

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Otakar Matouš

Metody řešení elektrických obvodů ve výuce fyziky

Katedra didaktiky fyziky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Peter Žilavý, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání (FMUZV)

Praha 2018

Nejvíce bych chtěl poděkovat svému vedoucímu RNDr. Peteru Žilavému, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady, odborný dohled a jeho drahocení čas. Dále bych chtěl poděkovat RNDr. Mgr. Vojtěchu Žákovi, Ph.D. za odborné konzultace, RNDr. Marii Snětinové, Ph.D. za pomoc s grafickou úpravou a své spolubydlící Anně Kolářové za jazykovou korekturu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

Vdne

Podpis autora

Název práce: Metody řešení elektrických obvodů ve výuce fyziky

Autor: Otakar Matouš

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Peter Žilavý, Ph.D., Katedra didaktiky fyziky MFF UK

Abstrakt: Bakalářská práce *Metody řešení elektrických obvodů ve výuce fyziky* obsahuje osm hlavních částí. V první části je provedena stručná rešerše, která zjišťuje jaké fyzikální znalosti může získat žák na základní a střední škole. Druhá část obsahuje zavedení fyzikálních pojmů a shrnutí potřebné látky z matematiky. Další část je věnována Kirchhoffovým zákonům a jejich aplikaci při řešení elektrických obvodů. Následující kapitoly představují jednotlivé metody a jejich využití. Poslední kapitolou je Praktická část, poskytující ověření teoretických výpočtů.

Klíčová slova: elektrický obvod, Kirchhoffovy zákony, Ohmův zákon

Title: Methods of Circuit Solving in Physics Education

Author: Otakar Matouš

Departement: Department of Physics Education

Supervisor: RNDr. Peter Žilavý, Ph.D., Department of Physics Education, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

Abstract: The bachelor thesis *Methods of Circuit Solving in Physics Education* contains eight main parts. In the first part, a brief research of physics knowledge a pupil can get through primary and secondary education is conducted. The second part contains an introduction of physics terms and the necessary mathematics. The next part is dedicated to Kirchhoff's circuit laws and their application in solving circuit problems. The next chapter introduces the individual methods and their use. The last chapter is the Practical Part, which provides verification of the theoretical calculations.

Keywords: electrical circuit, Kirchhoff's circuit laws, Ohm's law

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Motivace	1
1.2 Cíl práce	1
1.3 Struktura práce	1
2 Přehled studijních materiálů	2
2.1 Základoškolské učebnice fyziky	2
2.2 Učebnice pro gymnázia	4
2.3 Odborné středoškolské učebnice	5
2.4 Celkové zhodnocení	5
3 Teoretická část	6
3.1 Základní pojmy	6
3.2 Matematická vsuvka	8
3.2.1 Divergence vektorového pole	8
3.2.2 Rotace vektorového pole	12
3.2.3 Rovnice kontinuity	15
4 Kirchhoffovy zákony	17
4.1 Formulace a odvození	17
4.2 Meze platnosti 2. Kirchhoffova zákona	23
4.3 Praktické použití Kirchhoffových zákonů	25
5 Metoda smyčkových proudů	28
6 Metoda uzlových napětí	30
7 Metoda lineární superpozice	33
8 Théveninova věta	37
9 Praktická část	42
9.1 Popis konstrukce	42
9.2 Zapojení	45
9.3 Zkušenosti z používání	46
10 Závěr	48

1 Úvod

1.1 Motivace

V předkládané bakalářské práci navazuji na sadu početních příkladů, které jsem v minulosti vytvořil pro *Sbírku úloh* [1]. Hlavní motivace k výběru tématu souvisejícího s řešením elektrických obvodů byla především má vlastní zkušenost. Na střední škole jsem v této oblasti měl velké nedostatky, které plynuly z nenázorného a nesrozumitelného výkladu. Proto jsem se rozhodl vytvořit práci, která může pomoci středoškolským studentům s problematikou obvodů. Zkušenější studenti zde mohou najít matematická propojení s vysokoškolskou fyzikou a řadu zajímavých odvození.

1.2 Cíl práce

Cílem této práce je vytvořit čtivý, názorný a ucelený studijní text o metodách řešení elektrických obvodů. Na začátku se čtenář může seznámit s vybranou látkou pokročilé matematiky, která nám slouží jako nástroj k odvození *Kirchhoffových zákonů*. Tyto zákony jsou základním kamenem pro řešení elektrických obvodů. Samotné metody řešení lineárních elektrických obvodů jsou demonstrovány na jednom vzorovém obvodu, abychom je mohli snadno porovnat mezi sebou. Praktická část poskytuje návod k sestavení jednoduché sady pomůcek k ověření předchozích teoretických výpočtů.

1.3 Struktura práce

Práce je členěná do osmi kapitol. První kapitola je věnovaná stručné rešerši základoškolských a středoškolských učebnic s ohledem na danou problematiku. Následuje (Teoretická část), která je rozdělená do dvou podkapitol. První podkapitola obsahuje zavedení potřebných fyzikálních pojmů. Druhá podkapitola přibližuje vybrané matematické operátory, které jsou využité v další částech práce.

Ve třetí kapitole jsou zformulovány a odvozeny Kirchhoffovy zákony. Zároveň se věnujeme mezím platnosti druhého Kirchhoffova zákona a praktickému použití. Kapitoly (Metoda smyčkových proudů), (Metoda uzlových napětí), (Metoda lineární superpozice) a (Théveninova věta) představují další způsoby řešení elektrických obvodů opět včetně jejich praktického využití. Práce je zakončená (Praktickou částí).

