f}^T\right) \begin{pmatrix} B_{r\times m} \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{jelikož } r \leq k.
\end{aligned}$$

□

Příklad. Nechť $n, m = 2$ a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -9 & 18 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ je levý vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu 3,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}^T A = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}^T.$$

Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je levý vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu 2,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}^T = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T .$$

Zároveň levý vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ je kolmý na vektory $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 18 \\ -2 \end{pmatrix}$. Podle PBH testu máme, že systém (A, B) není kontrolovatelný, proto $\mathfrak{R}_2 = \operatorname{Im}(AB \mid B) \neq \mathbb{R}^2$. Výsledek si můžeme zkontrolovat,

$$(AB \mid B) = \begin{pmatrix} -18 & 36 & -9 & 18 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že první, druhý a čtvrtý sloupec je násobkem třetího sloupce, tedy $\operatorname{Im}(AB \mid B) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{R}^2$.

2. Diskrétní lineární dynamický systém s výstupem

V předchozím textu jsme předpokládali, že stavy $x(t)$ systému (A, B) dimenze n známe. Níže uvedená definice popisuje systém, ve kterém stavy $x(t)$ nemáme možnost přímo zjistit. O systému v čase t zjišťujeme informace pouze z *výstupu* $y(t) \in \mathbb{R}^p$ měření stavu $x(t)$ a vstupu $u(t)$, které popisuje rovnice

$$y(t) = F(x(t)) + G(u(t)),$$

kde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Budeme opět předpokládat, že funkce F a G jsou lineární, proto

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

kde $C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Matice C reprezentuje „měření stavu" a matice D „měření vstupu". Z výstupu nelze zjistit přímo původní stav $x(t)$. Například nechť je D nulová matice a $\widetilde{\mathbf{c}_i}^T$ je i-tý řádek matice C, pak

$$y(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{c}_1}^T \\ \widetilde{\mathbf{c}_2}^T \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{c}_p}^T \end{pmatrix} x(t).$$

Pokud řádky matice C tvoří ortonormální bázi B prostoru $\mathrm{Im}(C^T)$, tak ortogonální projekce $x(t)$ na $\mathrm{Im}(C^T)$ má tvar $\mathbf{w} = (\widetilde{\mathbf{c}_1}^T x(t))\widetilde{\mathbf{c}_1}^T + (\widetilde{\mathbf{c}_2}^T x(t))\widetilde{\mathbf{c}_2}^T + \cdots + (\widetilde{\mathbf{c}_p}^T x(t))\widetilde{\mathbf{c}_p}^T$, proto $y(t) = [\mathbf{w}]_B$, tudíž se jedná o nejlepší aproximaci vektoru $x(t)$ v prostoru $\mathrm{Im}(C^T)$.

Definice 5 (Diskrétní lineární dynamický systém s výstupem)**.** *Přidejme k systému (A, B) s řízením dimenze n s počátečním stavem $x(0)$,*

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

další rovnici popisující výstup ze systému:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

kde $C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ a $y(t) \in \mathbb{R}^p$ nazýváme výstupem. Takový systém nazýváme diskrétní lineární dynamický systém s výstupem. *Budeme jej značit jako systém s výstupem (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p.*

Poznámka. Podokněme, že systém s výstupem je z definice i systém s řízením.

2.1 Pozorovatelnost systému

Následující definice a vlastnosti jsou známé a lze je najít zhruba sepsané v Boyd (zima 2008-2009c).

Definice 6. *Systém (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p je* pozorovatelný v čase t*,* $t \in \mathbb{N}$*, pokud dokážeme jednoznačně zjistit $x(0)$, když známe $u(0), u(1), \ldots, u(t-1)$ a $y(0), y(1), \ldots, y(t-1)$.*

Věta 9. *Systém s výstupem (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p je pozorovatelný v čase t právě tehdy, když platí*

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} CA^{t-1} \\ CA^{t-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{pmatrix} = \{\boldsymbol{o}\}.$$

Důkaz. Mějme systém s výstupem (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p. Podívejme se na výstup systému v čase $t = 0$. Máme pouze jednu soustavu rovnic pro $x(0)$:

$$y(0) = Cx(0) + Du(0).$$

Pro čas $t = 1$ máme další podmínky:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0), \;\; y(1) = Cx(1) + Du(1),$$

které zakomponujeme dohromady:

$$\begin{aligned} y(1) &= C(Ax(0) + Bu(0)) + Du(1) \\ &= CAx(0) + CBu(0) + Du(1) \\ &= CAx(0) + (CB \mid D)\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proto $x(0)$ musí splňovat soustavu rovnic s $2p$ rovnicemi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(1) \\ y(0) \end{pmatrix}}_{2p \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} CA \\ C \end{pmatrix}}_{2p \times n} x(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} CB & D \\ D & 0 \end{pmatrix}}_{2p \times 2m} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}.$$

