



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Miroslav Hanzelka

Simulace šíření vln v planetárních magnetosférách

Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu, prof. Ondřeji Santolíkovi, za přínosné konzultace a podněty ke studiu. Dále děkuji svým kolegům z Oddělení kosmické fyziky, zejména Davidu Píšovi, za trpělivost s mými všetečnými dotazy. A v neposlední řadě děkuji také své přítelkyni za to, že tolerovala mé ponocování nad textem této práce.

Název práce: Simulace šíření vln v planetárních magnetosférách

Autor: Miroslav Hanzelka

Katedra: Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Santolík, Dr., Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Abstrakt: Elektromagnetické (EM) vlny v plazmatu se podílejí na dynamice magnetosféry Země a dalších planet Sluneční soustavy a významně tak ovlivňují kosmické prostředí v oblastech, kterými procházejí orbity umělých družic. V této práci na několika příkladech ukazujeme možnosti využití metody zvané ray tracing, která nám umožňuje studovat šíření vln v plazmatu na základě paprskové aproximace geometrické optiky. Pomocí numerických simulací v přiblížení studeného plazmatu vysvětlujeme prudké změny v orientaci vlnového vektoru kvaziperiodických emisí pozorovaných nízkorbitální družicí DEMETER. S využitím programu pro výpočet trajektorií paprsků v disperzním prostředí horkého plazmatu, který jsme pro tuto práci vyvinuli, bylo dále studováno šíření EM emisí typu chorus v oblasti vnější magnetosféry Země se zaměřením na vývoj energie vlny podél magnetických siločar a vyhodnocení rozdílů mezi vedeným a nevedeným šířením. Ukazujeme, že chorus pozorovaný družicemi Cluster musí být převážně vedený a že ačkoli růst energie nelze zcela vysvětlit pomocí zde aplikované lineární teorie, mají i lineární efekty na růstech nezanedbatelný podíl. Nakonec prezentujeme propagační charakteristiky EM protonových cyklotronových vln v magnetosféře Saturnu bohaté na vodní ionty a ukazujeme, že na rozdíl od zemské magnetosféry je pozorování levotočivě polarizovaných vln poblíž magnetického rovníku nepravděpodobné.

Klíčová slova: kosmické plazma magnetosféra vlny v plazmatu ray tracing

Title: Ray tracing simulations of wave propagation in planetary magnetospheres

Author: Miroslav Hanzelka

Department: Department of Surface and Plasma Science

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Santolík, Dr., Department of Surface and Plasma Science

Abstract: Electromagnetic (EM) waves in plasma influence the dynamics of planetary magnetospheres and affect the cosmic environment in orbital regions of man-made satellites. In this thesis, we present space physics applications of the ray tracing method as a tool for studying the propagation of plasma waves in the approximation of geometrical optics. Based on a simulation in cold plasma approximation we explain observed and unexpected changes in the wave vector direction of quasiperiodic waves measured by the low-orbit satellite DEMETER. We also studied, with the use of a hot plasma ray tracing code developed as a part of this thesis, the behavior of chorus emissions in the Earth's outer magnetosphere, focusing on the possible ducting of these whistler mode waves and the evolution of wave magnetic energy. We show that large portion of chorus emissions observed by the Cluster spacecraft must be ducted and conclude that while the linear theory cannot fully explain observed wave growth, it can make up a large portion of the observed increase in energy in the low and mid-latitude regions. Lastly, we present propagation characteristics of EM proton cyclotron waves in the water-ion rich magnetosphere of Saturn and we show that in contrast to observations in the Earth's magnetosphere, a direct observation of left-polarized proton cyclotron waves in the equatorial region of the Saturn's magnetosphere is unlikely.

Keywords: space plasma magnetosphere waves in plasma ray tracing

Obsah

Úvod	3
1 Modelování planetárních magnetosfér	5
1.1 Obecná struktura magnetosféry	5
1.2 Magnetosféra Země	6
1.3 Magnetosféra Saturnu	10
2 Disperze elektromagnetických vln v horkém plazmatu	13
2.1 Obecné rychlostní rozdělení částic	14
2.2 Bimaxwellovské rozdělení	15
2.3 Speciální případy	16
2.3.1 Paralelní šíření	16
2.3.2 Kolmé šíření	17
2.3.3 Studené plazma	18
2.4 Klasifikace vln v plazmatu	19
2.5 Tlumení, růst a nestability	23
2.5.1 Landauův útlum	24
2.5.2 Cyklotronový útlum	25
2.5.3 Anizotropií řízená nestabilita	27
2.6 Relativistické plazma a nelineární efekty	27
3 Ray tracing	31
3.1 Reálné Hamiltonovy rovnice (studené plazma)	31
3.2 Aproximace komplexních Hamiltonových rovnic (horké plazma)	34
4 RAY – Program na ray tracing v horkém plazmatu	37
4.1 Fyzikální modely	37
4.1.1 Modely magnetického pole	37
4.1.2 Modely hustoty	38
4.1.3 Modely rychlostní distribuce částic	39
4.2 Numerické procedury	41
5 Aplikace ray tracingu	45
5.1 Ionosférický odraz kvaziperiodicky modulovaných elektromagnetických emisí	45
5.1.1 Data z družice DEMETER	45
5.1.2 Simulace odražených vln	47
5.1.3 Zpětný ray tracing	49
5.1.4 Diskuse	51
5.2 Statistika hvizdových vln v dolním frekvenčním pásmu	52
5.2.1 Hvizdové vlny ve vnějším radiačním pásmu	52
5.2.2 Modely a simulace	54
5.2.3 Diskuse	59
5.3 EMIC emise v magnetosféře Saturnu	66
5.3.1 Obecné charakteristiky EMIC emisí	66
5.3.2 Simulace protonových cyklotronových emisí	66

5.3.3 Diskuse	71
Závěr	73
Seznam použité literatury	75
Seznam použitých symbolů a zkratk	81
A Souřadnicové systémy v kosmické fyzice	85
B Plazmová disperzní funkce a Besselovy funkce	89
C Vedení hvizdových vln plazmasférickými ducty	93
D Vstupní a výstupní soubory programu RAY	97

Úvod

It is apparent that plasma waves are fundamental to the very definition of plasma.

— D. G. Swanson, Plasma Waves

Podle současného lidského poznání je plazma nejrozšířenějším skupenstvím hmoty ve vesmíru. Z převážné části se jedná o chladnou, řídkou a slabě ionizovanou hmotu v mezihvězdném prostoru. Pro život na Zemi má bezprostřední význam kosmické plazma vyplňující její magnetický obal – magnetosféru. Krom nejnižších vrstev se jedná o plně ionizované, vícesložkové plazma s výskytem horkých populací částic. S uvážením přítomnosti geomagnetického pole získáváme silně anizotropní materiál dominovaný elektromagnetickými silami, který je nosičem pestré škály charakteristických oscilačních frekvencí. V takovém prostředí kinetická teorie předvídá růst širokého spektra vlnových módů, které přispívají k dynamice celé magnetosféry.

Detailní výzkum magnetosféry započal koncem 50. let 20. století, kdy byly do vesmíru vypuštěny první vědecké družice. Přítomnost elektromagnetických vln v magnetosférickém plazmatu však byla známa již okolo přelomu 19. a 20. století, kdy byly poprvé pozorovány vlny zvané hvizdy, které vznikají při bleskových výbojích v atmosféře a šíří se podél siločar magnetického pole Země. Období dobývání vesmíru přineslo experimentální potvrzení existence mnoha dalších teoreticky předpovězených vlnových módů charakteristických pro magnetosférické plazma, z nichž můžeme jmenovat např. iontové cyklotronové vlny, Bernsteinovy vlny a Langmuirovy elektrostatické vlny. K pochopení chování vln v plazmatu přispívají také tokamaky, které však pracují v jiných oblastech teploty, hustoty a intenzity magnetického pole.

V posledních dekádách je velká pozornost věnována Van Allenovým radiačním pásům, což jsou toroidální oblasti se zvýšeným výskytem energetických částic nebezpečných pro družicové přístroje. Jedním ze způsobů urychlování částic jsou interakce vlna–částice mezi populací elektronů a elektromagnetickými vlnami ve hvizdovém módu. Podobně mohou vlny odebírat energii částicím a stabilizovat jejich rychlostní rozdělení. Obecně je studium vln v magnetosférickém plazmatu nezbytné pro pochopení chování celé magnetosféry. Výzkum magnetosféry probíhá nejen u Země, ale také u dalších planet sluneční soustavy se silným magnetickým polem, především u Jupiteru a Saturnu.

Teorie vzniku a šíření elektromagnetických vln v plazmatu vychází z Boltzmannovy rovnice a Maxwellových rovnic, pro jejichž praktické řešení je potřeba zavést určité aproximace. V této práci jsme se zaměřili na simulaci šíření lineárních elektromagnetických vln v plazmatu na základě geometrické optiky metodou nazývanou ray tracing. Po úvodní kapitole zabývající se jednoduchými modely magnetosféry provedeme krátkou rešerši disperzních vlastností horkého plazmatu se zaměřením na níže zmíněné numerické aplikace, krátce shrneme klasifikaci vln v plazmatu a vymežíme oblast platnosti použitých aproximací. Dále uvádíme variantu odvození Hamiltonových rovnic geometrické optiky pro přiblížení studeného plazmatu a pro horké plazma s malým růstem/tlumením.

Na základě poznatků o disperzi vln v horkém plazmatu a šíření paprsků v aproximaci geometrické optiky jsme sepsali numerický kód obsahující magnetosférické

modely, kód pro výpočet disperzní relace a řešič Hamiltonových rovnic. Podstatné numerické procedury jsou rozebrány v kapitole 4. V hlavní části práce aplikujeme numerický kód na vybrané vlnové jevy v magnetosféře Země a Saturnu.

Prvním z nich je simulace ionosférického odrazu kvaziperiodické emise pozorované nízkoorbitální družicí DEMETER. Cílem je ověřit navržené schéma šíření emise a diskutovat možnosti aplikace ray tracingu nízkofrekvenčních vln v oblasti ionosféry.

Dále prezentujeme statistiku simulací hvizdových vln ve vnějším radiačním pásu ve srovnání s jedenácti lety měření soustavy družic Cluster. Zaměřujeme se na chování vlnového vektoru vlny a otázku vedeného šíření vln. Diskutujeme také vývoj energie vlny získaný lineární teorií a efekt komprese magnetického pole na získané hodnoty.

Poslední aplikací uvedenou v této práci jsou simulace iontových cyklotronových vln v magnetosféře Saturnu. Tato simulace není spojena s družicovým měřením, účelem je předpovědět propagační charakteristiky protonových cyklotronových módů a srovnat je s poznatky o chování těchto vln v zemské magnetosféře.

1. Modelování planetárních magnetosfér

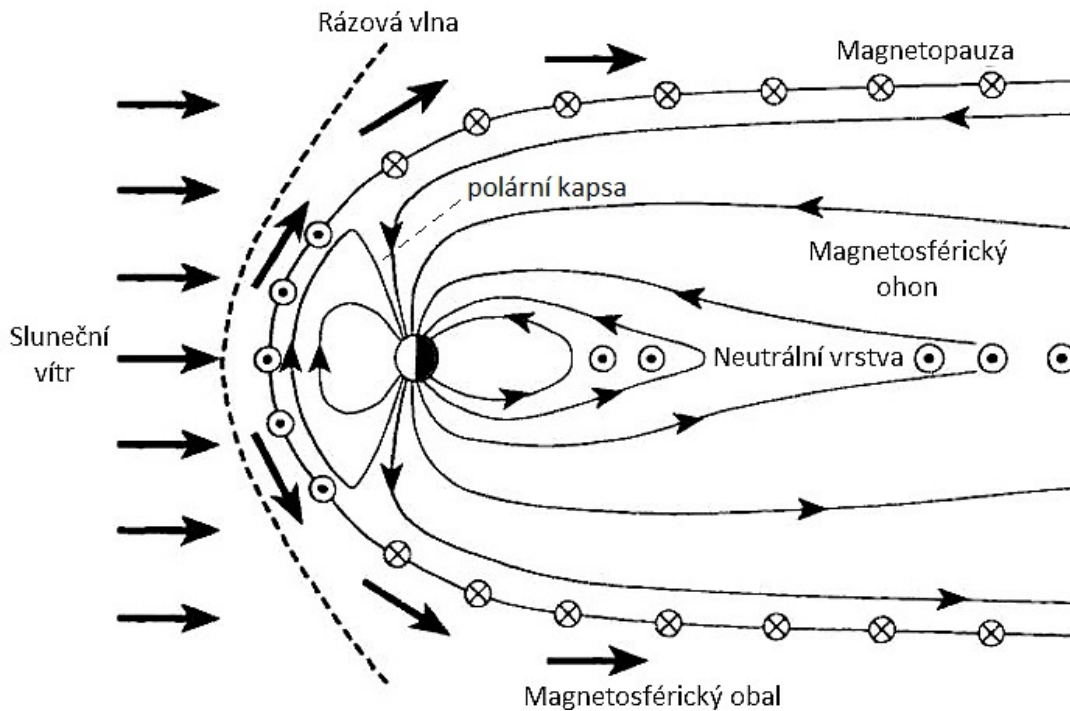
Studium šíření elektromagnetických vln vyžaduje dobrou znalost fyzikálního chování média, ve kterém vlny pozorujeme. Věrohodnost výsledků numerického modelování je silně závislá na kvalitách zvoleného modelu prostředí. V naší práci je zmíněným médiem kosmické plazma uzavřené v magnetosférách planet Sluneční soustavy. Proto v této kapitole shrneme základní charakteristiky a dělení magnetosféry a poté uvedeme specifika magnetosféry Země (podle Russell et al., [2016]) a Saturnu (podle Dougherty et al., [2009]), neboť elektromagnetickým emisím v okolí těchto planet se věnuje hlavní část této práce.

1.1 Obecná struktura magnetosféry

Podle teorie planetárního dynama generují pohyby elektricky vodivého materiálu (obvykle tekuté kovy) v jádrech planet magnetická pole, která v některých případech sahají daleko nad povrch tělesa. Mimo oblasti blízko povrchu lze tato pole aproximovat magnetickým dipólem, přičemž jeho osa obecně není paralelní s rotační osou planety. Magnetická pole interagují s nadzvukovým proudem nabitých částic vyvrhovaných ze Slunce, tzv. slunečním větrem, což má za následek vznik rázové vlny. Úhel náběhu je v aproximaci malých úhlů dán poměrem oběžné rychlosti planety a rychlosti slunečního větru, neboť ten vždy směřuje radiálně od Slunce. Pod rázovou vlnou se vyrovnává tlak magnetického pole planety s tlakem slunečního větru na hranici magnetosféry zvané magnetopauza. Mezi magnetopauzou a rázovou vlnou se nachází magnetosférický obal¹, v němž se sluneční vítr brzdí a velikost a směr magnetického pole jsou významně ovlivněny turbulencemi plazmatu. Magnetopauza má na denní straně přibližně tvar paraboloidu, dále se zužuje v závislosti na vlastnostech slunečního větru (Tsyganenko, [1989] a odkazy uvnitř) a slabé geomagnetické pole se skládá s meziplanetárním magnetickým polem (IMF, Interplanetary Magnetic Field) vytaženým do tvaru Archimédovy spirály, zde nazývané Parkerova spirála. Proto čím více je planeta vzdálena od Slunce, tím větší je úhel mezi spojnicí těles a složkou IMF ležící v rovině ekliptiky. Složka kolmá na ekliptiku osciluje okolo nulové hodnoty.

Magnetosféra je vyplněna plazmatem, jež sestává z materiálu přivátého slunečním větrem a také z částic unikajících z atmosféry planety a jejích případných oběžnic. Magnetosféra se dělí na vnější a vnitřní. Součástí vnitřní magnetosféry je oblast vysoké hustoty plazmatu zvaná plazmasféra, jež má přibližně toroidální tvar a sestává primárně z ionizovaných částic pocházejících z atmosféry planety, které mají nízkou teplotu. Koncentrace plazmatu v plazmasféře prudce klesá v oblasti, kde korotace materiálu s planetou přestává být udržitelná. Tuto

¹České pojmenování oblastí magnetosféry není ustálené. Anglické *magnetotail* jsme přeložili v souladu německým výrazem *Magnetoschweif* jako magnetosférický chvost. Výraz *polar cusp* překládáme jako polární kapsa na základě podobnosti tohoto útvaru s kapsou u oděvu (polární kapsa je otevřené místo, kam můžeme „vkládat“ nabitě částice). *Magnetosheath* se po vzoru ruského *пéреходная область* někdy překládá jako přechodová oblast, zde používáme výstižnější termín magnetosférický obal. *Plasmatrough* jsme přeložili jako magnetosférická brázda.



Obrázek 1.1: Jednoduchý model planetární magnetosféry s osou magnetického pole kolmou na směr slunečního větru. Na magnetopauze a v rovníkové rovině (neutrální vrstva) je vyznačen směr elektrických proudů. Převzato a přeloženo z Russell et al., [2016].

oblast s rychlým poklesem hustoty plazmatu nazýváme plazmapauza. Vzdálenost této oblasti od Země a prudkost poklesu hustoty je silně ovlivněna geomagnetickou aktivitou. Ostrá plazmapauza nemusí obecně u magnetizovaných planet existovat. Ve vnitřní magnetosféře se také nacházejí radiační pásy, což jsou oblasti se zvýšeným výskytem vysokoenergetických částic. Vnější magnetosféra se dělí na oblast poblíž magnetopauzy se stlačeným magnetickým polem, jehož siločáry začínají a končí na povrchu Země, a oblast zvanou magnetosférický chvost, která sahá daleko za planetu (násobky vzdálenosti mezi planetou a magnetopauzou na denní straně) a má siločáry napojené na IMF. Mezi těmito dvěma oblastmi se nacházejí polární kapsy, což jsou oblasti, kde mohou částice slunečního větru snáze pronikat směrem k povrchu planety. Schématické dělení magnetosféry je znázorněno na obrázku 1.1. Další specifika uvedeme na konkrétních příkladech Země a Saturnu.

1.2 Magnetosféra Země

Vesmírné okolí Země je nejlépe prozkoumanou oblastí Sluneční soustavy. Informace o magnetosféře pocházejí jednak z pozemních stanic a od konce 50. let 20. století i z umělých družic. Pro snadnou orientaci při popisu kosmického prostředí v blízkosti Země se tradičně používá několik různých souřadnicových systémů. V této práci budeme používat především geocentrické kartézské SM (Solar Magnetic) souřadnice, jejichž osa z je totožná s osou dipólového členu

multipólového rozvoje geomagnetického pole (skloněná $\sim 11^\circ$ k rotační ose), rovina xz obsahuje spojnicí Země–Slunce a osa y směřuje k večeru a je kolmá na x a z . Ve sférických SM souřadnicích bude λ_m označovat magnetickou šířku, l_m azimutální úhel a r radiální vzdálenost. Přitom $\lambda_m = 0$ definuje rovinu magnetického rovníku, $\lambda_m = 90^\circ$ leží na severní polokouli, rovina $l_m = 0$ obsahuje spojnicí Země–Slunce a hodnota l_m roste směrem k večerní straně. Místo l_m se obvykle používá $\text{MLT [h]} = 12 + l_m [^\circ]/15$ (Magnetic Local Time). Dále R bude označovat radiální vzdálenost od středu Země vyjádřenou v poloměrech Země $R_E = 6371$ km. Další běžně užívanou souřadnicí je L -parametr, který udává v násobcích planetárního poloměru rovníkovou vzdálenost dipólové siločáry, na níž se nachází zkoumaný bod. Podrobnější popis souřadnicového systému, jejich transformace a další popisné parametry jsou uvedeny v dodatku A.

Na vzdálenosti 1 AU dosahuje sluneční vítr průměrné rychlosti $v_{\text{sw}} \approx 400 \text{ km.s}^{-1}$ a hustoty $n_{\text{sw}} \approx 6 \text{ cm}^{-3}$, čemuž odpovídá dynamický tlak $p_{\text{sw}} \approx 2 \text{ nPa}$ (spočteno pro hustotu protonů, helium tvoří typicky 4% částicové hustoty a lze ho proto v hrubém přiblížení zanedbat). Síla magnetického pole Země u rovníku je $B_{\text{eq}} \approx 30 \mu\text{T}$. V dipólové aproximaci zapíšeme sférické složky magnetického pole ve tvaru

$$\begin{aligned} B_R &= -\frac{2B_{\text{eq}}}{R^3} \sin \lambda_m, \\ B_{\lambda_m} &= \frac{B_{\text{eq}}}{R^3} \cos \lambda_m, \\ B_{l_m} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

K vyrovnaní tlaku magnetického pole Země a tlaku slunečního větru dochází na denní straně ve vzdálenostech okolo $R = 10$, rázová vlna je ve vzdálenosti okolo $R = 15$. Pokud nebudeme uvažovat kompresi magnetického pole a uvážíme azimutální symetrii, můžeme z rovnice

$$\frac{dR}{-\frac{2B_{\text{eq}}}{R^3} \sin \lambda_m} = \frac{R d\lambda_m}{\frac{B_{\text{eq}}}{R^3} \cos \lambda_m} \tag{1.2}$$

vyjádřit rovnici dipólové siločáry v libovolné meridionální rovině

$$R = L \cos^2 \lambda_m. \tag{1.3}$$

Tvar magnetických siločar po započtení tlaku slunečního větru lépe vystihuje Tsyganenkův model [Tsyganenko, 1989]. Základem tohoto modelu je magnetický dipól uzavřený do dokonale vodivého paraboloidu, který představuje magnetopauzu. V této konfiguraci lze v parabolických souřadnicích exaktně řešit Laplaceovu rovnici pro skalární magnetický potenciál a zapsat výsledek jako kombinaci Besselových funkcí. Další významná složka magnetického pole plyne z prstencového proudu kolem rovníku na vzdálenostech $R = 3$ až $R = 8$ vznikajícího kvůli longitudinálnímu pohybu vysokoenergetických částic (jednotky až stovky keV) poblíž rovníku. Směr toku proudu je od východu na západ. Při geomagnetických bouřích se energie a hustota částic zesiluje, což vede k zeslabení geomagnetického pole. Konkrétní implementace prstencového proudu se liší podle verze Tsyganenkova modelu, stručně se k ní vrátíme v kapitole 4.1. Diferenciální rovnici siločar

v tomto modelu nelze analyticky vyřešit, je proto potřeba siločáry numericky trasovat.

Jednoduchým modelem, který reflektuje severojižní protažení siločar na denní straně, je superpozice dipólu s homogenním polem ve směru z [Kabin et al., 2007]. V meridionální rovině $l_m = 0$, $x > 0$ zapíšeme nenulové složky pole jako

$$\begin{aligned} B_R &= B_{\text{eq}} \left(-\frac{2}{R^3} + b \right) \sin \lambda_m, \\ B_{\lambda_m} &= B_{\text{eq}} \left(\frac{1}{R^3} + b \right) \cos \lambda_m. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Výhodou tohoto modelu je možnost vyjádřit siločáry ve tvaru kubické rovnice

$$R(2 - bL^3) = L \cos^2 \lambda_m (2 - bR^3), \quad (1.5)$$

kteřou lze snadno algebraicky vyřešit vzhledem k L či R a není proto potřeba uchýlovat se k numerickým metodám jako v případě Tsyganenkova modelu.

Pro přesnou práci s geomagnetickým polem poblíž povrchu se využívá model IGRF (International Geomagnetic Reference Field, Thébault et al., [2015]), který poskytuje časově závislé magnetické pole v rozsahu celé magnetosféry pro zdroje uzavřené uvnitř tělesa Země. Skalární magnetický potenciál je vyjádřen pomocí rozvoje do sférických harmonik s empirickými Gaussovými koeficienty.

Hustota a složení plazmatu v zemské magnetosféře se výrazně liší podle regionu, o který se zajímáme. Jedním z nejpoužívanějších modelů pro práci s ionosférou je model IRI (International Reference Ionosphere, Bilitza a Reinisch, [2008]), který počítá hustotní profily, zastoupení iontů, teplotu a další parametry v oblasti mezi 60 km až 2000 km nadmořské výšky. Ionosféra obsahuje několik hustotních peaků, z nichž největší nadmořskou výšku a zároveň největší hustotu má F_2 peak. V maximu hustoty dosahuje řádově 10^6 cm^{-3} , nadmořská výška se pohybuje zhruba mezi 300 km a 400 km v závislosti na zeměpisné šířce. Ionty O^+ zde tvoří více než 90 % zastoupení všech iontů. S rostoucí vzdáleností elektronová hustota monotónně a prudce klesá k řádově 10^3 cm^{-3} a zároveň narůstá koncentrace iontů H^+ a He^+ .

Pro výpočet rozložení hustoty v plazmasféře a vzdálenějších oblastech magnetosféry existuje množství teoretických, empirických a semiempirických modelů. Jeden ze starších, ale stále používaných teoretických modelů je rozebrán v Angerami a Thomas, [1964]. Autoři vycházeli z předpokladu ustavení difúzní rovnováhy mezi ionty H^+ , He^+ , O^+ a elektrony a omezili pohyb částic do směru podél magnetických siločar. Na částice působí jednak centrifugální a gravitační zrychlení, resp. jeho průmět do směru siločáry $g(R, \lambda_m)$, a poté síla od elektrického pole vzniklého v důsledku separace těžkých, kladných iontů a elektronů (ambipolární elektrické pole). Pro identické a konstantní teploty elektronů a iontů a za dalších dodatečných předpokladů Angerami a Thomas, [1964] odvodili radiální rovníkový profil hustoty iontů a elektronů ve tvaru

$$n_i(R) = n_{e,\text{ref}} \frac{\frac{n_{i,\text{ref}}}{n_{\text{ref}}(O^+)} e^{-H_g/H_i}}{\left(q \sum_i \frac{n_{i,\text{ref}}}{n_{\text{ref}}(O^+)} e^{-H_g/H_i} \right)^{1/2}},$$

$$n_e(R) = \sum_i n_i. \quad (1.6)$$

V zápisu byly použity následující substituce a symboly: $n_{e,\text{ref}}$ a $n_{i,\text{ref}}$ představují hustoty elektronů a iontu s pořadovým indexem i ve zvolené referenční výšce R_{ref} , $n_{\text{ref}}(\text{O}^+)$ je referenční hodnota kyslíku jakožto nejtěžšího iontu. Dále při zanedbání centrifugální síly můžeme psát geopotenciální výšku H_g ve tvaru (Bortnik et al., [2011] a reference uvnitř)

$$H_g = R_{\text{ref}} \left(1 - \frac{R_{\text{ref}}}{R} \right) \quad (1.7)$$

a

$$H_i = \frac{k_B T_{i,\text{ref}}}{m_i g_{\text{ref}}} \quad (1.8)$$

je škálovací výška pro neionizované atomy, kde g_{ref} je gravitační zrychlení v referenční výšce a $T_{i,\text{ref}}$ je referenční teplota iontů. Symbolem q značíme sumu relativních zastoupení iontů normalizovaných na kyslík,

$$q = \sum_i \frac{n_{i,\text{ref}}}{n_{\text{ref}}(\text{O}^+)}. \quad (1.9)$$

Po rozepsání všech substitucí v rovnicích (1.6) dospějeme k trendu $\ln(n(R)/n_{\text{ref}}) \propto 1/R$.

Angerami a Thomas, [1964] kromě rovníkové hustoty (1.6) odvodili na základě ustavení difúzní rovnováhy i rozdělení hustoty podél siločar. Jak však ukázali např. Ozhogin et al., [2014], tento teoretický model není obecně v dobré shodě s experimentálním měřením hustoty v plazmasféře a navíc je potřeba pro získání nejlepší shody v distribuci hustoty použít na vstupu referenční hodnoty, které neodpovídají předpovědím IRI a dalších ionosférických modelů. Alternativu představují modely, které vycházejí ze znalosti rovníkového profilu hustoty (získán teoreticky nebo empiricky) a poskytují vzorec pro roznos hustoty podél siločar získaný na základě fitování experimentálních dat. Jako příklad zde uvádíme model z Denton et al., [2004], který udává hustotu podél siločáry vztahem

$$n_e = n_{e0} \left(\frac{L}{R} \right)^\alpha, \quad (1.10)$$

kde n_{e0} je rovníková hustota pro dané L a

$$\alpha = 8,0 - 3,0 \log n_{e0} + 0,28 (\log n_{e0})^2 - 0,43L \quad (1.11)$$

je empirický koeficient vypočtený z dat získaných přístrojem PWI (Plasma Wave Instrument) na družici Polar. Spolehlivost modelu je závislá na oblasti, ze které družice získávala data, neměl by proto být používán mimo oblast $2 < L < 6$ a pro $R < 2$.

Za účelem modelování hustoty plazmatu ve více oblastech magnetosféry na jednu (ionosféra, plazmasféra, plazmapauza, magnetosférická brázda a polárních oblasti) byl vyvinut Global Core Plasma model [Gallagher et al., 2000]. GCPM spojitě přechází mezi empirickými modely jednotlivých regionů a simuluje tak rozložení studeného plazmatu v rozsahu všech šířek a délek. Vstupní parametry,

index K_p a sluneční luminozita, zahrnují do modelu efekt sluneční aktivity, neslouží však k předpovědi dynamiky magnetosféry. K hladkému napojení hustoty plazmatu v jednotlivých oblastech je použita přepínací funkce v obecném tvaru

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tgh} \left(\frac{x - x_0}{m} \right) \right), \\ h(x) &= s(x)g(x) + (1 - s(x))f(x), \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde x_0 je bod přechodu, m je parametr hladkosti a $h(x)$ je výsledná funkce vzniklá napojení $f(x)$ a $g(x)$. Tato funkce modeluje především tvar plazmapauzy, který však může být velice proměnlivý [Menk et al., 2014]. Další funkce používané k hladkému napojení jsou Gaussián či funkce sinus [Bortnik et al., 2011; Hanzelka et al., 2017]. GCPM je model vhodný ke statistické analýze pravidelně se vyskytujících jevů, případové studie by se však měly spoléhat na in situ měření, jsou-li dostupná, neboť vznik a šíření vln v blízkosti magnetopauzy jsou velice citlivé vůči lokálním hustotním gradientům.

V plazmasféře a vnější magnetosféře se kromě studeného plazmatu nachází toroidální oblasti vyplněné energetickými elektrony a protony, nazývané Van Allenovy radiační pásy. Vnitřní pás pokrývá oblast $1,2 < L < 2,5$ a obsahuje významné populace protonů s populacemi o teplotách $10 - 100$ MeV, vnější pás leží v rozmezí $3 < L < 10$ (největší intenzita okolo $L = 5$) a vyznačuje se populacemi elektronů o teplotách v řádu jednotek MeV. Částice ve vnitřním pásu získávají energii především z kosmického záření a díky silnému magnetickému poli na nízkých L je vnitřní pás poměrně stabilní, k významným změnám energetického toku u něj dochází pouze při intenzivních geomagnetických bouřích. Ve vnějším pásu tvoří významný zdroj ohřevu hvizdové vlny, jež při rezonanci předávají energii elektronům (pro hvizdový mód viz kapitoly 2.5 a 2.6). Poloha vnějšího pásu a toky částic v něm jsou silně ovlivňovány geomagnetickými bouřemi. Mezi radiačními pásy se nachází oblast se sníženými toky relativistických částic. Za vznikem této oblasti stojí VLF vlny, které částicím při vzájemných interakcích zvětšují hodnotu pitch-úhlu a způsobují jejich vysypávání do atmosféry.

1.3 Magnetosféra Saturnu

Magnetosféra Saturnu je udržována magnetickým polem s rovníkovou intenzitou u povrchu $B_{\text{eq}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ T, tedy zhruba o třetinu slabším, než je pole zemské. Magnetická osa se odchyluje od rotační osy planety o méně než $0,1^\circ$. Velká poloosa oběžné dráhy Saturnu $9,5$ AU je téměř desetinásobná než zemská, což má důsledky pro tvar a velikost magnetosféry. Střední vzdálenost magnetopauzy na denní straně se pohybuje okolo $19R_S$ a magnetosférický chvost dosahuje do vzdálenosti stovek R_S , kde $R_S = 5,82 \cdot 10^7$ m je průměrný poloměr Saturnu. Na povrch planety dopadá zhruba 100krát méně ionizujícího UV záření než na Zemi, proto zde dosahuje ionosférické plazma nižších hustot. Menší tok slunečního větru také způsobuje pomalejší naplňování magnetosféry vodíkem a heliem.

Další odlišností Saturnu a plynných planet obecně od planet terestrických je přítomnost velkého počtu měsíců s vlastními atmosférami, které při oběhu vstupují hluboko do magnetosféry. Měsíce dopují magnetosféru těžkými ionty.

Nejvíce hmoty do vnitřní magnetosféry dodává Enceladus (poloosa oběžné dráhy $\sim 4R_S$) v podobně H^+ , vodních iontů (O^+ , HO^+ , H_2O^+ , HO^+) a prachu. Tyto ionty natahují siločáry magnetického pole směrem do polárních oblastí. Vysoká hmotnost studeného plazmatu v magnetosféře Saturnu vede na zpomalování rotace hmoty v magnetosféře s rostoucí vzdáleností od planety, což má za důsledek protažení siločar magnetického pole v longitudinálním směru.

Dalším zdrojem hmoty v magnetosféře jsou prstence Saturnu, ovlivňující především vnitřní část plazmasféry. Plazmasféra Saturnu nemá ostrou plazmapauzu, jako je tomu u Země, a dosahuje až k magnetopauze. Uvnitř plazmasféry však existují oblasti se zvýšenou energií částic, především na ranní straně okolo radiální vzdálenosti $10R_S$, kde teploty elektronů dosahují řádově jednotek keV. Na dráze s poloosou $\sim 21R_S$ obíhá měsíc Titan, který vnější okraj magnetosféry naplňuje vodíkovými ionty.

V oblasti zhruba mezi $L = 4$ a $L = 10$, $|\lambda_m| < 35^\circ$, lze hustotu na základě empirických dat modelovat pomocí difúzního ekvilibria. Tento přístup je velice podrobně popsán v Persoon et al., [2009], kde autoři podobně jako Angerami a Thomas, [1964] pro případ Země vycházejí z předpokladu vázání pohybu částic na magnetické siločáry, pouze do rovnováhy sil zahrnují též efekt magnetických zrcadel (*mirror force*). Za předpokladu dipólového tvaru magnetického pole, korotace plazmatu s planetou, konstantní hodnoty anizotropie iontů $a_i = T_{i,\perp}/T_{i,\parallel} - 1$ a teploty elektronů T_e podél siločáry a nezávislosti těchto veličin na λ_m lze odvodit meridionální rozložení hustoty iontu i

$$n_i = n_{i0} \exp \left(-a_i \ln \left(\frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda_m)^{1/2}}{\cos^6 \lambda_m} \right) - \frac{L^2}{3H_i^2} (1 - \cos^6 \lambda_m) + \frac{\alpha \operatorname{tg}^2 \lambda_m}{LH_i^2} - \frac{\beta_i}{H_i^2} \Phi \right), \quad (1.13)$$

kde předpokládáme empirickou znalost rovníkového profilu hustoty n_{i0} . H_i představuje odstředivou škálovací výšku, α a β_i jsou substituce ve členech představujících efekt gravitace a ambipolárního pole. Pro podrobnější rozbor veličin a odvození vzorce (1.13) odkazujeme opět na Persoon et al., [2009], kapitola 2 a appendix A, konkrétní aplikaci vzorce v této práci a praktickou aproximaci vzorce nalezneme v kapitolách 4.1 a 5.3.

Poměrně silné magnetické pole a nízké hustoty plazmatu mimo rovníkovou oblast způsobují, že plazmová elektronová frekvence ω_{pe} dosahuje menších hodnot než cyklotronová elektronová frekvence ω_{ce} , podobně jako je tomu u Země v polárních oblastech. V ionosférických oblastech dosahuje hustota plazmatu řádově 10^3 cm^{-3} , tedy zhruba o tři řády méně v porovnání se zemskou magnetosférou. Konfigurace magnetosféry Saturnu umožňuje pozorování širokého spektra typů elektromagnetických emisí, například SKR (Saturn Kilometric Radiation), vlny ve hvizdovém módu typu chorus a sykot, Langmuirovy vlny a další. V kapitole 5.3 se pak budeme věnovat elektromagnetickým iontovým cyklotronovým (EMIC) emisím v magnetosféře Saturnu.

Většina dostupných dat o magnetosféře Saturnu byla zprostředkována při průletu družic Voyager a především orbitální družicí Cassini, jejíž mise skončila v roce 2017.