2 Přehled studijních materiálů

2.1 Základoškolské učebnice fyziky

Podívejme se, jak zpracovávají problematiku elektrických obvodů učebnice pro druhý stupeň základní školy a víceletá gymnázia. Pro snazší orientaci v textu používáme zkrácené názvy učebnic (FRAUS 1, ROJKO 1 a další).

Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia (FRAUS 1)

Učebnice [2] neposkytuje mnoho informací o elektrických obvodech. Je zde pouze vysvětleno, co je elektrický obvod a proč používáme schéma elektrického obvodu. V knize jsou představené základní schematické značky součástek (zdroj, spínač, žárovka, vodič, atd...).

Jako příklad jednoduchého obvodu je uvedena žárovka připojená ke stejnosměrnému zdroji napětí. V tomto obvodu jsou vysvětlené základní fyzikální jevy. Najdeme zde i malou zmínku o možnostech zapojení více žárovek a vlivu na jejich svit, která nám ukazuje, že existuje sériové a paralelní zapojení žárovek.

Fyzika kolem nás: fyzika 1 pro základní a občanskou školu (ROJKO 1)

Učebnice [3] nabízí alternativnější přístup. Žáci mají za úkol si přinést potřebné věci (žárovka, baterie, kusy drátu, špejle, lžičky) a sami sestavit elektrický obvod, s jehož pomocí zkoumají, co všechno dokáže vést elektrický proud.

Po prozkoumání elektrického obvodu jsou žáci schopni vysvětlit, co je elektrický proud a elektrické napětí. Padne i malá zmínka o tom, jak se elektrický proud a elektrické napětí měří a jaké důsledky může proud mít na naše zdraví. Kapitola končí vysvětlením rozdílu mezi stejnosměrným a střídavým proudem.

Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia (PROMETHEUS 1)

Učebnice [4] obsahuje více informací než předchozí učebnice ROJKO 1 a FRAUS 1. Elektřina je uvedena otázkou „Co by se stalo, kdybychom ji neměli?“ Otázka slouží k tomu, aby si žáci všimli, kde všude elektřinu využíváme a jaký by byl život bez ní.

Dále je postup velice obdobný jako v učebnici ROJKO 1. Žáci si zapojí lampičku a tím zjistí, jak funguje jednoduchý elektrický obvod. Ten je v učebnici vysvětlen jako „okružní cesta elektrického proudu“ a jeho schéma jako „zjednodušený obrázek“. Na to navazují schematické značky a kapitola pokračuje úvahou o tom, kdy obvodem může procházet proud. V této části je pro názornost použitý vodní model.

Můžeme se dočíst také o složitějších obvodech a jejich zapojení, které může být sériové a paralelní. Celá kapitola o elektřině je uzavřena sadou příkladů a otázek.

Fyzika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia (FRAUS 2)

V učebnici [5] se první kapitola věnuje elektrickému proudu a jeho měření. Pokusem je pak objeven *Ohmův zákon*, který je klíčem k řešení elektrických obvodů. Na to navazuje kapitola o elektrickém odporu, kde jsou uvedeny základní vztahy, závislost odporu na teplotě a sériové a paralelní zapojování rezistorů. Kapitola končí proměnnými odpory - *reostat*, *potenciometr*.

Učebnice vysvětluje *potenciometr* a *reostat* následujícím způsobem: „Potenciometr může být zapojen dvěma vývody jako proměnný odpor nebo třemi vývody jako dělič napětí. Dělič napětí umožňuje snížit proud spotřebičem až na nulu. Reostat je potenciometr pro řízení větších proudů.“ Učebnice také nabízí vysvětlení *vnitřního odporu* zdroje: „Součet všech odporů, kterými musí procházet proud uvnitř zdroje.“

S tím úzce souvisí i další problematika, na kterou v učebnici není zapomenuto: co je *ideální* a *skutečný* zdroj napětí. Napětí na vývodech zdroje se říká *svorkové* a napětí *ideálního* zdroje se nazývá *elektromotorické*. Vysvětleno je také, co je to *zkratový proud*. Poslední kapitola v učebnici se věnuje zapojování zdrojů elektrického napětí a výkonu elektrického proudu.

Fyzika kolem nás: fyzika 3 pro základní a občanskou školu (ROJKO 2)

Kapitola učebnice [6] „Tajné obrázkové písmo bratrstva elektřiny“ v sobě skrývá vysvětlení mnoha důležitých pojmů: od schodišťového obvodu, schematických značek až po plošné spoje.

Na to navazuje kapitola „Ohmův zákon, zkoumání odporů“, kde se rozebírá zapojení vedle sebe nebo za sebou. Velká pozornost je věnována regulaci proudu a napětí pomocí reostatu a potenciometru. Sada příkladů umožňuje upevnit znalosti o Ohmově zákoně. Učebnice neosvětluje termíny jako *elektromotorické napětí*, *vnitřní odpor*, *ideální zdroj*, které jsme mohli najít v učebnici FRAUS 2.

Fyzika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia (PROMETHEUS 2)

Učebnice [7] nabízí téměř stejný výklad jako učebnice FRAUS 2 a ROJKO 2. Nalezeme zde více příkladů a návrhy na laboratorní práci. Elektrické obvody se vysvětlují na vodním modelu.