Pro $t = 2$ musíme opět přidat další podmínky z dalšího stavu:

$$y(2) = Cx(2) + Du(2), \;\; x(2) = Ax(1) + Bu(1).$$

Opět upravíme:

$$\begin{aligned} &x(2) = A(Ax(0) + Bu(0)) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\ &y(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Du(2) \\ &y(2) = CA^2x(0) + (C \mid AB \mid D)\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proto $x(0)$ musí splňovat soustavy rovnic s $3p$ rovnicemi:

$$\begin{pmatrix} y(2) \\ y(1) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^2 \\ CA \\ C \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} CAB & CB & D \\ CB & D & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{pmatrix}.$$

Jednoduchou indukcí dále plyne pro libovolné $t \geq 0$, že $x(0)$ splňuje soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \vdots \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^{t-1} \\ CA^{t-2} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} x(0) + T_t \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(t-2) \\ u(t-1) \end{pmatrix},$$

kde

$$T_t = \underbrace{\begin{pmatrix} CA^{t-2}B & CA^{t-3}B & \dots & CB & D \\ CA^{t-3}B & CA^{t-4}B & \dots & D & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ D & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{pt \times mt}.$$

Soustava rovnic má díky tomu, jak jsme ji odvodili, vždy řešení, a proto $x(0)$ zjistíme jednoznačně právě tehdy, když

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} CA^{t-1} \\ CA^{t-2} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} = \{\mathbf{o}\}.$$

□

Poznámka. Matici tvaru

$$\begin{pmatrix} CA^{k-1} \\ CA^{k-2} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}$$

označíme jako C_k, podokněme, že $C_k \in \mathbb{R}^{pk \times n}$.

Věta 10 (Věta o dimenzi jádra a obrazu)**.** *Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí*

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \dim(\operatorname{Im}(A)) = n.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v 5. kapitole v Tůma a Barto.

□

Lemma 11. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pokud existuje k takové, že platí*

$$\operatorname{Ker}(C_k) = \operatorname{Ker}(C_{k+1}),$$

pak pro každé $s \geq k$ platí

$$\operatorname{Ker}(C_k) = \operatorname{Ker}(C_s).$$

Důkaz. Stačí dokázat, že z $\operatorname{Ker}(C_k) = \operatorname{Ker}(C_{k+1})$ plyne $\operatorname{Ker}(C_{k+1}) = \operatorname{Ker}(C_{k+2})$. Nejdříve dokážeme, že $\operatorname{Ker}(C_{k+1}) \supseteq \operatorname{Ker}(C_{k+2})$. Nechť $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(C_{k+2})$, proto

$$\begin{pmatrix} CA^{k+1} \\ CA^k \\ CA^{k-1} \\ CA^{k-2} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\begin{pmatrix} CA^k \\ CA^{k-1} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

proto $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(C_{k+1})$.

Jelikož víme, že $\operatorname{Ker}(C_{k+1}) \supseteq \operatorname{Ker}(C_{k+2})$, tak pokud dokážeme, že se dimenze těchto prostorů rovnají, tak se rovnají i dané prostory. Použijeme Větu o dimenzi jádra a obrazu a Lemma (3). Jelikož $C_k \in \mathbb{R}^{kp \times n}$, tak z Věty o dimenzi jádra a obrazu získáváme, že

$$\dim(\operatorname{Ker}(C_k)) + \dim(\operatorname{Im}(C_k)) = n,$$

dále $C_{k+1} \in \mathbb{R}^{(k+1)p \times n}$, proto

$$\dim(\operatorname{Ker}(C_{k+1})) + \dim(\operatorname{Im}(C_{k+1})) = n.$$

Víme z přepokladu, že platí

$$\operatorname{Ker}(C_k) = \operatorname{Ker}(C_{k+1}),$$

proto platí, že $\dim(\operatorname{Im}(C_{k+1})) = \dim(\operatorname{Im}(C_k))$. Ale víme, že též platí $\dim(\operatorname{Im}(C_{k+1})^T) = \dim(\operatorname{Im}(C_k)^T)$. Podívejme se, jak vypadají matice C_{k+1}^T a C_k^T:

$$C_{k+1}^T = ((A^T)^k C^T \mid (A^T)^{k-1} C^T \mid \cdots \mid A^T C^T \mid C^T),$$

$$C_k^T = ((A^T)^{k-1} C^T \mid (A^T)^{k-2} C^T \mid \cdots \mid A^T C^T \mid C^T).$$