2. Disperze elektromagnetických vln v horkém plazmatu

Výchozím bodem pro studium chování vln v homogenním horkém plazmatu je hermitovský dielektrický tenzor

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}(\omega, \mathbf{k}) = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \sum_s \overleftrightarrow{\chi}_s(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.1)$$

kde $\overleftrightarrow{\chi}_s$ je elektrická susceptibilita vyjadřující odezvu plazmatu na pole procházející vlny, \mathbf{k} je reálný vlnový vektor a ω komplexní frekvence vlny [Stix, 1992]. Index s označuje příspěvek od jedné populace částic. V bezesrážkovém, lokálně homogenním plazmatu získáme řešením Maxwellových rovnic, spolu s pohybovou rovnicí volně nabitě částice v elektromagnetickém poli, vlnovou rovnicí ve Fourierově obraze

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.2)$$

kteřou s využitím definice vektorového indexu lomu $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k}c_0/\omega$ píšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{\mu} \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}) + \overleftrightarrow{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.3)$$

Volme souřadnou soustavu spojenou s vnějším magnetickým polem \mathbf{B}_0 , konkrétně tak, aby platilo $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{z}}B_0$. Označme symbolem θ_k úhel sevřený mezi vnějším magnetickým polem \mathbf{B}_0 a vlnovým vektorem \mathbf{k} a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že \mathbf{k} leží v rovině xz (viz lokální magnetické souřadnice, dodatek A). Poté můžeme upravit homogenní vlnovou rovnici 2.3 do užitečné maticové formy [Gurnett a Bhattacharjee, 2017]

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - \mu^2 \cos^2 \theta_k & K_{xy} & K_{xz} + \mu^2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ K_{yx} & K_{yy} - \mu^2 & K_{yz} \\ K_{zx} + \mu^2 \sin \theta_k \cos \theta_k & K_{zy} & K_{zz} - \mu^2 \sin^2 \theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Dále v textu budeme využívat také zápis pomocí vlnového vektoru, který rozložíme do kolmé a paralelní složky

$$\begin{aligned} k_{\parallel} &= k \cos \theta_k, \\ k_{\perp} &= k \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podmínkou existence netriviálního řešení rovnice (2.2) je nulovost determinantu matice na levé straně. Rovnici plynoucí z této podmínky nazýváme disperzní relací a její řešení představují vlastní módy oscilací systému [Stix, 1992]. Při výpočtu determinantu dojde k odečtení členů obsahujících μ^6 , disperzní relaci je tedy možné zapsat ve formě bikvadratické rovnice

$$\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{A}\mu^4 + \mathcal{B}\mu^2 + \mathcal{C} = 0. \quad (2.6)$$

Hodnoty parametrů \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} jsou určeny kombinací složek dielektrického tenzoru a úhlu θ_k , tedy vlastnostmi plazmatu a vlnovým vektorem. V obecném případě,

kdy jsou všechny složky dielektrického tenzoru nenulové, rozepíšeme koeficienty v rovnici (2.6) do tvaru [Horne, 1989]

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= K_{xx} \sin^2 \theta_k + 2K_{xz} \sin \theta_k \cos \theta_k + K_{zz} \cos^2 \theta_k, \\ \mathcal{B} &= -(K_{xy} \sin \theta_k - K_{yz} \cos \theta_k)^2 - K_{xx} K_{zz} + K_{xz}^2 - K_{yy} \mathcal{A}, \\ \mathcal{C} &= K_{yy} (K_{xx} K_{zz} - K_{yz}^2) + K_{xx} K_{yz}^2 + K_{xy} (2K_{xz} K_{yz} + K_{xy} K_{zz}).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Ve zbytku kapitoly se budeme zabývat vyjádřením složek dielektrického tenzoru za různých fyzikálních podmínek. Stále přitom budeme uvažovat homogenní bezesrážkové plazma a o vlnách budeme uvažovat jako o malých perturbacích elektromagnetického pole.

2.1 Obecné rychlostní rozdělení částic

Při odvození dielektrického tenzoru pro homogenní bezesrážkové plazma vycházíme z Vlasovovy rovnice, kterou linearizujeme metodou perturbace rychlostního rozdělení $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ do prvního řádu, tj. $f = f_0 + f_1$, $f_1 \ll f_0$. Řešení Vlasovovy rovnice pro lineární perturbaci f_1 využijeme k výpočtu proudové hustoty \mathbf{j} a následně z Ohmova zákona $\mathbf{j} = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ získáme konduktivitu σ , kterou přepočteme na komplexní susceptibilitu vztahem

$$\vec{\chi}_s = \frac{i\vec{\sigma}_s}{\omega \varepsilon_0}.\quad (2.8)$$

Celá procedura odvození je podrobně rozebrána ve standardních učebnicích o vlnách v plazmatu [Stix, 1992; Swanson, 2003; Gurnett a Bhattacharjee, 2017]. Výsledek je možné psát v mnoha formách, zde použijeme vyjádření podle Stix, [1992], který udává susceptibilitu ve tvaru

$$\vec{\chi}_s = \frac{\omega_{ps}^2 \omega_{crs}}{\omega \omega_{cs}} \int_0^\infty 2\pi p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \left(\vec{W} + \sum_{n=-\infty}^\infty \vec{T}_n \right)_s,\quad (2.9)$$

kde jsme využili substituce

$$\vec{W} = \frac{p_\parallel^2}{\omega} \begin{pmatrix} 1 & \partial f_0 \\ p_\parallel & \partial p_\parallel \end{pmatrix} - \frac{1}{p_\perp} \begin{pmatrix} \partial f_0 \\ \partial p_\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (2.10)$$

a

$$\begin{aligned}\vec{T}_n &= \frac{p_\perp}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n\omega_{crs}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{n^2 J_n^2}{z^2} & \frac{i n J_n J_n'}{z} & \frac{n J_n^2 p_\parallel}{z p_\perp} \\ -\frac{i n J_n J_n'}{z} & (J_n')^2 & -\frac{i J_n J_n' p_\parallel}{p_\perp} \\ \frac{n J_n^2 p_\parallel}{z p_\perp} & \frac{i J_n J_n' p_\parallel}{p_\perp} & \frac{J_n^2 p_\parallel^2}{p_\perp^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Besselovy funkce J_n a jejich derivace J_n' nesou vždy argument

$$z = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{crs}}.\quad (2.12)$$

Hybnosti chápeme jako klasické; veškeré relativistické opravy jsou zahrnuty v cyklotronové frekvenci

$$\omega_{\text{crs}} = \frac{\omega_{\text{cs}}}{\left(1 + (p_{s\perp}^2 + p_{s\parallel}^2) / m_s^2 c_0^2\right)^{1/2}}. \quad (2.13)$$

Relativistické opravy krátce diskutujeme v kapitole 2.6, ve zbytku textu uvažujeme $\omega_{\text{crs}}/\omega_{\text{cs}} = 1$.

2.2 Bimaxwellovské rozdělení

Pro obecné rychlostní rozdělení je potřeba hledat hodnoty susceptibility numerickými metodami, které jsou vzhledem k výskytu dvojnásobného integrálu ve vztahu (2.9) velice náročné z hlediska výpočetního času. Dobrou aproximaci nerovnovážných rychlostních rozdělení v plazmatu poskytuje kappa-Maxwellova distribuce, která zohledňuje těžké taily. Zde se omezíme na Maxwellovo rychlostní rozdělení, které je limitou kappa-Maxwellova rozdělení [Livadiotis, 2017]. Maxwellovo rozdělení píšeme ve tvaru

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{\perp}^2 \sigma_{\parallel}} e^{-x^2} e^{-y^2} \quad (2.14)$$

normalizovaném na jedničku,

$$\int f_0(\mathbf{v}) d^3v = 1. \quad (2.15)$$

V zápisu (2.14) jsme použili substituce

$$x = \frac{v_{\parallel} - v_{\text{ds}}}{\sqrt{2}\sigma_{\parallel}}, \quad y = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2}\sigma_{\perp}}, \quad \sigma_{\perp,\parallel} = \frac{k_{\text{B}} T_{\perp,\parallel}}{m}. \quad (2.16)$$

Po dosazení Maxwellova rozdělení do vztahu pro susceptibilitu lze vyjádřit integrál přes kolmé složky rychlostí pomocí modifikovaných Besselových funkcí a integrál přes rovnoběžné složky pomocí plazmové disperzní funkce (PDF), ve složkách

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s &= \frac{\omega_{\text{ps}}^2}{\omega^2} \left(a_s + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Lambda_n}{\lambda} A_n \right), \\ \chi_{xy}^s &= -i \frac{\omega_{\text{ps}}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n, \\ \chi_{xz}^s &= \frac{\omega_{\text{ps}}^2}{\omega^2} \left(a_s \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} + \frac{\sqrt{2}\sigma_{\parallel} k_{\perp}}{\lambda \omega_{\text{cs}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Lambda_n A_n D_n \right), \\ \chi_{yy}^s &= \chi_{xx}^s + 2\lambda \frac{\omega_{\text{ps}}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n, \\ \chi_{yz}^s &= i \frac{\sqrt{2} k_{\perp} \sigma_{\parallel} \omega_{\text{ps}}^2}{\omega_{\text{cs}} \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n D_n, \\ \chi_{zz}^s &= \frac{\omega_{\text{ps}}^2}{\omega^2} \left(a_s \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 \sigma_{\parallel}^2} + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n A_n D_n^2 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

V zápisu maticových elementů jsou použity následující substituce:

$$\begin{aligned}
A_n &= \left((a_s + 1)\xi_n + \frac{n\omega_{cs}}{\sqrt{2}k_{\parallel}\sigma_{\parallel}} \right) Z_0(\xi_n), \\
D_n &= \left(\frac{\omega - n\omega_{cs}}{\sqrt{2}k_{\parallel}\sigma_{\parallel}} \right), \\
\xi_n &= \frac{\omega - k_{\parallel}v_{ds} - n\omega_{cs}}{\sqrt{2}k_{\parallel}\sigma_{\parallel}}, \\
\Lambda_n &= e^{-\lambda} I_n(\lambda),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

které obsahují sčítací index n , a dále

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{k_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2}{\omega_{cs}^2}, \\
a_s &= \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Symbol Z_0 představuje analytické rozšíření plazmové disperzní funkce. Podrobné definice a matematické identity potřebné k odvození susceptibility v uvedeném tvaru jsou k nalezení v dodatku B.

Výhoda vyjádření susceptibility vztahu (2.17) spočívá ve skutečnosti, že problém s integrací okolo pólů daných rezonančním členem $1/\xi_n$ je zahrnut v plazmové disperzní funkci Z_0 a že hodnoty Besselových funkcí Λ_n i funkce Z_0 lze hledat pomocí rychlých numerických metod (viz kapitola 4).

2.3 Speciální případy

Dielektrický tenzor pro maxwellovské rozdělení částic má obecně všechny složky nenulové, disperzní relaci je pak nutné počítat pomocí koeficientů rozepsaných ve vztazích (2.7). Jelikož je mnoho elektromagnetických emisí generováno rychlými svazky částic pohybujících se ve směru magnetického pole, postačuje v těchto případech předpokládat paralelní šíření vln, $k_{\perp} = 0$. Zvláštní pozornost je potřeba věnovat i kolmému šíření vln (např. Bernsteinovy módy), mimo jiné kvůli divergenci výrazů (2.17) pro $k_{\parallel} = 0$.

2.3.1 Paralelní šíření

V limitě paralelního šíření platí

$$\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lambda = \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \left(\frac{k_{\perp} \sigma_{\perp}}{\omega_{cs}} \right)^2 = 0. \tag{2.20}$$

Vyšetřením chování Besselových funkcí $I_n(\lambda)$ na okolí nuly (viz dodatek B) dostaneme elementy tenzoru susceptibility ve tvaru

$$\begin{aligned}
\chi_{xx}^s &= \chi_{yy}^s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(a_s + \frac{1}{2} (A_1 + A_{-1}) \right), \\
\chi_{xy}^s &= i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} (A_1 - A_{-1}),
\end{aligned}$$

$$\chi_{zz}^s = 2\omega_{ps}^2 \left(\frac{1}{k_{\parallel}^2 \sigma_{\parallel}^2} + A_0 D_0^2 \right), \quad (2.21)$$

zbylé elementy χ_{xz} a χ_{yz} jsou nulové. Využitím vztahů (2.1), (2.6) a (2.7) dostaneme disperzní relaci

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \left(\left(K_{xx} - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right)^2 + K_{xy}^2 \right) K_{zz} = 0. \quad (2.22)$$

Řešení $K_{zz} = 0$ odpovídá elektrostatickým módům s elektrickým polem vlny $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ (longitudinální), řešení $K_{xx} - c_0^2 k^2 / \omega^2 = \pm i K_{xy}$ představuje elektromagnetické módy s elektrickým polem vlny $\mathbf{E} = (E_0, \pm i E_0, 0)$ (transversální). Elektrostatický mód není ovlivněn magnetickým polem plazmatu, protože Lorentzova síla působící na částice pohybující se paralelně s polem je nulová.

2.3.2 Kolmé šíření

Uvažujme nejprve případ, kdy $\omega - n\omega_c$ není blízké nule, neboli frekvence vlny je dostatečně daleko od cyklotronové rezonance. Potom pro $k_{\parallel} \rightarrow 0$, a tedy $\xi_n \rightarrow \infty$, můžeme za pomoci prvních dvou členů asymptotického rozvoje $Z_0(\xi_n)$ (viz dodatek B) odstranit divergence tvaru $1/k_{\parallel}$ a přepsat elementy tenzoru susceptibility do formy

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s &= -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Lambda_n}{\lambda} \frac{\omega}{\zeta_n}, \\ \chi_{xy}^s &= i \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) \frac{\omega}{\zeta_n}, \\ \chi_{xz}^s &= -\frac{k_{\perp} \omega_{ps}^2}{\lambda \omega_{cs} \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Lambda_n \left(\frac{v_{ds} \omega}{\zeta_n} \right), \\ \chi_{yy}^s &= \chi_{xx}^s - 2 \frac{\lambda \omega_{ps}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) \frac{\omega}{\zeta_n}, \\ \chi_{yz}^s &= -\frac{i k_{\perp} \omega_{ps}^2}{\omega_{cs} \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) \left(\frac{v_{ds} \omega}{\zeta_n} \right), \\ \chi_{zz}^s &= -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(1 + \omega_{cs} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Lambda_n \frac{v_{ds}^2 / \sigma_{\parallel}^2 + 1 / (a_s + 1)}{\zeta_n} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

kde jsme použili substituci $\zeta_n = \omega - n\omega_{cs}$. Jelikož rezonanční rychlost částic $v_{\parallel, \text{res}} = \zeta_n / k_{\parallel}$ se v limitě $k_{\parallel} \rightarrow 0$ blíží nekonečnu, nemůže při přesně kolmém šíření docházet k rezonanční vlnově-částicové interakci. Vlny s kolmým vlnovým vektorem také nepocítují Dopplerův posuv.

Speciálně pro nedriftující částice, $v_{ds} = 0 \forall s$, jsou elementy χ_{xz} a χ_{yz} nulové. V tomto případě dokážeme podobně jako v paralelní aproximaci identifikovat řešení $K_{zz} = 0$ a příslušné magnetické pole vlny $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$, avšak kvůli předpokladu $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ zde nejde o elektrostatické vlny. Zbylá řešení s elektrickým polem vlny kolmým na vnější magnetické pole, $\mathbf{E} = (E_0, \pm i E_0, 0)$, se za předpokladu $|K_{xx}| \ll |K_{xy}|$ redukují na přibližně elektrostatické řešení zvané Bernsteinovy módy (podrobněji v kapitole 2.4).

V rámci zjednodušení zápisu nadále předpokládejme $v_{ds} = 0$, $T_{\perp} = T_{\parallel}$. Limity $k_{\parallel} \rightarrow 0$ a $\omega - n\omega_{cs} \rightarrow 0$ vedou na neurčitý výraz $\xi_n \rightarrow 0/0$. Toto nefyzikální chování je důsledkem použitých aproximací a lze ho odstranit zavedením relativistické PDF, která je dobře definovaná i pro $k_{\parallel} = 0$ (více v kapitole 2.6). Jinou metodou na odstranění neurčitého výrazu je zahrnutí slabých srážek částic s s nehybným pozadím, které do modelu doplníme pomocí upravené frekvence $\omega + i\nu_{col}$, $\nu_{col} > 0$. Poté v prvním řádu asymptotického rozvoje PDF dostaneme aplikací Kronigových–Kramersových relací

$$\frac{1}{\sqrt{2}k_{\parallel}\sigma} Z_0(\xi_n) \approx \lim_{\nu_{col} \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\omega + i\nu_{col} - n\omega_{cs}} \approx \left(\mathcal{P} \left(\frac{-1}{\omega - n\omega_{cs}} \right) - i\pi\delta(\omega - n\omega_{cs}) \right), \quad (2.24)$$

kde \mathcal{P} naznačuje, že výraz má být integrován jako Cauchyova hlavní hodnota. Podobně pro další výrazy vystupující v susceptibilitě. Dosazením do obecného vyjádření tenzoru susceptibility (2.17) dostaneme stejné výrazy jako v (2.23) (s $v_d = 0$, $A_s = 1$ a $\omega = \omega + i\nu_{col}$), avšak pro $k_{\parallel} \approx 0$ se v elementech χ_{xz} , χ_{yz} objeví členy tvaru

$$\frac{k_{\parallel}^2}{(\omega + i\nu_{col} - n\omega_{cs})^2} \quad (2.25)$$

kteřé pro nenulové k_{\parallel} mohou být díky rezonancím velmi velké. Tedy i za předpokladu nulové driftové rychlosti nelze zanedbávat elementy χ_{xz} , χ_{yz} (alespoň v blízkosti rezonanční frekvence) a není proto možné bez dalších aproximací identifikovat transversální a longitudinální módy ve formě jako výše.

2.3.3 Studené plazma

V limitě¹ $T_{\perp} \rightarrow 0$, $T_{\parallel} \rightarrow 0$ se dielektrický tenzor v aproximaci studeného plazmatu redukuje do tvaru

$$\vec{\vec{K}} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

kde

$$\begin{aligned} S &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, \\ D &= \sum_s \frac{\omega_{cs}\omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{cs}^2)}, \\ P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dále také zavádíme koeficienty R a L (značení souvisí s polarizací, viz kapitola 2.4) vztahy

$$S = \frac{1}{2}(R + L), \quad D = \frac{1}{2}(R - L). \quad (2.28)$$

¹Obrácené pořadí limity vede ve vztazích (2.17) při bezmyšlenkovitém výpočtu k divergenci. Toto nefyzikální chování lze odstranit úpravou těchto vztahů, viz například Swanson, [2003]. Jiný způsob získání disperzní relace studeného plazmatu je nahrazení distribuční funkce δ -funkcí, takový postup je uveden v Gurnett a Bhattacharjee, [2017].

Ve studeném plazmatu tedy podle rovnic (2.26) a (2.27) nezávisí disperzní vlastnosti prostředí na velikosti vlnového vektoru procházející vlny a nutně také nezávisí na teplotní anizotropii. Aproximaci paralelního ($\theta_k = 0$) a kolmého ($\theta_k = \pi/2$) šíření získáme pouhým dosazením za $\sin \theta_k$, $\cos \theta_k$ do vlnové rovnice ve tvaru (2.4).

Pro disperzní relaci studeného plazmatu ve tvaru (2.6) platí

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= S \sin^2 \theta_k + P \cos^2 \theta_k, \\ \mathcal{B} &= -RL \sin^2 \theta_k - PS(1 + \cos^2 \theta_k), \\ \mathcal{C} &= RLP.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Disperzní relace studeného plazmatu nepředpovídá tlumení ani růst vln, neboť může být splněna pouze pro ryze reálný index lomu (nebo ryze imaginární, pak se jedná o evanescentní vlnu). Mimo oblast rezonancí však dobře aproximuje reálnou část horké disperzní relace, je proto základem pro klasifikaci vln v plazmatu.

2.4 Klasifikace vln v plazmatu

V prostředí horkého, magnetizovaného, vícesložkového plazmatu se může šířit velké množství elektromagnetických vln s komplikovaným tvarem navzájem se prolínajících disperzních větví závislých na magnetickém poli, hustotě a teplotě plazmatu, relativním zastoupení populací částic, směru vlnového vektoru a dalších parametrech. Kompletní rozbor „vlnové zoo“ sahá daleko nad rámec této práce. Vyjdeme proto z aproximace studeného plazmatu, jež postačuje k získání přehledu o základních vlnových módech, a poté klasifikaci doplníme o vybrané horké vlnové módy, jež byly v magnetosférickém plazmatu experimentálně zjištěny.

Dosazením koeficientů (2.29) do obecného tvaru disperzní relace (2.6) můžeme vyjádřit úhel vlnového vektoru θ_k v závislosti na indexu lomu μ a Stixových koeficientech R , L , P a S (rovnice (2.27) a (2.28)) jako

$$\operatorname{tg}^2 \theta_k = \frac{-P(\mu^2 - R)(\mu^2 - L)}{(S\mu^2 - RL)(\mu^2 - P)}.\tag{2.30}$$

V tomto tvaru ihned vidíme, že v případě paralelního šíření existují tři řešení studené disperzní relace: $P = 0$, $\mu^2 = R$ a $\mu^2 = L$. První představuje longitudinální oscilaci na plazmové frekvenci a druhý a třetí kořen označují transversální pravotočivou² a levotočivou vlnu. Z polarizace plyne označení koeficientů: R – *Right-handed*, L – *Left-handed*.

Pravotočivá vlna se v oblasti frekvencí $\omega < \omega_{ce}$ patří pod hvizdový mód, nazvaný podle „hvízdající“ elektromagnetické emise vznikající při bleskové aktivitě v planetárních atmosférách. V magnetosféře Země v tomto módu dále pozorujeme emise typu chorus s diskrétními elementy v časově-frekvenčním spektrogramu, nekoherentní plazmasférický sykot, rovňkový šum a další. V oblasti nízkých frekvencí přechází hvizdový mód v rychlou magnetosonickou

²Polarizaci elektrického pole vlny definujeme vzhledem k okolnímu magnetickému poli \mathbf{B}_0 , nikoli vůči vlnovému vektoru \mathbf{k} .

vlnu. Na elektronové cyklotronové frekvenci index lomu hvizdového módu diverguje, neboť polarizace vlny a gyrace elektronů mají stejný smysl. Na frekvenci (při zanedbání iontů)

$$\omega_R = \frac{|\omega_{ce}|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{ce}}{2}\right)^2 + \omega_{pe}^2} \quad (2.31)$$

se nachází R-cutoff (frekvenční ořezání), přičemž v oblasti $\omega_{ce} < \omega < \omega_R$ je index lomu $\mu = \sqrt{R}$ ryze imaginární. Vlnový mód v oblasti $\omega > \omega_R$ se nazývá mód volného prostoru, neboť zdola konverguje k hodnotě $\mu = 1$ a vlna se tak na velmi vysokých frekvencích chová jako ve vakuu.

Rezonanční frekvence pro levotočivou vlnu se vyskytují na cyklotronových frekvencích kladně nabitých iontů. Mezi každými dvěma cyklotronovými frekvencemi se vyskytuje L-ořezání, přičemž jednoduché analytické vyjádření existuje pouze pro ořezání mezi protonovou a elektronovou cyklotronovou frekvencí (opět při zanedbání pohybu iontů)

$$\omega_L = -\frac{|\omega_{ce}|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{ce}}{2}\right)^2 + \omega_{pe}^2}. \quad (2.32)$$

Nad tímto ořezáním začíná levotočivý mód volného prostoru. Nízkofrekvenční levotočivé vlny spojitě přecházejí v Alfvénovy magnetohydrodynamické vlny. Disperzní větve vlnových módů pro paralelní šíření jsou v celém rozsahu frekvencí vykresleny na obrázku 2.1.

Pro kolmé šíření vln dostaneme z vyjádření studené disperzní relace (2.30) kořeny $\mu^2 = P$ a $\mu^2 = RL/S$. První mód je transversální a nazývá se řádný (O – *Ordinary*), neboť v důsledku paralelního elektrického pole vlny, a tudíž i paralelního pohybu částic, necítí magnetické pole. Od ořezání na ω_{pe} jeho index lomu s frekvencí roste a podobně jako u paralelně se šířících R a L módů konverguje k $\mu = 1$.

Druhé řešení představuje tzv. mimořádný (X – *eXtraordinary*) vlnový mód. Tento mód má longitudinální i transversální komponentu. Ořezávací frekvence jsou dány podmínkami $R = 0$ a $L = 0$. S každou složkou plazmatu je asociována jedna hybridní frekvence, na které index lomu mimořádného módu diverguje. Horní hybridní frekvence je ostře větší než než ω_{ce} a při zanedbání iontů lze vypočítat ze vztahu

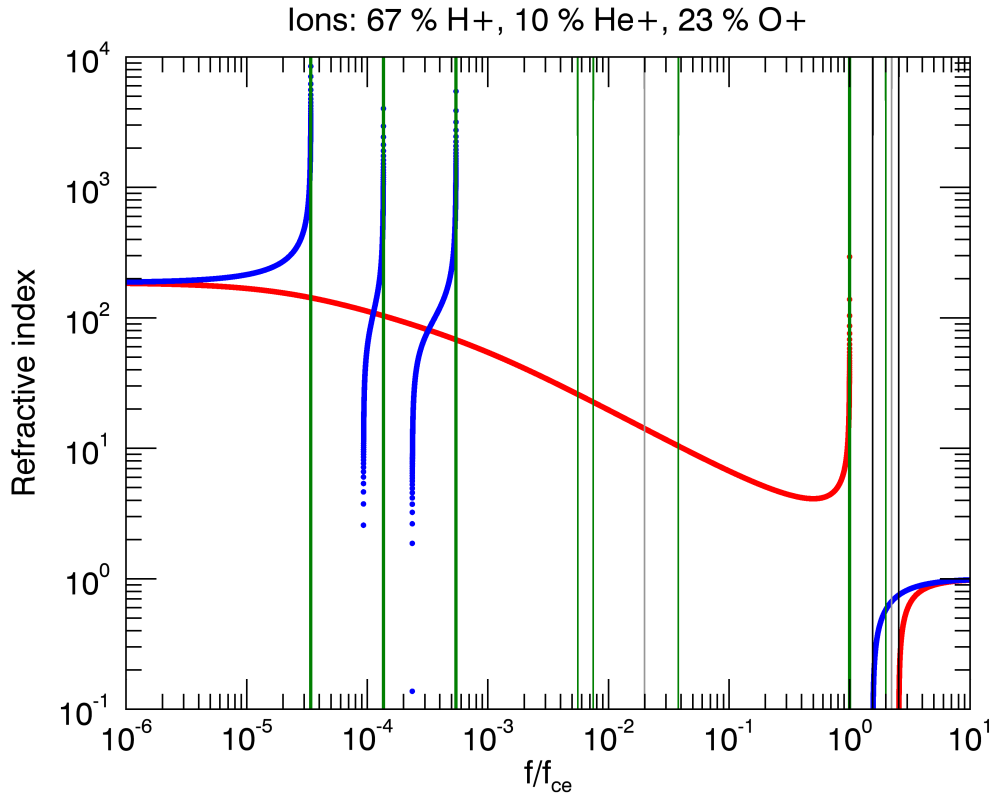
$$\omega_{uh} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}. \quad (2.33)$$

Dolní hybridní frekvence se nachází mezi protonovou a elektronovou cyklotronovou frekvencí a za předpokladu $\omega_{cp} \ll \omega_{lh} \ll |\omega_{ce}|$ ji vyjádříme ve tvaru

$$\omega_{lh} = \left(\frac{1}{\omega_{pp}^2} + \frac{1}{|\omega_{ce}|\omega_{cp}} \right)^{-1/2}. \quad (2.34)$$

Iontové hybridní frekvence leží mezi nejbližšími páry iontových cyklotronových frekvencí a je nutné počítat je numericky. Disperzní větve vln s $\theta_k = \pi/2$ jsou vykresleny na obrázku 2.2.

U vln s obecnou hodnotou θ_k dochází k přepojování levotočivých iontových disperzní větví na hvizdový mód. Důsledkem je pozorování přepínání polarizace vlna na tzv. crossover frekvencích určených rovnicí $D(\omega) = 0$. Vlny na disperzní

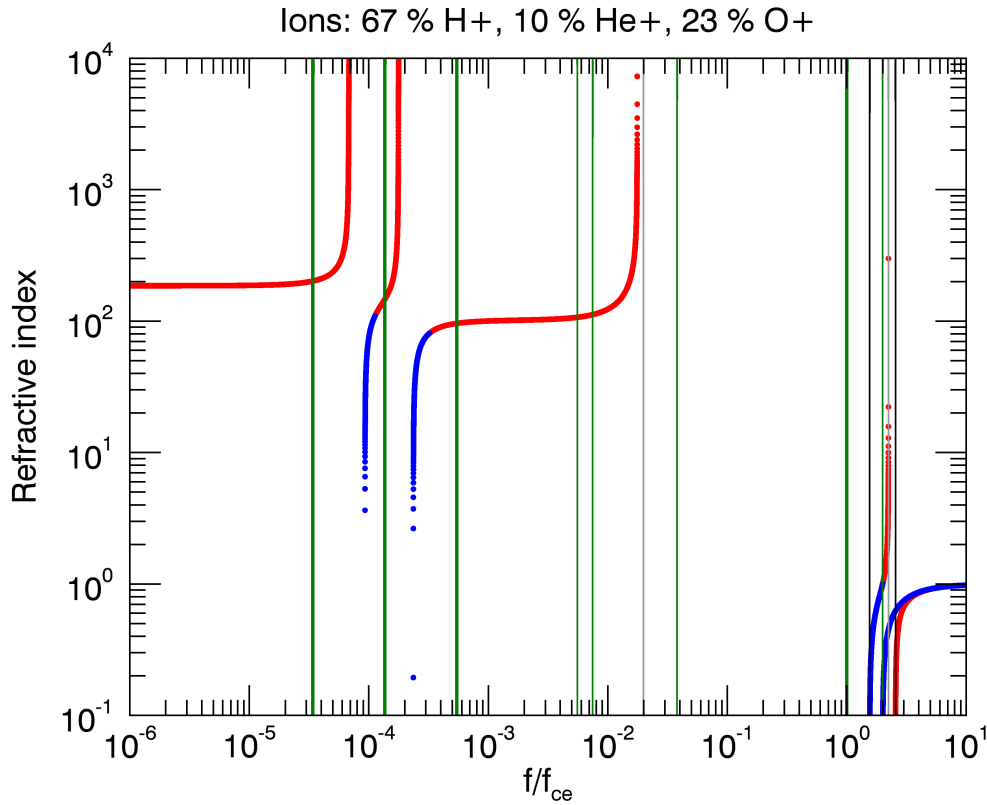


Obrázek 2.1: Disperzní větve elektromagnetických vln ve studeném plazmatu pro $\theta_k = 0^\circ$. Modré body značí levotočivé vlny, červené body pravotočivé. Silné zelené čáry představují cyklotronové frekvence, tenké zelené čáry jsou plazmové frekvence, černé čáry vyznačují L–ořezání a R–ořezání v elektronové oblasti a šedá čára jsou horní a dolní hybridní frekvence. Plazmová a cyklotronová frekvence elektronů jsou v poměru $\omega_{pe}/\omega_{ce} = 2$. Pro zvýraznění levotočivých větví v oblasti iontových cyklotronových frekvencí je voleno vysoké zastoupení těžších iontů, $n(O^+) = 0,23 n_e$, $n(He^+) = 0,10 n_e$.

větvi s rezonancí na protonové frekvenci, jež mají frekvenci větší než crossover frekvence, se nazývají protonové hvizdy – podobně pro další ionty. Disperze iontových hvizdů v časově–frekvenčním diagramu je opačná než u elektronových hvizdů, protože ty obvykle pozorujeme v oblasti, kdy s rostoucí frekvencí vlny index lomu a grupová rychlost klesají, zatímco u iontových hvizdů je tomu opačně. Příslušné disperzní větve jsou vidět v levé části obrázku 2.3, vykreslené pro $\theta_k = 30^\circ$.

K rychlé orientaci ve vlnových módech studeného plazmatu slouží CMA diagram (Clemmow–Mullaly–Allis). Tento diagram, ukázaný na obr. 2.4 pro elektron–protonové plazma, rozděluje graf s osami $X = (\omega_{pe}/\omega)^2$, $Y = (\omega_{ce}/\omega)^2$ na oblasti vymezené rezonančními a ořezávacími frekvencemi. V každé oblasti je vykreslena topologie indexu lomu v polárním diagramu $\mu(\theta_k)$.

Při zahrnutí teplotních efektů se disperzní větve elektromagnetických vln v plazmatu výrazně změní. V oblasti nízkých frekvencí přibude pomalý



Obrázek 2.2: Disperzní větve elektromagnetických vln ve studeném plazmatu pro $\theta_k = 90^\circ$. Značení a volba frekvencí jako v obrázku 2.1.

magnetosonický mód, elektrostatické plazmové oscilace přejdou v Langmuirovy vlny a na cyklotronových harmonikách a hybridních frekvencích dojde pro téměř kolmé šíření k rozštěpení disperzních větví do Bernsteinových módů.³

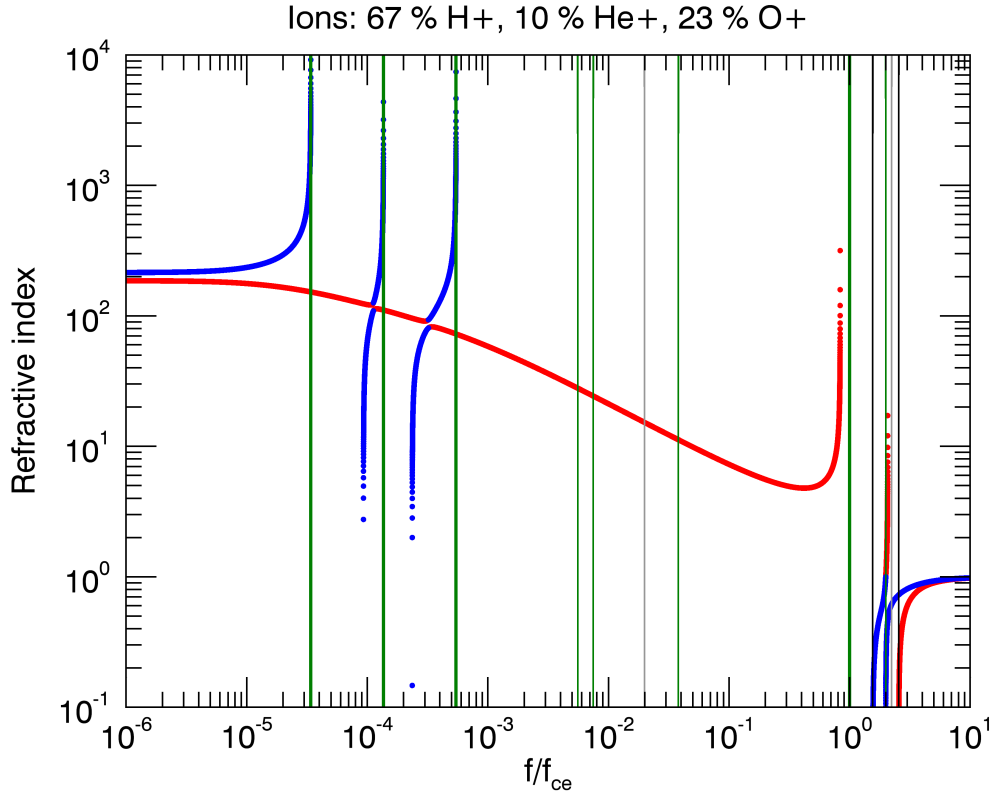
Langmuirovy vlny existují i v nemagnetizovaném plazmatu. Jejich disperzní relaci v aproximaci $\omega/k_{\parallel} \gg \sigma_{\parallel}$ a se zanedbáním útlumu a pohybu iontů získáme z rovnice (2.22) jako kořen $K_{zz} = 0$, vyjádřeno ve frekvenci

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3 \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right) k_{\parallel}^2, \quad (2.35)$$

přičemž jsme předpokládali izotropní Maxwellovo rozdělení a provedli rozvoj PDF okolo nuly do třetího řádu. Disperzní větev Langmuirových vln je vykreslena na obrázku 2.5. V souladu s rovnicí (2.35) vidíme, že tento mód představuje navázání na plazmovou oscilaci pro malé hodnoty velikosti vlnového vektoru $|\mathbf{k}|$, resp. indexu lomu μ . Zdrojem Langmuirových vln jsou například svazkové nestability.

Ze susceptibility horkého plazmatu v aproximaci kolmého šíření (2.23) získáme řešení disperzní relace $\mu^2 = K_{zz}$ a $\mu^2 = K_{yy} - K_{xy}K_{yx}/K_{xx}$, z nichž první je

³V literatuře se někdy označují jako Bernsteinovy módy pouze elektrostatické módy s $\theta_k = \pi/2$, elektromagnetické vlny šířící se na úhlech $\theta_k \approx \pi/2$ pak nazýváme *Bernstein-like* módy.



Obrázek 2.3: Disperzní větve elektromagnetických vln ve studeném plazmatu pro $\theta_k = 30^\circ$. Značení a volba frekvencí jako v obrázku 2.1.

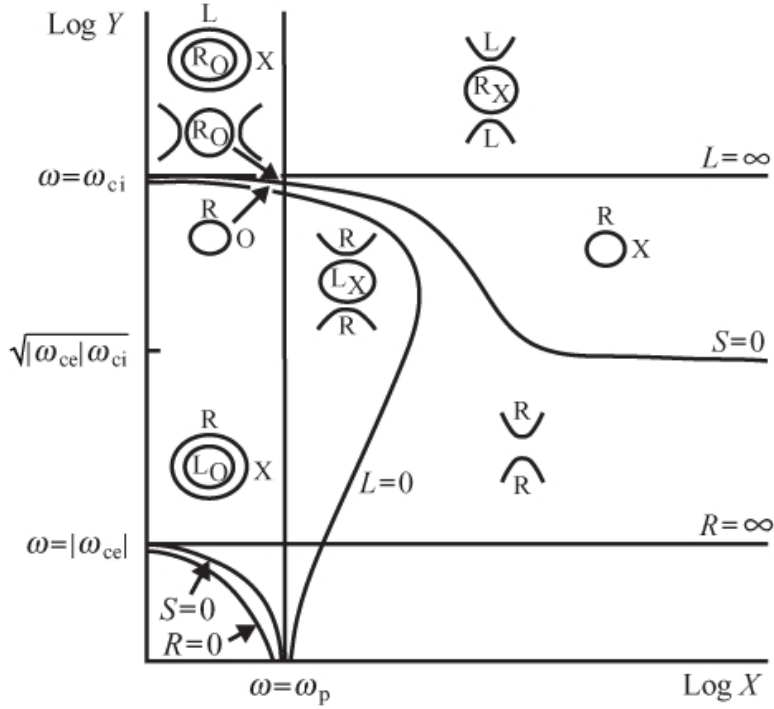
analogie studeného O módu a druhé odpovídá X módu. Druhé řešení pro $|K_{xx}| \ll |K_{xy}|$ definuje elektrostatické Bernsteinovy módy. V aproximaci velkých indexů lomu získáme tvar disperzních větví Bernsteinových módů z rovnice $K_{xx} = 0$. Tu lze s využitím $\Lambda_n = \Lambda_{-n}$ a zanedbáním pohybu iontů přepsat do tvaru

$$0 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Lambda_n \frac{1}{\omega^2 - n^2 \omega_{ce}^2}. \quad (2.36)$$

Exaktní tvar disperze Bernsteinových módů vypočtený podle výrazů pro susceptibilitu (2.23) je vykresleny na obr. 2.6. Mezi zdroje Bernsteinových vln patří nestabilita na ztrátovém kuželu ($\partial f_0 / \partial v_\perp > 0$, pro model distribuce viz rovnici (4.8)) a třívlňová interakce (stručný popis interakce viz kapitola 2.6).