2.2 Učebnice pro gymnázia

Fyzika pro gymnázia Elektřina a magnetismus (PROMETHEUS 3)

Tato učebnice [8] na rozdíl od základoškolých učebnic široce pokrývá celou oblast elektřiny a magnetismu. Avšak problematice elektrických obvodů je věnováno pouze pár stránek.

Svorkové napětí je v učebnici vysvětleno následujícím způsobem: „Trvalý elektrický proud je podmíněn udržováním stálého rozdílu elektrických potenciálů mezi svorkami zdroje - **svorkové napětí**. Svorkové napětí vyznačujeme šipkou orientovanou ve směru, kterým působí elektrostatické pole na kladné částice, tedy od kladné svorky zdroje ke svorce záporné.“

Učebnice používá pojem *elektromotorické napětí*, které je popsáno: „Elektrický proud probíhá i uvnitř zdroje, kde se volné nabitě částice pohybují proti elektrostatickým silám. To znamená, že zde musí ve směru pohybu částice působit ještě další síly F_n jiného než elektrostatického původu. Uvnitř zdroje konají práci neelektrostatické síly. Neelektrostatické síly vykonají při přenesení náboje Q uvnitř zdroje práci W_z . Podíl $U_e = \frac{W_z}{Q}$ se nazývá **elektromotorické napětí** zdroje.“ *Elektromotorickému napětí* je věnována větší pozornost, protože se využívá ke zformulování *druhého Kirchhoffova zákona*.

Další kapitola je zaměřená na elektrický odpor kovového vodiče, Ohmův zákon, a spojování rezistorů. V podkapitole „zatěžovací charakteristika zdroje“ zazní dva pro nás důležité pojmy: **napětí naprázdno, vnitřní odpor zdroje**.

Velice mě překvapilo, že jsem v učebnici nenašel nic o **dělič napětí**. V kapitole „Regulace proudu, napětí pomocí reostatu a potenciometru“ dělič napětí využíváme, ale nikde není přímo řečeno, že se jedná o dělič napětí.

Následující kapitola je o *Kirchhoffových zákonech*, pomocí níž se řeší složitější elektrické obvody - sítě, pro které je třeba zavést pár odborných výrazů - **uzel** a **větev** obvodu. Formulace *Kirchhoffových zákonů* je následující:

1. **Kirchhoffův zákon** - „Algebraický součet proudů v uzlu je nulový $\sum_{k=1}^n I_k = 0$.“

2. **Kirchhoffův zákon** - „Součet úbytků napětí na rezistorech je v uzavřené smyčce stejný jako součet elektromotorických napětí zdrojů. Jestliže se ve smyčce nachází n rezistorů a m zdrojů, platí: $\sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{j=1}^m U_{e_j}$.“

Uvedená formulace *Kirchhoffových zákonů* se v této učebnici liší od formulace učebnic pro technické školy, jak uvidíme v učebnici BLAHOVEC. V naší práci tuto interpretaci zákonů nebudeme používat.

Kapitola o elektrických obvodech je zakončena praktickým využitím Kirchhoffových zákonů ve formě „kuchařky“, v níž nalezneme jednotlivé kroky řešení. Postup se aplikuje na elektrický obvod, který obsahuje dva zdroje elektrického napětí a tři rezistory. Úkolem je spočítat všechny neznámé proudy tekoucí obvodem.

2.3 Odborné středoškolské učebnice

Elektrotechnika 1 (BLAHOVEC)

Učebnice [9] je využívána na elektrotechnických školách v prvním ročníku a poskytuje prakticko-technický náhled. Tím se výrazně liší od učebnice pro gymnázia.

Autor učebnice na začátku stručně shrnuje základní elektrické veličiny (el. proud, el. napětí, náboj, proudovou hustotu, intenzitu elektrického pole a další) a základní vztahy mezi nimi (Ohmův zákon, měrný odpor a vodivost, závislost odporu na teplotě, práce, výkon a tepelné účinky elektrického proudu).

Následují kapitoly věnované různým metodám řešení elektrických obvodů, počínaje Kirchhoffovými zákony.

Kirchhoffovy zákony mají jiné znění než v podání učebnice pro gymnázia, jelikož učebnice BLAHOVEC nepracuje s *elektromotorickým napětím* zdrojů, ale s *napětím svorkovým*.

1. **Kirchhoffův zákon** - „Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule $\sum_{k=1}^n I_k = 0$.“

2. **Kirchhoffův zákon** - „Algebraický součet všech svorkových napětí zdrojů a všech úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené smyčce rovná nule $\sum_{k=0}^n U_k = 0$.“

Narozdíl od gymnaziální učebnice se BLAHOVEC zabývá i dalšími metodami řešení elektrických obvodů (metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí, metoda lineární superpozice). Učebnice uvádí stručný popis konkrétní metody, praktický postup a řešené příklady.

V druhé polovině učebnice se autor vrací k elektrostatickému poli a magnetickému poli. Pár stránek také věnuje nelineárním obvodům. Druhý díl této učebnice obsahuje střídavé proudy, o kterých v prvním díle není žádná zmínka, a dále řešení střídavých obvodů symbolickou komplexní metodou a přechodové děje.

2.4 Celkové zhodnocení

Učebnice ROJKO 1 a ROJKO 2 poskytují zcela odlišný náhled než učebnice FRAUS 1 a FRAUS 2. Zaměřují se na praktičnost a také na to, aby se fyzika dělala „vlastníma rukama.“ Nevyskytuje se tam tolik fyzikálních pojmů. Důraz je kladen na pochopení a experimenty.