Platí $\operatorname{Im}(C_k^T) \subseteq \operatorname{Im}(C_{k+1}^T)$ a jelikož se rovnají dimenze, tak $\operatorname{Im}(C_k^T) = \operatorname{Im}(C_{k+1}^T)$. Máme splněné předpoklady Lemmatu (3), kde za matici A vezmeme naši matici A^T a za matici B matici C^T. Proto víme, že platí $\operatorname{Im}(C_{k+1}^T) = \operatorname{Im}(C_{k+2}^T)$. Tudíž

$$\dim(\operatorname{Im}(C_{k+1})) = \dim(\operatorname{Im}(C_{k+2})).$$

Z Věty o dimenzi jádra a obrazu zpátky získáváme ($C_{k+2} \in \mathbb{R}^{(k+2)p \times n}$), že

$$\dim(\operatorname{Ker}(C_{k+2})) + \dim(\operatorname{Im}(C_{k+2})) = n,$$

proto $\dim(\operatorname{Ker}(C_{k+2})) = \dim(\operatorname{Ker}(C_{k+1}))$. □

Lemma 12. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$*. Pak existuje* $k < n+1$ *takové, že*

$$\mathrm{Ker}(C_k) = \mathrm{Ker}(C_{k+1})$$

a vždy platí, že

$$\mathrm{Ker}(C_n) = \mathrm{Ker}(C_{n+1}).$$

Důkaz. Díky Lemmatu (4), kde za A vezmeme A^T a B položíme rovno C^T, víme, že existuje $k < n+1$ takové, že $\mathrm{Im}((C_k)^T) = \mathrm{Im}((C_{k+1})^T)$ a že vždy platí $\mathrm{Im}((C_n)^T) = \mathrm{Im}((C_{n+1})^T)$. Protože $\mathrm{Ker}(C_k) \supseteq \mathrm{Ker}(C_{k+1})$, tak opět stačí dokázat rovnost jejich dimenzí. Z Věty o dimenzi jádra a obrazu znovu získáváme

$$\dim(\mathrm{Ker}(C_k)) + \dim(\mathrm{Im}(C_k)) = n$$

a

$$\dim(\mathrm{Ker}(C_{k+1})) + \dim(\mathrm{Im}(C_{k+1})) = n,$$

proto $\dim(\mathrm{Ker}(C_{k+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(C_k))$. Důkaz rovnosti $\mathrm{Ker}(C_{n+1}) = \mathrm{Ker}(C_n)$ je obdobný. □

Důsledek. Nechť (A, B, C, D) je systém s výstupem dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p. Pokud pro nějaké t platí, že systém je pozorovatelný v čase t, pak platí, že systém je pozorovatelný v čase n.

Důkaz. Nechť je systém pozorovatelný v čase t, $\mathrm{Ker}(C_t) = \{\mathbf{o}\}$. Z předchozího lemmatu víme, že existuje $k < n+1$ takové, že $\mathrm{Ker}(C_k) = \mathrm{Ker}(C_{k+1})$, dle Lemmatu (11) platí $\mathrm{Ker}(C_k) = \mathrm{Ker}(C_n)$. Pokud $k > t$, tak

$$\mathrm{Ker}(C_k) = \mathrm{Ker}(C_n) \subseteq \mathrm{Ker}(C_t) = \{\mathbf{o}\},$$

proto $\mathrm{Ker}(C_n) = \{\mathbf{o}\}$. Pokud $k \leq t$, pak dle Lemmatu (11) platí, že $\mathrm{Ker}(C_n) = \mathrm{Ker}(C_k) = \mathrm{Ker}(C_t)$ a proto $\mathrm{Ker}(C_n) = \{\mathbf{o}\}$. V obou případech je systém pozorovatelný v čase n. □

Definice 7. *Systém s výstupem* (A, B, C, D) *dimenze* n *s počátečním stavem* $x(0)$ *a výstupem dimenze* p *je* pozorovatelný*, pokud je pozorovatelný v čase* n*.*

Poznámka. Z předchozí věty víme, že systém je pozorovatelný v čase n, pokud platí, že

$$\mathrm{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{pmatrix}}_{np \times n} = \{\mathbf{o}\}.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou, že

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{pmatrix} = n.$$

Ale pro každou matici A platí, že $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$, proto výše uvedená podmínka je ekvivalentní s

$$\operatorname{rank}((A^T)^{n-1}C^T \mid (A^T)^{n-2}C^T \mid \cdots \mid C^T) = n.$$

3. Duální systém

Vlastnosti duálního systému a jeho propojení se systémem původním jako první popsal R. Kalman v článku On the General Theory of Control Systems (Kalman (1960)). K napsání této práce byl použit zmíněný článek a prezentace z kurzu EE263 od S. Boyda (Boyd (podzim 2007-2008b)).

Definice 8. *Mějme systém (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p, který je popsaný rovnicemi*

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

pro $t \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, u \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}, y(t) \in \mathbb{R}^p$. Pak definujeme duální systém *k tomuto systému jako systém (A^T, C^T, B^T, D^T) dimenze n s počátečním stavem $z(0)$ a výstupem dimenze m, který je popsán rovnicemi*

$$z(k+1) = A^T z(k) + C^T v(k), \quad w(k) = B^T z(k) + D^T v(k)$$

pro $k \in \mathbb{N}$ a $z \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^p, w(t) \in \mathbb{R}^m$.