2.5 Tlumení, růst a nestability

Pro vznik elektromagnetické emise v plazmatu je nezbytná existence nestabilního rychlostního rozdělení částic, ze kterého rostoucí vlny získávají energii. Stabilní rozdělení může způsobovat pouze útlum šířící se vlny. Níže uvádíme základní charakteristiky útlumů a nestabilit, které významně ovlivňují výskyt a intenzitu elektromagnetických emisí v planetárních magnetosférách.



Obrázek 2.4: CMA diagram vln ve studeném elektron-protonovém plazmatu. V levé dolní části se nacházejí módy volného prostoru (vysoké frekvence), v pravé horní části, zhruba uprostřed je oblast hvizdů a v pravé horní části leží protonové hvizdy, Alfvénův mód a rychlý magnetosonický mód (nízké frekvence). Otevřené polární grafy značí přítomnost rezonančního kužele (divergence μ se změnou θ_k). Převzato z Gurnett a Bhattacharjee, [2017].

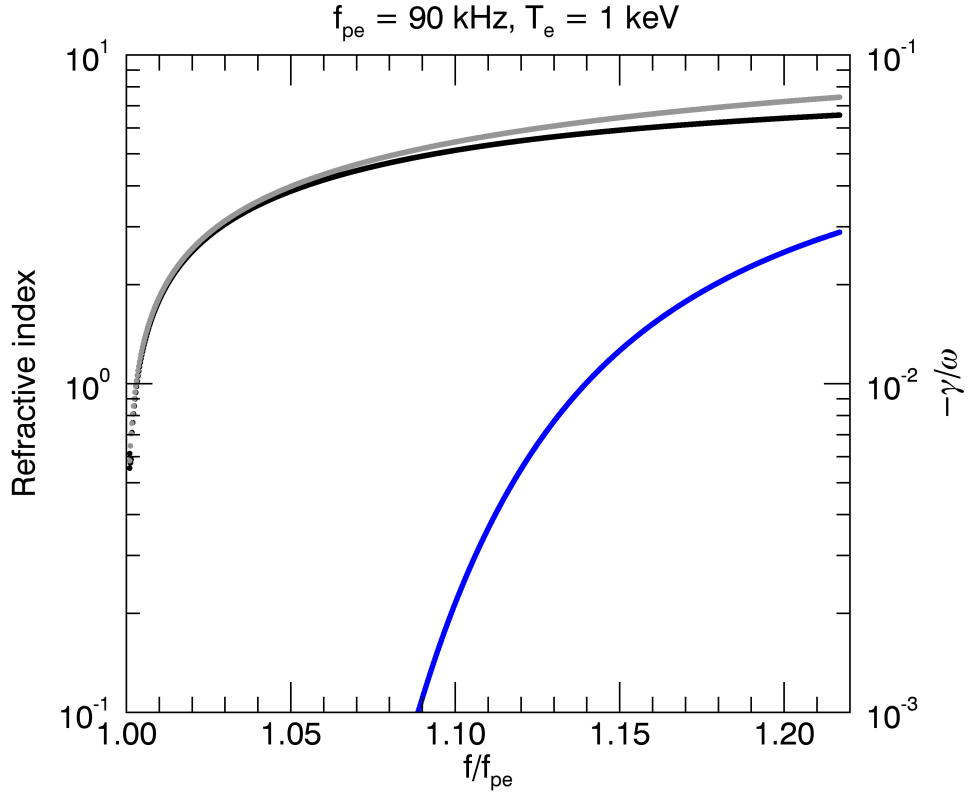
2.5.1 Landauův útlum

Landauův útlum elektromagnetických vln se vyskytuje v magnetizovaném i nemagnetizovaném plazmatu. Standardně (Stix, [1992], Swanson, [2003] a Gurnett a Bhattacharjee, [2017]) je definován pro longitudinální elektrostatické (Langmuirovy) vlny v aproximaci malých útlumů $\gamma \equiv \text{Im } \omega$, $|\text{Im } \omega| \ll |\text{Re } \omega|$ vztahem

$$\gamma = \pi \text{sgn}(k_{\parallel}) \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 (\partial \text{Re } D / \partial \omega)} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \Big|_{v_{\parallel} = \omega/k}, \quad (2.37)$$

přičemž zde f_0 má význam redukovaného (tj. integrovaného přes v_{\perp}) rychlostního rozdělení pro paralelní směr. Obecně se vyskytuje u všech elektromagnetických vln, které mají nenulovou paralelní složku elektrického pole [Kennel a Petschek, 1966; Sazhin, 1991]. Typickým příkladem jsou vlny ve hvizdovém módu, které v důsledku Landauova útlumu (ale i dalších efektů) pozorujeme převážně s kvaziparalelními vlnovými vektory, viz též kapitola 5.2.

Fyzikální význam Landauova útlumu je schován v členu $\partial f_0 / \partial v_{\parallel}$. Uvažme referenční systém pohybující se fázovou rychlostí vlny, elektrostatický potenciál paralelní složky pole je pak téměř stacionární. Částice zachycené v potenciálové jámě elektrického potenciálu vlny s rychlostí menší než fázová energii získávají a rychlejší částice naopak ztrácejí. Pokud je sklon f_0 záporný (typicky pro unimodální rozdělení centrované v nule), převažují pomalejší částice a v součtu



Obrázek 2.5: Disperzní větev Langmuirova módu. Šedě je znázorněn výsledek výpočtu podle aproximativního vztahu (2.35), černě exaktní výpočet s využitím (2.21). Útlum normovaný na frekvence je vykreslen modře. V pravé části grafu platí $\omega/(k_{\parallel}\sigma_{\parallel}) \approx 3$. Z vysokých hodnot útlumu je zřejmé, že Langmuirovy vlny se mohou vyskytovat jen ve velice úzkém frekvenčním pásmu.

dochází k přelévání energie vlny do částic. Pro rozdělení s kladným gradientem v oblasti fázové rychlosti dochází k růstu vlny.

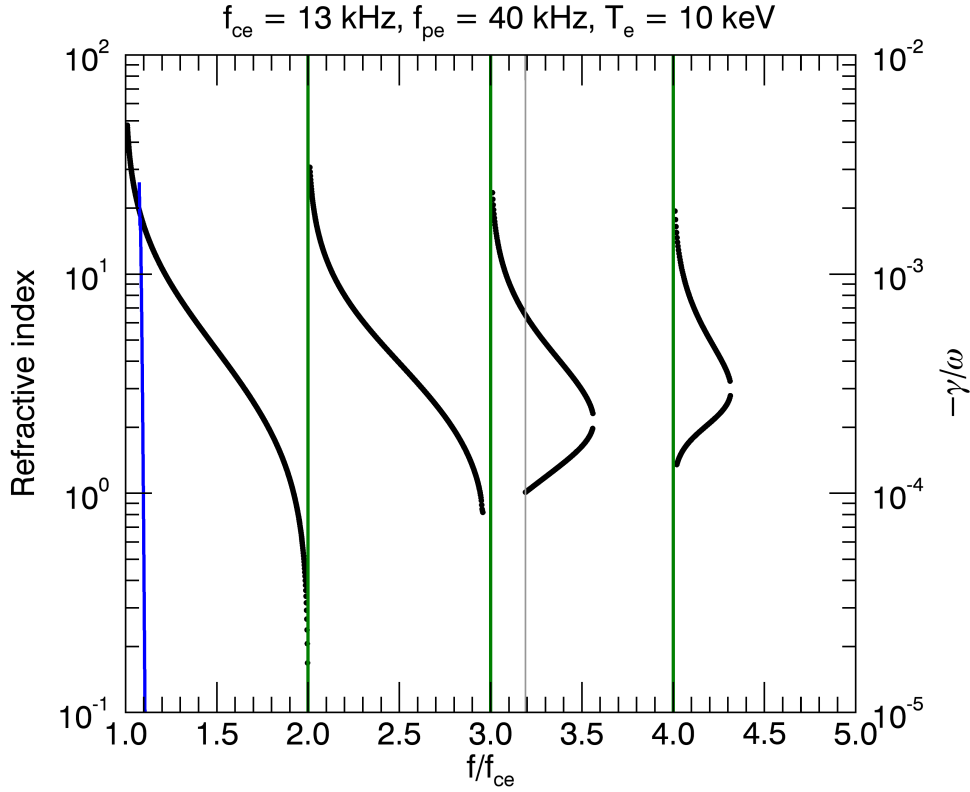
2.5.2 Cyklotronový útlum

Za předpokladu $|\text{Im } \omega| \ll |\text{Re } \omega|$ lze útlum/růst vln vyjádřit obecně ve tvaru

$$\gamma = -\frac{\text{Im } \mathcal{D}}{\partial \text{Re } \mathcal{D} / \partial \omega}. \quad (2.38)$$

Lze ukázat, že $\partial \text{Re } \mathcal{D} / \partial \omega$ je vždy kladné, znaménko γ pak závisí čistě na imaginární části disperzní relace. V případě paralelního šíření vln lze na základě obecného výrazu pro susceptibilitu (2.9) a vztahů (2.1) a (2.6) nalézt

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{\pi}{\partial \text{Re } \mathcal{D} / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{|k_{\parallel}|} \int_0^{\infty} f_{s0} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} + \right. \\ & \left. + \pi \text{sgn}(k_{\parallel}) \int_0^{\infty} \left(v_{\parallel} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_{\parallel}} \right) v_{\perp}^2 dv_{\perp} \right) \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel,\text{res}}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$



Obrázek 2.6: Disperzní větve Bernsteinových módů. Indexy lomu jsou vykresleny černě, zelené svislé čáry jsou násobky elektronové cyklotronové frekvence a šedá čára je horní hybridní frekvence. Modře je znázorněn prudký nárůst útlumu s klesající frekvencí pro levou disperzní větev, spočtený pro úhel $\theta_k = 89,5^\circ$. Nad a pod ω_{uh} jsou Bernsteinovy módy kvalitativně odlišné. Třetí větev zleva se na horní hybridní frekvenci napojuje na X mód. Přerušování třetí a čtvrté větve na tzv. Q frekvencích je způsobeno metodou výpočtu implementovanou v programu RAY, kapitola 4, kdy ke fixní frekvenci hledáme index lomu – tato metoda je výhodná pro ray tracing, ne však pro zkoumání disperzních větví.

Druhý integrál je nulový pro izotropní rozdělení, zbylá část výrazu je vždy záporná a představuje cyklotronový útlum. Na rozdíl od Landauova útlumu nezávisí na derivaci rychlostní distribuce, ale přímo na její hodnotě vyčíslené v rezonanci. Z fyzikálního pohledu k tomuto útlumu přispívají všechny částice poblíž cyklotronové rezonance, v kontrastu s Landauovým útlumem, kdy se jednalo pouze o částice s rychlostmi nižšími než ω/k . Speciálně pro hvizdový mód a Maxwelllovo rozdělení pak získáme

$$\gamma = -\pi \frac{\omega(|\omega_{ce}| - \omega)^2 \omega_{pe}^2}{|\omega_{ce}| k_{\parallel}} \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}} \exp\left(-\frac{m_e v_{\parallel, \text{res}}^2}{2k_B T_e}\right) \Big|_{v_{\parallel, \text{res}} = (\omega - |\omega_{ce}|)/k_{\parallel}}, \quad (2.40)$$

kde

$$v_{\parallel, \text{res}} = -c_0 \text{sgn}(k_{\parallel}) \frac{(|\omega_{ce}| - \omega)^{3/2}}{\omega^{1/2} \omega_{pe}}. \quad (2.41)$$

Podle očekávání je útlum nejsilnější v okolí cyklotronové frekvence a slábne s klesající teplotou. Nenulové hodnoty v oblasti $|\omega_{ce}| < \omega < \omega_R$ jsou platné i pro studené plazma a odpovídají evanescentní vlně, neboť v této oblasti frekvencí se nachází zakázaný pás. Podobný výsledek lze odvodit pro protonové hvizdy [Kennel a Petschek, 1966].

2.5.3 Anizotropií řízená nestabilita

Stabilní rychlostní rozdělení částic je ve fyzice vln v plazmatu definováno jako takové, pro které neexistuje kořen disperzní relace s kladným γ , tj. částice neposkytují zdroj volné energie pro růst vln. V jedné dimenzi je obecně každé unimodální rozdělení stabilní (Gardnerova věta), ne každé polymodální rozdělení však musí být nestabilní [Stix, 1992]. Pojem stability zde nijak nesouvisí s termodynamickou rovnováhou nebo s odezvou na perturbaci.

V sekci o Landauově útlumu jsme zmínili, že v případě distribuce s kladným gradientem dochází k růstu vln – může jít o částicový svazek nebo obecně o polymodální distribuci. I unimodální bimaxwellovské rozdělení bez driftu však umožňuje růst vln na tzv. anizotropní nestabilitě. Uvažme opět případ hvizdového módu, na nějž se hlavní výsledky této práce uvedené v kapitole 5 zaměřují především. Z druhého integrálu v rovnici (2.39) pak po dosazení studené disperzní relace za $\text{Re } D$ (nehybné ionty, $\omega_{pe} \gg |\omega_{ce}|$) vypočteme růst

$$\gamma = \pi c_0 \frac{(|\omega_{ce}| - \omega)^{5/2} \omega^{1/2}}{|\omega_{ce}| \omega_{pe}} \left(a_e \frac{|\omega_{ce}| - \omega}{\omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{\parallel,e}}} \exp\left(-\frac{m_e v_{\parallel,\text{res}}^2}{2k_B T_{\parallel,e}}\right). \quad (2.42)$$

Vidíme, že o růst jedná pouze pro kladná a_e , neboli $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Přesněji, z výrazu (2.42) plyne podmínka na anizotropní růst (nestabilitu) ve tvaru nerovnosti

$$a_e > \frac{\omega}{|\omega_{ce}| - \omega}. \quad (2.43)$$

Lze ukázat, že stejná podmínka platí i pro protonové hvizdy [Kennel a Petschek, 1966].

2.6 Relativistické plazma a nelineární efekty

Jak bylo uvedeno v kapitole 1, okolo Země se kvůli jejímu silnému magnetickému poli utváří radiační pásy se stabilním zastoupením elektronů s energií v řádech 10^2 keV. Podobná situace je v případě Jupiteru, kde jsou významné i populace na energiích vyšších než 10 MeV. Klidová rychlost elektronu je $m_e \doteq 500$ keV a ze vztahu mezi Lorentzovým faktorem a kinetickou energií

$$\gamma = 1 + \frac{E_k}{m_e c_0^2} \quad (2.44)$$

plyne, že při práci s těmito částicemi je potřeba vycházet ze speciální teorie relativity. Relativistické efekty je potřeba zahrnout do výpočtu dielektrického tenzoru i v případě, kdy $\gamma \approx 1$, a to v případech, kdy se člen $\zeta_n = \omega - n\omega_c$ v kolmé aproximaci (2.23) blíží nule. Členy tvaru $\zeta_n/k_{\parallel}v_{\parallel}$ v limitě kolmého šíření

pro $\zeta_n \rightarrow 0$ vedou na neurčitý výraz. Zahnutí relativistických efektů změni hodnoty jmenovatelů v integrálu přes p_{\parallel} v rovnici (2.9) a nefyzikální chování v rezonanci je tak odstraněno. Neurčitý výraz zmizí i při uvážení slabých srážek, viz kapitola 2.3.

Zahnutí relativistických efektů vyžaduje nahradit klasickou cyklotronovou frekvenci $\omega_c = Bq/m$ relativistickou cyklotronovou frekvencí

$$\omega_{\text{cr}} = \frac{\omega_c}{\gamma} = \frac{qB}{\sqrt{m^2 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{c^2}}} = \frac{qB}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.45)$$

a pracovat při výpočtu susceptibility s hybností namísto rychlosti. Odvození exaktního tvaru disperzního tenzoru pro relativistické rovnovážné (Maxwell–Jüttnerovo) rozdělení je uvedeno v učebnici Swanson, [2003]. Zde zmíníme pouze vliv energetických elektronů na X mód s indexem lomu

$$\mu^2 = \frac{K_{xx}K_{yy} + K_{xy}^2}{K_{xx}}. \quad (2.46)$$

Zatímco aproximace studeného plazmatu nepředvídá žádné změny X módu v blízkosti cyklotronových elektronových harmonik, horká disperzní relace napojuje disperzní křivky X módu na Bernsteinovy módy a na rezonanční frekvenci předvídá divergenci. Oproti tomu exaktní relativistická disperzní relace předvídá dva vlnové módy, z nichž jeden má ořezání na cyklotronové harmonice, druhý je spojitý a oba vykazují útlum. Připomeňme, že horké plazma vede na útlum Bernsteinových vlnových módů pouze v případě, kdy vlnový vektor není přesně kolmý na vnější magnetické pole. Obecně platí, že zahnutí relativistických efektů do disperzní relace vede k rozmazání rezonancí.

Kromě zanedbání relativistických jevů jsme v této kapitole úmyslně opomjeli nelineární efekty, neboť jsme jako výchozí rovnici pro odvození susceptibility horkého plazmatu (2.9) použili linearizovanou Vlasovovu rovnici. Linearizaci členu $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f$ jsme mohli provést díky předpokladu malých vlnových amplitud. Pro nestabilní rychlostní rozdělení, kdy energie vlny významně narůstá, tuto aproximaci provést nelze, neboť rozvoj distribuce $f(t)$ okolo rovnováhy f_0 nezahrne exponenciálně rostoucí perturbaci/vlnu $f_1(t)$ ve všech časech t . Linearizovaná teorie horkého plazmatu predikuje kinetický efekt f_0 na vlnu $f_1(t)$, ale zpětné ovlivňování rovnovážné distribuce vlnou je ignorováno.

Z mnoha přístupů k nelineárním vlnovým efektům zde krátce uvedeme pouze kvazilineární teorii. V té nahrazujeme rozvoj okolo časově nezávislé rovnovážné distribuce f_0 rozvojem okolo prostorově středované funkce $\langle f_{s0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$, jež se v čase pomalu mění. Pro perturbaci prvního řádu (vlnu) platí $\langle f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = 0$. Vyplývající kvazilineární difúzní rovnice (tvar a odvození viz Gurnett a Bhattacharjee, [2017]) vede ke snižování kladných gradientů v rovnovážné rychlostní distribuci $\langle f_{s0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$ a v důsledku k úplnému smazání nestability, na které docházelo k růstu vlny. Vliv vlny na rovnovážnou distribuci můžeme v aplikacích uvedených v této práci zanedbat, neboť budeme později požadovat $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ neboli malý růst vln (viz kapitola 3.2).

V následujících kapitolách také zcela vynecháme vliv interakcí typu vlna–vlna. Díky širokému spektru vlnových módů v plazmatu může dojít k rezonanci

vlny na frekvenci $\omega_1 \pm \omega_2$, vzniklé amplitudovou modulací, s třetím vlnovým módem na frekvenci $\omega_3 \approx \omega_1 \pm \omega_2$. Chování systému tří elektromagnetických a/nebo akustických vln v plazmatu odpovídá systému tří harmonických oscilátorů vázaných slabě nelineární vazbou [Gurnett a Bhattacharjee, 2017]. Typickým příkladem vázaného systému vln v magnetosférickém plazmatu může být interakce hvizdů, Alfvénových vln a Langmuirových vln v aurorální oblasti. Simulace tohoto chování je možné provést i v aproximaci geometrické optiky, v dalších kapitolách se však omezíme na paprskové simulaci izolovaného vlnového módu.

3. Ray tracing

Metoda ray tracing neboli trasování paprsků slouží k simulacím šíření elektromagnetických vln v aproximaci geometrické optiky. Výhoda této metody spočívá v rychlosti numerického výpočtu, které je pro tyto úlohy stále ještě zapotřebí: žádná práce prezentující přímé řešení 3D Maxwellových rovnic (*full-wave*) ve volném magnetosférickém plazmatu na dlouhých časových škálách nebyla v době psaní tohoto textu (podle vědomí autorů) publikována.

Z matematického hlediska spočívá aplikace ray tracingu v řešení sady obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -\operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ \frac{d \operatorname{Re} \omega}{dt} &= -\operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Tyto rovnice se nazývají Hamiltonovy rovnice geometrické optiky, zde uvedeny pro prostředí s malou absorpcí, kdy lze uvažovat \mathbf{r} , \mathbf{k} reálná (viz kapitola 3.2). Frekvence ω je obecně komplexní a jednoznačnost řešení je zajištěna disperzní relací $\mathcal{D}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega, t) = 0$, jež zde dědí závislost na \mathbf{r} , t z vnějšího magnetického pole $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$ rychlostních rozdílů populací částic $f_{s0}(\mathbf{r}, t)$ a hustot $n_s(\mathbf{r}, t)$. V následujících sekcích nastíníme jejich odvození nejprve pro studené plazma a poté pro horké plazma v aproximaci $|\operatorname{Im} \omega| \ll |\operatorname{Re} \omega|$. Držet se přitom budeme především prací Synge, [1954], Suchy, [1981], Budden, [1985] a Buchdahl, [1993] a odkazů uvnitř.

3.1 Reálné Hamiltonovy rovnice (studené plazma)

Nejjednodušším přístupem k odvození Hamiltonových rovnic geometrické optiky je postulování Fermatova principu nejmenšího času (přesněji: principu stacionární fáze) a zavedení odpovídajícího optického lagrangiánu a hamiltoniánu následovného ansatzem disperzní relace za hamiltonián. Ačkoli tento postup vede rychle k cíli, neposkytuje pochopení vztahu mezi geometrickou optikou, vlnovou optikou a disperzní relací plazmatu.

Rigorózní postup vychází z tzv. eikonálové aproximace. Uvažujme Maxwellovy rovnice pro nehomogenní, v obecnosti časově závislé prostředí ve tvaru [Gurnett a Bhattacharjee, 2017]

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial t}; \mathbf{r}, t \right) \cdot \mathbf{f} = 0,\tag{3.2}$$

kde $\overset{\leftrightarrow}{\mathbb{D}}$ je lineární parciální diferenciální operátor a \mathbf{f} je vektor obsahující všechny složky elektromagnetického pole. Tento vektor můžeme rozepsat do tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}, t) e^{iS(\mathbf{r}, t)},\tag{3.3}$$

kde $\mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)$ je komplexní amplitudová funkce v \mathbf{k} prostoru, zahrnující závislost fáze jednotlivých složek pole na \mathbf{k} a na ω . Veličinu $S(\mathbf{r}, t)$ nazýváme eikonál a lze ji v obecnosti zapsat jako integrál

$$S(x^\mu) = \int^x dx'^\mu k^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

kde integrandem je skalární součin polohového a vlnového čtyřvektoru v Minkowského metrice. Závislost na \mathbf{k} je vtažena do amplitudové funkce $f(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)$. Krok, kterým přecházíme od vlnové optiky ke geometrické, spočívá v předpokladech

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right| \ll \left| \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial S}{\partial t} \right|, \quad (3.5)$$

neboli v zanedbání časových a prostorových změn amplitudy v porovnání se změnami eikonálu. Ekvivalentně, vlnová délka λ vlny je mnohem menší než charakteristická délková škála L změn prostředí, $\lambda/L \ll 1$, a pro frekvenci vlny ω platí $1/(\omega T) \ll 1$, kde T je charakteristická časová škála změn prostředí. Rozvoj vlnové rovnice v λ/L a $1/(\omega T)$ do prvního řádu odpovídá použití aproximačních vztahů (3.5) pro ansatz (3.4). Eikonálová aproximace je příkladem WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) metody řešení lineárních diferenciálních rovnic [Budden, 1985].

Eikonálová aproximace převádí Maxwellovy rovnice na soustavu algebraických rovnic

$$\vec{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, -\frac{\partial S}{\partial t}, \mathbf{r}, t \right) \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (3.6)$$

přičemž z definice (3.4) plyne

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -i\omega. \quad (3.7)$$

Podmínkou řešitelnosti rovnic (3.6) je splnění homogenní disperzní relace $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$ vyhodnocené v bodě \mathbf{r} (viz kapitola 2). Pro rigorózní řešení pomocí metody charakteristik odkazujeme na Synge, [1954], kapitola 2. Tato metoda vede na Hamiltonovy–Jacobiho rovnice, v nichž vystupuje disperzní relace ve tvaru $\Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \omega$ jako hamiltonián (Hamiltonova funkce). Přímým důsledkem jsou časoprostorové Hamiltonovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} &= -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{\partial D}{\partial t}, \\ \frac{dt}{d\tau} &= -\frac{\partial D}{\partial \omega}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

přičemž s využitím stacionarity disperzní relace dostaneme po dělení prvních třech rovnic čtvrtou rovnicí a po zanedbání časové závislosti disperzní relace dostaneme Hamiltonovy rovnice pro stacionární studené plazma

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} \bigg/ \frac{\partial D}{\partial \omega},$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \quad (3.9)$$

Jiný postup odvození Hamiltonových rovnic, jenž zde převezmeme, uvádí Suchy, [1981]. Výchozím bodem je rozepsání totální derivace disperzní relace

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\mathcal{D}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ 0 &= \frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ 0 &= \frac{d\mathcal{D}}{d\mathbf{k}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tyto vztahy plynou z podmínky $\mathcal{D}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega, t) = 0$ platné v celém parametrickém prostoru. $d\mathcal{D}/d\omega = 0$ není další nezávislou rovnicí, jak se lze přesvědčit vyjádřením $\partial \mathcal{D} / \partial \mathbf{k}$ a dosazením do třetí rovnice v soustavě (3.10). K další úpravě použijeme vztahy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{r}} - \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial t} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

získané na základě záměnnosti druhých derivací (předpokládáme hladkou funkci S) a bezvírovosti gradientu. Na tyto rovnice lze nahlížet jako na důsledek teorému Noetherové aplikovaného na mechanický systém, jehož vývoj je specifikován požadavkem na stacionaritu akce/eikonálu $S(\mathbf{r}, t)$. První rovnice se někdy nazývá Whithamův zákon zachování (zachování toku akce) a druhá rovnice Sommerfeldův–Rungeův zákon lomu (bezvírovost pole vlnového vektoru). První dvě z rovnic (3.10) dělíme výrazem $\partial \mathcal{D} / \partial \omega$ a s využitím (3.11) a třetí rovnice je přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathbf{k} &= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ \mathcal{D}\omega &= -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Diferenciální operátor

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.13)$$

představuje totální časovou derivaci vzatou v soustavě pohybující se grupovou rychlostí

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} \bigg/ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \quad (3.14)$$

Zanedbáním časové závislosti disperzní relace opět získáme rovnice (3.9).

Pro disperzní relaci studeného plazmatu (kapitola 2.3.3) lze Hamiltonovy rovnice zpracovat analyticky až po derivace $\partial \mathbf{B}_0 / \partial \mathbf{r}$, $\partial n_s / \partial \mathbf{r}$. Tato forma Hamiltonových rovnic byla v oboru kosmického plazmatu používána již v padesátých letech 20. století, příklad úpravy do tvaru vhodného pro počítačové zpracování je uveden v Haselgrove, [1963].

3.2 Aproximace komplexních Hamiltonových rovnic (horké plazma)

Postup získání Hamiltonových rovnic uvedený v sekci 3.1 lze přímo zobecnit pro frekvenci vlny nabývající komplexních hodnot. V důsledku jsme nuceni při odvození Hamiltonových rovnic pracovat s charakteristickými křivkami v komplexním prostoročase a požadovat existenci analytického rozšíření funkcí popisujících vlastnosti plazmatu (více o komplexní geometrické optice viz Felsen a Baum, [1976] a Sonnenschein et al., [1998]). Jelikož numerické hledání komplexních paprsků a jejich průniku s reálným prostorem klade mnohem větší nároky na výkon počítače a složitost numerického kódu, omezíme se na prostředí s malým útlumem/růstem. Toto omezení vyjádříme převedením definice grupové rychlosti a zákonů (3.11) do tvaru

$$v_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \operatorname{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (3.15)$$

a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \operatorname{Re} \mathbf{k}, \\ 0 &= \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \operatorname{Re} \omega}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Poloha a čas jsou reálné.

Jelikož pro vlny s malou změnou amplitudy je vlnový balík prostorově lokalizován v daném časovém bodě na základě stacionarity imaginární části fáze v prostoru (podrobněji viz Felsen a Baum, [1976]), klademe

$$\operatorname{Im} \mathbf{k} = 0 = \frac{d \operatorname{Im} \mathbf{k}}{dt}. \quad (3.17)$$

Dále opět vycházíme z rozpisu totálních derivací disperzní relace, rovnice (3.10), navíc však v rozpisu na imaginární a reálnou část zanedbáme členy

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \mathbf{k}}{\partial \mathbf{r}} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \right) \quad (3.18)$$

a

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \mathbf{k}}{\partial t} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \right). \quad (3.19)$$

Lze ukázat, že toto zanedbání je v souladu s (3.15) a odpovídá vynechání členu řádu $\mathcal{O}(\operatorname{Im}^2 / \operatorname{Re}^2)$. Dále aplikujeme požadavek na nulovost časové derivace v (3.17) pro pozorovatele pohybujícího se grupovou rychlostí a nakonec odtransformujeme rovnice zpět do laboratorní soustavy. Výsledkem těchto úprav jsou reálné Hamiltonovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -\operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \\ \frac{d \operatorname{Re} \mathbf{k}}{dt} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}, \end{aligned}$$

$$\frac{d \operatorname{Im} \omega}{dt} = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \right)^* / \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \right) \right), \quad (3.20)$$

takto zapsané pro stacionární prostředí.

Skutečnost, že třetí rovnice v (3.20) není identicky rovna nule, plyne z podmínky (3.17), avšak $\operatorname{Im} \omega$ zde neodpovídá útlumu/růstu amplitudy vlnového balíku γ . K rigoróznímu vysvětlení tohoto chování je potřeba vyřešit rovnici (3.3) jakožto počáteční úlohu v komplexním prostoru pomocí metody sedlového bodu, viz např. Sonnenschein et al., [1998]. Aby byla zachována reálná trajektorie $\mathbf{r}(t)$, je potřeba definovat grupovou rychlost pomocí hodnot frekvence a vlnového vektoru vyčíslených v sedlovém bodě – tato rychlost se obecně liší od rychlosti prostorového maxima amplitudy vlnového balíku. S definicí grupové rychlosti na základě sedlového bodu je počítáno v celé kapitole 3.2. Jak však ukazuje Suchy, [1981], tento rozdíl je řádu $O(\operatorname{Im}^2 / \operatorname{Re}^2)$, proto za předpokladu malých růstů/útlumů můžeme rychlost v sedlovém bodě a rychlost v prostorovém maximu amplitudy ztotožnit. Nelze však provést ztotožnění $\operatorname{Im} \omega = \gamma$, neboť jde o veličiny malého řádu – imaginární část frekvence v sedlovém bodě neurčuje útlum/růst amplitudy balíku.

Z uvedených důvodů třetí rovnici v (3.20) při řešení Hamiltonových rovnic vynecháváme a nahrazujeme ji vazbou, kterou klade disperzní relace na veličiny γ a $|\mathbf{k}|$. Růstový faktor γ tedy musí být získán numericky z disperzní relace, přičemž dielektrický tenzor horkého plazmatu použitý k odvození disperzní relace je hermitovský; zanedbání antihermitovských složek je v souladu s předpokladem mírného tlumení/růstu [Bernstein, 1975].

4. RAY – Program na ray tracing v horkém plazmatu

Tato kapitola je věnována popisu počítačového programu určeného k paprskové simulaci elektromagnetických vln v horkém homogenním nerelativistickém magnetosférickém plazmatu. Pro stručnost budeme nadále program označovat jménem RAY. Jedná se o soubor procedur napsaných v jazycích Interactive Data Language (IDL) a C, které řeší disperzní relace horkého plazmatu a Hamiltonovy rovnice geometrické optiky a vypočítávají a zpracovávají vlnové charakteristiky podél trajektorie paprsku. Tento program byl sepsán a použit k získání výsledků v kapitole 5. Vstupní soubor, jeho popis a popis výstupního souboru jsou k nalezení v dodatku D.

4.1 Fyzikální modely

4.1.1 Modely magnetického pole

Primárním modelem magnetického pole pro Saturn i Zemi je dipól popsáný rovnicemi (1.1). Rovňkové intenzity polí použité v programu RAY jsou pro Zemi $B_{\text{eq}} = 3,03 \cdot 10^{-5}$ T a pro Saturn $B_{\text{eq}} = 2,0 \cdot 10^{-5}$ T. Model stlačeného dipólu (1.4) obsahuje volný parametr b udávající poměr mezi intenzitou homogenního pole v pozadí (paralelní s osou dipólu) a B_{eq} . Uživatel také může nastavit parametr udávající vzdálenost, na které se intenzity dipólu a stlačeného dipólu vyrovnají, což je zajištěno příslušným zeslabením stlačeného dipólu poblíž Země.

Za účelem výpočtu nárůstu hustoty energie elektromagnetických emisí vedených podél siločar je potřeba umět vyjádřit konvergenci siločar. V meridionální rovině vyjádříme konvergenci/rozevírání siločar multiplikatívním faktorem definovaným pomocí směrové derivace $f_{\text{dip}} = \nabla L \cdot \mathbf{n}$, kde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ a \mathbf{n} je normála k siločáře (na rovníku na denní straně ukazuje ve směru osy x). Pro jednoduchý dipól získáme z derivací rovnice (1.3) faktor

$$f_{\text{dip}}(\lambda_m) = \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_m}}{\cos^3 \lambda_m}, \quad (4.1)$$

kde $f_{\text{dip}}(0) = 1$. Faktor f_{comp} pro stlačený dipól nabývá komplikovanějšího tvaru, který je v programu RAY rozepsán, zde ho ale pro jeho délku neuvádíme. Od dipólového modelu se liší především v oblasti poblíž rovníku na denní straně, kde nabývá hodnot větších než 1, zatímco $f_{\text{dip}} \leq 1$ a $df_{\text{dip}}/d\lambda_m < 0$ pro $\lambda_m \geq 0$. Tyto faktory jsou implementovány ve výpočtu elektromagnetické energie podél paprsku, viz aplikace v kapitole 5.2.

Nejpřesnějším modelem magnetického pole v programu RAY je Tsyganenkův model [Tsyganenko, 1989], distribuovaný v dynamickém modulu GEOPACK pro IDL. Tento modul obsahuje několik verzí Tsyganenkova modelu včetně procedur pro numerické trasování siločar a transformace mezi souřadnicovými systémy (transformační matice používané v programu RAY jsou rozepsány v dodatku A). Nejpoužívanější verze Tsyganenkova modelu, označována T89, modeluje intenzitu

magnetického pole tvořeného prstencovým proudem přibližně podle vztahu

$$\mathbf{B}_{\text{ring}} = \nabla \times A \hat{\mathbf{I}}_m \quad (4.2)$$

kde

$$A = 4B_0 \varrho_0^3 \frac{x^2 + y^2}{(R^2 + 4\varrho_0^3)^{3/2}} \quad (4.3)$$

s volbou $\varrho_0 = 4R_E$ a hodnota B_0 závisí na Kp indexu, což je číslo kvantifikující narušení geomagnetického pole [Menvielle a Berthelier, 1991]. Pro detailní tvar a parametrizaci prstencového proudu viz Tsyganenko, [1989]. Tvar geomagnetického pole v Tsyganenkově modelu je popsán v kapitole 1.2, vykreslené siločáry jsou k nalezení na obrázku 5.6. RAY na vstupu počítá i s parametry pro novější modely včetně T05 storm-time modelu, určení faktoru konvergence siločar však není implementováno pro žádný z Tsyganenkových modelů.

4.1.2 Modely hustoty

V programu RAY je implementováno šest jednoduchých modelů hustoty studeného plazmatu.

Model difúzního ekvilibria `density_diff` pro zemskou magnetosféru vychází z rovnic (1.6). Volitelnými parametry jsou hustota elektronů, teplota iontů a relativní zastoupení iontů v referenční výšce. Počet, hmotnosti a náboje iontů mohou být voleny libovolně, vzhledem k výskytu iontů v ionosféře a magnetosféře Země jde typicky o H^+ , He^+ a O^+ . Součástí modelu je ionosférický F_2 peak definovaný parametry R_0 , R_1 a implementovaný jako multiplikatívni faktor

$$\exp\left(-\frac{(R - R_0)^2}{2((R_0 - R_1)/3)^2}\right), \quad (4.4)$$

kterým je násobena hustota na radiálních vzdálenostech $R < R_0$. Na vzdálenosti R_1 klesne hustota zhruba na 10% oproti vrcholové hodnotě.

Pro správné zohlednění změn hustoty podél siločar je vhodnější empirický model `density_denton` popsáný rovnicemi (1.10) a (1.11). Radiální hustota je zadána tabulkou, přičemž hodnoty mezi datovými body jsou lineárně extrapolovány. Tento model je nepřesný na vzdálenostech $R < 2$, proto je v programu zabudován i model `density_diff_denton`, který okolo hodnoty $R = 2$ hladce napojuje Dentonův model na difúzní ekvilibrium pomocí přepínací funkce (1.12). Dentonův model jsme implementovali pouze pro dipólové magnetické pole nebo stlačený dipól a elektron-protonové plazma.

Dále RAY obsahuje model z Ozogin et al., [2012]

$$n_e(L, \lambda_m) = n_{e0} \cos^{-3/4}\left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_m}{\lambda_{\text{inv}}}\right), \quad (4.5)$$

$$n_{e0} = 10^{4,4698 - 0,4903L},$$

který nemá volné parametry a představuje časově průměrované rozložení hustoty v plazmasféře nad 2000 km získané z dat přístroje RPI na družici IMAGE (NASA). Podobně jako Dentonův model reflektuje změny hustoty podél siločar (v plazmasféře je dipól vždy dobrou aproximací) a předpokládá elektron-protonové plazma.

Posledním modelem hustoty v zemské magnetosféře je model `density_bortnik` převzatý z práce Bortnik et al., [2011]. Tento model vychází z difúzní rovnováhy, ale umožňuje modifikovat radiální profil n_{e0} téměř libovolně.