Z rešerše jsme mohli také zjistit, že ani učebnice pro odborné školy neposkytují demonstraci jednotlivých metod řešení elektrických obvodů na jednom vzorovém zadání. To je také důvod, proč je takto vypracována moje bakalářská práce.

3 Teoretická část

3.1 Základní pojmy

Elektrický obvod:

Elektrický obvod je vodivé spojení elektrických prvků (rezistor, kondenzátor, cívka, žárovka). Obvodem prochází elektrický proud pouze tehdy, když existuje uzavřená cesta od jednoho pólu zdroje k druhému. V této práci se budeme zabývat převážně **stejnoseměrnými** obvody, které jsou **lineární**.

Lineární elektrický obvod:

Lineární elektrický obvod je takový obvod, ve kterém se vyskytují pouze **lineární prvky** (součástky). Pak se dá použít **princip superpozice**.

Lineární prvek:

Označme $u(t)$ okamžitou hodnotu napětí a $i(t)$ okamžitou hodnotu proudu na konkrétním prvku. Prvek označíme jako lineární, pokud zobrazení $u = f(i)$ případně $i = f(u)$ je lineární.

Základní parametr ideálního rezistoru je *odpor* R , ideálního kondenzátoru je *kapacita* C a ideální cívky je *indukčnost* L . Tyto parametry nezávisí na procházejícím proudu nebo napětí. Zobrazení se nazývá lineární, pokud zachovává následující **operace**:

a) *aditivita* : $f(x + y) = f(x) + f(y)$

b) *homogenita* : $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Mezi nejdůležitější lineární zobrazení ve fyzice patří násobení konstantou (přímá úměrnost), derivování a integrování.

1) Rezistor

U rezistoru se jedná o násobení konstantou R .

Platí:

$$u_1 = R \cdot i_1$$

$$u_2 = R \cdot i_2$$

a) *aditivita*: $R(i_1 + i_2) = R \cdot i_1 + R \cdot i_2 = u_1 + u_2$

b) *homogenita*: $R(\alpha i_1) = \alpha R \cdot i_1 = \alpha u_1$

2) Kondenzátor

U kondenzátoru je $u = f(t)$. Jde o časovou derivaci.

Platí:

$$i_1 = C \cdot \frac{du_1}{dt}$$

$$i_2 = C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

a) *aditivita*: $C \cdot \frac{d}{dt}(u_1 + u_2) = C \cdot \frac{du_1}{dt} + C \cdot \frac{du_2}{dt} = i_1 + i_2$

b) *homogenita*: $C \cdot \frac{d}{dt}(\alpha u_1) = \alpha C \cdot \frac{du_1}{dt} = \alpha i_1$

3) Cívka

U cívky je $i = f(t)$. Jde o časovou derivaci.

Platí:

$$u_1 = L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$u_2 = L \cdot \frac{di_2}{dt}$$

a) *aditivita*: $L \cdot \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = L \cdot \frac{di_1}{dt} + L \cdot \frac{di_2}{dt} = u_1 + u_2$

b) *homogenita*: $L \cdot \frac{d}{dt}(\alpha i_1) = \alpha L \cdot \frac{di_1}{dt} = \alpha u_1$

Rezistor, kondenzátor a cívka jsou lineární součástky.

Svorkové napětí:

Svorkové napětí je napětí na svorkách zdroje, ke kterým připojujeme zátěž.

Ideální zdroj proudu a napětí:

Ideální zdroj napětí je takový zdroj, který má na svých výstupních svorkách konstantní napětí, které je nezávislé na proudu odebíraném zátěží o nenulovém odporu.

Ideální zdroj proudu je takový zdroj, který poskytuje konstantní proud nezávislý na odporu zátěže připojené ke zdroji.

Reálný zdroj, vnitřní odpor zdroje:

V případě reálného zdroje se jeho svorkové napětí mění v závislosti na proudu odebíraném ze zdroje. *Reálný zdroj* lze mnohdy nahradit kombinací *ideálního zdroje napětí* a sériově zapojeného rezistoru. Odpor tohoto rezistoru pak představuje *vnitřní odpor zdroje*.

3.2 Matematická vsuvka

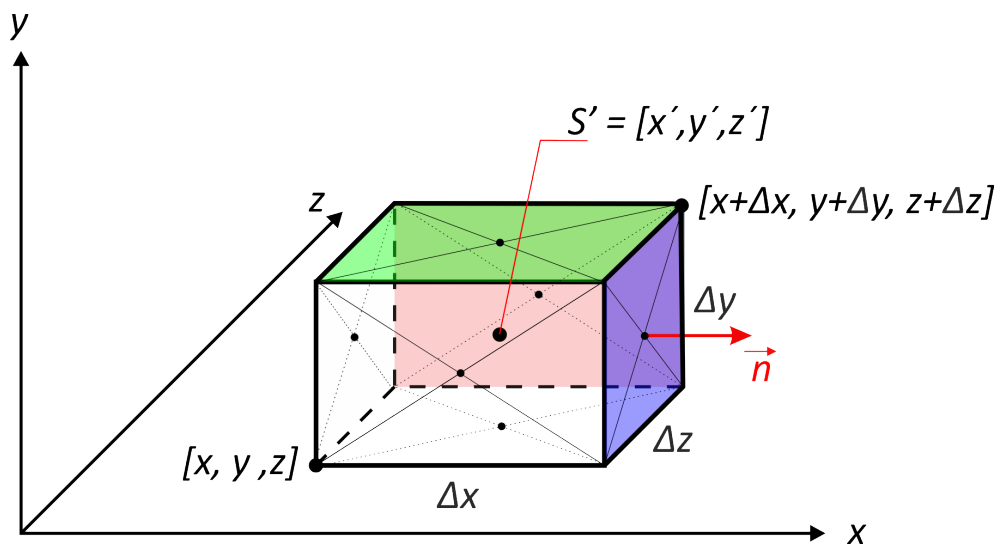
Podotýkám, že moje práce se nezaměřuje na matematickou analýzu. Odvození, která zde provedu, nejsou zcela matematicky korektní. Myslím si ale, že k vysvětlení a pochopení *divergence* a *rotace vektorového pole* (potřebné v další části práce) to zcela určitě postačí.