Věta 13. *Nechť máme systém s řízením (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p a jeho duální systém s řízením (A^T, C^T, B^T, D^T) dimenze n s počátečním stavem $z(0)$ a výstupem dimenze m. Pak platí, že*

1) *systém (A, B, C, D) je pozorovatelný právě tehdy, když je systém (A^T, C^T, B^T, D^T) kontrolovatelný;*

2) *systém (A^T, C^T, B^T, D^T) je pozorovatelný právě tehdy, když je systém (A, B, C, D) kontrolovatelný.*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení, důkaz druhého je obdobný. Mějme systém s řízením (A, B, C, D) dimenze n s počátečním stavem $x(0)$ a výstupem dimenze p a jeho duální systém s řízením (A^T, C^T, B^T, D^T) dimenze n s počátečním stavem $z(0)$ a výstupem dimenze m. Z poznámky za definicí (3) víme, že systém (A, B, C, D) (jelikož systém s výstupem je také z definice systém s řízením) je pozorovatelný právě tehdy, když

$$\dim(\mathrm{Im}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = n.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou, že

$$\mathrm{rank}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B)) = n.$$

Podívejme se nyní na podmínku kontrolovatelnosti systému (A^T, C^T, B^T, D^T). Dle poznámky za definicí (7) je systém (A^T, C^T, B^T, D^T) pozorovatelný právě tehdy, když

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}(((A^T)^T)^{n-1}(B^T)^T \mid ((A^T)^T)^{n-2}(B^T)^T \mid \cdots \mid (B^T)^T) = \\ &= \mathrm{rank}(A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) = n.\end{aligned}$$

Vidíme, že obě podmínky jsou ekvivalentní. □

4. Pomocná tvrzení

Následující dvě věty jsou zde uvedeny, jelikož se používají pro řešení některých příkladů v páté kapitole. Jedno tvrzení je ponecháno bez důkazu, je součástí základního kurzu z Lineární algebry, tvrzení o řešení s nejmenší normou bylo sepsáno na základě Boyd (podzim 2007-2008c).

Věta 14 (Řešení s nejmenší normou)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $m \le n, \operatorname{rank}(A) = m$. Pak řešení soustavy $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ s nejmenší normou $\boldsymbol{x}_{ln}$ je dáno vzorcem*

$$\boldsymbol{x}_{ln} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Důkaz. Jednoduchým dosazením $\mathbf{x}_{ln} = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y}$ do soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ověříme, že $\mathbf{x}_{ln}$ je skutečně řešením:

$$A\mathbf{x}_{ln} = AA^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}.$$

Nyní dokážeme, že pro každé řešení $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\|$ větší než $\|\mathbf{x}_{ln}\|$. Nechť $\mathbf{x}$ je řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) = 0$. Pak

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln})^T\mathbf{x}_{ln} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln})^T A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y} = (A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}))^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y} = 0.$$

Z toho důvodu je $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}$ kolmé na $\mathbf{x}_{ln}$, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) \cdot \mathbf{x}_{ln} = 0$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|^2 =&\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{x}_{ln}\|^2\\
=&(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{x}_{ln})\\
=&(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x}_{ln})\\
=&(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) + (\mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x}_{ln}) + (\mathbf{x}_{ln}) \cdot (\mathbf{x}_{ln})\\
=&\|\mathbf{x}_{ln}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ln}\|^2 \ge \|\mathbf{x}_{ln}\|^2.
\end{aligned}$$

□

Definice 9 (Metoda nejmenších čtverců)**.** *Nechť $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic s reálnými (nebo komplexními) koeficienty. Každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (nebo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$), který minimalizuje eukleidovskou normu $\|\boldsymbol{b} - C\boldsymbol{x}\|$, se nazývá* přibližné řešení (nebo aproximace řešení) soustavy $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců*.*

Věta 15. *Je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$), pak množina všech přibližných řešení soustavy $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ metodou nejmenších čtverců je rovna množině všech (přesných) řešení soustavy*

$$C^*C\boldsymbol{x}_{ls} = C^*\boldsymbol{b}.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v 8. kapitole v Tůma a Barto. □

5. Příklady

V této kapitole jsou uvedena řešení tří příkladů. První dva příklady jsou vyřešeny autorkou, třetí příklad byl zhruba vyřešen ve vzorovém řešení testu z kurzu EE263 na Stanfordské univerzitě.

V prvním příkladu jsou řešeny základní vlastnosti diskrétního lineárního dynamického systému s řízením, jako např. nejkratší čas, ve kterém lze dojít do daného stavu, jak zjistit chtěné vstupy a jak mezi nimi najít vstup s nejmenší normou. Připomeneme, že ve všech příkladech uvažujeme standardní skalární součin a tedy Eukleidovskou normu. Příklad je ze sbírky příkladů Boyd (podzim 2007-2008a) pro kurz EEE236 na Stanfordské univerzitě, jedná se konkrétně o příklad 13.2. Rutinní výpočty jako zjišťování hodnosti matice, zda vektor leží v obalu matice a násobení matic byly provedeny v systému MATLAB, v sepsaném řešení jsou pouze uvedeny výsledky.