Modely `density_diff`, `density_denton` a `density_ozhigin` je možné v programu RAY dále modifikovat plazmapauzou, která je modelována přepínací funkcí (1.12) s volitelnou rovníkovou centrální vzdáleností L_{pp} , šířkou a poklesem hustoty. Zdůrazňujeme, že přepínací funkce je aplikována na logaritmus hustoty místo přímo na hustotu. Uživatel také může volit radiální vzdálenost, na které plazmapauza poblíž Země mizí (opět modelováno hyperbolickou tangentou, volitelná rychlost přechodu do pozadové hustoty), a parametr reflektující rozšiřování plazmapauzy poblíž Země v jednotkách L . Plazmapauza je axisymetrická. Každý hustotní model lze navíc doplnit libovolným počtem ductů, tj. 3D trubic natažených na magnetické siločáry s gaussovským nárůstem nebo poklesem hustoty v kolmém řezu. Podobně jako u plazmapauzy uživatel může nastavit radiální vzdálenost, na které se hustotní struktura rozpadá.

Hustota plazmatu v magnetosféře Saturnu je modelována rovnicemi difúzní rovnováhy iontů (1.13). Skupinu vodních iontů v rámci zjednodušení reprezentujeme kyslíkem O^+ . Na základě srovnání příspěvků jednotlivých sil uvedeného v Persoon et al., [2009] ponecháváme v případě iontů O^+ pouze efekt odstředivé síly, u vodíku H^+ pak ponecháváme sílu ambipolárního pole, odstředivou sílu a efekt magnetických zrcadel. Za těchto zanedbání získáme pro hustoty iontů předpisy

$$\begin{aligned} n(O^+) &= n_0(O^+) \exp\left(-\frac{L^2}{3H^2(O^+)} (1 - \cos^6 \lambda_m)\right), \\ n(H^+) &= n_0(H^+) \exp\left(-a(H^+) \ln\left(\frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda_m)^{1/2}}{\cos^6 \lambda_m}\right) - \frac{L}{3H^2(H^+)} (1 - \cos^6 \lambda_m) - \frac{\beta(H^+)}{H^2(H^+)} \Phi\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Hodnota ambipolárního elektrostatického potenciálu Φ je nalezena iterativně pomocí Müllerovy metody (implementována v distribuci IDL podle Press et al., [1992], kapitola 9.5) aplikované na rovnici

$$0 = (n_0(O^+) + n_0(H^+)) e^{\Phi/W_e} - (n(O^+) + n_0(H^+)). \quad (4.7)$$

Jediným volným parametrem je teplotní anizotropie vodíkových iontů, zbylé veličiny jsou získány fitováním dat z družice Cassini [Persoon et al., 2009]. Jedná se o následující hodnoty a vzorce: rovníková hustota kyslíku $n_0(O^+) = 56\,000 L^{-4,3} \text{ cm}^{-3}$, rovníková hustota vodíku $n_0(H^+) = 1\,700 L^{-3,2} \text{ cm}^{-3}$, škálovací výška kyslíku $H(O^+) = 0,048 L^{1,5}$, škálovací výška vodíku $H(H^+) = 0,32 L^{1,4}$, elektronová teplota $W_e = 0,11 L^{1,98} \text{ eV}$ a parametr $\beta(H^+) = 0,665 \text{ V}^{-1}$.

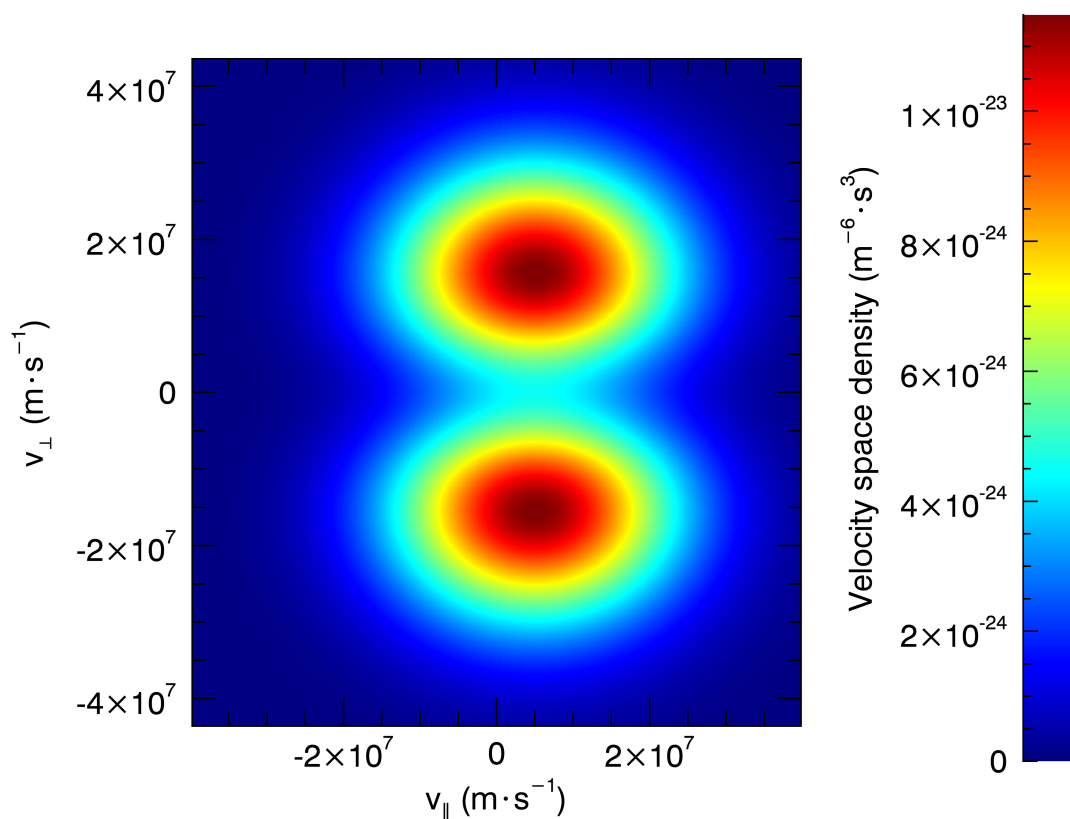
4.1.3 Modely rychlostní distribuce částic

Tvar dielektrického tenzoru uvedený v kapitole 2.2 lze s malými úpravami použít pro libovolnou lineární kombinaci bimaxwellovských rozdělení rychlosti. Proto po

vzoru Rönmark, [1983] a Horne, [1989] zavádíme v programu RAY rychlostní rozdělení ve tvaru

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_{\perp}^2\sigma_{\parallel}} e^{-x^2} \left((1-\delta)e^{-y^2} + \frac{\delta}{1-\beta} (e^{-y^2} - e^{-y^2/\beta}) \right), \quad (4.8)$$

pomocí kterého dokážeme modelovat kromě anizotropie a driftu také ztrátový kužel, případně dvousvazkové plazma. Parametr β představuje šířku ztrátového kužele a δ hloubku ztrátového kužele. Každá populace částic může mít obecně jinou hodnotu δ , β , T_{\parallel} , T_{\perp} a v_d .



Obrázek 4.1: Příklad rychlostní rozdělení elektronů podle modelu (4.8). Parametry: teplota $T_{\parallel} = 1$ keV, anizotropie $a = 0,2$, paralelní driftová rychlost $v_d = 5 \cdot 10^6$ m·s⁻¹, šířka $\beta = 0,5$, hloubka $\delta = 0,8$.

Pro volbu parametrů $\beta = 0$ nebo $\delta = 0$ získáme zpět bimaxwellovské rozdělení. Zavedením více populací jednoho typu částic s různými teplotami lze modelovat rozdělení typu bump-on-tail. Všechna tato rozdělení jsou nestabilní a umožňují růst vln. O nestabilitách, růstu a útlumech je krátce pojednáno v kapitole 2.5. Příklad rychlostního rozdělení elektronů se ztrátovým kuželem je na obrázku 4.1.

4.2 Numerické procedury

Jádrem programu je procedura `pdisp`, která numericky vyhodnocuje plazmovou disperzní funkci $Z_0(\xi)$ (PDF). Pro hodnoty v oblasti

$$|\operatorname{Im} \xi| < 1 \wedge |\operatorname{Re} \xi| < 5 \wedge |\operatorname{Im} \xi| \cdot |\operatorname{Re} \xi| < \pi/4, \quad (4.9)$$

tj. okolo počátku, používáme funkci `erf` implementovanou v IDL přes mocninovou řadu, blíže viz funkce `gser` v Press et al., [1992] a rovnice (B.7). Pro zbylé hodnoty využíváme metodu řetězového zlomku, rovnice (B.11). Výstupní hodnotu PDF požadujeme v přesnosti `double`, neboť PDF vstupuje do výpočtu susceptibility horkého plazmatu a dochází tak k výrazné kumulaci chyb.

Výpočet disperzního tenzoru je rozdělen na paralelní aproximaci, kolmou aproximaci a obecný úhel vlnového vektoru. Pro distribuci se ztrátovým kuželem (4.8) je numericky vhodnější zapsat disperzní tenzor ve tvaru [Rönmark, 1983]

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{(1 - (1 - \delta_s))\overleftrightarrow{\chi}_s(1) + \delta_s\overleftrightarrow{\chi}_s(\beta)}{1 - \beta_s} \right), \quad (4.10)$$

kde $\overleftrightarrow{\chi}_s(c)$ nazýváme „modifikovanou susceptibilitou“ s parametry $c = \{1, \beta\}$. Složky tohoto tenzoru pak podobně jako v (2.17) rozepíšeme pomocí funkcí Λ_n , Z_0 do tvaru

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s(c) &= \tilde{a}_s c^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Lambda_n}{\tilde{a}_s \lambda} A_n, \\ \chi_{xy}^s(c) &= -ic \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{c\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n, \\ \chi_{xz}^s(c) &= c(1 - \tilde{a}_s c) \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} + \frac{\sqrt{2}\omega_{cs}}{\tilde{a}_s \sigma_{\perp} k_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Lambda_n A_n D_n, \\ \chi_{yy}^s(c) &= \chi_{xx}^s(c) + 2c^2 \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{c\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n, \\ \chi_{yz}^s(c) &= ic \frac{\sqrt{2}k_{\perp} \sigma_{\parallel}}{\omega_{cs}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{c\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) A_n D_n, \\ \chi_{zz}^s(c) &= c \left(1 - (1 - \tilde{a}_s c) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 \sigma_{\parallel}^2} \right) + \frac{2}{\tilde{a}_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n A_n D_n^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde $\tilde{a} = T_{\perp}/T_{\parallel}$ nahrazuje anizotropii $a = \tilde{a} - 1$, dále $\Lambda_n \equiv e^{-c\lambda} I_n(c\lambda)$ a

$$A_n = \left(\tilde{a}_s c \xi_n + \frac{n\omega_{cs}}{\sqrt{2}k_{\parallel} \sigma_{\parallel}} \right) Z_0(\xi_n). \quad (4.12)$$

Podobně jako v případě bimaxwellovského rozdělení je kvůli odstranění odečítací chyb nutné zavést aproximaci paralelního a kolmého šíření:

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s(c) &= \tilde{a}_s c^2 + \frac{1}{2} (A_1 + A_{-1}), \\ \chi_{xy}^s(c) &= -ic \left(A_1 \left(\frac{1}{2c} - 1 \right) + \frac{1}{2c} A_{-1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{yy}^s(c) &= \chi_{xx}^s(c), \\ \chi_{zz}^s(c) &= c \left(1 + \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 \sigma_{\parallel}^2} \right) + \frac{2}{\tilde{a}} A_0 D_0^2\end{aligned}\quad (4.13)$$

pro paralelní šíření a

$$\begin{aligned}\chi_{xx}^s(c) &= c - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Lambda_n}{\lambda} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}}, \\ \chi_{xy}^s(c) &= ic \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left(\Lambda \left(1 + \frac{n}{c\lambda} - \Lambda_{n-1} \right) \right) \frac{\omega}{\omega - n\omega_{cs}}, \\ \chi_{xz}^s(c) &= -\frac{k_{\perp}}{\omega_{cs}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Lambda}{\lambda} \left(\frac{v_{ds}\omega}{\omega - n\omega_{cs}} \right), \\ \chi_{yy}^s(c) &= \chi_{yy}^s(c) - 2c^2 \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{c\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) \frac{\omega}{\omega - n\omega_{cs}}, \\ \chi_{yz}^s(c) &= -ic \frac{k_{\perp}}{\omega_{cs}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_n \left(1 + \frac{n}{c\lambda} \right) - \Lambda_{n-1} \right) \frac{v_{ds}\omega}{\omega - n\omega_{cs}}, \\ \chi_{zz}^s(c) &= c \left(1 - \frac{1}{\tilde{a}_s} \right) - \omega_{cs} \frac{1}{\tilde{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Lambda \left(\frac{v_{ds}^2/\sigma_{\parallel}^2 + 1/\tilde{a}_s}{\omega - n\omega_{cs}} \right)\end{aligned}\quad (4.14)$$

pro kolmé šíření. Vhodný poměr k_{\perp}/k_{\parallel} pro přepnutí do aproximací závisí na konkrétním fyzikálním režimu a je potřeba ho ručně nastavit uvnitř programu.

Besselovy funkce $\Lambda_n(x)$ počítáme pro $x \leq 710$ jako $\exp(-x) \cdot \text{beseli}(n, x)$, kde \exp a beseli jsou funkce exponenciála a Besselova modifikovaná funkce prvního druhu vestavěné v IDL. Pro $x > 710$ dochází k podtečení datového typu double, funkci Λ_n pak implementujeme pomocí asymptotického rozvoje (B.21) děleného exponenciálem, tedy

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^k (4n^2 - (2l-1)^2)}{k!(8x)^k} \right), \quad (4.15)$$

kde absolutní hodnotu zbytku po rozvoji do řádu k odhadneme shora výrazem

$$\left(\frac{n^2}{x} \right)^k \frac{1}{2^k k!}. \quad (4.16)$$

Ve výrazu (4.15) vyhodnocujeme každý zlomek v součinu zvlášť, aby nedošlo k přetečení datového typu. Samotné Besselovy funkce počítáme pouze v řádu N a $N-1$, kde $\Lambda_N/\Lambda_0 \approx \varepsilon$ a ε je tolerance chyby. Nižší řády pak počítáme podle rekurentního vztahu (B.22), který přeuspořádáme do tvaru

$$\Lambda_n(x) = \Lambda_{n+2}(x) + \frac{2(n+1)}{\lambda} \Lambda_{n+1}(x), \quad (4.17)$$

neboť zpětná rekurence je na rozdíl od dopředné rekurence numericky stabilní. Řád N určujeme hrubým horním odhadem

$$N = \begin{cases} \lceil \log(1/\varepsilon)x^{1/5} \rceil & \text{pro } x \in [0,1) \\ \lceil \log(1/\varepsilon)x^{1/2} \rceil & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}, \quad (4.18)$$

příčemž minimální hodnota je $N = 2$.

S chybou je v rámci celého programu zacházeno tak, aby výpočet elementů disperzního tenzoru dosáhl relativní přesnosti alespoň single. K poklesu oproti původní double přesnosti vstupních hodnot dochází v důsledku odčítání blízkých hodnot pro parametry blízké hranicím pro přepínání mezi aproximacemi.

Správnost numerického řešení disperzní relace byla ověřena srovnáním s programem WHAMP [Rönmark, 1983].

Hlavní procedura integruje rovnice (3.20). Inicializace počátečního stavového vektoru $(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega, \gamma)$ vychází z odhadů $|\mathbf{k}|$ a γ poskytnutých uživatelem nebo z odhadu $|\mathbf{k}|$ získaného řešením disperzní relace studeného plazmatu a $\gamma = 0$. Disperzní relaci horkého plazmatu ve tvaru $\mathcal{D}(|\mathbf{k}|, \gamma) = 0$ řešíme pomocí zobecněné Newtonovy metody (implementována v distribuci IDL podle procedury `newt` v Press et al., [1992]).

Rovnice (3.20) integrujeme Rungeovou–Kuttovou metodou 4. řádu, přičemž délka časového kroku je iterativně volena tak, aby relativní změna vlnového vektoru $|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i|/|\mathbf{k}_i|$ ležela v intervalu zvoleném uživatelem. Splnění WKB podmínky (platnost aproximace geometrické optiky) je kontrolováno nerovností

$$f_{\text{WKB}} \equiv \frac{1}{|\mathbf{k}_i|^2} \frac{|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i|}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \ll 1. \quad (4.19)$$

V programu RAY volíme konkrétně $f_{\text{WKB}} < 0,5$. Derivace disperzní relace v (3.20) počítáme v každé ose třibodovou metodou s fixními kroky. Při příliš velkých nebo příliš malých změnách \mathbf{k} , \mathbf{r} a hustoty n_e program kontroluje, zda se kroky v numerických derivacích nacházejí poblíž rovnováhy mezi chybou metody a zaokrouhlovací chybou.

Jak bylo uvedeno v kapitole 3.2, ze systému Hamiltonových rovnic, který má jednoznačné řešení, vyřazujeme rovnici pro evoluci γ a nahrazujeme ji disperzní relací. Místo soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (ODE) tedy řešíme soustavu diferenciálně-algebraických rovnic (DAE). Jelikož není obecně triviální invertovat disperzní relaci, používáme *state space form* metodu podle Hairer et al., [1993]. Tato metoda předepisuje řešit ray tracing DAE explicitní RK metodou, kdy navíc v každém integračním kroku a mezikrocích integračního schématu vyřešíme disperzní relaci (algebraická rovnice) a získáme hodnotu γ . Řád lokální diskretizační chyby metody zůstává zachován. Jelikož řešíme disperzní relaci konzistentně ve dvou proměnných, $|\mathbf{k}|$ a γ , zavádíme do schématu opravy stavového vektoru tím, že přijmeme $|\mathbf{k}|$ z řešení disperzní relace. Pro velká γ a delších simulace s hrubším časovým krokem je v důsledku exponenciálního nárůstu globální chyby numerického řešení šíření paprsku dostatečně přesné pouze lokálně. Lokální přesnost je však postačující, neboť vliv nenulové teploty na tvar trajektorie se projevuje především poblíž rezonančních frekvencí [Maxworth a Gołkowski, 2017], které jsou vymezeny 2D povrchy v prostoru (pro fixní ω) a v okolí těchto povrchů se paprsek šíří jen po omezenou dobu. Navíc $|\gamma|$ musí být malé kvůli aproximaci komplexních Hamiltonových rovnic v kapitole 3.2 a také uvažujeme, že silně tlumenou vlnu je potřeba sledovat jen po krátký čas.

Kromě omezení plynoucích z WKB aproximace a numerických postupů je nutné vyhnout se při použití programu RAY oblastem, kde dochází ke slévání kořenů disperzní relace. Příklad najdeme i ve studeném plazmatu, viz přibližování

disperzních větví okolo crossover frekvence obrázku 2.3. Zatímco simulovaný paprsek se striktně drží spojitě disperzní větve, dochází v reálném experimentu k přelévání energie mezi módy a v důsledku se liší jak trajektorie maxim hustoty energie, tak amplitudy [Swanson, 2003]. V simulaci může dojít k módové konverzi pouze kvůli příliš hrubé diskretizaci nebo pro speciální směry vlnového vektoru (paralelní a kolmá aproximace).

Program RAY obsahuje paralelně k procedurám pro hledání trajektorií vln v horkém plazmatu i procedury pro studené plazma (rovnice (3.9), disperzní relace řešena exaktně). Tyto procedury lze využít pro kontrolu konvergence pro $T_{\parallel,\perp} \rightarrow 0$ a pro rychlé výpočty trajektorie v případě, kdy je γ zanedbatelné podél celé trajektorie.

5. Aplikace ray tracingu

Pro ray tracing elektromagnetických vln se naskýtají v oboru fyziky kosmického plazmatu dvě základní aplikace. První je předvídání chování vln v oblastech, z nichž nemáme dostatek družicových dat, především tedy u vnějších planet slunečního systému. Druhou aplikací je srovnání simulace s již naměřenými daty za účelem podpoření či vyvrácení hypotéz založených na fyzikální teorii.

Zde ukážeme výsledky tří simulací, dvou v pozemské magnetosféře a jedné v magnetosféře Saturnu. První z nich je studie řídce pozorovaného jevu ionosférického odrazu kvaziperiodických emisí, provedená za předpokladu platnosti aproximace studeného plazmatu – tato část textu je založena na článku Hanzelka et al., [2017]. Dále prezentujeme simulace šíření hvizdových vln v dolním frekvenčním pásmu zaměřené na statistické chování energie vlny podél trajektorie. Poslední aplikací je příklad šíření a útlumu elektromagnetických iontových cyklotronových (EMIC) emisí v magnetosféře Saturnu.

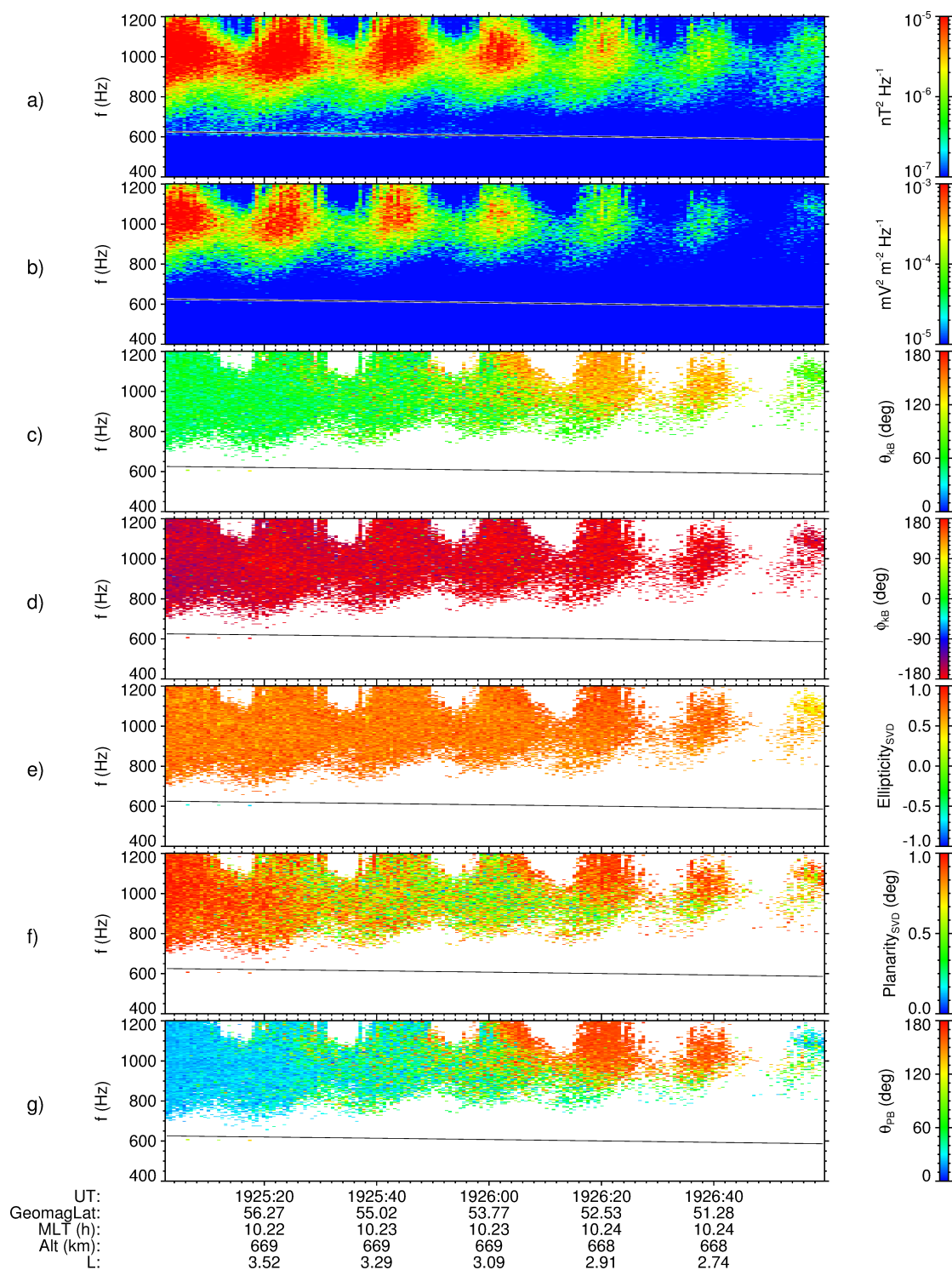
5.1 Ionosférický odraz kvaziperiodicky modulovaných elektromagnetických emisí

5.1.1 Data z družice DEMETER

Kvaziperiodické (QP) elektromagnetické emise pozorované v magnetosféře Země jsou vlny hvizdového módu charakterizované periodickou modulací intenzity s periodou v rozsahu od zhruba 10s do řádu jednotek minut [Helliwell, 1965; Sazhin a Hayakawa, 1994]. V počátcích kosmického průzkumu pocházela většina měření QP emisí z pozemních stanic, čímž bylo studium těchto emisí omezeno pouze na případy, kdy vlna dokázala projít skrze ionosférické vrstvy. Po vypuštění satelitů s měřicími přístroji schopnými měřit vícero složek elektrického i magnetického pole se kvalita i kvantita dat značně zvýšila, což umožnilo podrobně statisticky analyzovat vlnové charakteristiky QP emisí na velkém rozsahu zeměpisných šířek.

Jedním ze satelitů vhodných pro studium QP emisí byla francouzská družice DEMETER, jejíž mise trvala od roku 2004 do roku 2010. Obíhala po heliosynchronní orbitě (10:30, resp. 22:30 místního času) v nadmořské výšce přibližně 715 km (660 km od roku 2005) a pomocí přístrojů IMSC a ICE měřila všech šest komponent elektrického a magnetického pole, včetně oblasti VLF frekvencí, do které převážně spadají hvizdové vlny pozorovatelné na orbitě DEMETER [Cussac et al., 2006]. Hayosh et al., [2016] provedli na datech z DEMETER rozsáhlou analýzu vlnových charakteristik QP emisí a zkoumali závislost vlnového a Poyntingova vektoru na magnetické šířce. Výsledné statistiky ukazují, že se vlny šíří směrem od rovníku k Zemi a směr vlnového vektoru je téměř paralelní (na jižní hemisféře antiparalelní) s vektorem zemského magnetického pole. Zde se zaměříme na případy vymykající se tomuto statistickému chování, kdy dochází k prudké změně směru vlnového vektoru.

Z desítek událostí tohoto typu vybrali událost ze 13. dubna 2006, na níž jsme provedli případovou studii. Spektrogramy zachycující vlnové charakteristiky pozorovaných QP emisí jsou na obrázku 5.1. Podrobnější popis zpracování



Obrázek 5.1: Spektrogramy s vlnovými charakteristikami QP emise pozorované 13. dubna 2006 na družici DEMETER. a) Spektrální hustota výkonu magnetického pole, b) spektrální hustota výkonu elektrického pole, c) polární úhel vlnového vektoru θ_k , d) azimut vlnového vektoru ϕ_k , e) elipticita, f) planarita, g) polární úhel Poyntingova vektoru θ_P . Plná čára ve všech panelech značí lokální protonovou cyklotronovou frekvenci.

družicových dat do podoby spektrogramů je uveden v Hanzelka et al., [2017], kapitola 2. Hodnoty elipticity polarizace a planarity jsou vypočteny podle SVD (Singular Value Decomposition) metod popsaných v Santolík et al., [2003]. Konkrétně planarita je definována jako $1 - \sqrt{w_1/w_3}$, kde w_1 je nejmenší a w_3 největší singulární číslo spektrální matice měřeného magnetického pole, a je úzce spojena s rozptylem nekoherentního EM šumu. Nabývá hodnot z intervalu $[0, 1]$, přičemž s klesající hodnotou planarity se emise stává více izotropní a nelze ji dobře modelovat pomocí rovinné vlny. Elipticita je definována vztahem w_2/w_3 , kde w_2 je zbylé (prostřední) singulární číslo, a odpovídá poměru os polarizační elipsy. Přidává se k ní znaménko vyjadřující smysl polarizace vlny vzhledem ke stacionárnímu magnetickému poli v plazmatu. Hodnoty elipticity v obr. 5.1e) jsou blízké jedné a tak dokládají, že se vskutku jedná o pravotočivé vlny a tedy hvězdivý mód.

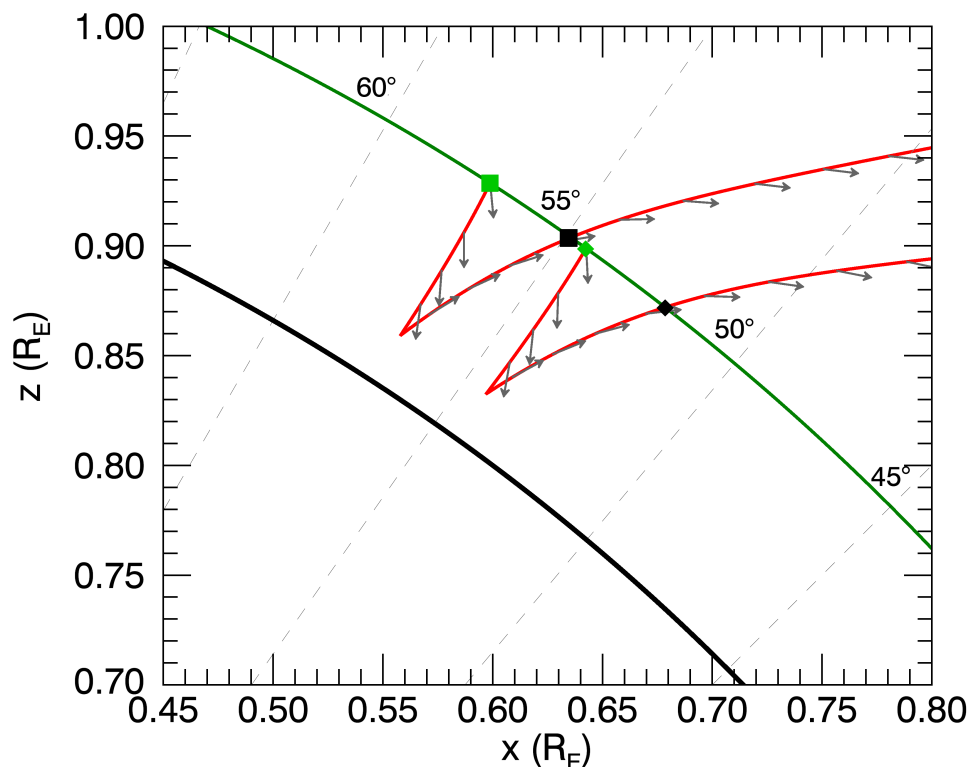
Spektrogramy θ_k , θ_p a planarity jsou vizuálně rozděleny do dvou oblastí s výrazně odlišnými hodnotami těchto parametrů. Na šířkách větších než 55° pozorujeme Poyntingův vektor směřující k povrchu Země téměř paralelně s polem, podobně vlnový vektor je orientován k zemi s úhlem θ_k okolo 50° , planarita je vysoká. Na šířkách menších než 53° míří Poyntingův vektor od země, θ_k vzroste ke 140° , planarita je opět vysoká. Mezi uvedenými magnetickými šířkami existuje přechodová oblast s nízkou planaritou. Jelikož modulační perioda velikosti magnetického i elektrického pole vln je stále stejná, usuzujeme, že se v obou oblastech spektrogramů jedná o tutéž QP emisi, avšak v první části jde o vlny šířící se přímo z rovníku a v druhé části o vlny odražené od ionosféry. Tato interpretace je podpořena skutečností, že se vlny nešíří kolmo k povrchu země a nemohou se proto efektivně propagovat skrze hustotní gradienty v ionosféře (na $L = 3,5$ jsou siločáry zemského dipólu odchýleny od směru kolmého na povrch o přibližně 20° , vlnový vektor je tedy na levé části spektrogramu odchýlen o přibližně 30° od kolmého směru).

5.1.2 Simulace odražených vln

Opodstatněnost navržené interpretace podpoříme paprskovou simulací. Uvnitř plazmasféry můžeme s dobrou přesností použít aproximaci studeného plazmatu, navíc na krátké dráze DEMETER–ionosféra–DEMETER nelze očekávat výrazný útlum či růst vln. Naším cílem je na základě vstupních dat daných měřením přímých vln získat hodnoty úhlu θ_k pro odražené vlny a srovnat je s experimentálními hodnotami na příslušných magnetických šířkách. Jelikož podle obrázku 5.1d) nabývají hodnoty azimutálního úhlu $|\phi_k| \approx 180^\circ$, omezili jsme naši studii na meridionální rovinu. Model hustoty je založen na difúzním ekvilibriu složek plazmatu v gravitačním poli Země, viz kapitolu 4.1. Jako model magnetického pole Země volíme dipólovou aproximaci.

Simulace každého paprsku byla rozdělena do dvou kroků – v prvním kroku jsme vzali vstupní experimentální data a nechali paprsek šířit až do oblasti ionosféry, kde byl běh programu kvůli prudkým změnám vlnového vektoru zastaven (nelze dále řešit ve WKB aproximaci). V tomto bodě jsme předpokládali spekulární odraz, tj. zrcadlově otočili vlnový vektor podle roviny tečné k zemskému povrchu, znovu nastartovali program a šíření zastavili opět až na orbitální výšce družice.

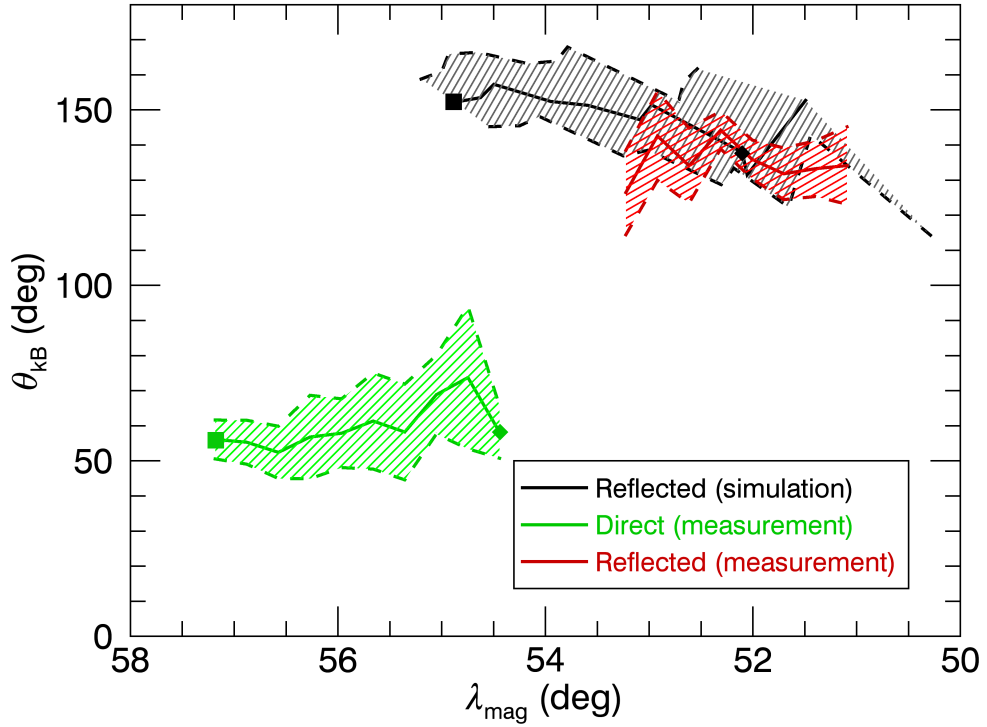
Při popisu plazmatu v ionosférické oblasti jsme vycházeli z modelu IRI (International Reference Ionosphere, Bilitza a Reinisch, [2008]) z něž jsme pro daný den a MLT převzali referenční hodnoty veličin stanovené pro výšku 660 km. Použité veličiny a jejich hodnoty byly: elektronová teplota $T_e = 2\,200\text{ K}$, $n_e = 13\,800\text{ cm}^{-3}$, $n(\text{O}^+)/n_e = 0,599$, $n(\text{He}^+)/n_e = 0,047$, $n(\text{H}^+)/n_e = 0,307$. Žádné další ionty jsme v simulaci nepoužili, součet relativních hustot byl normalizován na jedničku. Pata F_2 peaku směrem blíže k Zemi byla ve výšce 140 km.



Obrázek 5.2: Detail ionosférického odrazu paprsků simulujících šíření QP emise ve hvizdovém módu. Silná černá křivka představuje povrch Země, zelená křivka reprezentuje orbitu družice DEMETER. Šedé šipky ukazují směr vlnového vektoru, vykreslovány jsou každých 0,01s během šíření. Počáteční hodnoty magnetické šířky ve dvou vyobrazených případech jsou $54,4^\circ$ a $57,2^\circ$.

Největší intenzity QP emisí pozorujeme okolo frekvence $f = 1\,000\text{ Hz}$, proto jsme volili f jako frekvenci simulovaných paprsků. Volili jsme deset různých dvojic počátečních hodnot θ_k a λ_m získaných průměrováním dat v obr. 5.1c) přes osm sousedních časových intervalů. U všech paprsků jsme pozorovali porušení WKB podmínky (a tedy předpokládaný odraz) ve výšce v rozsahu od 150 km do 170 km. Po odrazu se vlny šířily zpět na orbitu DEMETER, kde jsme zaznamenali aktuální magnetickou šířku a úhel vlnového vektoru. Příklady trajektorií simulovaných paprsků jsou na obrázku 5.2. Závislost θ_k na magnetické šířce je vykreslena na obr. 5.3, přičemž zelené křivky představují vstupní data z přímých vln, červené křivky představují pozorovaná data pro odražené vlny a černé křivky jsou výsledky simulací odražených vln.