3.2.1 Divergence vektorového pole

Mějme „rozumné“ *vektorové pole*. Naším úkolem bude zjistit, zda vektorové pole v nějakém místě *vyvěrá* (vzniká), nebo jím pouze *prochází*, či v něm *zaniká*.

Pro názornější vysvětlení si představme umyvadlo s kohoutkem. Rychlost vody pro nás bude představovat *vektorové pole*. Z kohoutku vytéká voda nějakou rychlostí, kohoutek je tedy naše místo, kde voda (pole) *vyvěrá* (vzniká). Začátek odpadní trubky můžeme brát jako „*noru*“, kde pole *zaniká*.

Zavedme si souřadnicový systém daný kartézskými osami x, y, z . Například si vezmeme bod $S' = [x', y', z']$. Abychom mohli úlohu řešit, tak si kolem bodu S' namalujeme velmi malý kvádr (na obrázku 1 je kvádr velký, to je jen kvůli viditelnosti a přehlednosti). Spočteme si *tok vektorového pole* všemi stěnami kvádru. Jakmile nám *tok vektorového pole* vyjde kladný (záporný), tak to znamená, že nám v kvádru pole *vzniká* (*zaniká*). Tam, kde *tok vektorového pole* je nulový, pole jen *prochází*. Jelikož chceme zjistit bodovou charakteristiku (pouze v jednom místě), tak stěny kvádru budeme tak dlouho zmenšovat, až se limitně přiblížíme k námi zvolenému bodu S' .



Obrázek 1: Kvádr v kartézské soustavě souřadnic

Nechť máme libovolné *vektorové pole* \vec{A} :

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z).$$

Tok vektorového pole \vec{A} uzavřenou plochou S je dán vztahem :

$$\psi_{\vec{A}} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS.$$

Plocha je charakterizovaná *vektorem normály* \vec{n} , který má dle dohody směr „ven“ z objemu vymezeného plochou a velikost *normálového* vektoru je $|\vec{n}| = 1$.¹

$$\psi_{\vec{A}} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \approx \sum_{N=1}^6 \vec{A}_N \cdot \vec{S}_N$$

Počítáme přes všechny stěny kvádru. Integrál jsme aproximovali sumou, protože uvažujeme velice malý kvádr. Jako první vezmeme stěnu vybarvenou modře. *Normálový vektor* této plochy je vyznačen v obrázku červeně, míří ve směru kladné poloosy x , tj. $\vec{n} = (1, 0, 0)$.

Modrou stěnou protéká pouze x -ová složka *vektorového pole* \vec{A} . To vyplývá ze skalárního součinu $\vec{A} \cdot \vec{n} = (A_x, A_y, A_z) \cdot (n_x, n_y, n_z)$. *Tok* aplikujeme na ostatní stěny (červenou, zelenou). Jelikož počítáme *tok* ve středu kvádru v bodě S' , tak bereme jednotlivé středy každé stěny kvádru. V obrázku jsou tyto středy stěn vyznačeny úhlopříčkami.²

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^6 \vec{A}_N \cdot \vec{S}_N &= A_x(x + \Delta x, y', z') \Delta y \Delta z - A_x(x, y', z') \Delta y \Delta z + A_y(x', y + \Delta y, z') \Delta x \Delta z - \\ &\quad - A_y(x', y, z') \Delta x \Delta z + A_z(x', y', z + \Delta z) \Delta x \Delta y - A_z(x', y', z) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Vytkneme všechny „malé kousky“ $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\begin{aligned} &= \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_x(x + \Delta x, y', z') - A_x(x, y', z')}{\Delta x} \right] + \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_y(x', y + \Delta y, z') - A_y(x', y, z')}{\Delta y} \right] + \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_z(x', y', z + \Delta z) - A_z(x', y', z)}{\Delta z} \right]. \end{aligned}$$

¹Symbol \approx značí aproximaci; aproximace znamená přiblížení, tj. náhradu něčím přibližným, zde místo integrálu píšeme sumu.

²Zápisem $A_x(x + \Delta x, y', z')$ chápeme hodnotu A_x v bodě $[x + \Delta x, y', z']$.

Provedeme limitní přechod $\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}$ (kvádr zmenšíme tak, abychom zjišťovali vlastnost v bodě S') a dostáváme:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{A}} &= \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_x(x + \Delta x, y', z') - A_x(x, y', z')}{\Delta x} \right] + \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_y(x', y + \Delta y, z') - A_y(x', y, z')}{\Delta y} \right] + \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{A_z(x', y', z + \Delta z) - A_z(x', y', z)}{\Delta z} \right]. \end{aligned}$$

Připomeňme si, jak je definovaná **derivace funkce** f jedné proměnné v bodě x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Budeme-li mít funkci f více proměnných (například funkci tří proměnných), **parciální derivací** funkce f v bodě $[x, y, z]$ budeme rozumět:³

$$f'(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Definici parciální derivace aplikujeme na náš předchozí výpočet a vidíme, že:⁴

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A_x(x + \Delta x, y', z') - A_x(x, y', z')}{\Delta x} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}. \\ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A_y(x', y + \Delta y, z') - A_y(x', y, z')}{\Delta y} &= \frac{\partial A_y}{\partial y}. \\ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A_z(x', y', z + \Delta z) - A_z(x', y', z)}{\Delta z} &= \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

³Parciální derivaci funkce f podle proměnné x ve fyzice značíme $\frac{\partial f}{\partial x}$.