Příklad 1: Uvažujme systém s řízením (A, B)

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \ \ t = 0, 1, \dots,$$

kde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ a vstup je skalár, tedy $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, počáteční stav $x(0) = 0$.

a) Najděte matici $B_t \in \mathbb{R}^{n\times t}$ takovou, že

$$x(t) = B_t \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{pmatrix}.$$

b) Mějme daný systém pro $n = 4$ takový, že

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 & -0,9 & -0,5 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,0 & -0,6 & 0,1 \\ 0,4 & -0,1 & 0,8 & -0,5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chceme, aby v čase t byl stav $x(t)$ roven x_{des}, kde

$$x_{des} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,3 \\ -0,7 \\ -0,3 \end{pmatrix}.$$

Jaké je nejmenší t takové, že $x_{des} \in \Re_t$? Jakých hodnot nabývají vstupy $u(0), \dots, u(t-1)$, pomocí kterých dosáhneme stavu x_{des} v minimálním čase t? Jaké je nejmenší t takové, že $x(t) = x_{des}$ pro jakékoli $x_{des} \in \mathbb{R}^4$? Takové t označíme jako t_{min}.

c) Předpokládejme, že energie vynaložená na vstup $u(0), \ldots, u(t-1)$ je

$$E(t) = \sum_{i=0}^{t-1} (u(i))^2.$$

Jak pro dané t (větší než t_{min}) a x_{des} můžeme zjistit vstupy $u(0), \ldots, u(t-1)$, pomocí kterých $x(t) = x_{des}$ a zároveň je $E(t)$ minimální?

Uvažujme nyní, že

$$x_{des} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro každé t od t_{min} do 30 najděte vstup s minimální energii takový, že $x(t) = x_{des}$. Pro každé t uveďte hodnotu odpovídající minimální energie, kterou označíme $E_{min}(t)$. Nakreslete graf $E_{min}(t)$ jako funkci t.

d) Ukažte, že pro jakýkoli systém s řízením (A, B) s počátečním stavem $x(0) = 0$ a x_{des} je $E_{min}(t)$ nerostoucí.

Řešení:

a) Z Lemmatu (1) vidíme, že

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) \\ &= A^t x(0) + (\sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} Bu(i)). \end{aligned}$$

Jelikož $x(0) = 0$, tak

$$x(t) = \sum_{i=0}^{t} A^{t-1-i} Bu(i).$$

Proto platí, že

$$x(t) = (A^{t-1}B \mid A^{t-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{pmatrix}.$$

b) Nejdříve se podíváme, jestli je systém kontrolovatelný, tedy zda $\mathrm{Im}(B_4) = \mathrm{Im}(A^3B \mid A^2B \mid \cdots \mid AB \mid B)$ je rovno $\mathbb{R}^4$. Výpočtem v MATLABu jsme zjistili, že $\mathrm{rank}(A^3B \mid A^2B \mid \cdots \mid AB \mid B) = 4$. Proto pro každé $x_{des} \in \mathbb{R}^4$ existuje $t \in \{1, 2, 3, 4\}$, že $x(t) = x_{des}$. Nejmenší takové najdeme tak, že se postupně podíváme, zda x_{des} leží v $\mathrm{Im}(B_1), \mathrm{Im}(B_2), \mathrm{Im}(B_3), \mathrm{Im}(B_4)$.

Pro konkrétní

$$x_{des} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,3 \\ -0,7 \\ -0,3 \end{pmatrix}$$

platí, že x_{des} neleží v $\mathrm{Im}(B_1)$, ale už x_{des} leží v $\mathrm{Im}(B_2)$. Tedy minimální čas t_{min} je roven 2. Vstupy $u(1), u(0)$, kterými dosáhneme v čase $t = 2$ stavu x_{des}, zjistíme řešením rovnice

$$x_{des} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,3 \\ -0,7 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & 1 \\ -0,3 & 1 \\ 0,7 & 0 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} = (AB \mid B) \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}.$$

Řešení je rovno $\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Víme, že vektor vstupů $u_t = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{pmatrix}$ splňuje rovnici

$$x_{des} = B_t \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $E(t) = \|u_t\|^2$, tedy se jedná o úlohu minimalizace normy, kterou umíme řešit pomocí Věty (14). Pokud označíme vstup s nejmenší normou v čase t jako $u_{t,min}$, potom $u_{t,min} = B_t^T (B_t B_t^T)^{-1} x_{des}$. Mějme

$$x_{des} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zde platí, že x_{des} neleží v $\mathrm{Im}(B_1), \mathrm{Im}(B_2), \mathrm{Im}(B_3)$, ale až x_{des} leží v $\mathrm{Im}(B_4)$, $t_{min} = 4$. Tudíž pro $t = 4, \ldots, 30$ nalezneme pomocí výše uvedeného vzorce vstup s minimální energií. Níže je uveden graf závislosti $E_{min}(t)$ na t.