Výsledky simulací ukazují dobrou shodu v úhlech vlnového vektoru pro odražené vlny na nižších šířkách (pod 53°), vidíme však přesah do vyšších



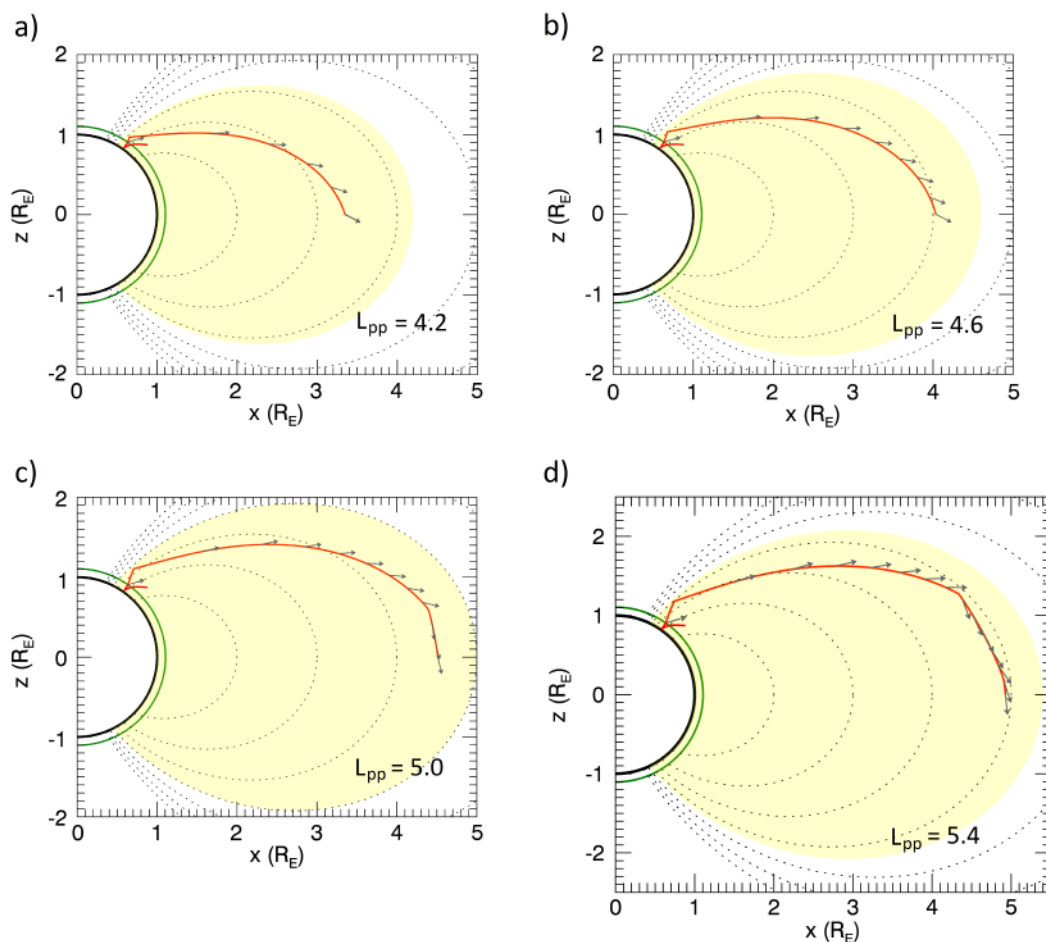
Obrázek 5.3: Závislost polárního úhlu θ_k na magnetické šířce λ_m . Zelená plná čára představuje naměřené úhly přímých vln a zároveň i vstupní data pro simulaci, červená plná čára přísluší naměřeným úhlům odražených vln. Přerušované zelené a červené čáry představují směrodatnou odchylku průměrovaných měření $\pm\sigma$. Černé čáry ukazují hodnoty polárních úhlů odražených vln získaných simulací, přičemž přerušované černé čáry odpovídají výsledkům získaným při použití vstupních hodnot posunutých o σ . Čtvercové a kárové symboly odpovídají těm v obrázku 5.2. Mezera mezi červenou a zelenou oblastí (odpovídá zhruba 15 s měření DEMETER) představuje interval, kde dochází k výraznému mísení přímých a odražených vln a data tak nelze použít jako vstup ani ke srovnání.

magnetických šířek. Tento jev si vysvětlujeme jako důsledek již zmíněného mísení přímých a odražených vln. Ačkoli na šířkách $\lambda_m \approx 54^\circ$ dostáváme z výsledků simulace hodnoty úhlů odražených vln $\theta_k \approx 150^\circ$, může být v důsledku mísení s intenzivnějšími přímými vlnami výsledná experimentální hodnota úhlu stanovena jako výrazně menší.

5.1.3 Zpětný ray tracing

Ve studeném plazmatu je šíření paprsku časově reverzibilní, otočením počátečního vlnového vektoru o 180° tedy získáme trajektorii, po které paprsek přišel do bodu měření. Touto metodou jsme odhadovali polohu zdroje emise. Vycházeli jsme přitom z modelu hustoty uvedeného výše, do kterého jsme implementovali plazmapauzu jako dvacetinásobný pokles hustoty plazmatu kopírující tvar siločar dipólového pole Země. Profil hustotního poklesu jsme modelovali v logaritmickém měřítku pomocí funkce sinus s pološířkou peaku $0,5 R_E$. Střední vzdálenost plazmapauzy L_{pp} jsme odhadovali na základě statistiky závislosti L_{pp} na K_p

indexu publikované v O'Brien a Moldwin, [2003]. Kp index jsme získali z archivu World Data Center for Geomagnetism, Kyoto. Maximální hodnota Kp indexu za posledních 36 hodin před pozorováním na DEMETER byla $K_p = 4$, čemuž odpovídá poloha plazmapauzy $L_{pp} = 4,2 \pm 0,8$ (uvedena jedna směrodatná odchylka lineárního fitu). Simulace se však pro hodnoty $L_{pp} \lesssim 4$ zastavovaly na WKB podmínce, proto jsme nakonec testovali pouze hodnoty $L_{pp} = \{4,2, 4,6, 5,0, 5,4\}$.



Obrázek 5.4: Zpětný ray tracing pro čtyři různé polohy plazmapauzy $L_{pp} = \{4,2, 4,6, 5,0, 5,4\}$. Šedé šipky představují směry vlnového vektoru podél trajektorie s časovými rozestupy 0,5s. Tečkované čáry zobrazují dipólové siločáry $L = 2, 3, \dots$. Žlutá oblast představuje plazmasféru ohraničenou středem plazmapauzy. Počáteční hodnota magnetické šířky byla ve všech případech $\lambda_m = 55^\circ$.

Na obrázku 5.4 ukazujeme trajektorie zpětného šíření paprsků z pozice DEMETER na rovníku. Vidíme, se paprsky šíří buďto zcela nevedeně, obr. 5.4a,b), nebo jsou směřovány odrazy na vnitřní hraně plazmapauzy. Ve všech případech se předpokládaný zdroj emise nachází v blízkosti plazmapauzy. Částečné vedení plazmapauzou je pravděpodobnější, neboť vlny jsou ve zdroji generovány z velké části kvaziparalelně. Hypotéza pouze částečně vedeného šíření je v souladu s vlnovými analýzami uvedenými v Němec et al., [2013], které ukazují, že polární úhel θ_k prudce narůstá s magnetickou šířkou během propagace od zdroje emise.

Během simulací jsme také pozorovali, že zatímco vlny naměřené na družici mají frekvenci nižší, než je lokální dolní hybridní frekvence, ve zdroji ji mají naopak vyšší. K odrazu vln na hybridní frekvenci však nedochází, neboť v oblasti přechodu přes ω_{lh} jsou hodnoty θ_k nízké.

5.1.4 Diskuse

Provedené ray tracing simulace podporují hypotézu o ionosférickém odrazu pozorované QP emise. Tento mechanismus byl navržen již v článku Santolík a Parrot, [1999] na základě pozorování družice Freja, nebyl však podpořen simulacemi. Spekulární odraz na hustotních gradientech je v podrobném pojednání Sonwalkar et al., [2011] uveden jako jeden z mechanismů využitelných ke zkoumání magnetosféry pomocí uměle generovaných vln ve hvizdovém módu. Sonwalkar et al., [2011] však studovali vlny o frekvencích nad 6 kHz, tedy výrazně vyšších než ve zde uvedené studii.

Jako alternativní vysvětlení zde studovaného případu lze navrhnout následující schéma šíření: vlna penetruje ionosféru, šíří se ve vlnovodu Země–ionosféra, a opět z něj vystoupí o několik set kilometrů dále [Fišer et al., 2010]. Takovéto schéma by však vyžadovalo, aby vlnové vektory pozorovaných vln byly přibližně kolmé k povrchu, což není náš případ. Navíc vlny při šíření vlnovodem ztrácí energii, nebyly by tedy mezi přímými vlnami na spektrogramu dobře rozeznatelné, případně bychom od určitých magnetických šířek pozorovali prudký pokles intenzity emise.

Zaměříme se ještě na vliv parametrů hustotního modelu na výsledky simulací. Změna referenčních hustot a teplot ovlivní především dobu šíření, trajektorie DEMETER–ionosféra–DEMETER se nijak výrazně nezmění. Výška ionosférického F_2 peaku má přímý vliv na šířkový posun mezi přímou a odraženou vlnou. Čím níže se peak nachází, tím nižších šířek odražené vlny dosáhnou. Sonwalkar et al., [2011] předpokládají odraz ve výšce 90 km, výrazně nižší než zde. Tuto volbu zdůvodňují prudkým poklesem ionizace plazmatu (a tedy i indexu lomu) v této oblasti. V našich simulacích však mezi vrcholem peaku a místem, kde v důsledku prudkých změn vlnového vektoru selže WKB aproximace, pozorujeme pokles indexu lomu z hodnoty $\mu = 50$ na hodnoty mezi $\mu = 10$ až $\mu = 5$, tj. pokles dostatečný pro spekulární odraz, a proto je zde používaný předpoklad odrazu ve výšce až okolo 160 km opodstatněný.

V oblasti nadmořských výšek < 200 km je potřeba zohlednit vliv srážek elektronů s neutrály. Na základě hodnoty elektronové teploty a hustoty N_2 převzatých z IRI a modelu srážek e^- s N_2 (nejčastější typ párových srážek, spočteno podle Schunk a Nagy, [2004]) jsme určili srážkovou frekvenci 60 s^{-1} ve výšce 200 km a 300 s^{-1} ve výšce 160 km. Větší hodnota srážkové frekvence je srovnatelná s frekvencí vlny 1 000 Hz, neutrální částice zde tedy hrají podstatnou roli. Srážky však ovlivní především intenzitu elektromagnetické emise, ne trajektorii rovinné vlny, výsledky naší simulace nejsou proto srážkami ovlivněny.

Hledání zdroje emise pomocí zpětného ray tracingu podle očekávání ukázalo, že by zdroj měl být na vnitřní hraně plazmapauzy. Šíření QP emisí však může být silně ovlivněno vedením hvizdových vln [Santolík et al., 2006; Titova et al., 2015]. Hvizdové vlny v pásmu $\omega < \omega_{ce}/2$ mohou být vedeny na vnitřní hraně plazmapauzy [Woodroffe a Streltsov, 2013]. Zde jsme ukázali, že trajektorie

paprsků je stáčena plazmapauzou i v nevedeném případě, a navíc jejich vlnové charakteristiky dobře odpovídají těm experimentálně zjištěným. Plazmapauza se však poměrně dynamicky vyvíjí a na vyloučení vedení vln by byla potřeba komplikovanější modely, v ideálním případě založené na in situ měření elektronové hustoty.

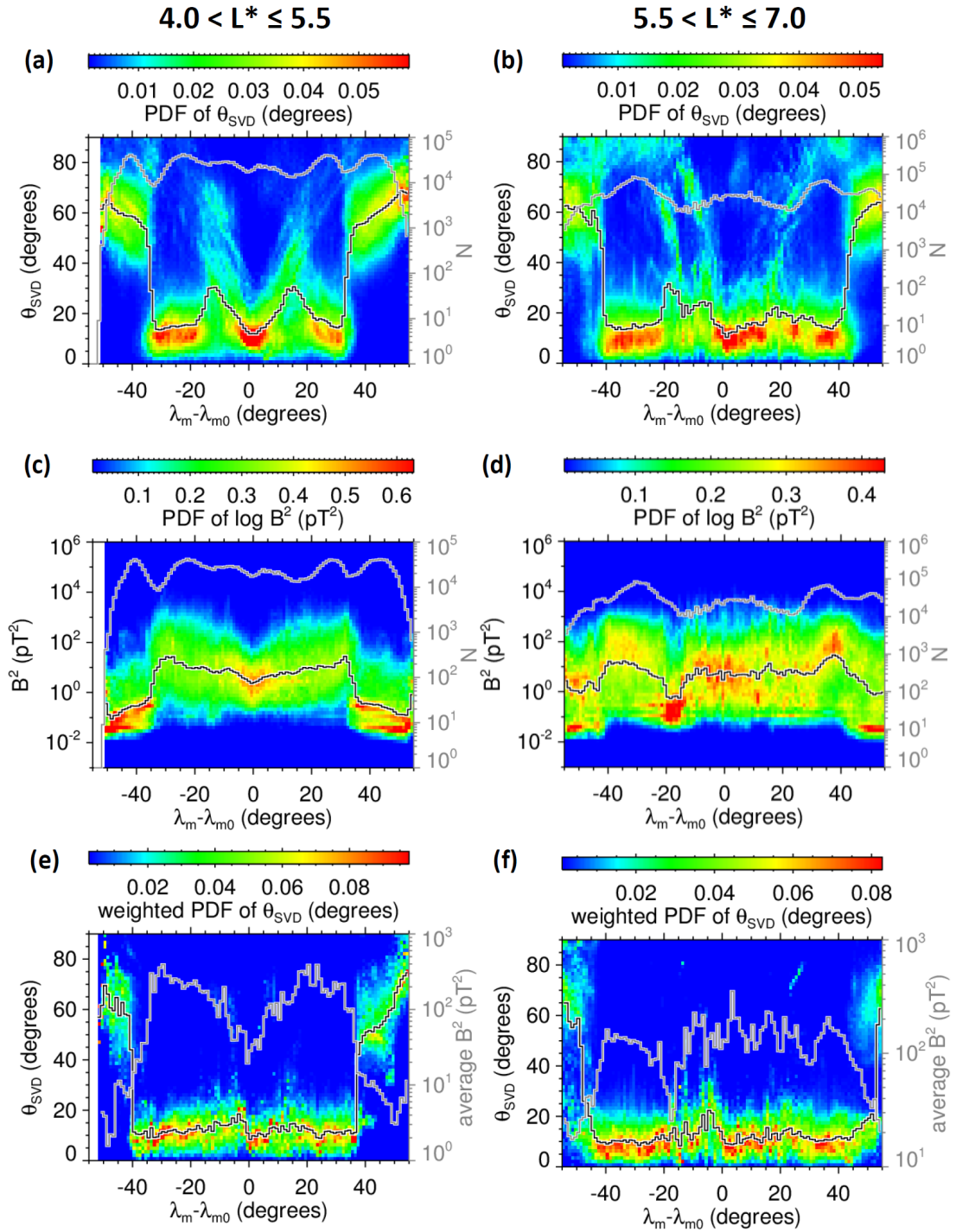
5.2 Statistika hvizdových vln v dolním frekvenčním pásmu

5.2.1 Hvizdové vlny ve vnějším radiačním pásmu

Elektromagnetické vlny hvizdového módu významně ovlivňují dynamiku vnějšího radiačního pásu skrze interakce vlna–částice vedoucí k urychlování či ztrátám relativistických částic [Tao et al., 2013]. Významnou třídu těchto vln tvoří emise s diskrétními časovými elementy zvaná chorus, jež podle současných teorií vzniká jako důsledek nelineárních interakcí vln a částic poblíž geomagnetického rovníku [Katoh a Omura, 2016]. Nadto bylo družicovými pozorováními zjištěno, že hvizdové vlny v dolním frekvenčním pásmu ($\omega < \omega_{ce}/2$) vykazují až o dva řády větší hodnotu průměrného toku Poyntingova vektoru a jejich vliv na rychlostní distribuce částic v radiačních páslech je tedy významný [Santolík et al., 2010].

Santolík et al., [2014b] analyzovali hvizdové vlny dolního frekvenčního pásma na datech z 11 let mise Cluster (1. ledna 2001 – 31. prosince 2011) se zaměřením na oblast $4 < L^* < 7$, pod kterou spadá vnější radiační pás. Konstelace družic Cluster je mise Evropské kosmické agentury (ESA) sestávající ze čtyř satelitů s identickými přístroji, která je i v současnosti (2018) stále ještě aktivní. Výsledkem analýzy byly mapy vlnových parametrů v závislosti na poloze a distribuce polárních úhlů vlnového vektoru θ_k . V tomto textu se zaměříme především na závislost θ_k na magnetické šířce λ_m . Pro snadné srovnání uvádíme výsledky Santolík et al., [2014b] na obrázku 5.5.

Na obrázcích 5.5a), 5.5b), je vyobrazena hustota pravděpodobnosti úhlu θ_k (v obrázku značen θ_{SVD} , vypočten SVD metodami ze spektrálních matic, viz Santolík et al., [2003]) v závislosti na opravené magnetické šířce $\lambda_m - \lambda_{m0}$ pro oblasti $4,0 < L^* < 5,5$ a $5,5 < L^* < 7,0$ (rovníkové hodnoty L^* jsou dopočtené zpětně pro každé měření). Bližší vysvětlení veličin λ_{m0} a L^* viz dodatek A. Zatímco v intervalu menších L^* pozorujeme nárůst θ_k směrem od rovníku a poté prudký pokles okolo $\pm 15^\circ$ šířky, na vyšších L^* již tento efekt není tak výrazný a vykazuje značnou asymetrii. Obrázky 5.5c), 5.5d) ukazují chování hustoty pravděpodobnosti $\log B^2$, kde $B^2/2\mu_0$ je magnetická složka hustoty energie vlny. V nižším intervalu L^* je patrný pozvolný nárůst energie až do šířek $\pm 35^\circ$, kde B^2 prudce poklesne. V oblasti vyšších L tento efekt není dobře viditelný. Nakonec obrázky 5.5e) a 5.5f) ukazují hustoty pravděpodobnosti θ_k po vážení na B^2 . Úhly θ_k po vážení vykazují přibližně konstantní hustotu pravděpodobnosti koncentrovanou v malých hodnotách (přibližně podél stacionárního magnetického pole), v rozsahu šířek od -40° do 40° .



Obrázek 5.5: Analýza vln z rovníkového frekvenčního pásma $0,1-0,5 \omega_{ce}$. Levý sloupec odpovídá vlnám z $4 < L^* < 5,5$, pravý sloupec $5,5 < L^* < 7$. Význam značení veličin viz text. a–b) Hustota rozdělení pravděpodobnosti (PDF, Probability Density Function) polárního úhlu vlnového vektoru θ_{SVD} . c–d) PDF dekadického logaritmu druhé mocniny amplitud fluktuací magnetického pole B^2 . e–f) Hustota rozdělení pravděpodobnosti θ_{SVD} vážená na B^2 . Medián – resp. vážený medián v panelech e) a f) – hodnoty na svislé ose je v grafech vyznačen plnou černou čarou. V panelech a–d) představují šedé čáry počet spektrálních matic magnetického pole v každém binu λ_m , v panelech e–f) ukazují průměrnou hodnotu B^2 v každém binu. Převzato ze Santolík et al., [2014b].

V další sekci se pokusíme vysvětlit některé výsledky uvedené analýzy na základě paprskových simulací v horkém plazmatu. Předně budeme chtít ukázat, jak se chovají vedené a nevedené hvizdové vlny a zda lze vhodnou volbou poměru výskytu vln s těmito dvěma různými způsoby šíření dosáhnout shody mezi simulací a pozorováním ve vývoji θ_k . Dále se pokusíme vysvětlit nárůst B^2 na základě zužování magnetických siločar a růstu energie vlny na elektronové anizotropii a porovnáme, jak vypadá závislost $\theta_k(\lambda_m)$ v případě vážení veličinou B^2 a v případě vážení hustotou energie vlny W .

5.2.2 Modely a simulace

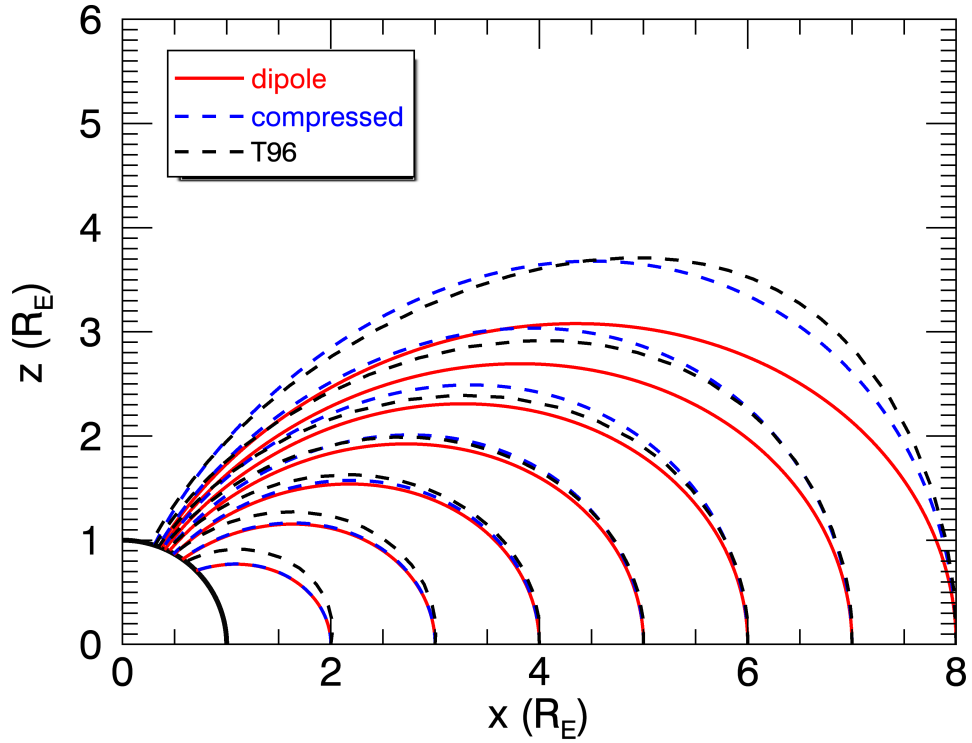
Simulace provedené pomocí kódu RAY jsme omezili na meridionální rovinu, neboť longitudinální drift vln je obvykle zanedbatelný. Magnetické pole jsme modelovali jednak dipólem a jednak stlačeným dipólem s parametrem $b = 10^{-3} B_{\text{eq}}$, kde B_{eq} je síla dipólového magnetického pole u povrchu Země na rovníku; podrobnější popis modelu je uveden v kapitole 4. Srovnání těchto dvou modelů spolu s realistickým modelem stlačeného magnetického pole Země (T96 + IGRF) je uvedeno na obrázku 5.6.

Rozložení hustoty elektron–protonového plazmatu jsme modelovali na základě Dentonova modelu (viz kapitola 4) s rovníkovou hustotou elektronů $n_{\text{e0}}(R) = 1,25 e^{10,1/R}$. Oblast povoleného šíření paprsků jsme omezili na $3,6 < L < 7,8$, $R > 1,8$ a $\lambda_m > 55^\circ$, plazmapauzu do modelu nezahrnujeme. V případě vedených vln jsme rovníkový profil hustoty doplnili o gaussovské peaky s maximem odpovídajícím 120 % původní hustoty a šířkou $\sigma = 100$ km. V celkovém modelu se pak tyto peaky zobrazí jako ducty neboli trubice se zvýšenou hustotou plazmatu ležící na siločarách zvoleného modelu magnetického pole. Distribuce hustoty v povolené oblasti šíření je vykreslena na obrázku 5.7. Vzhledem k severo-jížní symetrii modelů se můžeme omezit pouze na severní polokouli a také psát λ_m místo $\lambda_m - \lambda_{m0}$. Budeme též pro zjednodušení psát L místo L^* (pro dipólové pole platí přesně, viz dodatek A).

Efekty horkého plazmatu modelujeme populací horkých elektronů o hustotě $n_{\text{hot}} = 10^{-3} n_{\text{cold}}$ a teplotě $T_{\text{hot}} = 5$ keV s maxwellovským rozdělením. Anizotropii do simulace zahrnujeme pomocí jednoduchého modelu konstantní hodnoty anizotropie horké populace v celém prostoru, přičemž volíme hodnoty $a = 0$ a $a = 0,4$ (vždy $T_{\perp} + T_{\parallel} = 10$ keV). Volba teploty a hustoty je založena na výsledcích Li et al., [2010], podle nichž jsou hvizdové vlny ve frekvenčním intervalu $0,1 \omega_{\text{ce}} < \omega < 0,5 \omega_{\text{ce}}$ nejvíce ovlivněny anizotropií elektronů o teplotách 2 keV až 10 keV; to dokládáme i níže v diskusi. Relativní hustotu elektronů jsme odhadli z hustoty elektronů ve fázovém prostoru uvedené v Kubota et al., [2018].

Počáteční úhly θ_k jsme volili rovnoměrně z normálního rozdělení se střední hodnotou 0° a směrodatnou odchylkou 12° převzatého ze Santolík et al., [2014b]. Počáteční frekvence jsme volili z normálního rozdělení se střední hodnotou $0,3 \omega_{\text{ce}}$ a směrodatnou odchylkou $0,07 \omega_{\text{ce}}$ (nepublikovaná data, stejný dataset jako Santolík et al., [2014b]; cf. Santolík et al., [2014a], obrázek 4b). Paprsky jsme startovali na rovníku na siločarách od $L = 4$ do $L = 7$ s krokem 0,5. V případě nevedených vln jsme každý paprsek simulovali ještě dvakrát s odchylkou $\pm 0,1$ od počátečního L .

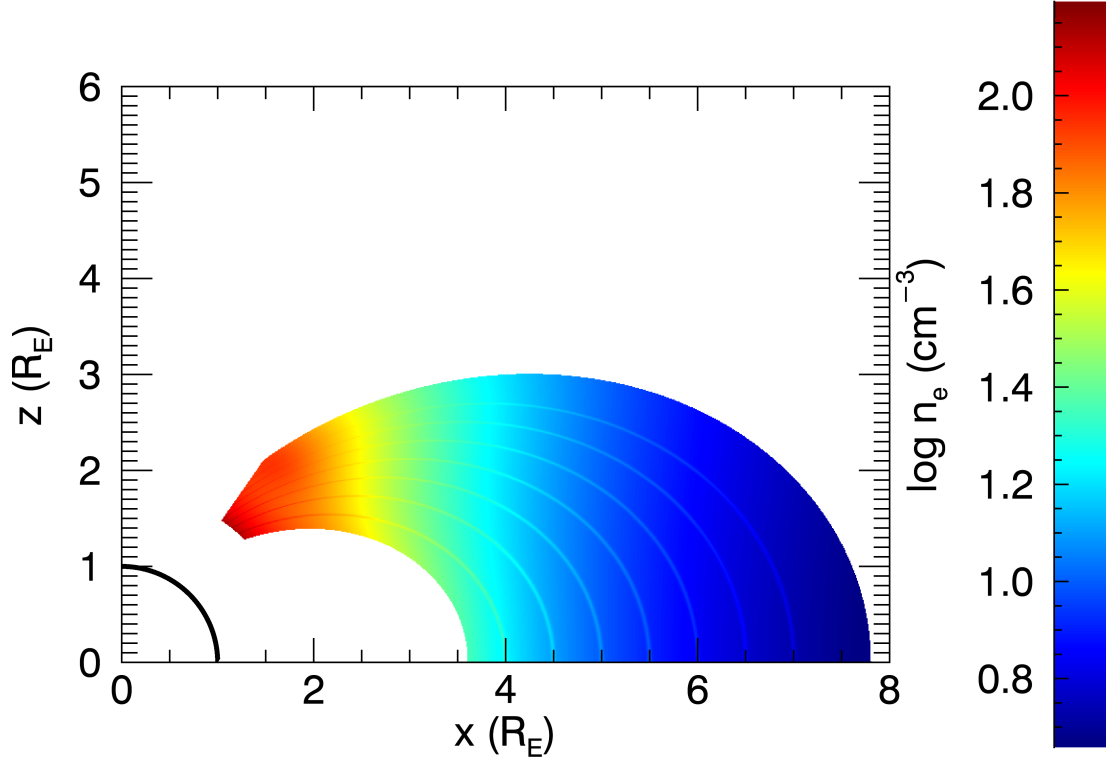
Celkem jsme jako počáteční parametry simulace volili 19 frekvencí, 7 úhlů,



Obrázek 5.6: Srovnání tvaru magnetických siločar v meridionální rovině pro tři různé modely geomagnetického pole. Plnou červenou čarou je značen dipólový model, přerušovanou modrou čarou model stlačeného dipólu s $b = 10^{-3} B_{\text{eq}}$ a černou přerušovanou čarou IGRF model kombinovaný s Tsyganenkovým modelem verze 1996. Tsyganenkův model je parametrizován dynamickým tlakem slunečního větru nad rázovou vlnou $p_{\text{dyn}} = 6 \text{ nPa}$, parametry D_{st} , $B_{\text{IMF},z}$ a $B_{\text{IMF},y}$ jsou nulové.

7 radiálních vzdáleností na rovníku, 2 hodnoty anizotropie, 2 typy plazmatu (s horkou populací a pouze studené), 2 typy vedení vlny (vedené a nevedené) a 2 modely magnetického pole. Dohromady 29 792 paprsků. Počáteční parametry paprsku jsou shrnuty v tabulce 5.1. Šíření paprsků jsme zastavovali při úniku z povolené oblasti, při poklesu amplitudy vlny pod 10^{-3} původní hodnoty nebo při dosažení úhlu $\theta_k = 89,0^\circ$, čímž jsme zamezili zahrnutí vln odražených na dolní hybridní frekvenci ω_{lh} do výsledné statistiky. Samostatné příklady trajektorií paprsků i s odrazem na ω_{lh} jsou na obrázcích 5.8 a 5.9.

Na základě znalosti disperzního tenzoru a vlnového vektoru dokážeme vypočítat směr elektrického a magnetického pole vlny, ne však jejich velikosti, viz rovnici (2.4). Abychom z paprskové simulace získali magnetické pole vlny \mathbf{B} , musíme zavést dodatečný předpoklad. Tímto předpokladem je zachování toku Poyntingova vektoru, $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$. Předpoklad zachování aplikujeme v případě vedeného šíření na studené plazma uzavřené v magnetické trubici konstantního průřezu, tj. srovnáme počáteční Poyntingův vektor $|\mathbf{S}_0|$ normalizovaný na $E_x = 1$

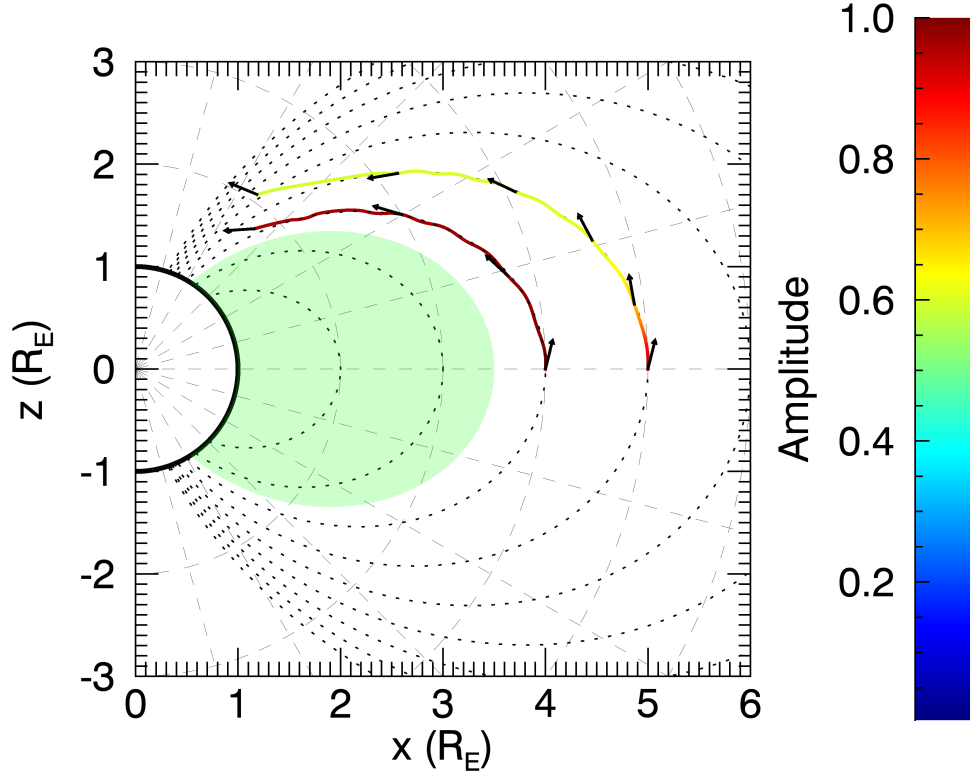


Obrázek 5.7: Model hustoty elektronů v meridionální rovině pro dipólový model magnetického pole. Vykreslená oblast je omezena hranicemi, na kterých jsme zastavovali šíření simulovaných paprsků. Nárůsty hustoty podél magnetických siločar ukazují, kde v případě simulací vedených vln ležely ducty.

Tabulka 5.1: Vstupní parametry simulovaných paprsků. Elektronová cyklotronová frekvence ω_{ce} udává hodnotu na rovníku pro dané L . V simulacích byly použity všechny kombinace uvedených vlnových frekvencí ω , počátečních vzdáleností L a počátečních úhlů vlnového vektoru θ_k .

ω/ω_{ce}	L	f_{ce} [Hz] (dip.)	f_{ce} [Hz] (stl. dip.)	θ_k [°]	
0,185	0,309	4,0	13 253	14 100	-13,9
0,210	0,318	4,5	9 307	10 157	-8,1
0,227	0,327	5,0	6 788	7 633	-3,8
0,241	0,337	5,5	5 097	5 946	0,0
0,253	0,347	6,0	3 928	4 776	3,8
0,263	0,359	6,5	3 087	3 937	8,1
0,273	0,373	7,0	2 473	3 320	13,9
0,282	0,390				
0,291	0,415				
0,300					

s aktuálním normalizovaným $|\mathbf{S}|$. Získáme tak faktor f_s , kterým musíme násobit kvadrát elektrického pole, abychom zachovali Poyntingův tok. Z opraveného elektrického pole můžeme spočítat přes Faradayův zákon i skutečné velikosti složek magnetického pole normované na počáteční hodnotu. Poté zohledníme zužování



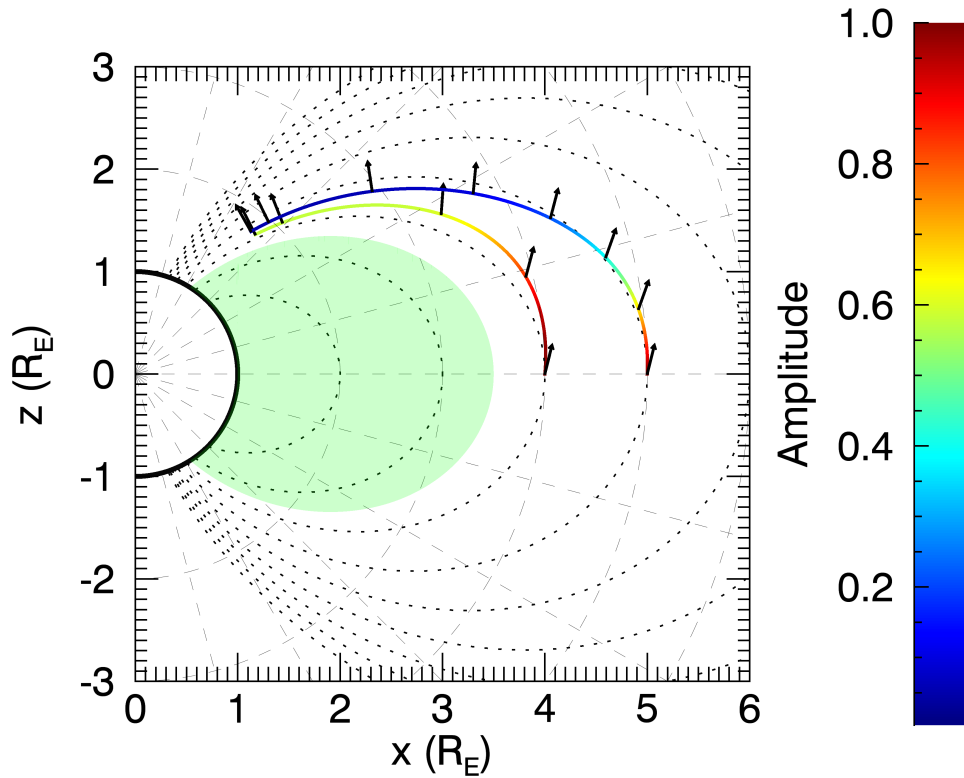
Obrázek 5.8: Příklad vedeného šíření paprsku o frekvenci $f = 2452$ Hz, anizotropie rychlostního rozdělení elektronů je nulová, magnetické pole je dipólové. Aby byl dobře patrný rozkmit trajektorie uvnitř ductu, je počáteční úhel vlnového vektoru nastaven na $13,9^\circ$. Barevná škála ukazuje pokles amplitudy vlny, šedé šipky vykreslené každých $0,1$ s grupového času podél trajektorie reprezentují směr vlnového vektoru.

magnetických siločar, přičemž faktor zúžení spočtený ve 2D meridionální rovině (kapitola 4, rovnice (4.1)) musíme ještě násobit faktorem zúžení kvůli radiálnímu přiblížení, R/R_0 ; získáme tak geometrický faktor f_g , kde $f_g > 1$ znamená zúžení. Význam geometrického faktoru je názorně vysvětlen na obrázku 5.10. Faktorem f_g násobíme kvadráty polí, resp. energií. Nakonec B^2 a W násobíme kvadrátem amplitudy získaným integrací útlumu/růstu $\gamma = \text{Im}\omega$. Pokud vlny nejsou vedené a nemůžeme tak použít rovnici (4.1), určíme zúžení v meridionální rovině z radiálních vzdáleností trojice sousedních paprsků jako

$$f_1 = \frac{\max_i(R_{0i}) - \min_i(R_{0i})}{\max_i(R_i) - \min_i(R_i)}, \quad (5.1)$$

kde R_i , $i \in \{1,2,3\}$ jsou aktuální radiální vzdálenosti paprsků a R_{0i} jsou jejich počáteční radiální vzdálenosti.