⁴V limitě $\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}$ se neuplatní členy $\Delta y, \Delta z$, jelikož výraz $\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{A_x(x + \Delta x, y', z') - A_x(x, y', z')}{\Delta x}$ na nich vůbec nezávisí. Obdobně je to u následujících dvou limit.

Náš dlouhý výraz se výrazně zjednoduší:⁵

$$\psi_{\vec{A}} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$

Divergencí vektorového pole \vec{A} rozumíme:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.1)$$

Mohou nastat následující tři případy:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} \vec{A} > 0 & \text{vektorové pole } \vec{A} & \text{vyvěrá v bodě } S' \\ \operatorname{div} \vec{A} = 0 & \text{vektorové pole } \vec{A} & \text{prochází bodem } S' \text{ (} S' \text{ není zdrojem)} \\ \operatorname{div} \vec{A} < 0 & \text{vektorové pole } \vec{A} & \text{zaniká v bodě } S' \end{array}$$

Odvodili jsme vztah pro *divergenci vektorového pole* v kartézských souřadnicích, avšak tím nekončíme. Z naší úvahy můžeme odvodit další velice důležitý vztah.

V průběhu odvozování jsme zjistili, že pro náš „malý“ kvádrík platí:

$$\psi_{\vec{A}} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV.$$

Udělejme následující úvahy:

Představme si libovolné těleso o *objemu* V . Co kdybychom ho složili z mnoha našich „malých“ kvádríků? Celkový *tok vektoru* \vec{A} povrchem S tělesa můžeme spočítat tak, že posčítáme toky přes povrchy jednotlivých „kvádríků“ přes celý objem tělesa. Toky na vnitřních stěnách budou nulové, jelikož co z jednoho „kvádríků“ vyteče, to do druhého vteče, tudíž celkový tok uvnitř bude nulový. Nenulový *tok* bude jen na povrchu tělesa. Pokud úvahu převedeme do řeči matematiky, tak dostaneme následující vztah:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (3.2)$$

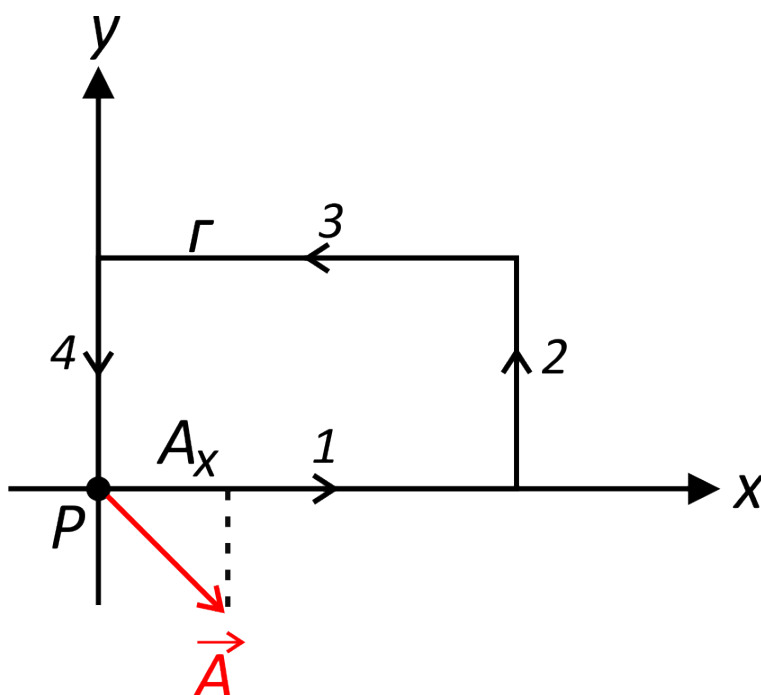
Tento vztah 3.2 se nazývá **Gaussova-Ostrogradského věta** a říká nám, jak navzájem převádět objemový (trojný) a plošný integrál druhého druhu.

⁵Provedeme-li limitní přechod, tak $\Delta x \rightarrow dx$ a $dx dy dz = dV$.

3.2.2 Rotace vektorového pole

Pojem *rotace vektorového pole* je komplikovaný a definovaný na základě limity a křivkového integrálu. Pro zájemce je definice vložena v poznámce pod čarou.⁶ My však budeme postupovat obdobně, jako když jsme odvozovali *divergenci vektorového pole*. Opět mějme „rozumné“ *vektorové pole* \vec{A} . Nyní nás bude zajímat jestli *vektorové pole* rotuje (tvoří vír). Naší úlohou je najít „test na víry“.

Pro jednoduchost se budeme zabývat problémem pouze v rovině xy . Jak moc vektor \vec{A} tvoří vír, zjistíme tak, že vektor \vec{A} promítneme do vhodně zvolené křivky Γ (viz obrázek 2). Na úseku 1 je vidět, že průmětem vektoru \vec{A} je jeho složka A_x .