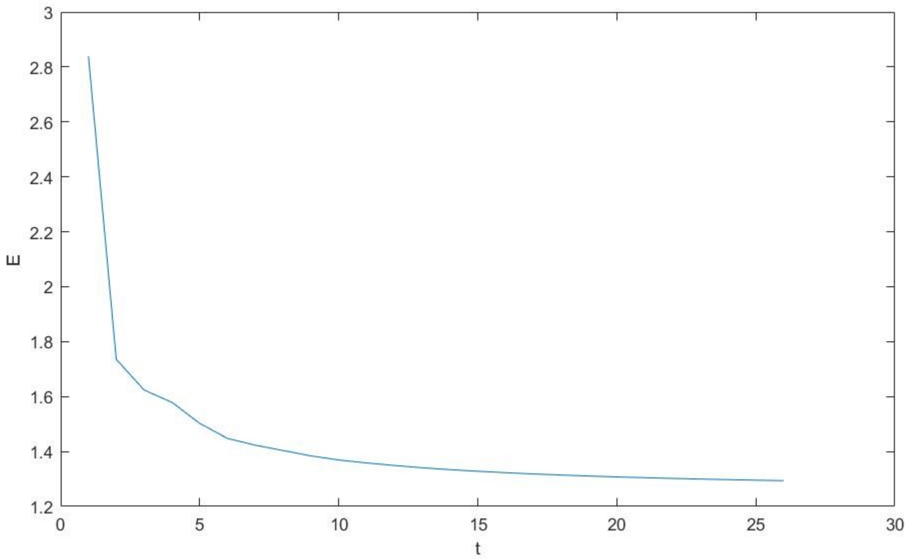
d) Mějme systém s řízením (A, B) dimenze n, $x(0) = 0$, kde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $x_{des} \in \mathbb{R}^n$. Chceme dokázat, že pro všechna r, s platí, že pokud $r < s$, pak $E_{min}(r) \geq E_{min}(s)$.

Dokážeme sporem. Nechť existuje $r < s$ takové, že $E_{min}(r) < E_{min}(s)$. K $E_{min}(r)$ existuje vstup $u_{r,min}$ takový, že $E_{min}(r) = \|u_{r,min}\|^2$ a $u_{r,min}$ je řešení s minimální normou soustavy

$$x_{des} = B_r u_{r,min} = (A^{r-1}B \mid A^{r-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) u_{r,min},$$

kde $(A^{r-1}B \mid A^{r-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \in \mathbb{R}^{n \times rm}$, $u_{s,min} \in \mathbb{R}^{rm}$.
Stejně tak $E_{min}(s) = \|u_{s,min}\|^2$ pro $u_{s,min}$, kde $u_{s,min}$ je minimální řešení soustavy

$$x_{des} = B_s u_{s,min} = (A^{s-1}B \mid A^{s-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) u_{s,min},$$



Obrázek 5.1: Závislost $E_{min}(t)$ na t

kde $(A^{s-1}B \mid A^{s-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \in \mathbb{R}^{n \times sm}$, $u_{s,min} \in \mathbb{R}^{sm}$.
Tedy z předpokladu máme $\|u_{r,min}\| < \|u_{s,min}\|$. Jelikož $r < s$, tak

$$\underbrace{(A^{s-1}B \mid \cdots \mid AB \mid B)}_{n \times sm} = \underbrace{(A^{s-1}B \mid A^{s-2}B \mid \cdots \mid A^{r}B}_{n \times (sm - rm)} \underbrace{\mid A^{r-1}B \mid \cdots \mid B)}_{n \times rm}.$$

Vezměme nyní vektor

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{r,min} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{sm},$$

kde máme na prvních $sm - sr$ pozicích 0, a následuje vektor $u_{r,min}$. Pak platí

$$\begin{aligned} B_s v &= (A^{s-1}B \mid A^{s-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{r,min} \end{pmatrix} \\ &= (A^{r-1}B \mid A^{r-2}B \mid \cdots \mid AB \mid B) u_{r,min} = x_{des} \end{aligned}$$

a zároveň $\|u_{r,min}\| = \|v\| < \|u_{s,min}\|$, což je ale spor s minimalitou $u_{s,min}$.

□

Druhý příklad řeší stabilitu systému, tedy zda $\|x(t)\|$ konverguje k 0 pro t jdoucí do nekonečna. Jeho zadání je úloha 13.10 ze stejné sbírky jako první příklad, tedy z Boyd (podzim 2007-2008a).

Příklad 2: Uvažujme systém (A, B) s řízením dimenze n, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $k < n$, mají plnou hodnost. Cílem je zvolit vstup u takový, že $\|x(t)\|$ bude konvergovat k nule pro $t \to \infty$. Je navrhnuto řešení: v čase t je zvolen vstup $u(t)$ tak, že $\|x(t+1)\|$ bude minimální. V úloze budeme analyzovat navržené řešení.

a) Nalezněte explicitní vyjádření hledaného $u(t)$ v závislosti na $x(t)$, A a B.

b) Uvažujme tedy, že vždy používáme $u(t)$, které jsme odvodili v oddělení a). Ukažte, že se v tom případě ve skutečnosti jedná o autonomní systém, tedy že $x(t+1) = Fx(t)$ pro nějakou matici F.

c) Uvažujme konkrétní systém s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Porovnejte chování autonomního systému $x(t+1) = Ax(t)$ a odvozeného systému z b) $x(t+1) = Fx(t)$ pro pár počátečních podmínek. Určete, jestli je každý tento systém stabilní.