Parametry paprsku vypočtené podél trajektorie programem RAY jsme statisticky zpracovali. Sledovali jsme následující parametry: R , L , θ_k , elipticita E_B , $|\mathbf{B}|^2 \equiv B^2$, hustota energie W . Tyto hodnoty jsme nejprve zprůměrovali přes jeden bin v λ_m o velikosti $\Delta\lambda_m = 1^\circ$ a poté jsme paprsky v každém

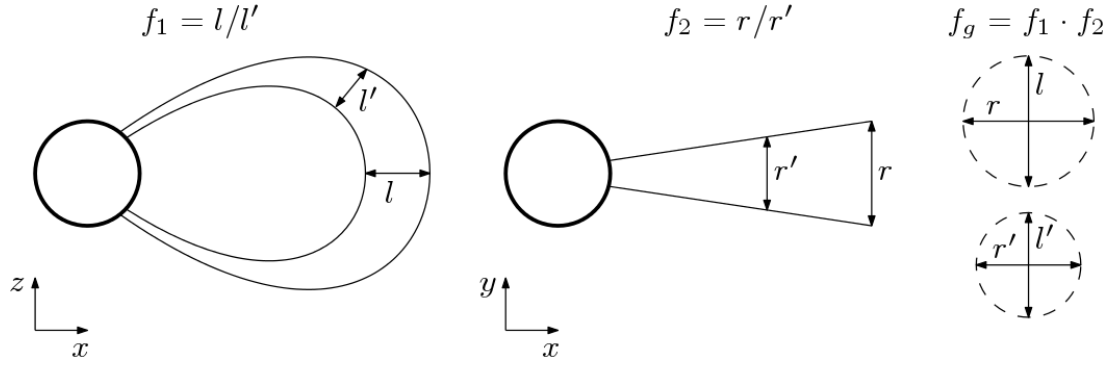


Obrázek 5.9: Příklad nevedeného šíření, stejné parametry paprsku jako v obrázku 5.8. V bodě zastavení simulace dosahují frekvence vlny zhruba $0,9\omega_{\text{lh}}$.

binu rozšířili na blíže k Zemi, $L \leq 5,5$, a dále od Země, $L > 5,5$ (v souladu s dělením v obrázku 5.5). Zároveň jsme zaznamenávali, kolik se v dolním a horním intervalu L vyskytuje paprsků, neboť mohou mezi těmito intervaly přecházet a je tedy nutné znát jejich počet, abychom dokázali určit průměrnou energii paprsků ve zvoleném intervalu. Hodnoty úhlu θ_k jsme v každém binu přepočítali jako vážený aritmetický průměr přes energie paprsků W , resp. B^2 . Pokud se v případě nevedeného šíření některý z trojice sousedních paprsků v daném binu nenacházel nebo se v binu jeho šíření zastavilo, f_g jsme nepočítali a celou trojici vyřadili ze statistiky. Posunutá nevedená paprsky přitom používáme pouze k výpočtu f_g , vlastnosti vlny odečítáme z centrálního paprsku.

Obrázky 5.11 až 5.13 ukazují vývoj energií B^2 a W v závislosti na magnetické šířce pro různé kombinace modelů magnetického pole, hustoty plazmatu a teploty elektronů. Kromě výsledků pro horní a dolní interval L (červená a modrá barva) uvádíme i průměr přes všechny paprsky (černá barva). Rozsah šířek byl při vykreslování shora omezen hodnotou 50° , neboť pro větší šířky nemáme experimentální data ke srovnání.

Na obrázcích 5.14 a 5.15 uvádíme výsledky pro vývoj úhlu θ_k s magnetickou šířkou. Obr. 5.14 ukazuje úhly vážené na B^2 a W , přičemž v obou případech uvažujeme různé procentuální zastoupení vedených vln v souboru: 15%, 50% a 85%. Tato různá zastoupení zahrnujeme do statistiky tak, že počty paprsků a jejich energie násobíme příslušnými procentuálními faktory. Tedy pro zastoupení



Obrázek 5.10: Schéma znázorňující význam geometrického faktoru f_g pro případ vedených vln. V levé části je meridionální řez, uprostřed ekvatoriální řez, napravo je kolmý průřez magnetickou trubicí v počáteční a čárkované poloze. Oba řezy ukazují zužování dvou vybraných siločar zemského magnetického pole.

vedených vln $f_{\text{duct}} = 0,85$ vypočteme průměrnou váženou hodnotu θ_k v jednom binu šířky jako

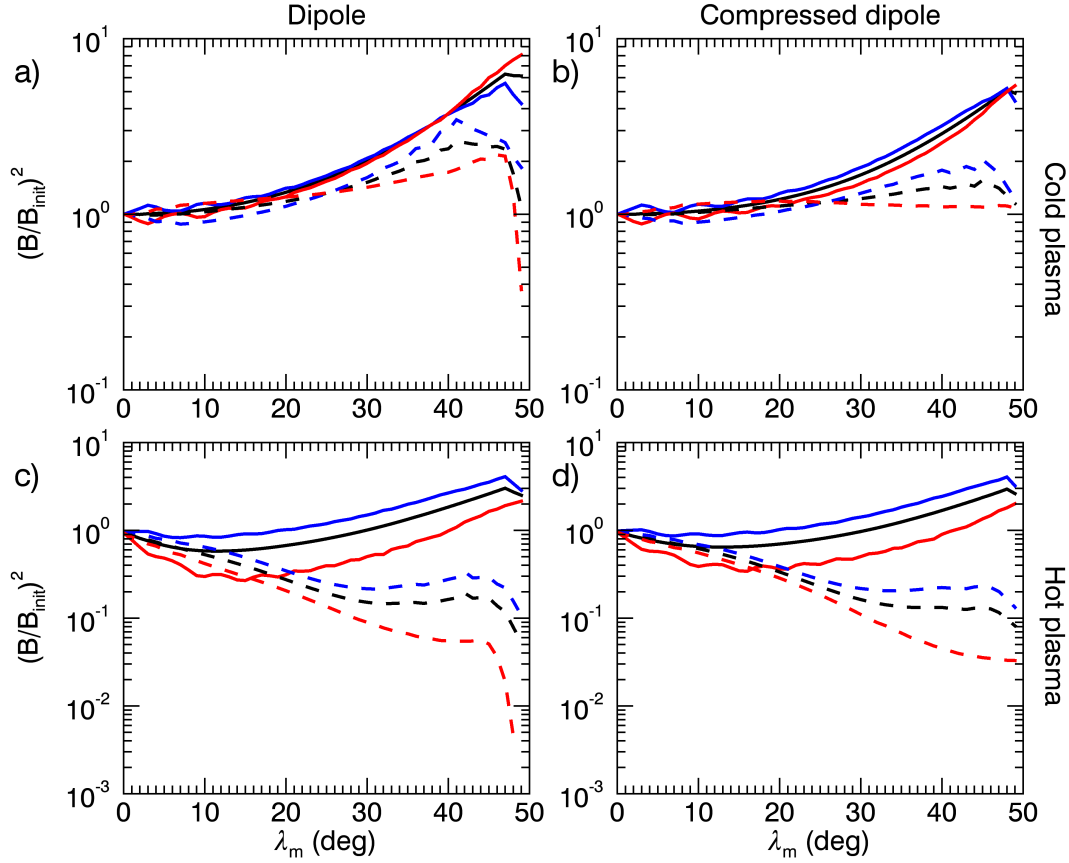
$$\theta_k(\lambda_m) = \frac{\sum_{(\lambda_m, \lambda_m + \Delta\lambda_m)} (\theta_{k,\text{duct}}(\lambda_m) * f_{\text{duct}} + \theta_{k,\text{noduct}}(\lambda_m) * (1 - f_{\text{duct}}))}{\sum_{(\lambda_m, \lambda_m + \Delta\lambda_m)} (B_{\text{duct}}^2(\lambda_m) * f_{\text{duct}} + B_{\text{noduct}}^2(\lambda_m) * (1 - f_{\text{duct}}))}, \quad (5.2)$$

analogicky pro W . V obrázku 5.15 nejsou úhly vážené energiemi, ale paprsky s amplitudou pod prahovou hodnotou $A/A_{\text{init}} = 0,1$ jsou ze statistiky vyřazeny.

5.2.3 Diskuse

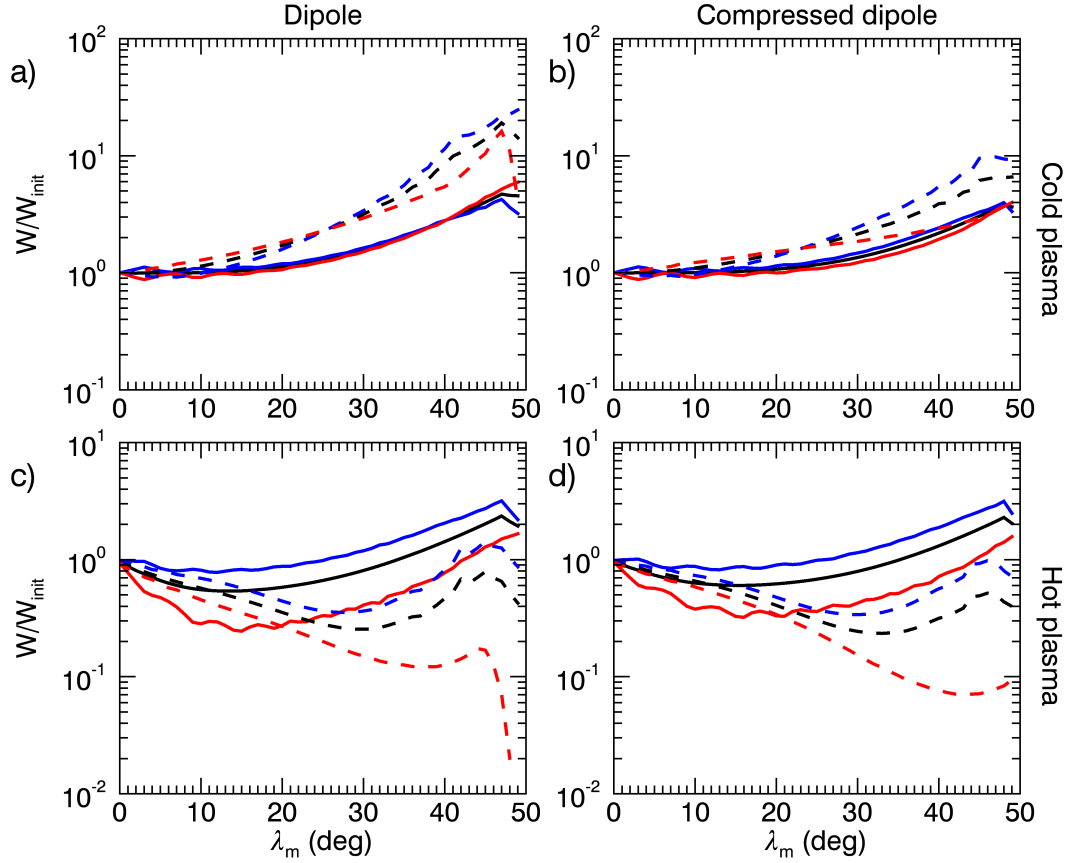
Výsledky simulací ukazují nárůst B^2 v závislosti na λ_m pro dipólový model a vedené vlny ve studeném plazmatu, obr. 5.11a). Tento závěr je kvalitativně v souladu s experimentálními výsledky ukázanými v obrázku 5.5 a šlo ho předpokládat na základě dipólové geometrie a kvaziparalelního vlnového vektoru paprsku šířícího se ve vlnovodu. Nepozorujeme zde však žádný významný rozdíl mezi vlnami v oblasti $L \in (4,0; 5,5)$ a $L \in (5,5; 7,0)$. V geometrii stlačeného dipólu je patrný mírný rozdíl mezi regiony dále od Země a blíže k Zemi, avšak v obou případech je nárůst B^2 menší než u obyčejného dipólu. Navíc ani pro žádnou geometrii magnetického pole nedosahujeme na intervalu $\lambda_m \in (0^\circ, 40^\circ)$ řádového nárůstu B^2 patrného v experimentu. V případě nevedených vln nepozorujeme téměř žádný nárůst, neboť s rostoucím θ_k se energie vlny přelévá z magnetické do elektrické. Před odrazem, kdy je vlnový vektor kolmý k magnetickému poli, klesá B^2 k nule – vlna je elektrostatická. Na druhou stranu má vlna v blízkosti bodu odrazu velmi nízkou grupovou rychlost, proto narůstá hustota energie, jak ukazuje obrázek 5.12a). Poznamenejme, že pro výpočet hustot energií nevedených vln je potřeba do vzorce 5.1 dosadit alespoň tři paprsky, neboť se paprsky obecně mohou protínat, což při použití pouze dvou paprsků nutně vede k divergencím.

Oblast šířek, na kterých začne B^2 klesat, je v simulaci posunuta zhruba o 10° severně vůči experimentu. To je důsledkem použitého modelu ductů,



Obrázek 5.11: Magnetická energie vlny B^2 v závislosti na magnetické šířce λ_m . Panely a), c) pro dipólové magnetické pole, panely b), d) pro stlačený dipól. Data v panelech a), b) byla vypočtena v aproximaci studeného plazmatu, panely b), d) pro plazma s horkou populací elektronů o teplotě 5 keV bez anizotropie. V obrázcích 5.11 až 5.13 je význam čar následující: plná čára značí vedené vlny, přerušovaná čára nevedené. Modrá barvou jsou značeny vlny z rozsahu počátečních L -parametrů 4,0 až 5,5, červenou barvou z rozsahu 5,5 až 7,0. B_{init} je libovolně volená počáteční hodnota. Hodnota vykreslená v celočíselné hodnotě λ_m představuje průměrování přes bin $[\lambda_m, \lambda_m + \Delta\lambda]$, kde $\Delta\lambda = 1^\circ$.

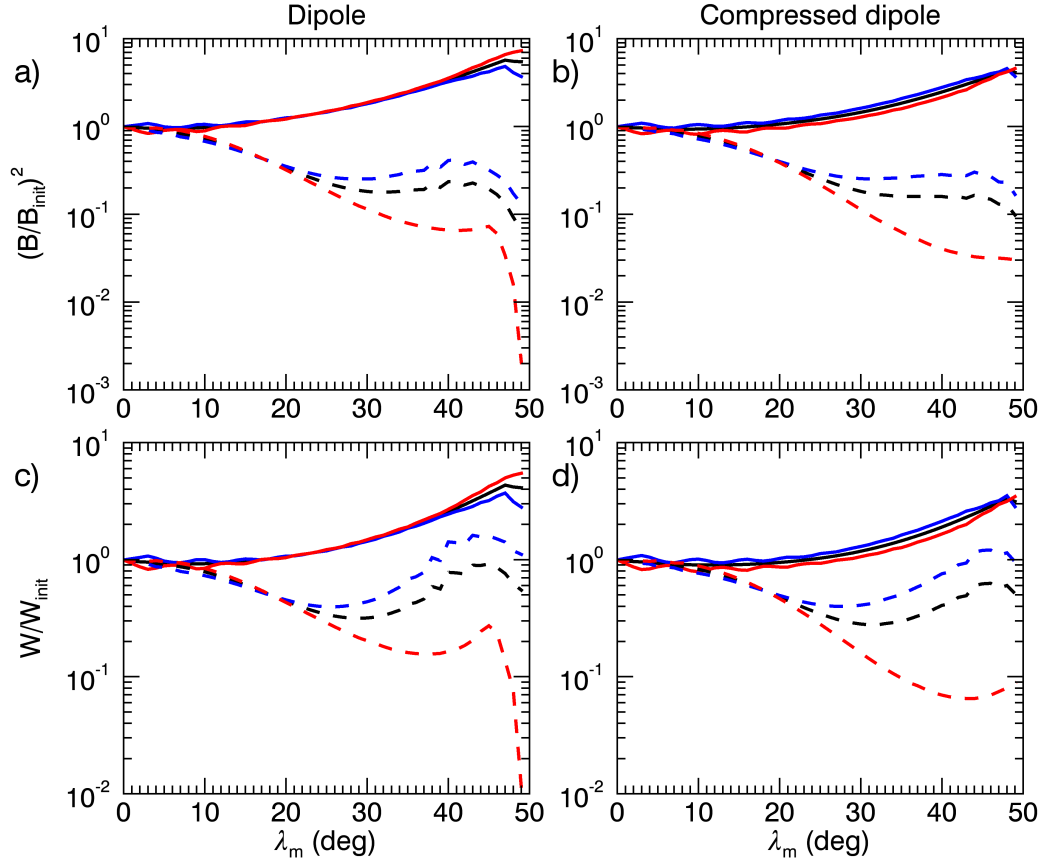
kteřý předpokládá, že tato hustotní struktura dosahuje až k ionosféře. Jelikož neexistuje obecně uznávaná teorie dynamiky ductů a experimentální měření jsou dostupná jen v horní ionosféře [Loi et al., 2015], nemůžeme vyloučit, že ducty zeslábnou okolo 40° , vlny přejdou do nevedeného módu šíření a θ_k prudce narostou. Jako další hypotézu vysvětlující nárůst úhlu vlnového vektoru uvádíme stáčení trajektorie paprsků poblíž plazmapauzy. V našem modelu je plazmapauza silně stlačená, za klidných geomagnetických podmínek však může difundovat na velké vzdálenosti ($L \sim 5$). Uvnitř plazmapauzy jednak nedokážeme předvídat chování ductů a navíc se hvizdový mód v dolním frekvenčním pásmu šíří směrem do oblastí s vyššími hustotami (pro vysvětlení viz dodatek C) a může tak uniknout z oblasti, kterou snímají družice Cluster. V neposlední řadě se na chování θ_k může projevit smíšení pozorovaných EM emisí s aurorálním sykotem (auroral hiss), který se šíří v blízkosti rezonančního kuželu hvizdového módu.



Obrázek 5.12: Hustota elektromagnetické energie vlny W v závislosti na magnetické šířce λ_m . Význam barev a typu čar grafů viz obr. 5.11.

V aproximaci studeného plazmatu chybí mechanismus, který by vlně dodával energii, výsledky diskutované výše proto nemusí nutně odpovídat realitě. Simulace v horkém plazmatu s izotropním Maxwellovým rozdělením rychlostí, obr. 5.11c) a 5.12c), nemohou vést na růst amplitudy, ale zohledňují její pokles. I bez anizotropie však můžeme pozorovat, že nevedené vlny jsou zeslabeny cyklotronovým tlumením výrazněji než vlny vedené. Simulace případů s anizotropním rozdělením horké populace elektronů na obr. 5.13 vykazují růst především v oblasti poblíž rovníku, čímž kompenzují útlum pozorovaný v obr. 5.11c) a výsledný trend grafu se tak velice podobá tomu získanému ze simulace ve studeném plazmatu. Dalším výsledkem je, že anizotropní růst se významně projeví pouze na vedených vlnách.

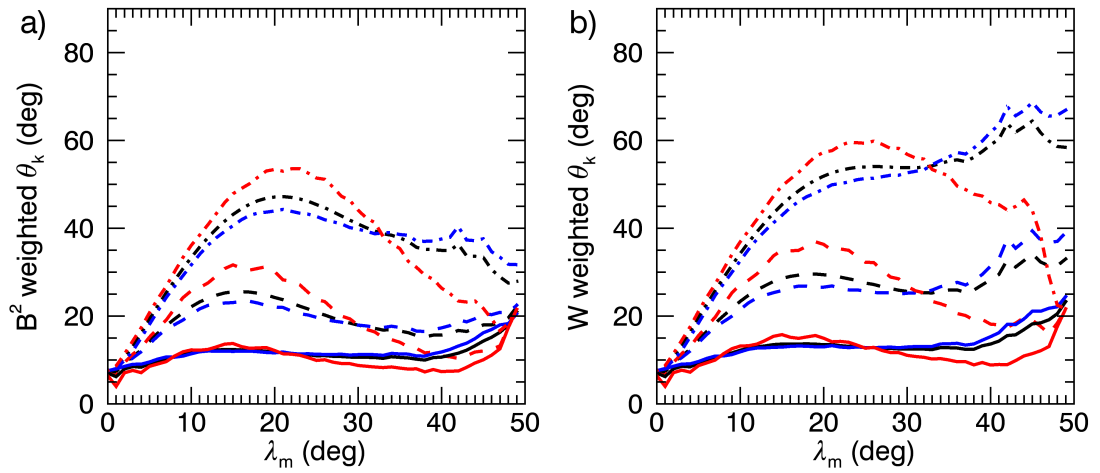
Jak ovlivňuje anizotropie růst hvizdových vln lze nahlédnout za barevných map na obrázku 5.16. Prvním pozorováním je, že pro zvolenou teplotní distribuci narůstá útlum vlny s rostoucím odklonem vlnového vektoru od paralelního směru. Proto nevedené vlny ztrácejí intenzitu podstatně rychleji než vlny vedené. Dále pozorujeme, že s rostoucí teplotou horké populace elektronů se peak v růstu posouvá směrem do nižších frekvencí. Aby vlna rostla na teplotní anizotropii i dále od rovníku, tj. v oblastech s vyšší lokální ω_{ce} , museli bychom do modelu přidat populace o teplotách v desítkách až stovkách elektronvoltů. Tyto populace však mají nízkou relativní hustotu, a nezpůsobily by proto výrazný růst. Navíc



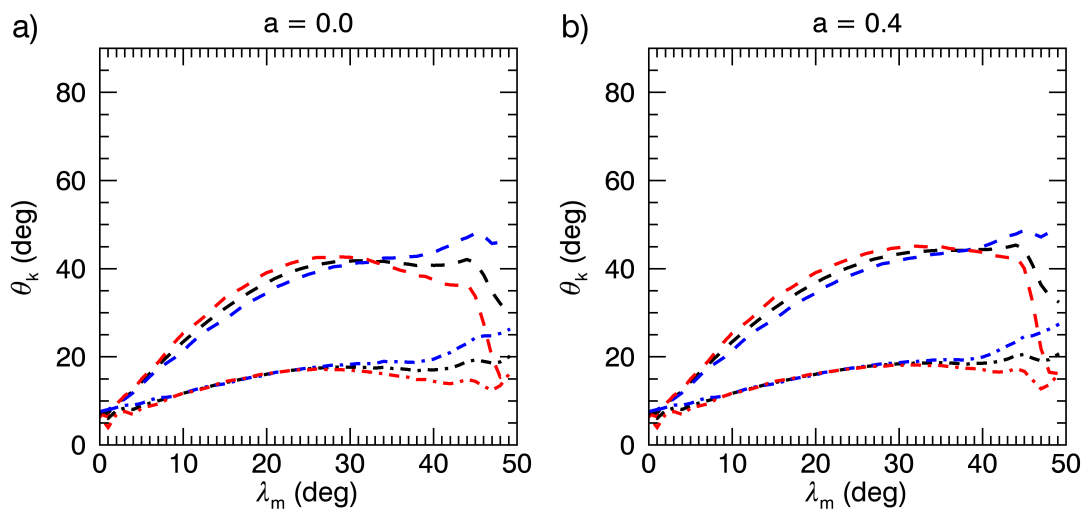
Obrázek 5.13: Magnetická energie vlny B^2 a hustota energie W v závislosti na magnetické šířce λ_m . Simulace v plazmatu s horkou populací elektronů o teplotách $T_{\perp} = 5,83 \text{ keV}$ a $T_{\parallel} = 4,17 \text{ keV}$. Popis čar viz 5.11.

bychom se dostali do oblasti energií, kde je potřeba aplikovat relativistické modely, které nejsou v naší počítačové proceduře zahrnuty. Proto v uvedených simulacích nemůžeme dosáhnout pozvolného, anizotropií taženého růstu po celé délce trajektorie vlny. Především ale z růstových map zjišťujeme, že pro nižší absolutní hodnoty frekvence vlny jsou růsty výraznější. Abychom pozorovali větší růsty na menších L , musela by v této oblasti být anizotropie silnější – statistika založená na experimentálních datech však ukazuje, že silně anizotropní rozdělení teploty jsou typická pro $L > 6$ [Li et al., 2010].

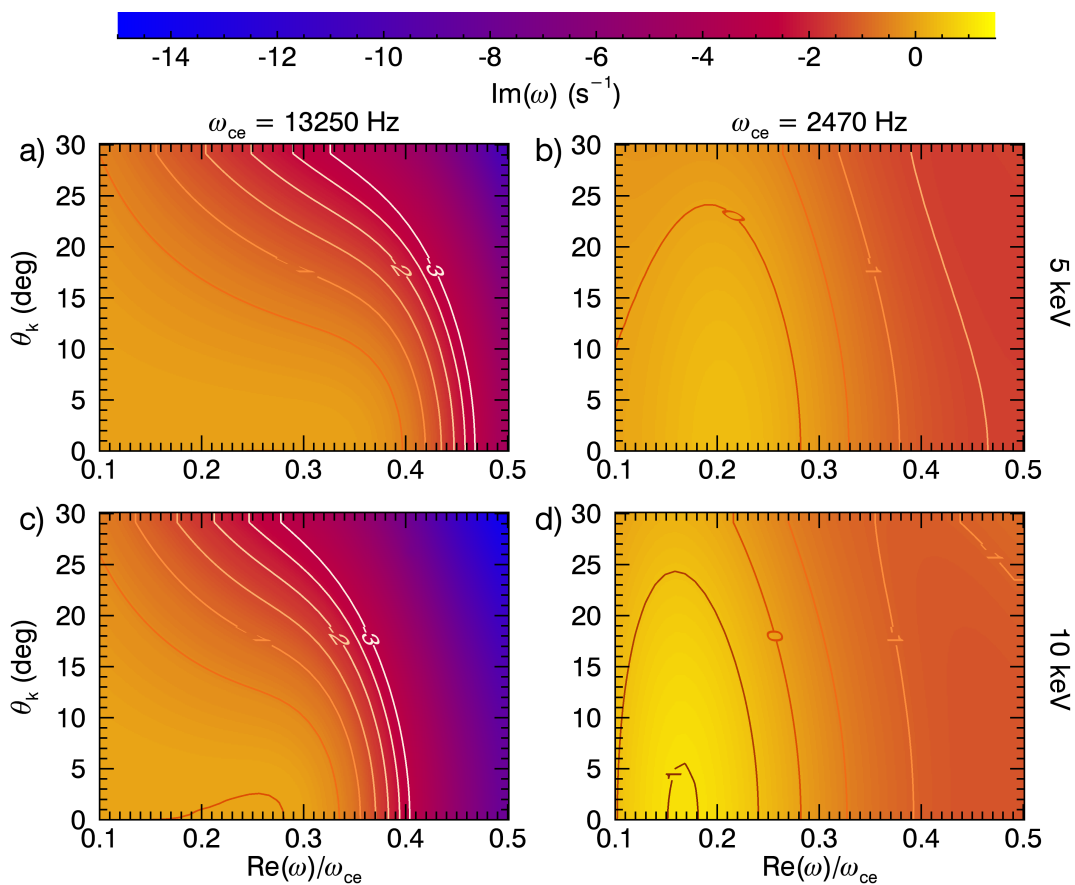
Statistika úhlů vlnového vektoru θ_k prezentovaná v obrázcích 5.14 vede po srovnání s obr. 5.5e), 5.5f) k závěru, že v nadpoloviční většině případů pozorování se jedná o vedené vlny. Pro uvedený poměr vedených ku nevedeným vlnám 85 : 15 se θ_k drží okolo 10° . Za předpokladu takového poměru se příliš neprojevuje, zda úhly vážíme na B^2 či hustotu energie W . Pro větší zastoupení nevedených vln pozorujeme v případě vážení na W nárůst θ_k na větších šířkách. Obrázek 5.15 ukazuje nevážené průměrné hodnoty úhlů s amplitudovým ořezem $A > 0,1$. Ani s takto hrubým ořezáním se nepodařilo replikovat peaky okolo $\lambda = 15^\circ$ v obrázcích 5.5a), 5.5b). Hypotézu, že jsou peaky způsobeny nevedenými vlnami, které na vyšších šířkách nejsou vidět kvůli poklesu amplitudy, se nám tedy nepodařilo potvrdit.



Obrázek 5.14: Závislost úhlu vlnového vektoru θ_k na magnetické šířce λ_m . Horké plazma, bez anizotropie, dipólové magnetické pole. Panel a) ukazuje průměrnou hodnotu úhlů vážených na B^2 , panel b) ukazuje vážení na hustotu energie W . Poměrné zastoupení vedených vln v grafech je 85 % pro plnou čáru, 50 % pro přerušovanou čáru a 15 % pro čerchovanou.



Obrázek 5.15: Parametry simulace a význam značení jako v obr. 5.14, panel a) pro horké plazma bez anizotropie, panel b) s anizotropií $a = 0,4$. Hodnoty úhlů nejsou váženy energiemi, na amplitudu vln je však uplatněn práh $A/A_{\text{init}} > 0,1$.



Obrázek 5.16: Imaginární část frekvence pro horké populace s anizotropií $a = 0,4$. V panelech a), b) má horká populace teplotu 5 keV, v panelech c), d) teplotu 10 keV. Panely a), c) byly vykresleny pro cyklotronové elektronové frekvence $f_{ce} = 13\,250$ Hz, panely b), d) pro $\omega_{ce} = 2\,470$ Hz. Kontury jsou vykresleny s krokem $0,5\text{ s}^{-1}$ od -3 s^{-1} do 1 s^{-1} .

V souhrnu můžeme říci, že některé pozorované aspekty chování vln (nízká θ_k po vážení na B^2 , nárůst energie při šíření od rovníku) se nám podařilo reprodukovat, nacházíme však významné diskrepance. Mezi ně patří především nižší nárůst B^2 v rozsahu šířek od rovníku do 40° a peaky v θ_k před vážením na energii. Také jsme zdůvodnili, že změnou hodnoty anizotropie nebo elektronové teploty bychom požadovaného růstu B^2 nedosáhli. Domníváme se, že tyto rozdíly by bylo možné odstranit použitím nelineární teorie, která předpovídá růst energie vln na gradientu okolního magnetického pole [Omura et al., 2008]. Magnetické pole směrem od rovníku narůstá rychleji na nižších L , měli bychom tedy v souladu s pozorováním pozorovat větší růsty energie vlny pro $4,0 < L < 5,5$. Přítomnost dalšího růstového mechanismu působícího na vedené vlny navíc umožňuje v modelu zvýšit energie a hustoty horkých elektronů, čímž se zvýší tlumení nevedených vln dále od rovníku a dojde tak ke vzniku zmiňovaných peaků v závislosti $\theta_k(\lambda_m)$.

5.3 EMIC emise v magnetosféře Saturnu

5.3.1 Obecné charakteristiky EMIC emisí

Označení elektromagnetické iontové cyklotronové (EMIC) emise se v literatuře často používá pro všechny vlny pozorované na frekvencích blízkých cyklotronovým frekvencím iontů. Mohou být generované například ionty zachycenými v prstencovém proudu, tj. populacemi horkých iontů s vysokou teplotní anizotropií. Frekvence vln typicky spadají do intervalu 0,1 Hz až 5 Hz, v závislosti na lokální cyklotronové frekvenci iontů. Při růstu EMIC vln dochází k izotropizaci nestabilních rozdělů iontů. Zastoupení těžkých iontů v plazmatu silně ovlivňuje charakter disperzní relace, především hodnotu crossover frekvence a zakázané frekvenční pásy. V zemské magnetosféře EMIC emise pozorujeme převážně v oblasti plazmapauzy a poblíž magnetopauzy, nedaleko od magnetické ekvatoriální roviny. Při jejich vzniku hrají roli především koncentrace protonů a helia a v malé míře také kyslík [Usanova et al., 2016].

Orbity měsíců Saturnu jsou až na výjimky zcela uzavřeny v magnetosféře planety. Z atmosfér měsíců unikají do rovníkové oblasti Saturnu těžké ionty, jejichž populace je charakteristická vysokou teplotní anizotropií. Dojde-li k injekci horké populace částic, může poblíž orbit měsíců docházet k růstu EMIC vln. V magnetosféře Saturnu nebyly EMIC emise pozorovány přímo, ale jejich přítomnost je předpokládána poblíž magnetopauzy (částečně koinciduje s oběžnou dráhou Titanu) a ve vnitřní magnetosféře na základě měření iontových spekter [Mauk, 2014].

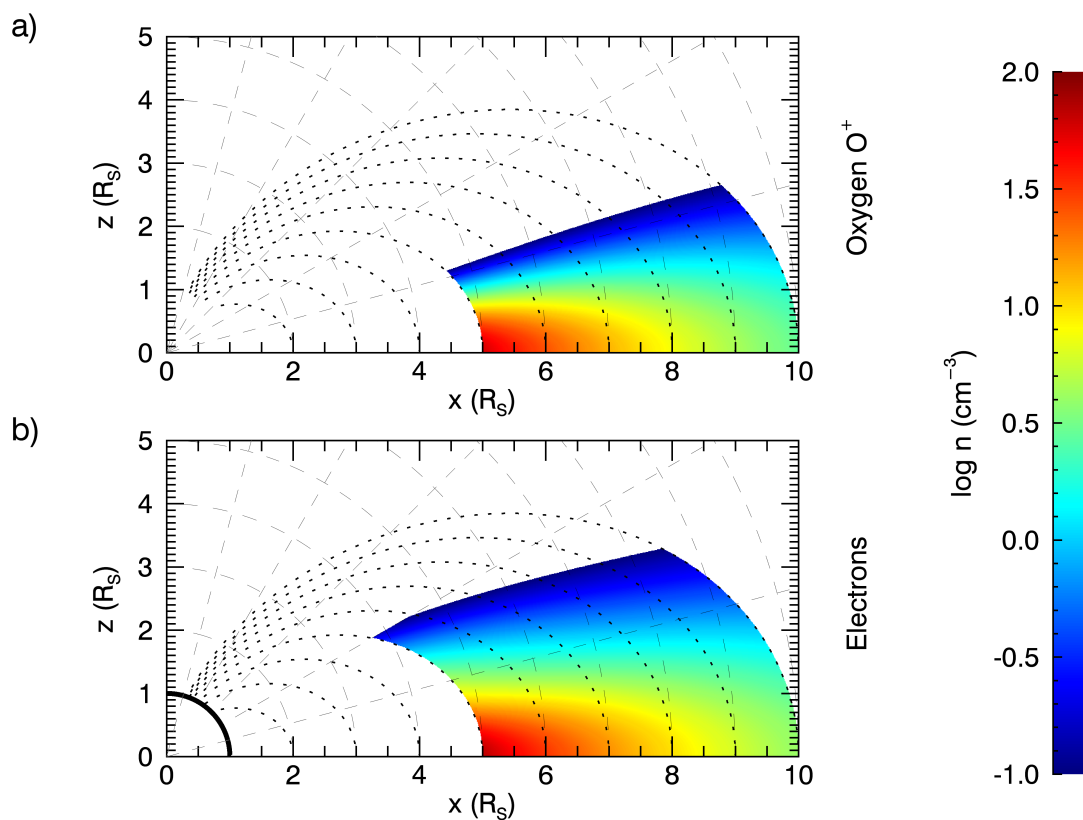
V následujících odstavcích se zaměříme na šíření již narostlých EMIC vln v horkém plazmatu s nízkými teplotami iontů (*warm plasma*). Zaměříme se především na vývoj polarizace vlny, grupové rychlost a směr vlnového vektoru v závislosti na vzdálenosti od rovníku.

5.3.2 Simulace protonových cyklotronových emisí

Šíření paprsků simulovaných programem RAY jsme omezili na meridionální rovinu a dále jsme povolenou oblast omezili podmínkou $|\lambda_m| < 30^\circ$. Nepředpo-

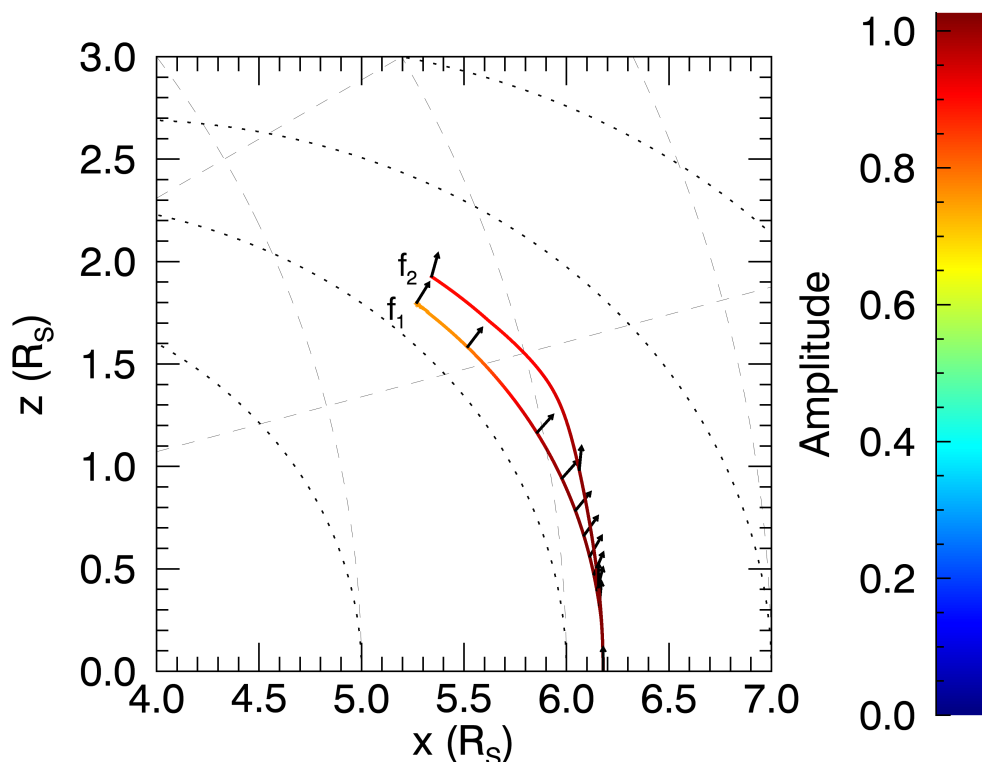
kládáme velký útlum ani přílišné odchylování od počáteční siločáry, omezení na amplitudu a L tedy neklademe. Odraz vln je zakázán podmínkou $|\theta_k| < 89^\circ$. Doba šíření je omezena na 10 min.