Obrázek 2: Křivka Γ v kartézském systému souřadnic

⁶Rotace vektorového pole je definována: $\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}$.

Opět mějme libovolné *vektorové pole* \vec{A} :

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z).$$

Průměty provedeme ve všech úsecích. Vezměme si například bod P a zkoumejme, zda-li v bodě P nevzniká vír. Posčítejme všechny příspěvky vektoru \vec{A} promítnuté do křivky Γ :⁷

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx (A_x \Delta x)|_1 + (A_y \Delta y)|_2 - (A_x \Delta x)|_3 - (A_y \Delta y)|_4. \quad (3.3)$$

Opět si vzpomeňme na definici derivace:⁸

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \doteq \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0).$$

Upravíme výraz 3.3:

$$(A_x \Delta x)|_1 + (A_y \Delta y)|_2 - (A_x \Delta x)|_3 - (A_y \Delta y)|_4 = -(A_x|_3 - A_x|_1) \Delta x + (A_y|_2 - A_y|_4) \Delta y \quad (3.4)$$

Definici derivace aplikujme na výraz 3.4 následujícím způsobem:

$f \equiv A_x$ nebo A_y ; bodu x_0 odpovídá bod P ; $x - x_0 \approx \Delta x$ nebo Δy

$$\begin{aligned} -(A_x|_3 - A_x|_1) \Delta x + (A_y|_2 - A_y|_4) \Delta y &= - \left. \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_P \Delta y \Delta x + \left. \frac{\partial A_y}{\partial x} \right|_P \Delta x \Delta y = \\ &= \left(\left. \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right|_P \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Křivku Γ zmenšíme tak, abychom zjišťovali vlastnost vektorového pole v bodu P ($\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$). To by ovšem náš výraz byl roven nule, proto výraz znormujeme:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Našli jsme „test na víry“:

Výraz $\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ označíme jako z-ovou složku rotace \vec{A} , stručně zapisujeme:

$$(\text{rot} \vec{A})_z.$$

⁷Zápis $(A_x \Delta x)|_1$ znamená, že hodnotu výrazu $A_x \Delta x$ určujeme na úseku 1 křivky Γ .

⁸Zápisem $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ budeme rozumět derivaci funkce f podle proměnné x v bodě x_0 .

Obdobnou úvahou v rovině xz a yz bychom dospěli k tomu, že dochází k cyklické záměně indexů.

$$(\text{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$(\text{rot}\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot}\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

Rotaci vektorového pole \vec{A} rozumíme:

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (3.5)$$

Vidíme, že výsledkem *rotace vektorového pole* je vektor.

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} > 0 & \quad \text{vektorové pole } \vec{A} \quad \text{tvoří vír ve směru křivky } \Gamma \\ \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 & \quad \text{vektorové pole } \vec{A} \quad \text{netvoří vír} \\ \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} < 0 & \quad \text{vektorové pole } \vec{A} \quad \text{tvoří vír proti směru křivky } \Gamma \end{aligned}$$

Našli jsme vztah pro *rotaci vektorového pole* v kartézských souřadnicích. Když jsme se zabývali *divergencí vektorového pole*, tak jsme odvodili vztah 3.2, který nám převáděl objemový integrál na plošný (Gaussova-Ostrogradského věta).

Nyní se pokusíme zjistit, zda-li neexistuje nějaký podobný vztah pro *rotaci vektorového pole*. Představme si obecnou křivku Γ , která nemusí ležet v rovině xy . Křivku Γ poskládáme z mnoha „obdélníčků“. Můžeme provést obdobnou úvahu, ze které plyne, že na vnitřních stranách „obdélníčků“ se jednotlivé příspěvky k rotaci odečtou.

Pokud tuto úvahu převedeme do řeči matematiky, dostaneme vztah:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

Tento vztah 3.6 se nazývá **Stokesova věta** a říká nám, jak navzájem převádět křivkový a plošný integrál.

3.2.3 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity vyjadřuje ve fyzice obecný zákon zachování nějaké veličiny. Již v mechanice jsme se setkali s rovnicí kontinuity, která měla tvar: $\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$ (zákon zachování hmotnosti). Tato rovnice nám říká „kolik hmotnosti vteče, tolik jí vyteče“.

Nyní se podíváme, zda-li nemůžeme podobnou úvahu udělat i pro *elektrický náboj* Q (zákon zachování náboje). *Elektrický náboj* jsme schopni popsat *hustotou* ρ a *hustotou toku náboje* \vec{j} (*hustota proudu*).

- Mějme libovolné těleso o objemu ΔV , které nese elektrický náboj ΔQ , jehož rozložení po celém objemu je časově neproměnné. Můžeme definovat objemovou hustotu elektrického náboje jako:

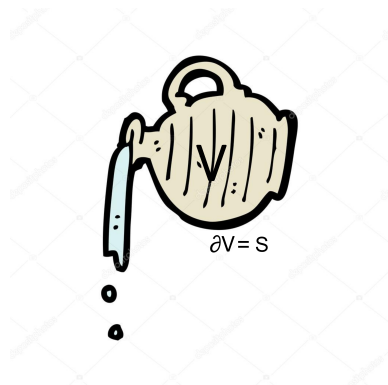
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

- Hustota toku elektrického náboje \vec{j} je vektor, který míří ve směru rychlosti \vec{v} . Elektrický proud je definován jako $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta S \Delta r}{\Delta t} = \rho v \Delta S = j \Delta S$. Hustota toku elektrického náboje (plošná hustota proudu) se rovná:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Význam velikosti toku j je množství proteklé veličiny Q jednotkou plochy za jednotku času: $j = \rho v = \frac{\Delta Q v}{\Delta V} = \frac{\Delta Q \frac{\Delta l}{\Delta t}}{\Delta l \Delta S} = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$.