Řešení:

a) Hledáme takové $u(t)$, aby $\|x(t+1)\| = \|Ax(t)+Bu(t)\|$ bylo minimální, ideálně rovno 0. Tedy máme soustavu rovnic

$$Ax(t) + Bu(t) = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$Bu(t) = -Ax(t)$$

a chceme minimální $\|(-Ax(t)) - Bu(t)\|$. Takové $u(t)$ je možno najít metodou nejmenších čtverců, použijeme Větu (15). Řešení pomocí nejmenších čtverců u soustav $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $\mathbf{x}_{ls} = (C^*C)^{-1}C^*\mathbf{b}$. V našem případě, jelikož jsou matice A i B reálné a mají plnou hodnost, získáváme

$$u(t) = (B^TB)^{-1}B^T(-Ax(t)).$$

b) Dosadíme vztah získaný v sekci a):

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + B(B^TB)^{-1}B^T(-Ax(t)) \\ &= (A - B(B^TB)^{-1}B^TA)x(t). \end{aligned}$$

Hledaná matice F je matice $(A - B(B^TB)^{-1}B^TA)$.

c) Podívejme se nejdříve na autonomní systém $x(t+1) = Ax(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$.

Systém zjevně není stabilní. Například pro $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ roste $\|x(t)\|$ do nekonečna pro $t \to \infty$, jelikož

$$x(t) = A^tx(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\left\| \begin{pmatrix} 3^t \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3^t \to \infty \quad \text{pro } t \to \infty.$$

Naopak pro jakýkoli počáteční vstup $x(0) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$, je systém stabilní, jelikož

$$x(1) = Ax(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní se podívejme na systém odvozený v části b). Ten má matici

$$\begin{aligned} F &= A - B(B^T B)^{-1} B^T A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice F jsou 0, k němu přísluší podprostor generovaný vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a $-\dfrac{1}{2}$, k němu přísluší podprostor generovaný vektorem $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$. Mějme $x(0) \in \mathbb{R}^2$ napsané v této bázi, kde $a, b \in \mathbb{R}$,

$$x(0) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak platí, že

$$\begin{aligned} x(t) = A^t x(0) &= A^t \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= A^t a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^t b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= aA^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bA^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \left(-\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= b \left(-\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{t+1} \left(\frac{1}{2} \right)^t b \\ (-1)^t \left(\frac{1}{2} \right)^t b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Platí

$$\|x(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^{2t} b^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2t} b^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{2^{2t}} \right) b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^t} |b|,$$

proto $\|x(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$. Tedy vidíme, že pro vstupy odvozené v a) bude systém skutečně konvergovat k 0.

Nyní si ukážeme příklad diskrétního lineárního dynamického systému bez řízení, který není časově invariantní a budeme zkoumat jeho stabilitu. Za normu matice budeme uvažovat spektrální normu matice. Tento příklad je zadán a vyřešen v Boyd (2006), jedná se o 2. úlohu. Velikosti norm a vlastních čísel byly zjištěny pomocí programu MATLAB.

Příklad 3: Uvažujme diskrétní lineární dynamický systém

$$x(t+1) = A(t)x(t),$$

kde $A(t) \in A_1, A_2, A_3, A_4$. Tyto 4 matice jsou

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2,6530 & -2,0349 & -3,2854 & -2,1526 \\ 0,8610 & 0,8198 & 1,0735 & 0,5543 \\ 1,0144 & 0,7933 & 1,3374 & 0,7416 \\ 0,8593 & 0,5078 & 0,9669 & 0,9810 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,1325 & -0,0229 & 0,1127 & 0,3267 \\ 1,8326 & 1,4762 & 2,2840 & 1,4416 \\ -1,6871 & -1,2252 & -2,0552 & -1,4431 \\ 0,6245 & 0,5039 & 0,8370 & 0,4410 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0,0064 & -0,1269 & -0,1455 & 0,2931 \\ 0,4727 & 0,5146 & 0,6508 & 0,3639 \\ 0,2913 & 0,3073 & 0,2523 & 0,0992 \\ -0,8663 & -0,5479 & -1,0623 & -0,7647 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0,0423 & 0,0770 & 0,0098 & -0,0725 \\ -0,0796 & -0,0633 & 0,0341 & -0,0463 \\ -0,0443 & -0,0219 & -0,0661 & -0,0366 \\ -0,1114 & 0,0247 & -0,0018 & 0,0752 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že tento systém je stabilní, tedy pro jakékoli $x(0)$ a pro jakoukoli posloupnost $A(0), A(1), A(2), \ldots$ platí, že $\|x(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$.

Řešení: První je třeba ověřit, že velikost vlastních čísel každé matice A_i je menší než jedna, jelikož jedna z možných posloupností je $A(t) = A_i$ pro každé t. To je pravda, velikosti jednotlivých vlastních čísel jsou v První příloze.