Magnetické pole je reprezentováno dipólem s hodnotou magnetické indukce na rovníku u povrchu $B_{\text{eq}} = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Hustotní model založený na práci Persoon et al., [2009] a implementovaný rovnicemi (4.6) a (4.7) je vykreslen na obrázku 5.17. Všechny paprsky startujeme na rovníku ve vzdálenosti $R = 6,18$ s počátečním úhlem vlnového vektoru $\theta_k = 0^\circ$. Jelikož předpokládáme, že se budou paprsky držet poblíž $L = 6,18$, můžeme volit konstantní teploty částic. Předpokládáme bimaxwellovské rychlostní rozdělení u všech částic a volíme hodnoty teplot $T_{\parallel, \text{e}} = 1 \text{ eV}$ (studené elektrony, neovlivňují útlum), $T_{\parallel, \text{p}} = T_{\parallel, \text{O}} = 15 \text{ eV}$. Dále podle Persoon et al., [2009] odhadujeme anizotropii rozdělení iontů konstantními hodnotami $a_{\text{p}} = 1,5$ a $a_{\text{O}} = 3,0$, zatímco rozdělení elektronů považujeme za izotropní. Při volbě teplot iontů a polohy zdroje vln vycházíme z práce Kumari et al., [2018], kde však autoři navíc uvažují injekci horkých částic a vnější elektrické pole.



Obrázek 5.17: Hustota vodních iontů zastoupených kyslíkem (a) a hustota elektronů (b) na Saturnu vypočtená na základě modelu difúzního ekvilibria; meridionální rovina. Vykreslená oblast je omezena hranicemi $\lambda_m < 30^\circ$ a $5 < L < 10$. Hodnoty nižší než $0,1 \text{ cm}^{-3}$ nejsou vykresleny. Hodnoty na osách jsou vyjádřeny v poloměrech Saturnu R_S . Tečkované křivky reprezentují dipólové siločáry, tenké přerušované čáry představují polární síť v souřadnicích (R, λ_m) .

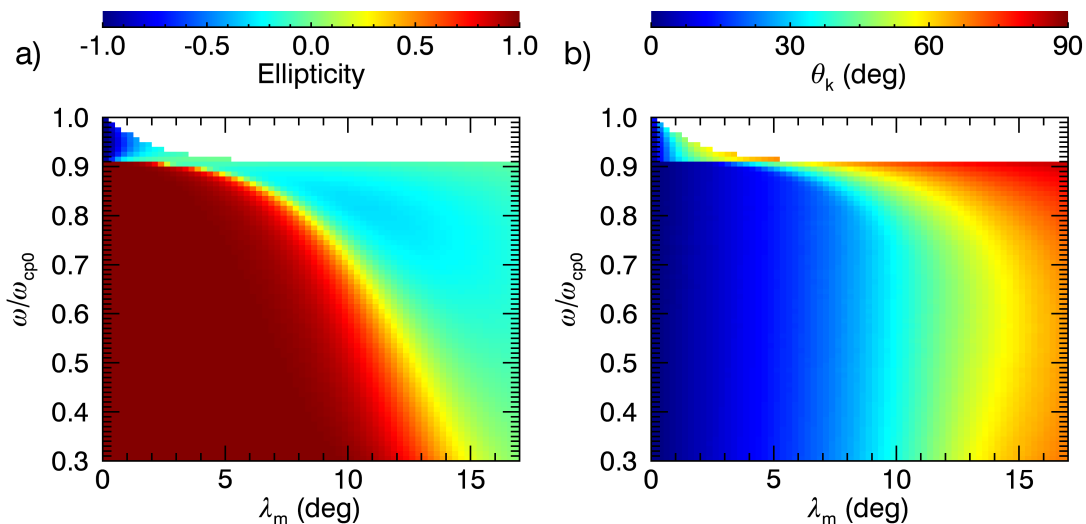
Počáteční frekvence volíme v rozsahu od $0,30f_{cp0}$ do $0,99f_{cp0}$ s krokem $0,01f_{cp0}$, přičemž protonová frekvence ve zdroji nabývá hodnoty $f_{cp0} = 1,291$ Hz. Na obrázku 5.18 jsou vykresleny trajektorie dvou paprsků o frekvencích $f_1 = 0,387$ Hz a $f_2 = 1,161$ Hz. Podél trajektorií je s rozestupy 60 sekund grupového času šipkami znázorněn směr vlnových vektorů. Pozorujeme, že ani jedna z trajektorií se od počáteční hodnoty L vskutku příliš nevzdaluje.



Obrázek 5.18: Trajektorie paprsků s frekvencemi $f_1 = 0,387$ Hz a $f_2 = 1,161$ Hz. Černé šipky vykreslené v intervalech 60 sekund grupového času znázorňují směr vlnového vektoru. Barva trajektorie reprezentuje amplitudu vlny.

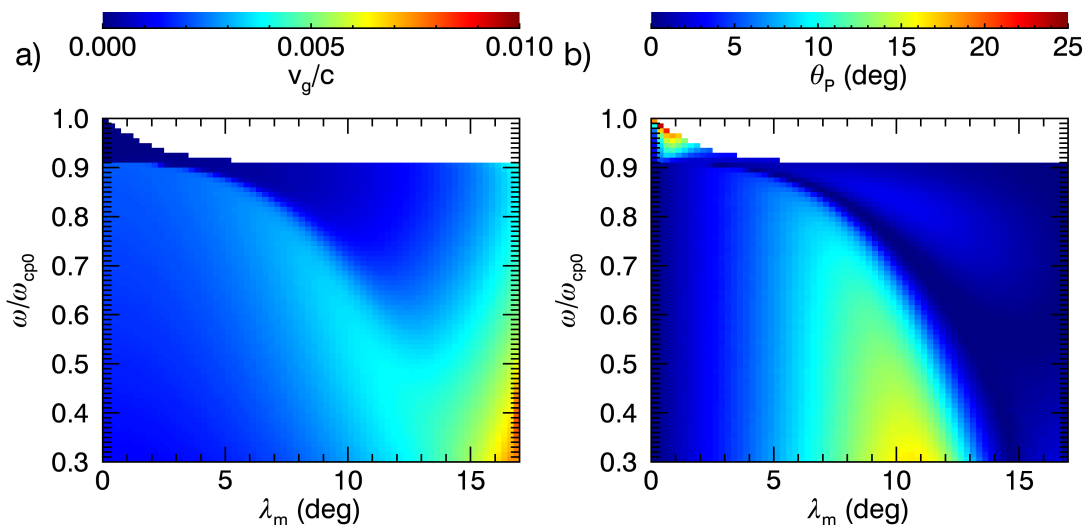
Vlnové charakteristiky počítané podél trajektorie jsme zprůměrovali přes magnetickou šířku s biny velikosti $0,25^\circ$ a vykreslili do grafů závislosti na frekvenci vlny ω (neprůměrováno) a magnetické šířce λ_m . Získaná data zpracováváme pouze v oblasti $\lambda_m < 17^\circ$, neboť pro některé paprsky docházelo na vyšších šířkách k růstu numerických chyb kvůli problémům s hledáním kořenů disperzní relace – viz zmínka o volbě vlnových módů v kapitole 4.2, předposlední odstavec. Na obrázku 5.19a) je vykreslena elipticita polarizace. Ostrý přechod mezi levotočivými a pravotočivými vlnami v grafu udává hodnoty crossover frekvence ω_x v závislosti na magnetické šířce. Obrázek 5.19b) ukazuje chování vlnového vektoru.

Data pro vlny, které jsou ve zdroji levotočivé, jsou vykreslena jen do několika stupňů šířky, neboť mají velice nízkou grupovou rychlost a šířily se prostorem déle než 10 min (výše zvolený limit). Grupová rychlost vln je vynesena v obr. 5.20a).



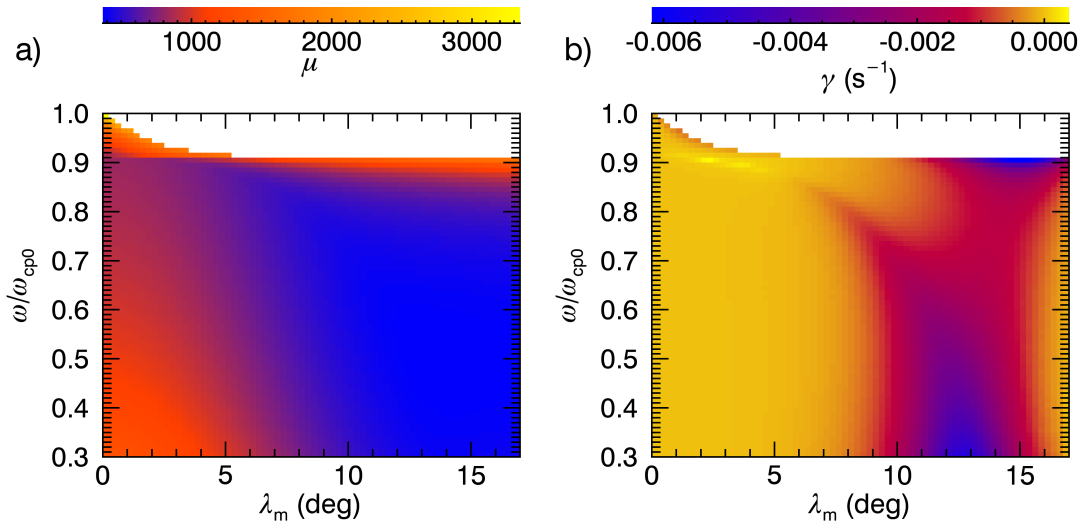
Obrázek 5.19: a) Elipticita polarizace simulovaných EMIC vln v závislosti na frekvenci a magnetické šířce. b) Úhel vlnového vektoru θ_k .

Úhel θ_P odklonu Poyntingova vektoru od magnetického pole na obr. 5.20b) je pro většinu frekvencí a šířek menší než 15° , především pak pro vlny o frekvenci $\omega < 0,9\omega_{cp0}$ (ve zdroji pravotočivé) je po přepnutí polarizace směr šíření téměř paralelní s polem, jak jsme již viděli v obr. 5.18.



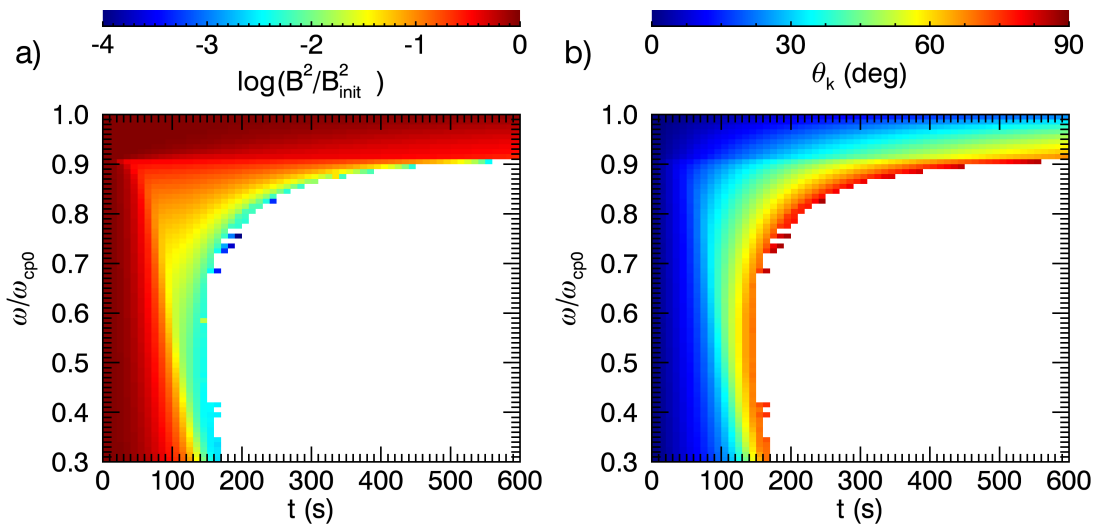
Obrázek 5.20: a) Grupová rychlost EMIC vln v jednotkách rychlosti světla. b) Úhel mezi Poyntingovým vektorem a vektorem okolního magnetického pole.

Obrázek 5.21a) ukazuje hodnoty indexu lomu μ , přičemž speciálně pro $\lambda_m = 0^\circ$ pozorujeme, že minimum indexu lomu téměř koinciduje s polohou crossover frekvence ω_x . Pro frekvence $\omega > \omega_x$ index lomu prudce narůstá až k divergenci v ω_{cp} . Růstový koeficient se drží na nízkých hodnotách (amplituda vln nikdy neklesla pod 70% počáteční hodnoty), kladné hodnoty pozorujeme pouze poblíž rovníku pro vlny o frekvenci blízké ω_x – viz světle žluté buňky v obrázku 5.21b).



Obrázek 5.21: a) Distribuce indexu lomu μ v závislosti na šířce a frekvenci EMIC vln. b) Imaginární část γ úhlové frekvence EMIC vln (růstový koeficient).

Nakonec prezentujeme vlnový spektrogram zobrazující časově-frekvenční závislost kvadrátu magnetické indukce vlny, obr. 5.22a). Jelikož se vlny šíří přibližně podél siločar a poblíž rovníku, nezahrnujeme do výpočtu B^2 geometrický faktor zužování paprsků, a vzhledem k nízkým hodnotám $|\gamma|$ ani útlum. Změny v B^2 jsou tedy způsobeny pouze přeléváním energie z magnetického do elektrického pole v závislosti na hodnotách úhlu θ_k , jehož spektrogram je vyneseno v obrázku 5.22b).



Obrázek 5.22: a) Spektrogram magnetické energie EMIC vln B^2 vztažené k hodnotě ve zdroji, bez zahrnutí geometrického faktoru a útlumu vln, v závislosti na grupovém čase. b) Spektrogram úhlu vlnového vektoru θ_k .

5.3.3 Diskuse

Výsledky v obrázku 5.20 ukazují, že Poyntingův vektor vlny (resp. grupová rychlost a směr šíření) silně závisí na polarizaci vlny. Větev disperzní relace, na které se pohybujeme, je rozdělena na pravotočivou a levotočivou část podél crossover frekvence ω_x . Tato frekvence, definovaná v kapitole 2.4, silně závisí na koncentraci těžšího iontu, zde kyslíku. Z obrázku 5.17 je zřejmé, že poblíž rovníku je kyslík zastoupen více než vodík. Frekvence ω_x se proto nachází velice blízko protonové cyklotronové frekvence ω_{cp0} , jak potvrzují hodnoty elipticity polarizace na obrázku 5.19a). Jelikož je ω_x blízka ω_{cp0} , nachází se levotočivá část větve v oblasti vysokých indexů lomu, grupová rychlost levotočivých vln blízko rovníku je proto velmi nízká. Šíření takových vln není v našem modelu možné zkoumat, protože neuvažujeme dynamiku magnetosférického plazmatu. Tato analýza založená na disperzních vlastnostech studeného plazmatu je ve shodě s výsledky uvedenými v Mauk, [2014], kde jsou vykresleny disperzní křivky pro siločáru $L = 9$, $\lambda_m = 0^\circ$. Skok v grupové rychlosti na rovníku okolo crossover frekvence je způsoben idealizací, kdy uvažujeme přesně $\theta_k = 0^\circ$. Pro volbu počátečního úhlu v jednotkách stupňů a drobnější dělení frekvencí jsme dostali stále prudký, ale hladký pokles ve v_g .

Naše výsledky nutně nevylučují generování protonových EMIC vln v levotočivém módu. Pokud budeme uvažovat, že vlny vznikají ne přímo na rovníku, ale několik šířkových stupňů od něj, bude podle 5.17 již koncentrace vodních iontů příznivější, tj. díky její nižší hodnotě bude mít levotočivá část disperzní větve větší frekvenční rozsah. Předpoklad posunutého zdroje je v souladu s Kumari et al., [2018] (viz také Usanova et al., [2016]), kde je ukázáno, že k největšímu růstu EMIC vln dochází v intervalu $5^\circ < \lambda_m < 10^\circ$. Tyto výsledky nemůžeme zcela srovnat s našimi, neboť jsme neuvažovali injekci horkých iontů. Pozorujeme však, že maximum růstového koeficientu se nachází pro zvolené teploty a anizotropie iontů poblíž $0,9\omega_{cp}$ (viz obr. 5.21), a dále z analýzy emisí typu chorus v sekci 5.2 víme, že s rostoucí teplotou se maximum posouvá dále od rezonance. Toto tvrzení lze také podpořit vztahem pro výpočet malých růstů na anizotropním rozdělení, vzorec (2.42) v kapitole 2.5.3 a poznámka o protonových hvizdech tamtéž. Aby tedy narostly vlny v levotočivém módu a byly měřitelné družicovými přístroji, musely by ω_x nabývat menších hodnot, aby oblast růstu zasáhla i do levotočivé části disperzní větve.

Ve spektrogramu na obr. 5.22 jsme úmyslně ponechali data z celých trajektorií, tj. bez ořezu $\lambda_m < 17^\circ$. Pro některé hodnoty frekvencí se vlny šířily v čase déle než pro sousední frekvence, přičemž B^2 klesá k nule a θ_k roste k 90° , což znamená, že šíření vlny bylo zastaveno až podmínkou $\theta_k < 89^\circ$. U ostatních vln program nahlásil narušení podmínek pro použití WKB aproximace kvůli pozorovaným rychlým změnám vlnového vektoru. Tyto změny však nejsou způsobeny reálným šířením vlny, ale Newtonovou metodou hledání kořene, která blízko crossover frekvence nedokáže rozlišit dvě blízka řešení disperzní relace a v některých případech se pokusí přeskočit z jednoho řešení do druhého, což vede k falešnému ohlášení porušení WKB aproximace. Je tedy nutné při každém integračním kroku prozkoumat všechna řešení disperzní relace a sepsat rozhodovací schéma, které mezi nimi vybírá. Toto je například pomocí vícedimenzionální metody sečen implementováno v disperzním řešiči KUPDAP [Sugiyama et al., 2015], avšak hledání všech řešení ve zvoleném regionu by v našem případě vedlo k výraznému

zpomalení výpočtu, neboť 3D ray tracing vyžaduje řádově desítky přepočtů disperzní relace v každém integračním kroku.

Závěr

V této práci jsme rozebrali přístup k analýze šíření elektromagnetických vln v kosmickém plazmatu na základě metody ray tracing. Sestavili jsme numerický kód RAY založený na Hamiltonových rovnicích geometrické optiky v aproximaci malého tlumení/růstu, jež hledá trajektorie paprsků se zahrnutím opravy pocházející z imaginární části disperzní relace a počítá amplitudový útlum/růst podél trajektorie. Tento kód jsme aplikovali na studium elektromagnetických emisí v magnetosférách Země a Saturnu.

V aproximaci studeného plazmatu jsme studovali charakteristiky šíření kvaziperiodických vln ve hvizdovém módu pozorovaných na družici DEMETER. Naměřené prudké změny vlnového vektoru jsme vysvětlili jako odraz vln na hustotních gradientech v ionosféře, v souladu se Sonwalkar et al., [2011], kteří studovali magnetosférické odrazy. Při simulacích jsme narazili na omezení použitelnosti metody ray tracing, kdy v oblastech se silnou nehomogenitou hustoty plazmatu selhává platnost WKB aproximace a je potřeba doplnit simulace teoretickým předpokladem o spekulárním odrazu vln. Toto omezení nelze z principu odstranit, alternativu poskytují full-wave simulace, které nekladou dolní hranici na rozměr hustotních nehomogenit [Liu et al., 2018].

Výhoda metody ray tracing spočívá především v možnosti simulovat v krátkém čase velké množství vln/paprsků s různými počátečními parametry a různé modifikace prostředí. Tuto výpočetní sílu ukazujeme na simulaci hvizdových vln v oblasti vnějšího radiačního pásu, kdy jsme simulovali desítky tisíc vln v plazmatu s horkou anizotropní populací elektronů. Výsledky jsme srovnali s měřeními družice Cluster a dospěli k závěru, že vlny musejí být převážně vedené magnetosférickými ducty, neboť v souladu s teorií Landauova útlumu by byly nevedené EM emise mimo rovníkovou oblast silně tlumené. Opět však narážíme na limit použitelnosti programu RAY, tentokrát daný linearizací disperzních vlastností prostředí. Statistika simulovaných paprsků ukazuje, že magnetická energie vln směrem od rovníku narůstá, avšak velký podíl na tomto efektu má dipólová geometrie magnetického pole. Model stlačeného pole, jež lépe odpovídá situaci v oblasti radiačního pásu na denní straně, neposkytuje kvantitativní shodu s experimentem. Docházíme k závěru, že k vysvětlení družicových měření je potřeba aplikovat nelineární teorii růstu vln na nehomogenitách magnetického pole, v souladu s poznatky uvedenými v Omura et al., [2008].

Analýza EMIC emisí v magnetosféře Saturnu trpí nedostatkem modelů toku horkých částic ve studované oblasti. Nicméně i simulace v nízkoteplotním plazmatu ukazují základní charakteristiky protonových EMIC vln. Vysoké zastoupení vodních iontů v rovníkové oblasti omezuje levotočivou disperzní větev protonových hvizdů na velice úzké frekvenční spektrum, které spadá do oblasti silného cyklotronového útlumu. Na základě simulací se tedy domníváme, že na rozdíl od zemské magnetosféry budou protonové EMIC emise pozorovatelné pouze jako pravotočivě polarizované. Z disperzních vlastností EMIC vln v horkém plazmatu a vysoké anizotropie iontů také vyvozujeme závěr, že vnitřní magnetosféra Saturnu podporuje růst těchto vln, byť zatím nebyly ve zkoumané oblasti prokazatelně pozorovány.

V uvedených aplikacích nebyly plně využity možnosti modelu rychlostního

rozdělení (4.8) implementovaného v použitém numerickém kódu. K tomu by bylo potřeba získat z družicových měření rozdělení částic ve fázovém prostoru a empirické vztahy pro parametry ztrátového kužele, což by samo o sobě vydalo na další rozsáhlou práci. Obecně můžeme říci, že ray tracing je výborná podpůrná metoda pro studium elektromagnetických vln, ale je potřeba ji doplnit kvalitními modely kosmického plazmatu. Mezi potenciální rozšíření programu RAY patří kromě přidání nových modelů hustoty, magnetického pole a teploty také napojení na řešič disperzní relace pro nemaxwellovské distribuce nebo implementace komplexní geometrické optiky pro přesnější studium energie paprsku.

Seznam použité literatury

- Angerami, J. J. a J. O. Thomas (1964). „Studies of Planetary Atmospheres, 1, The Distribution of Electrons and Ions in the Earth’s Exosphere“. *J. Geophys. Res.* 69, 4537–4560. DOI: 10.1029/JZ069i021p04537.
- Bernstein, I. B. (1975). „Geometric optics in space- and time-varying plasmas“. *Physics of Fluids* 18, 320–324. DOI: 10.1063/1.861140.
- Bilitza, D. a B. W. Reinisch (2008). „International Reference Ionosphere 2007: Improvements and new parameters“. *Adv. Space Res.* 42, 599–609. DOI: 10.1016/j.asr.2007.07.048.
- Bortnik, J., L. Chen, W. Li, R. M. Thorne a R. B. Horne (2011). „Modeling the evolution of chorus waves into plasmaspheric hiss“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 116, A08221, A08221. DOI: 10.1029/2011JA016499.
- Buchdahl, H. A. (1993). *An Introduction to Hamiltonian Optics*. Dover classics of science and mathematics. Dover Publications. ISBN: 9780486675978.
- Budden, K. G. (1985). *The Propagation of Radio Waves: The Theory of Radio Waves of Low Power in the Ionosphere and Magnetosphere*. Cambridge University Press. ISBN: 9780521369527.
- Cussac, T., M. Clair, P. Ultré-Guerard, F. Buisson, G. Lassalle-Balier, M. Ledu, C. Elisabellar, X. Passot a N. Rey (2006). „The DEMETER microsatellite and ground segment“. *Planet. Space Sci.* 54, 413–427.
- Denton, R. E., J. D. Menietti, J. Goldstein, S. L. Young a R. R. Anderson (2004). „Electron density in the magnetosphere“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 109, A09215. DOI: 10.1029/2003JA010245.
- Dougherty, M. K., L. W. Esposito a S. M. Krimigis (2009). *Saturn from Cassini-Huygens*. Ed. Michele K. Dougherty, Larry W. Esposito a Stamatios M. Krimigis. 1. vyd. 1. Dordrecht: Springer, VIII, 805. ISBN: 978-1-4020-9216-9. DOI: 10.1007/978-1-4020-9217-6.
- Felsen, L. B. a C. E. Baum (1976). *Transient electromagnetic fields*. Topics in applied physics. Springer-Verlag. ISBN: 9780387075532.
- Fišer, J., J. Chum, G. Diendorfer, M. Parrot a O. Santolík (2010). „Whistler intensities above thunderstorms“. *Ann. Geophys.* 28.11, 37–46. ISSN: 0992-7689. DOI: 10.5194/angeo-28-37-2010.
- Gallagher, D. L., P. D. Craven a R. H. Comfort (2000). „Global core plasma model“. *J. Geophys. Res.* 105, 18. DOI: 10.1029/1999JA000241.

- Gurnett, D. A. a A. Bhattacharjee (2017). *Introduction to Plasma Physics: With Space, Laboratory and Astrophysical Applications*. Cambridge University Press. ISBN: 9781316849026.
- Hairer, E., S. P. Nørsett a G. Wanner (1993). *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems. Springer. ISBN: 9783540604525.
- Hanzelka, M., O. Santolík, M. Hajoš, F. Němec a M. Parrot (2017). „Observation of ionospherically reflected quasiperiodic emissions by the DEMETER spacecraft“. *Geophys. Res. Lett.* 44, 8721–8729. DOI: 10.1002/2017GL074883.
- Hapgood, M. A. (1992). „Space physics coordinate transformations – A user guide“. *Planet. Space Sci.* 40, 711–717. DOI: 10.1016/0032-0633(92)90012-D.
- Haselgrove, J. (1963). „The Hamiltonian ray path equations“. *J. Atm. Ter. Phys.* 25, 397–399. DOI: 10.1016/0021-9169(63)90173-9.
- Hayosh, M., F. Němec, O. Santolík a M. Parrot (2016). „Propagation properties of quasiperiodic VLF emissions observed by the DEMETER spacecraft“. *Geophys. Res. Lett.* 43, 1007–1014. DOI: 10.1002/2015GL067373.
- Helliwell, R. A. (1965). *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*. Stanford University Press, Stanford Calif.
- Horne, R. B. (1989). „Path-integrated growth of electrostatic waves – The generation of terrestrial myriametric radiation“. *J. Geophys. Res.* 94, 8895–8909. DOI: 10.1029/JA094iA07p08895.
- Inan, U. S. a T. F. Bell (1977). „The plasmopause as a VLF wave guide“. *J. Geophys. Res.* 82, 2819–2827. DOI: 10.1029/JA082i019p02819.
- Kabin, K., R. Rankin, I. R. Mann, A. W. Degeling a R. Marchand (2007). „Polarization properties of standing shear Alfvén waves in non-axisymmetric background magnetic fields“. *Ann. Geophys.* 25, 815–822. DOI: 10.5194/angeo-25-815-2007.
- Katoh, Y. a Y. Omura (2016). „Electron hybrid code simulation of whistler-mode chorus generation with real parameters in the Earth’s inner magnetosphere“. *Earth, Planets and Space* 68.1, 192. ISSN: 1880-5981. DOI: 10.1186/s40623-016-0568-0.
- Kennel, C. F. a H. E. Petschek (1966). „Limit on Stably Trapped Particle Fluxes“. *J. Geophys. Res.* 71, 1–28.

- Kubota, Y., Y. Omura, C. Kletzing a G. Reeves (2018). „Generation process of large-amplitude upper band chorus emissions observed by Van Allen Probes“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 123, 3704–3713. DOI: 10.1029/2017JA024782.
- Kumari, J., R. Kaur a R. S. Pandey (2018). „Effect of hot injections on electromagnetic ion-cyclotron waves in inner magnetosphere of Saturn“. *Astrophys. Space Sci.* 363, 33, 33. DOI: 10.1007/s10509-018-3250-0.
- Li, W. et al. (2010). „THEMIS analysis of observed equatorial electron distributions responsible for the chorus excitation“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 115, A00F11, A00F11. DOI: 10.1029/2009JA014845.
- Liu, X., L. Chen, L. Yang, Z. Xia a D. M. Malaspina (2018). „One-Dimensional Full Wave Simulation of Equatorial Magnetosonic Wave Propagation in an Inhomogeneous Magnetosphere“. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 123, 587–599. DOI: 10.1002/2017JA024336.
- Livadiotis, G. (2017). *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas*. Elsevier Science. ISBN: 9780128046395.
- Loi, S. T. et al. (2015). „Real-time imaging of density ducts between the plasmasphere and ionosphere“. *Geophys. Res. Lett.* 42, 3707–3714. DOI: 10.1002/2015GL063699.
- Mauk, B. H. (2014). „Comparative investigation of the energetic ion spectra comprising the magnetospheric ring currents of the solar system“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 119, 9729–9746. DOI: 10.1002/2014JA020392.
- Maxworth, A. S. a M. Gołkowski (2017). „Magnetospheric whistler mode ray tracing in a warm background plasma with finite electron and ion temperature“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 122, 7323–7335. DOI: 10.1002/2016JA023546.
- Menk, F., Z. Kale, M. Sciffer, P. Robinson, C. Waters, R. Grew, M. Clilverd a I. Mann (2014). „Remote sensing the plasmasphere, plasmopause, plumes and other features using ground-based magnetometers“. *J. Space Weather Space Clim.* 4.27, A34, A34. DOI: 10.1051/swsc/2014030.
- Menvielle, M. a A. Berthelier (1991). „The K-derived planetary indices - Description and availability“. *Rev. Geophys.* 29, 415–432. DOI: 10.1029/91RG00994.
- Němec, F., O. Santolík, J. S. Pickett, M. Parrot a N. Cornilleau-Wehrin (2013). „Quasiperiodic emissions observed by the Cluster spacecraft and their association with ULF magnetic pulsations“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 118, 4210–4220. DOI: 10.1002/jgra.50406.

- O'Brien, T. P. a M. B. Moldwin (2003). „Empirical plasmapause models from magnetic indices“. *Geophys. Res. Lett.* 30, 1152, 1–1. DOI: 10.1029/2002GL016007.
- Omura, Y., Y. Katoh a D. Summers (2008). „Theory and simulation of the generation of whistler-mode chorus“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 113, A04223, A04223. DOI: 10.1029/2007JA012622.
- Ozhogin, P., J. Tu, P. Song a B. W. Reinisch (2012). „Field-aligned distribution of the plasmaspheric electron density: An empirical model derived from the IMAGE RPI measurements“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 117, A06225, A06225. DOI: 10.1029/2011JA017330.
- Ozhogin, P., P. Song, J. Tu a B. W. Reinisch (2014). „Evaluating the diffusive equilibrium models: Comparison with the IMAGE RPI field-aligned electron density measurements“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 119, 4400–4411. DOI: 10.1002/2014JA019982.
- Persoon, A. M. et al. (2009). „A diffusive equilibrium model for the plasma density in Saturn's magnetosphere“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 114, A04211, A04211. DOI: 10.1029/2008JA013912.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling a B. P. Flannery (1992). *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.): The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA: Cambridge University Press. ISBN: 0-521-43108-5.
- Rönmark, K. (1983). „Computation of the dielectric tensor of a Maxwellian plasma“. *Plasma Physics* 25, 699–701. DOI: 10.1088/0032-1028/25/6/007.
- Russell, C. T., J. G. Luhmann a R. J. Strangeway (2016). *Space Physics: An Introduction*. Cambridge University Press. ISBN: 9781107098824.
- Santolík, O. a M. Parrot (1999). „Case studies on the wave propagation and polarization of ELF emissions observed by Freja around the local proton gyrofrequency“. *J. Geophys. Res.* 104, 2459–2476. DOI: 10.1029/1998JA900045.
- Santolík, O., M. Parrot a F. Lefeuvre (2003). „Singular value decomposition methods for wave propagation analysis“. *Radio Sci.* 38, 1010, 10–1. DOI: 10.1029/2000RS002523.
- Santolík, O., J. Chum, M. Parrot, D. A. Gurnett, J. S. Pickett a N. Cornilleau-Wehrin (2006). „Propagation of whistler mode chorus to low altitudes: Spacecraft observations of structured ELF hiss“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 111.A10, A10208, A10208. DOI: 10.1029/2005JA011462.
- Santolík, O., J. S. Pickett, D. A. Gurnett, J. D. Menietti, B. T. Tsurutani a O. Verkhoglyadova (2010). „Survey of Poynting flux of whistler mode chorus

- in the outer zone“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 115, A00F13, A00F13. DOI: 10.1029/2009JA014925.
- Santolík, O., C. A. Kletzing, W. S. Kurth, G. B. Hospodarsky a S. R. Bounds (2014a). „Fine structure of large-amplitude chorus wave packets“. *Geophys. Res. Lett.* 41, 293–299. DOI: 10.1002/2013GL058889.
- Santolík, O., E. Macúšová, I. Kolmašová, N. Cornilleau-Wehrin a Y. Conchy (2014b). „Propagation of lower-band whistler-mode waves in the outer Van Allen belt: Systematic analysis of 11 years of multi-component data from the Cluster spacecraft“. *Geophys. Res. Lett.* 41, 2729–2737. DOI: 10.1002/2014GL059815.
- Sazhin, S. S. (1991). „Landau damping of low frequency whistler-mode waves“. *Ann. Geophys.* 9, 690–695.
- Sazhin, S. S. a M. Hayakawa (1994). „Periodic and quasiperiodic VLF emissions“. *J. Atm. Ter. Phys.* 56, 735–753.
- Schunk, R. W. a A. F. Nagy (2004). *Ionospheres*. Cambridge University Press, 570. ISBN: 9780521607704.
- Sonnenschein, Elazar, Igor Rutkevich a Dan Censor (1998). „Wave packets, rays, and the role of real group velocity in absorbing media“. *Phys. Rev. E* 57 (1), 1005–1016. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.1005.
- Sonwalkar, V. S., D. L. Carpenter, A. Reddy, R. Proddaturi, S. Hazra, K. Mayank a B. W. Reinisch (2011). „Magnetospherically reflected, specularly reflected, and backscattered whistler mode radio-sounder echoes observed on the IMAGE satellite: 1. Observations and interpretation“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 116, A11210, A11210. DOI: 10.1029/2011JA016759.
- Stix, T. H. (1992). *Waves in Plasmas*. American Inst. of Physics. ISBN: 978-0883188590.
- Suchy, K. (1981). „Real Hamilton equations of geometric optics for media with moderate absorption“. *radsci* 16.06, 1179–1182. ISSN: 1944-799X. DOI: 10.1029/RS016i006p01179.
- Sugiyama, H., S. Singh, Y. Omura, M. Shoji, D. Nunn a D. Summers (2015). „Electromagnetic ion cyclotron waves in the Earth’s magnetosphere with a kappa-Maxwellian particle distribution“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 120, 8426–8439. DOI: 10.1002/2015JA021346.
- Swanson, D. G. (2003). *Plasma Waves, 2nd Edition*. Series in Plasma Physics. Taylor & Francis. ISBN: 9780750309271.

- Synge, J. L. (1954). *Geometrical Mechanics and De Broglie Waves*. Cambridge Monographs on Mechan. Cambridge University Press. ISBN: 9780521156882.
- Tao, X., J. Bortnik, J. M. Albert, R. M. Thorne a W. Li (2013). „The importance of amplitude modulation in nonlinear interactions between electrons and large amplitude whistler waves“. *J. Atm. Ter. Phys.* 99, 67–72. DOI: 10.1016/j.jastp.2012.05.012.
- Thébault, E. et al. (2015). „International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation“. *Earth, Planets, and Space* 67, 79, 79. DOI: 10.1186/s40623-015-0228-9.
- Titova, E. E., B. V. Kozelov, A. G. Demekhov, J. Manninen, O. Santolík, C. A. Kletzing a G. Reeves (2015). „Identification of the source of quasiperiodic VLF emissions using ground-based and Van Allen Probes satellite observations“. *Geophys. Res. Let.* 42, 6137–6145. DOI: 10.1002/2015GL064911.
- Tsyganenko, N. A. (1989). „A magnetospheric magnetic field model with a warped tail current sheet“. *Planet. Space Sci.* 37, 5–20. DOI: 10.1016/0032-0633(89)90066-4.
- Tsyganenko, N. A. a M. I. Sitnov (2005). „Modeling the dynamics of the inner magnetosphere during strong geomagnetic storms“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 110, A03208, A03208. DOI: 10.1029/2004JA010798.
- Usanova, M. E., I. R. Mann a F. Darrouzet (2016). „EMIC Waves in the Inner Magnetosphere“. *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series* 216, 65–78. DOI: 10.1002/9781119055006.ch5.
- Watson, G. N. (1944). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. The University Press.
- Woodroffe, J. R. a A. V. Streltsov (2013). „Whistler propagation in the plasmopause“. *J. Geophys. Res. Space Physics* 118, 716–723. DOI: 10.1002/jgra.50135.

Seznam použitých symbolů a zkratek

Index „s“ u všech symbolů níže označuje populaci částic a nabývá hodnot „e“ (elektron) nebo „i“ (index množiny iontů).