Podívejme se nyní, jak vypadají stavy našeho systému:

$$x(t+2) = A(t+1)x(t+1) = A(t+1)A(t)x(t).$$

Vidíme, že nás vlastně zajímají velikosti součinů po sobě jdoucích matic v posloupnosti. Je možno mít 16 dvojic, velikosti jejich norm jsou v Příloze 1. Maximum ze všech hodnot $0,91$ je menší než jedna. Použijeme, že pro spektrální normu libovolné matice B a vektor $\mathbf{y}$ platí, že $\|B\mathbf{y}\| \leq \|B\|\|\mathbf{y}\|$, a tím získáme

$$\|x(t+2)\| = \|A(t+1)A(t)x(t)\| \leq \|A(t+1)A(t)\|\|x(t)\| \leq 0,91\|x(t)\|.$$

Vidíme, že $\|x(2k)\| \leq 0,91^k\|x(0)\|$ a také $\|x(2k+1)\| = \|A(2k)x(2k)\|$. Potřebujeme tedy odhadnout normu jednotlivých matic. Ty jsou v Příloze 1.

Násobení maticí A_4 zmenšuje normu vektoru, ale matice A_1, A_2, A_3 nic takového nedělají. Ale určitě platí, že $\|x(t+1)\| \leq 6,02\|x(t)\|$. Tím jsme získali $\|x(2k+1)\| \leq 6,02\|x(2k)\| \leq (6,02)0,91^k\|x(0)\|$. Tudíž $\|x(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$.

Seznam použité literatury

BOYD, S. (2006). Stanford university: Course EE263: Introduction to linear dynamical systems: Final exam solutions. URL https://see.stanford.edu/materials/lsoeldsee263/final_sol_06.pdf.

BOYD, S. (podzim 2007-2008a). Stanford university: Course EE263: Introduction to linear dynamical systems: Homework problems for EE263. URL https://see.stanford.edu/materials/lsoeldsee263/homeworkProblems.pdf.

BOYD, S. (podzim 2007-2008b). Stanford university: Course EE263: Introduction to linear dynamical systems: Lecture 13 – Linear dynamical systems with inputs and outputs. URL http://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee263/ee263.1082/lectures/lin-sys.pdf.

BOYD, S. (podzim 2007-2008c). Stanford university: Course EE263: Introduction to linear dynamical systems : Lecture 8 – Least-norm solutions of undetermined equations. URL https://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee263/ee263.1082/lectures/min-norm2.pdf.

BOYD, S. (zima 2008-2009a). Stanford university: Course EE363: Linear dynamical systems: Lecture 6 – Invariant subspaces. URL http://web.stanford.edu/class/ee363/lectures/inv-sub.pdf.

BOYD, S. (zima 2008-2009b). Stanford university: Course EE363: Linear dynamical systems: Review session 2 – Invariant subspaces, sylvester equation, PBH. URL http://stanford.edu/class/ee363/sessions/s2notes.pdf.

BOYD, S. (zima 2008-2009c). Stanford university: Course EE363: Linear dynamical systems : Review session 1– LQR, controllability and observability. URL http://stanford.edu/class/ee363/sessions/s1notes.pdf.

KALMAN, R. (1960). On the general theory of control systems. *Automatic Control, IRE Transactions on*, **4**, 110– 110.

TŮMA, J. a BARTO, L. Lineární algebra. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la5.pdf.

A. Přílohy

A.1 Příloha 1

Zde jsou uvedeny potřebné hodnoty vlastních vektorů a norm pro Příklad 3. `Eig` značí výpis vlastních čísel matice a `norm` udává spektrální normu matice.

`eig(A1)= -0.2541, 0.4024, 0.2376, 0.0993`,
`eig(A2)= -0.1979, -0.0011 + 0.1972i, -0.0011 - 0.1972i, 0.1946`,
`eig(A3)= -0.3097, -0.0020 + 0.3166i, -0.0020 - 0.3166i, 0.3095`,
`eig(A4)= 0.1256, -0.0686 + 0.0927i, -0.0686 - 0.0927i, -0.0848`.
`norm(A1*A1)=0.1633`,
`norm(A1*A2)=0.4985`,
`norm(A1*A3)=0.9073`,
`norm(A1*A4)=0.8366`,
`norm(A2*A1)=0.1496`,
`norm(A2*A2)=0.2533`,
`norm(A2*A3)=0.7548`,
`norm(A2*A4)=0.6963`,
`norm(A3*A1)=0.4843`,
`norm(A3*A2)=0.7535`,
`norm(A3*A3)=0.7955`,
`norm(A3*A4)=0.2781`,
`norm(A4*A1)=0.8320`,
`norm(A4*A2)=0.4745`,
`norm(A4*A3)=0.2283`,
`norm(A4*A4)=0.0181`.
`norm(A1)=6.0165`,
`norm(A2)=5.0070`,
`norm(A3)=1.9992`,
`norm(A4)=0.1500`.