Symbol	Význam
a_s	anizotropie rychlostní distribuce částic
\tilde{a}_s	poměr kolmé a paralelní teploty částic
A	amplituda vlny
b	normalizovaná velikost indukce homogenního magnetického pole v modelu stlačeného magnetického dipólu
\mathbf{B}	vektor magnetického pole vlny
\mathbf{B}_0	vektor magnetického pole planety, vnější pole
B_{eq}	rovníková velikost indukce magnetického pole u povrchu planety
B_{IMF}	meziplanetární magnetické pole
CMA	diagram Clemmow-Mullaly-Allis (zkratka)
c_0	vakuová rychlost světla
D	Stixův rozdílový koeficient
\mathcal{D}	disperzní relace
DAE	diferenciálně-algebraická rovnice
DEMETER	družice Detection of Electro-Magnetic Emissions Transmitted from Earthquake Regions (zkratka)
\mathbf{E}	vektor elektrického pole vlny
EM	elektromagnetický (zkratka)
EMIC	emise ElectroMagnetic Ion Cyclotron (zkratka)
erf	chybová funkce
GCPM	model hustoty plazmatu Global Core Plasma Model (zkratka)
GSE	souřadnice Geocentric Solar Ecliptic (zkratka)
GSM	souřadnice Geocentric Solar Magnetospheric (zkratka)
f_{s0}	stacionární rychlostní rozdělení
H_g	geopotenciální výška
H_i	škálovací výška
$\vec{\mathbb{I}}$	jednotkový tenzor
I_n	modifikovaná Besselova funkce 1. druhu řádu n
IGRF	International Geomagnetic Reference Field (zkratka)
IRI	International Reference Ionosphere
J_n	Besselova funkce prvního druhu řádu n
\mathbf{k}	vlnový vektor
$\vec{\mathbb{K}}$	dielektrický tenzor
K_p	planetární index geomagnetické aktivity
l_m	azimutální úhel v SM souřadnicích
L	McIlwainův parametr; Stixův koeficient levotočivých vln

L^*	parametr driftových slupek
L_{pp}	střední rovníková vzdálenost plazmapauzy udaná v poloměrech planety
MLT	Magnetic Local Time (zkratka)
m_s	hmotnost částice
n_s	hustota částic [m^{-3}]
n_{s0}	rovníková hustota částic [m^{-3}]
ODE	obyčejná diferenciální rovnice (zkratka)
OG	ortogonální (zkratka)
P	Stixův longitudinální koeficient
\mathcal{P}	hlavní hodnota integrálu
PDF	plazmová disperzní funkce; hustota rozdělení pravděpodobnosti (zkratka)
QP	kvaziperiodický (zkratka)
R	radiální vzdálenost udaná v poloměrech planety; Stixův koeficient pravotočivých vln
R_E	poloměr Země
R_S	poloměr Saturnu
RK	Runge-Kuttova metoda (zkratka)
S	Stixův součtový koeficient; eikonál
S	Poyntingův vektor
sgn	funkce signum
SKR	Saturn Kilometric Radiation (zkratka)
SM	souřadnice Solar Magnetic (zkratka)
SVD	singulární rozklad (zkratka)
T_s	teplota částic
v_{ds}	driftová rychlost částic
v_g	grupová rychlost
v_{res}	rezonanční rychlost
VLF	velmi nízké frekvence (zkratka)
W	hustota elektromagnetické energie vlny
WHAMP	numerický kód Waves in Homogeneous Anisotropic Magnetised Plasma (zkratka)
WKB	aproximace Wentzel–Kramers–Brillouin (zkratka)
X	kvadrát plazmové frekvence normalizované na frekvenci vlny
Y	absolutní hodnota cyklotronové frekvence normalizované na frekvenci vlny
Z_0	upravená plazmová disperzní funkce
β	šířka ztrátového kužele
γ	růst/útlum, imaginární část frekvence; Lorentzův faktor
Γ	gamma funkce
δ	hloubka ztrátového kužele; delta funkce
θ_k	polární úhel vlnového vektoru v lokálních magnetických souřadnicích
θ_P	polární úhel Poyntingova vektoru v lokálních magnetických souřadnicích
λ_{inv}	invariantní šířka

λ_m	magnetická šířka v SM souřadnicích
Λ_n	Besselova funkce I_n dělená exponenciální funkcí
σ	směrodatná odchylka Maxwelllova rychlostního rozdělení
$\vec{\sigma}_s$	tenzor konduktivity
ϕ_k	azimutální úhel vlnového vektoru v lokálních magnetických souřadnicích
Φ	ambipolární potenciál; magnetický tok
$\vec{\chi}_s$	elektrická susceptibilita
ξ_n	argument PDF, rezonanční rychlost normalizovaná na paralelní rychlost
ω	úhlová frekvence vlny, reálná nebo komplexní dle kontextu
ω_{cs}	cyklotronová frekvence
ω_{crs}	relativistická cyklotronová frekvence
ω_L	ořezávací frekvence L-módu
ω_{lh}	dolní hybridní frekvence
ω_{ps}	plazmová frekvence
ω_R	ořezávací frekvence R-módu
ω_x	crossover frekvence

A. Souřadnicové systémy v kosmické fyzice

Popis fyzikálních jevů v kosmické prostředí se vždy zpřehlední zavedením vhodných souřadnic. Zde definujeme ty souřadnicové systémy a transformace mezi nimi, které jsme využívali v naší práci. Existuje však řada dalších systémů užívaných v oblastech sluneční soustavy, které jsme zde nestudovali – stručný přehled je k nalezení v Hapgood, [1992].

Data z většiny družic jsou archivována v souřadnicích GSE (Geocentric Solar Ecliptic). Definovány jsou následovně:

- Osa x_{GSE} leží na spojnici Země–Slunce, ukazuje směrem ke Slunci.
- Osa z_{GSE} ukazuje směrem k severnímu pólu ekliptiky.
- Osa y_{GSE} doplňuje pravotočivou ortogonální triádu (ukazuje k večerní straně).

Pro studium magnetického pole Země jsou vhodné souřadnice GSM (Geocentric Solar Magnetospheric), používané např. v Tsyganenkově modelu. Definujeme je takto:

- Osa x_{GSM} je shodná s x_{GSE} .
- Rovina $x_{\text{GSM}}z_{\text{GSM}}$ obsahuje osu geomagnetického dipólu, osa z je projekcí dipólové osy na rovinu $y_{\text{GSE}}z_{\text{GSE}}$.
- Osa y_{GSM} doplňuje pravotočivou OG triádu, ukazuje k večerní straně (není shodná s y_{GSE} !).

Pokud pracujeme s magnetickým polem v dipólové aproximaci a soustředíme se na jevy, které jsou na magnetické pole vázané, je vhodné zavést souřadnice SM (Solar Magnetic), definované následovně:

- Osa z_{SM} je totožná s osou geomagnetického dipólu.
- Rovina $x_{\text{SM}}z_{\text{SM}}$ obsahuje přímkou Země–Slunce.
- Osa y_{SM} doplňuje pravotočivou OG triádu, ukazuje k večeru.

Tyto tři uvedené systémy jsou vhodné pro zápis polohových vektorů, nehodí se však pro práci s vlnovými vektory. Ty je výhodné reprezentovat v souřadnicích lokálního magnetického pole:

- Osa z_{B} je totožná se směrem lokálního magnetického pole \mathbf{B}_0 .
- Rovina $x_{\text{B}}z_{\text{B}}$ obsahuje (typ I) přímkou Země–Slunce nebo (typ II) vlnový vektor \mathbf{k} .
- Osa y_{B} je ortogonální doplněk.

Pokud se navíc pohybujeme v oblasti, kde geomagnetické pole nemá longitudinální složku, obsahuje rovina $x_B z_B$ (typ II) osu geomagnetického dipólu z_{SM} . V lokálních magnetických souřadnicích typu II je vlnový vektor vyjádřen ve většině textů zabývajících se vlnami v plazmatu. Také v této práci automaticky předpokládáme, že při studiu disperze (kapitola 2) je \mathbf{k} zapsán v těchto souřadnicích a index B neuvádíme. Podobně vektory vstupující do výpočtu trajektorie paprsku vyjadřujeme v SM souřadnicích, není-li uvedeno jinak.

Transformace vektoru vyjádřeného v kartézských SM souřadnicích do sférických SM je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda_m \cos l_m, \\ y &= r \cos \lambda_m \sin l_m, \\ z &= r \sin \lambda_m, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

kde r je radiální vzdálenost od středu Země,¹ λ_m je magnetická šířka a l_m je azimutální úhel, v praktických aplikacích nahrazovaný $\text{MLT [h]} = 12 + l_m [^\circ]/15$ (Magnetic Local Time). Ve sférických souřadnicích definujeme tzv. L -parametr

$$L = \frac{r}{R_E \cos^2 \lambda_m}, \quad (\text{A.2})$$

který udává rovníkovou vzdálenost dipólové siločáry v násobcích poloměru Země R_E . Invariantní šířka

$$\lambda_{\text{inv}} = \arccos \left(\sqrt{1/L} \right) \quad (\text{A.3})$$

udává hodnotu magnetické šířky, na které siločára protíná povrch Země. Parametr L se udává v dipólové aproximaci, není-li výslovně uvedeno jinak. Pro přesnější práci s magnetickým polem, bez osově symetrie a severo-jívní symetrie, je vhodnější použít parametr

$$L^* = L \frac{\Phi_{\text{dip}}}{\Phi}, \quad (\text{A.4})$$

který parametrizuje driftové slupky (drift shell). Zde Φ_{dip} značí magnetický tok částic driftujících okolo Země a Φ je hodnota tohoto toku v reálném geomagnetickém poli. Pro dipólové pole zřejmě $L = L^*$. V reálném poli dále definujeme λ_{m0} , což je SM souřadnice udávající lokální minimum síly magnetického pole na dané siločáře, přičemž pro dipól platí $\lambda_{m0} = 0^\circ$. Zdroje mnohých magnetosférických EM emisí jsou centrovány okolo λ_{m0} .

Jelikož se v oboru kosmické fyziky používá mnoho různých souřadnicových systémů, je užitečné mít k dispozici proceduru, která provádí transformace mezi těmito systémy. Označme $T_{A \rightarrow B}$ matici, která vektor vyjádřený v souřadnicích A převede násobením zleva do souřadnic B (pasivní transformace). Mezi GSE, GSM a SM systémy existují transformace

$$T_{\text{GSE} \rightarrow \text{GSM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad T_{\text{GSM} \rightarrow \text{SM}} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

¹Magnetický dipól v SM souřadnicích neuvažuje posun pole vůči středu Země, jako je tomu např. v IGRF modelu.

kde ψ je úhel mezi osami z systémů GSM a GSE, měřený kladně směrem k ose z_{GSM} , a t je úhel mezi z_{GSM} a osou dipólu (na severní polokouli kladný směrem ke Slunci). Složením matic dostaneme zbylou transformaci

$$T_{\text{GSE} \rightarrow \text{SM}} = T_{\text{GSM} \rightarrow \text{SM}} T_{\text{GSE} \rightarrow \text{GSM}}, \quad (\text{A.6})$$

zpětné transformace dostaneme inverzí matic. U jiných planet sluneční soustavy je potřeba pracovat s jiným sklonem osy magnetického dipólu. Speciálně v případě Saturnu jsou však KSM (Kronocentric Solar Magnetospheric, obdoba GSM) a SM souřadnice prakticky totožné, neboť sklon dipólové osy vůči ekliptice je zanedbatelný.

Lokální magnetické souřadnice (typ I) je také obvyklé vyjadřovat ve sférických souřadnicích. Vlnový vektor transformujeme mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi pomocí vztahů

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta_k \cos \phi_k, \\ k_y &= k \sin \theta_k \sin \phi_k, \\ k_z &= k \cos \theta_k, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

kde ϕ_k je azimutální úhel vlnového vektoru a θ_k nazýváme polární úhel vlnového vektoru. Pro výpočty úhlů θ_k a ϕ_k při znalosti vektoru lokálního magnetického pole zadaného v SM souřadnicích je užitečná transformace

$$T_{\text{B} \rightarrow \text{SM}} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos l_m & -\sin l_m & \sin \beta \cos l_m \\ \cos \beta \sin l_m & \cos l_m & \sin \beta \sin l_m \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

kde β je úhel mezi magnetickým polem a z_{B} poté, co magnetické pole rotujeme do roviny $x_{\text{B}}z_{\text{B}}$ (kladný pro $\lambda_m < 0$).

B. Plazmová disperzní funkce a Besselovy funkce

V teorii linearizovaných vln v horkém plazmatu vystupuje za předpokladu Maxwellova rychlostního rozdělení částic integrál tvaru

$$-\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} e^{-\left(\frac{v_{\parallel} - v_d}{\sqrt{2}\sigma_{\parallel}}\right)^2} \frac{1}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_c}, \quad (\text{B.1})$$

který lze přepsat pomocí substitucí

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{\parallel} - v_d}{\sqrt{2}\sigma_{\parallel}}, \\ \xi_n &= \frac{\omega - k_{\parallel}v_d - n\omega_c}{\sqrt{2}k_{\parallel}\sigma_{\parallel}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

do tvaru známého jako plazmová disperzní funkce (PDF)

$$Z(\xi_n) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - \xi_n}, \quad (\text{B.3})$$

občas uváděné také ve formě

$$w(\xi_n) = \frac{Z(\xi_n)}{i\pi^{1/2}} \quad (\text{B.4})$$

pod názvem funkce Faddějevové. PDF je spojena s chybovou funkcí vztahem

$$Z(\xi_n) = i\pi^{1/2} e^{-\xi_n^2} (1 + \operatorname{erf}(i\xi_n)). \quad (\text{B.5})$$

Na $\operatorname{Im} \xi_n < 0$ je PDF dodefinována analytickým rozšířením. Při výpočtu reziduí je potřeba zohlednit znaménko k_{\parallel} , které přesouvá pól mezi kladnou a zápornou imaginární polorovinou. V praxi se proto používá upravená PDF

$$Z_0(\xi_n) = \begin{cases} Z(\xi_n) & \text{pro } k_{\parallel} > 0 \\ -Z(-\xi_n) & \text{pro } k_{\parallel} < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.6})$$

Pomocí chybové funkce a znaménkové funkce $\operatorname{sgn}(k_{\parallel})$ lze nově definovanou PDF zapsat jako

$$Z_0(\xi_n) = \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) i\pi^{1/2} e^{-\xi_n^2} (1 + \operatorname{erf}(\operatorname{sgn}(k_{\parallel}) i\xi_n)). \quad (\text{B.7})$$

Pro malé hodnoty lze PDF aproximovat pomocí mocninné řady

$$Z_0(\xi_n) = i\pi^{1/2} \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) e^{-\xi_n^2} - 2\pi^{1/2} \xi_n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi_n^2)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}, \quad (\text{B.8})$$

jejíž poloměr konvergence je nekonečný. V limitě velkých hodnot $|\xi_n|$, v oblasti $|\operatorname{Im} \xi_n| < |\operatorname{Re} \xi_n|$, lze použít asymptotický rozvoj

$$Z(\xi_n) = i\pi^{1/2} \sigma \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) - \pi^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{-(2n+1)} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad (\text{B.9})$$

kde

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{pro } \text{sgn}(k_{\parallel}) \text{ Im } \xi_n > 0 \\ 1 & \text{pro } \text{sgn}(k_{\parallel}) \text{ Im } \xi_n = 0 \\ 2 & \text{pro } \text{sgn}(k_{\parallel}) \text{ Im } \xi_n < 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Tato řada je v důsledku Stokesova jevu exaktní pouze pro reálná ξ_n [Swanson, 2003]. Z asymptotického rozvoje lze odvodit vyjádření pomocí řetězového zlomku

$$Z_0(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}, \quad (\text{B.11})$$

kteřé je přesné všude kromě reálné osy. Definujeme ho rekurentními vztahy

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= b_{n+1}A_n - a_{n+1}A_{n-1}, \\ B_{n+1} &= b_{n+1}A_n - a_{n+1}B_{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

kde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n(2n-1)}{2}, \\ b_n &= -\xi_n^2 + \frac{1}{2} + 2n, \\ A_0 &= 0, A_1 = \xi_n, B_0 = 1, B_1 = -\xi_1^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Dalšími typy integrálů vystupujících v disperzní relaci horkého plazmatu jsou

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} dv_{\perp} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}}, \\ &\int_0^{\infty} dv_{\perp} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) J_n' \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}}, \\ &\int_0^{\infty} dv_{\perp} \left(J_n' \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) \right)^2 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

kde J_n je Besselova funkce prvního druhu řádu n . Pomocí identity [Watson, 1944]

$$\int_0^{\infty} dt J_n(at) J_n(bt) t e^{-p^2 t^2} dt = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{4p^2}} I_n \left(\frac{ab}{2p^2} \right), \quad (\text{B.15})$$

kde $I_n(\bullet) = i^{-n} J_n(i\bullet)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu, můžeme provést úpravy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma_{\perp}^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}} = e^{\lambda}, \\ &\frac{1}{\sigma_{\perp}^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) J_n' \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}} = -\frac{k_{\perp} \sigma_{\perp}^2}{\omega_c} e^{-\lambda} (I_n(\lambda) - I_n'(\lambda)) = \\ &= -\frac{k_{\perp} \sigma_{\perp}^2}{\omega_c} I_n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) - I_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma_{\perp}^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \left(J'_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) \right)^2 v_{\perp}^3 e^{\frac{-v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2}} = \left(\frac{n^2}{\lambda} + 2n + 2\lambda \right) I_n(\lambda) - 2\lambda I_{n-1}, \quad (\text{B.16})$$

kde $\lambda = k_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2 / \omega_c^2$. V úpravách byl také využit vztah

$$I'_n(\lambda) = I_{n-1}(\lambda) - \frac{n}{\lambda} I_n(\lambda). \quad (\text{B.17})$$

Pro manipulaci s nekonečnými sumami přes n lze s výhodou použít vztahy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda} I_n(\lambda) = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 e^{-\lambda} I_n(\lambda) = \lambda, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n(\lambda) = 0. \quad (\text{B.18})$$

V oblasti malých hodnot provádíme aproximace pomocí mocninné řady

$$I_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)k!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2k+n}, \quad (\text{B.19})$$

konkrétně v aproximaci studeného plazmatu a pro paralelní šíření vln v horkém plazmatu využíváme $I_0(0) = 1$, $I_n(0) = 0$ pro $n \neq 0$ a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.20})$$

V oblasti velkých hodnot je vhodné použít asymptotický rozvoj

$$I_n(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^k (4n^2 - (2l-1)^2)}{k!(8\lambda)^k} \right). \quad (\text{B.21})$$

Nakonec uvedme pro numerické výpočty důležitý rekurentní vztah

$$I_n(\lambda) = I_{n-2}(\lambda) - \frac{2(n-1)}{\lambda} I_{n-1}. \quad (\text{B.22})$$

C. Vedení hvizdových vln plazmasférickými ducty

Trubicovité oblasti vázané na magnetické pole, které obsahují plazma s významně vyšší nebo nižší hustotou než okolí, se ve fyzice magnetosféry nazývají ducty. Vedení hvizdových vln těmito ducty, podobné vedení světelného signálu v optických kabelech (vlnovodech), bylo již v literatuře zdokumentováno a vysvětleno pomocí paprskových simulací [Inan a Bell, 1977] i full-wave simulací [Woodroffe a Streltsov, 2013]. Zda bude či nebude paprsek veden závisí na gradientu hustoty plazmatu, gradientu okolního magnetického pole, frekvenci vlny a rozkmitu vlnového vektoru okolo paralelního směru. Jak se bude vlnový vektor (a tedy i poloha) za daných parametrů typicky vyvíjet lze nahlédnout i bez simulací na základě jednoduchého vztahu, který zde odvodíme.

Pro zjednodušení budeme uvažovat nezakřivené siločáry magnetického pole a $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$, což platí v zemské plazmasféře vždy. Také se omezíme na kvaziparalelní aproximaci $\sin^2 \theta_k \approx \theta_k^2$, $\cos^2 \theta_k \approx 1 - \theta_k^2$. Jako třetí podmínku pokládáme $\omega \gg \omega_{cp}$, tedy efekty iontů zcela zanedbáváme. Parametry \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} v disperzní relaci studeného plazmatu (rovnice (2.29)) můžeme za daných podmínek napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{X(T-1)}{Y^2-1}, \\ \mathcal{B} &= -\frac{2X^2}{Y^2-1}, \\ \mathcal{C} &= \frac{X^3}{Y^2-1},\end{aligned}\tag{C.1}$$

kde jsme zavedli substitute

$$X = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad Y = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega}, \quad T = Y^2(1 - \theta_k^2).\tag{C.2}$$

Dále budeme šíření vlny vyšetřovat na základě Hamiltonových rovnic (3.9), přičemž pokládáme $k_y(0) = 0$ a vypustíme rovnice pro časový vývoj $y(t)$, $k_y(t)$. Aby úloha zůstala dvourozměrná, požadujeme

$$\frac{dn_e}{dy} = \frac{dB_0}{dy} = 0\tag{C.3}$$

a navíc pro zjednodušení také

$$\frac{dn_e}{dz} = \frac{dB_0}{dz} = 0,\tag{C.4}$$

přičemž obě podmínky jsou dobře splněny poblíž zemského magnetického rovníku.

Zajímáme se tedy o vývoj souřadnice x a složky vlnového vektoru k_x ,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_x}}{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}}, \quad \frac{dk_x}{dt} = \frac{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}},\tag{C.5}$$

neboť ty popisují oscilace paprsku ve vlnovodu. Pro výraz ve jmenovateli nalezneme tvar

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} = \frac{2X^3}{\omega (Y^2 - 1) (\sqrt{T} - 1)^2} (Y^2 + \theta_k^2 (Y^2 - 2)) , \quad (\text{C.6})$$

jenž pro malé úhly nabývá vždy kladných hodnot (bez aproximace malých úhlů lze ukázat, že je výraz $\partial \mathcal{D} / \partial \omega$ vždy kladný). Dále odvodíme

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_x} = - \frac{2X^{5/2} \theta_k c}{(\sqrt{T} - 1)^{3/2} (Y^2 - 1) \omega} (\sqrt{T} (\sqrt{T} - 2)) . \quad (\text{C.7})$$

V případě exaktně paralelního šíření tento výraz mění znaménko pro $\omega = \omega_{ce}/2 \equiv \omega_{lu}$, s rostoucím úhlem tato hranice mírně klesá. Hodnota ω_{lu} rozděluje hvizdový mód na horní a dolní frekvenční pásmo¹ (*lower-band* a *upper-band*). Trajektorie paprsků v horním a dolním pásmu se významně liší, neboť složka grupové rychlosti v_{gx} má pro malé úhly v dolním pásmu stejné znaménko jako složka vlnového vektoru k_x , zatímco pro horní pásmo jsou znaménka opačná.

Zbývá prozkoumat, jak se vyvíjí složka k_x , respektive jak se mění její znaménko. Výraz

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} = \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \left(\frac{2X^3}{Y^2 - 1} \left(\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T} - 1} \right) \right) - \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial x} \left(\frac{2X^3 Y^2}{(Y^2 - 1)^2} \left(\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T} - 1} \right)^2 \right) \quad (\text{C.8})$$

píšeme sugestivně rozdělený na dva členy. První člen představuje vliv gradientu hustoty, označíme ho f_n , a druhý zahrnujeme vlivu gradientu magnetického pole, označíme ho f_B . Pozorujeme, že vlnový vektor má tendenci stáčet se směrem do oblasti se slabším magnetickým polem a vyšší hustotou. Souboj těchto dvou vlivů vyjádříme poměrem

$$\frac{f_B}{f_n} = \frac{Y^2}{Y^2 - 1} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T} - 1} Q , \quad (\text{C.9})$$

kde

$$Q = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\ln B_0)}{\frac{\partial}{\partial x} (\ln n_e)} \quad (\text{C.10})$$

představuje poměr gradientů pole a hustoty normalizovaných na lokální hodnoty těchto veličin. V případě, kdy pole i hustota monotónně klesají ve směru x , se budou trajektorie paprsků s frekvencemi v dolním pásmu (horním pásmu) odklánět pro $f_B/f_n > 1$ v kladném (záporném) směru osy x a pro $f_B/f_n < 1$ naopak. Vliv magnetického pole je pro frekvence blížící se ω_{ce} velice silný, vlny horního pásma jsou proto silně taženy do oblasti větších hodnot magnetického pole, kde ω_{ce} naroste a vlny přejdou do dolního pásma.

¹V literatuře se obvykle hranice horního a dolního pásma rozděluje přesně podél frekvence $\omega_{ce}/2$. Na základě propagačních charakteristik je však fyzikálně smyslupnější dělit frekvence podle křivky Gendrinova úhlu $\theta_k = \theta_G$ v grafu (θ_k, ω) , přičemž pro Gendrinův úhel platí $\theta_G \approx \arccos(2\omega/\omega_{ce})$. Pro malé hodnoty θ_k jsou však tato dělení téměř shodná, a tak s nimi zde také pracujeme.

Aplikace rovnice (C.9) na ducty vede k následujícímu závěru. Vlny v dolním frekvenčním pásmu mohou být vedeny pouze kladnými ducty (nárůst, peak) a vnitřní hranou plazmapauzy, zatímco vlny v horním pásmu mohou být vedeny pouze zápornými ducty (pokles, dip) a vnější hranou plazmapauzy. Navíc vlny v horním pásmu jsou silněji ovlivňovány magnetickým polem, gradienty hustoty v ductu proto musejí být strmější, aby nedošlo k úniku vln. Je také nutné poznamenat, že vlny na frekvencích velice blízkých cyklotronové jsou omezeny v rozsahu úhlů θ_k rezonančním kuželem.

D. Vstupní a výstupní soubory programu RAY

Na vstupu programu RAY stojí textový soubor `init.txt` s daty zapsanými v multiplatformním formátu JSON (JavaScript Object Notation). Příklad vstupního souboru použitého pro simulace v magnetosféře Saturnu, kapitola 5.3, vypadá následovně:

```
{
  "model": {
    "id_approx": "hot",
    "id_mag": "dipole",
    "id_dens": "density_saturn",
    "id_temp": "temp_const",
    "id_drift": "drift_const",
    "id_vdistr": "maxwell",
    "id_beta": "beta_const",
    "id_delta": "delta_const",
    "id_dens_rel": "density_rel_const",
    "b_ext": [0.001, 1.0],
    "beta_par": [0., 0., 0., 0.],
    "delta_par": [0., 0., 0., 0.],
    "pp_dist": 4.0,
    "pp_width": [0.2, 20.],
    "pp_drop": [0.0, 1.5, 8.],
    "duct_width": [0.05, 0.05],
    "duct_dist": [4.0, 4.5],
    "duct_inc": [0., 0.],
    "duct_alt": [4000., 2000.],
    "duct_lon": [0.0, 0.0],
    "f2peak": [320., 80.],
    "r_ref": 1000.,
    "temp_ref_dens": 800.,
    "temp_ref_perp": [1.0, 42., 1., 60.],
    "temp_ref_para": [1.0, 15., 1., 15.],
    "n0_ref": 15000.,
    "n_ref": [1., 0.0, 0.0, 0.0],
    "n_rel_ref": [1., 1., 0., 0.],
    "m_dens": [0, 1, 4, 16],
    "q_dens": [-1, 1, 1, 1],
    "m_distr": [0, 1, 4, 16],
    "q_distr": [-1, 1, 1, 1],
    "dens_tab": "input/diff_profile.
      sav",
    "dens_tab_int": [1., 9.]
  }
  "tsyg": {
    "pdyn": 4.0,
```

```

        "dst " :                -30,
        "nsw " :                5.0,
        "vsw " :                700.,
        "by_imf " :             -10.,
        "bz_imf " :             10.,
        "iopgen " :             0,
        "iopt " :               0,
        "iopb " :               0,
        "iopr " :               0,
        "date " :               [2001,1,12,0,0]
    }
    "init " :
    {
        "fq_i " :                0.387,
        "k_mag_i " :            -1.,
        "gam_i " :              0.,
        "th_i " :               0.,
        "phi_i " :              0.,
        "lat_i " :              0.,
        "lon_i " :              0.,
        "r_i " :                6.18,
        "folder " :             "output/emic_temp/"
    }
    "rays " :
    {
        "th_f " :                [-89.,89.],
        "phi_f " :               [-1000.,1000.],
        "lat_f " :               [-30.,30.],
        "lon_f " :               [-1000.,1000.],
        "r_f " :                 [1.0,10.0],
        "l_f " :                 [5.0,10.0],
        "hop_f " :               2,
        "amp_f " :               0.001,
        "time_f " :              600.,
        "mode " :                2,
        "out " :                 4,
        "prec " :                -2.0
    }
}

```

Následuje stručný popis významu jednotlivých parametrů. Struktura model:

- id_approx** Identifikátor aproximace disperzního relace. Hodnoty **cold** (studené plazma) a **hot** (horké plazma, maxwellovské rozdělení se ztrátovým kuželem).
- id_mag** Model magnetického pole. Hodnoty **dipole** (dipólové pole), **dipole_compressed** (stlačené dipólové pole) a **tsyganenko** (Tsyganenkův model).

- id_dens** Model hustoty plazmatu. Hodnoty **density_diff** (difúzní rovnováha v zemské magnetosféře), **density_denton** (model hustoty z Denton et al., [2004]), **density_diff_denton** (napojení Dentonova modelu na DE na vzdálenosti $2R_E$), **density_ozhagin** (model podle Ozhogin et al., [2012] pro plazmasféru, ve fixní vzdálenosti $R = "1.3"$ plynule přechází na model difúzního ekvilibria), **density_saturn** (difúzní rovnováha v magnetosféře Saturnu), **density_bortnik** (model převzatý z Bortnik et al., [2011]).
- id_temp** Model teploty částic, volán ve výpočtu disperzního tenzoru v horkém plazmatu. Hodnoty **temp_const** (konstantní teplota) a **temp_quad** (kvadratický nárůst teploty radiálně od povrchu planety).
- id_drift** Model driftové rychlosti částic. V současné verzi pouze konstantní.
- id_vdistr** Model rychlostní distribuce částic. V aktuální verzi programu pouze Maxwellovo, parametr se uplatní pouze při vykreslování distribuce, ve výpočtu disperzní relace je hard-coded.
- id_beta** Model pro parametr udávající šířku ztrátového kuželu. V aktuální verzi programu pouze konstantní hodnota.
- id_delta** Model pro parametr udávající hloubku ztrátového kuželu. V aktuální verzi programu pouze konstantní hodnota.
- id_dens_rel** Model udávající zastoupení iontů v plazmatu v případech, kdy nelze použít difúzní rovnováhu. V aktuální verzi programu pouze konstantní hodnota.
- b_ext** První hodnota udává sílu vnějšího magnetického pole v násobcích indukce geomagnetického pole na povrchu u rovníku, druhá hodnota udává rovníkovou vzdálenost (v poloměrech planety R), na které dojde k vyrovnání síly dipólového pole a stlačeného dipólového pole. Validní pouze při volbě **id_mag = dipole_compressed**.
- beta_par** Referenční hodnota šířky ztrátového kužele β pro každou populaci částic v plazmatu.
- delta_par** Referenční hodnota hloubky ztrátového kužele δ pro každou populaci částic v plazmatu.
- pp_dist** Rovníková vzdálenost plazmapauzy L_{pp} v jednotkách poloměru planety R . Hustotní model **density_saturn** plazmapauzu neobsahuje.
- pp_width** Šířka plazmapauzy (rovníková vzdálenost od středu plazmapauzy, kde přepínací funkce dosáhne hodnoty "1%") a faktor rozšíření u povrchu planety.
- pp_drop** Pokles pozadové hustoty (poměr vnitřní a vnější), radiální vzdálenost kde hustotní skok zeslábne logaritmicky na polovinu a prudkost zeslabování plazmapauzy poblíž povrchu.

<code>duct_width</code>	Rovníková šířka ductu (v jednotkách R), pořadí elementu udává pořadí ductu, počet ductů je omezen pouze délkou pole.
<code>duct_dist</code>	Rovníková vzdálenost ductů (v jednotkách R).
<code>duct_inc</code>	Nárůst hustoty uprostřed ductů v násobcích okolní hustoty, hodnoty z intervalu $(-1, \infty)$. Např.: hodnota -0.8 znamená pokles o "80%" okolní hustoty, hodnota 1.3 znamená nárůst o "130%" okolní hustoty.
<code>duct_alt</code>	Radiální vzdálenost zadaná v kilometrech, ve které hustotní změna v ductu poklesne logaritmicky na "50%" rovnickové změny.
<code>duct_lon</code>	Magnetická délka udávající ve stupních meridionální rovinu, ve které ducty leží.
<code>f2peak</code>	V kilometrech zadaná výška hustotního maxima ionosférického F2 peaku a pata ionosféry, tj. radiální vzdálenost kde hustota plazmatu klesne k nule.
<code>r_ref</code>	Referenční výška pro hustotní model (platné pro <code>density_diff</code> , <code>density_bortnik</code> a <code>density_saturn</code>).
<code>temp_ref_dens</code>	Teplota iontů v referenční výšce pro hustotní model <code>density_diff</code> , zadána v kelvinech.
<code>temp_ref_perp</code>	Referenční kolmá složka kinetické teploty pro modely <code>temp_const</code> a <code>temp_quad</code> , zadána v eV pro každou populaci částic zvlášť.
<code>temp_ref_para</code>	Rovnoběžná složka teploty, jinak jako výše.
<code>n0_ref</code>	Referenční hustota elektronů v cm^{-3} pro model <code>density_diff</code> .
<code>n_ref</code>	Relativní zastoupení jednotlivých populací částic ve studeném plazmatu v referenční výšce, pouze pro model <code>density_diff</code> .
<code>n_rel_ref</code>	Referenční relativní zastoupení populací částic v horkém plazmatu pro modely zvolené v <code>id_dens_rel</code> .
<code>m_dens</code>	Hmotnosti částic v jednotlivých populacích studeného plazmatu zadané v násobcích protonové hmotnosti (použito ve výpočtech hustoty). Hodnota 0 zastupuje hmotnost elektronu.
<code>q_dens</code>	Náboje částic v populacích studeného plazmatu zadané v násobcích elementárního náboje (použito ve výpočtech hustoty).
<code>m_distr</code>	Hmotnosti částic v jednotlivých populacích horkého plazmatu zadané v násobcích protonové hmotnosti (použito ve výpočtech disperzního tenzoru).
<code>q_distr</code>	Náboje částic v populacích horkého plazmatu zadané v násobcích elementárního náboje (použito ve výpočtech disperzního tenzoru).

- dens_tab** Cesta v počítači k binárnímu souboru s uloženým rovnickovým hustotním profilem elektronů (v jednotkách m^{-3}).
- dens_tab_int** Interval v jednotkách poloměru planety udávající rozsah hustotní tabulky zadané výše.

Ve struktuře **tsyg** jsou uloženy vstupní parametry pro Tsyganenkův model, více viz Tsyganenko a Sitnov, [2005] a reference uvnitř.

Struktura **init** udává počáteční hodnoty použité při inicializaci paprsku. SM a lokální magnetické souřadnice.

- fq_i** Frekvence f v Hz.
- k_mag_i** Velikost vlnového vektoru k v m^{-1} . Kladná hodnota znamená, že tento odhad bude použit při inicializaci horkého plazmatu místo odhadu získaného z výpočtu ve studené aproximaci.
- gam_i** Imaginární část frekvence γ v s^{-1} . Odhad pro inicializaci paprsku v horkém plazmatu, při nulové hodnotě jsou použity odhady 0, -1, 1, -10, 10, v tomto pořadí.
- th_i** Polární úhel θ_k vlnového vektoru ve stupních.
- phi_i** Azimutální úhel φ_k vlnového vektoru ve stupních.
- lat_i** Magnetická šířka λ_m ve stupních.
- lon_i** Magnetická délka l_m ve stupních.
- r_i** Radiální vzdálenost v jednotkách poloměru planety.
- folder** Cesta ke složce, do které jsou ukládány výstupní soubory.

Struktura **rays** vymezuje oblast prostoru a oblast v prostoru parametrů, ve které se paprsek smí šířit, a to buďto minimální a maximální hodnotou (**th_f**, **phi_f**, **lat_f**, **lon_f**, **r_f**, **l_f** – L -parametr), maximální hodnotou (**hop_f** – počet přechodů přes rovník, **time_f** – doba šíření) nebo minimální hodnotou (**amp_f** – amplituda vlny). Parametr **prec** udává logaritmicke interval, ve kterém je při integraci držena relativní změna vlnového vektoru, podle vztahu $dk/k \in (10^{\text{prec}-1}, 10^{\text{prec}})$. **mode** vybírá v aproximaci studeného plazmatu vlnový mód:

- 0: Pravotočivý vlnový mód.
- 1: Levotočivý vlnový mód.
- 2: Mód s vyšším indexem lomu.
- 3: Mód s nižším indexem lomu.

Parametr **out** určuje parametry paprsku, které bude obsahovat výstupní soubor:

- 0: Polohový vektor \mathbf{r} , vlnový vektor \mathbf{k} , frekvence f , počet přechodů přes rovník, čas šíření, hustota studeného plazmatu n_e a n_i , index lomu.

- 1: Délka časového kroku, vzdálenost od počátku souřadnic (v poloměrech planety) a vzdálenost od povrchu (v km), λ_m , l_m , L , θ_k , φ_k a jak pro hodnotu $out = 0$.
- 2: Délka dráhy paprsku, ω_{cs} , ω_{ps} , ω_{uh} , ω_{lh} (v aproximaci), θ_P , φ_P , odklon od kolmice k povrchu planety θ_{ground} a vše výše.
- 3: Iontové hybridní frekvence ω_{ci} (iontové hybridní frekvence), elipticita polarizace, γ , amplituda a vše výše.
- 4: $\log B^2$, $\log E^2$, hustota energie W , Poyntingův vektor a vše výše.

Výstupní soubor obsahuje v hlavičce podmínku, na základě níž bylo šíření paprsku zastaveno, případně chybovou hlášku:

- STOP1: *Integration step is too small or too large.* Nastane při překročení podmínek kladených na velikost časového kroku. Dolní hranice je přesnost single, horní hranice je volena uvnitř programu podle typu simulace.
- STOP2: *Wave vector change was below single precision.*
- STOP3: *Wentzel–Kramers–Brillouin condition failed.*
- STOP4: *There was no real solution for plasma dispersion relation.* Nastává ve chvíli, kdy volíme integrační kroky příliš hrubé, a paprsek se dostane do bodu parametrického prostoru, kde neexistuje žádná větev disperzní relace.

Dále jsou ve výstupním souboru zopakovány vstupní parametry pro zpětnou identifikaci a pak následují data spočtená podél trajektorie paprsku.