Vezměme si uzavřenou nádobu o objemu V , její povrch (hranice objemu) označme S . Veličina Q popisuje to, co je uvnitř nádoby. Zajímá nás zákon zachování veličiny Q .



Obrázek 3: Nádoba s vodou [9]

Zákon zachování veličiny Q se dá vyslovit velice jednoduše: *Co ubylo z objemu V muselo vytéct ven plochou S , pokud to nezůstalo přímo v ploše S* . Nyní zákon zachování veličiny Q zformulujeme matematicky.

Náboj Q , který ubyl z objemu V , vyjádříme:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Co vyteklo přes plochu S :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Uvnitř integrálu je skalární součin \vec{a}, \vec{b} , který je dán vztahem: $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$, kde $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ jsou velikosti vektorů \vec{a}, \vec{b} a α je úhel sevřený vektory \vec{a}, \vec{b} .

Aby platil zákon zachování elektrického náboje Q , musí platit mezi vztahy rovnost:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

S časovou derivací přejdeme dovnitř integrálu. Uvnitř integrálu bude parciální derivace:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Pravou stranu rovnice upravíme dle vztahu 3.2 (*Gaussova-Ostrogradského věta*):

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Nyní už máme integrály, které jsou pouze objemové. Převédeme je na jednu stranu rovnice:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Pokud má být rovnice splněna pro každý objem V , tak se funkce, kterou integrujeme, musí rovnat nule.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (3.7)$$

Rovnici 3.7 říkáme **rovnice kontinuity**.

4 Kirchhoffovy zákony

4.1 Formulace a odvození

Abychom mohli elektrické obvody řešit, potřebujeme k tomu nějaký nástroj. Velice důležitými nástroji pro řešení elektrických obvodů jsou právě *Kirchhoffovy zákony* a *Ohmův zákon*.

Kirchhoffovy zákony zazní již na střední škole. Mohou být zformulovány různými způsoby. Abychom měli jednotné zavedení, tak si v této kapitole *Kirchhoffovy zákony* odvodíme a zformulujeme.

Je vždy zajímavé, když se snažíme vycházet z nejobecnějších fyzikálních zákonů, proto *Kirchhoffovy zákony* odvodíme z *Maxwellových rovnic*, které popisují celou teorii elektromagnetického pole.

Maxwellovy rovnice:

Maxwellovy rovnice - „čtyři věty, které změnilly svět.“ *Maxwellovy rovnice* jsou základní zákony v teorii elektromagnetického pole, z kterých lze odvodit vše, co o elektřině a magnetismu víme. Abychom byli schopni těmto rovnicím porozumět, využijeme znalosti z předchozí kapitoly o *divergenci* a *rotaci vektorového pole*.

Rovnice se zapisují ve dvou variantách, v integrálním tvaru (popisují chování elektromagnetického pole v nějaké oblasti) nebo v diferenciálním tvaru (popisují chování elektromagnetického pole v nějakém bodu). My si ukážeme jejich znění v diferenciálním tvaru.

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru:

1. Maxwellova rovnice (Gaussův zákon elektrostatického pole)

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_Q,$$

kde \vec{D} je vektor elektrické indukce a ρ_Q je hustota elektrických nábojů.

2. Maxwellova rovnice (Gaussův zákon magnetostatického pole)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

kde \vec{B} je vektor magnetické indukce.

3. Maxwellova rovnice (Ampérův zákon)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

kde \vec{H} je vektor intenzity magnetického pole, \vec{j} je vektor hustoty elektrického proudu a parciální derivace \vec{D} podle času je *posuvný Maxwellův proud*.

4. Maxwellova rovnice (Faradayův zákon)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

kde \vec{E} je vektor intenzity elektrického pole.

K těmto čtyřem rovnicím se přidávají (pro jednoduchá prostředí) ještě tři doplňkové:

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, kde ε je konstanta prostředí nazývaná *elektrická permitivita*.

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, kde μ je konstanta prostředí nazývaná *magnetická permeabilita*.

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$, kde σ je materiálová konstanta zvaná *specifická vodivost*. Tento vztah představuje **Ohmův zákon** v diferenciálním tvaru.

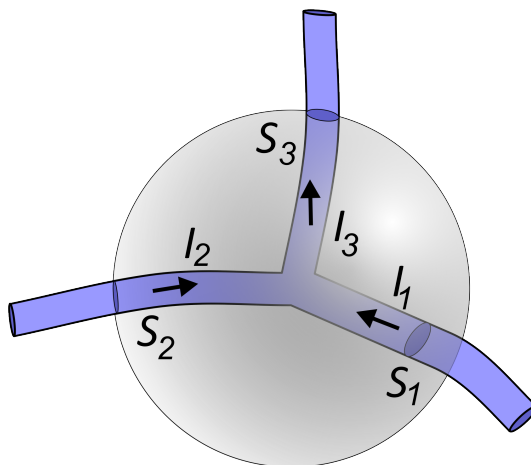
Sada těchto rovnic tvoří úplný popis elektromagnetického pole.

Vraťme se zpět ke Kirchhoffovým zákonům. Všechny potřebné vztahy již máme zavedené, tak můžeme začít s odvozováním.

Mějme rovnici kontinuity 3.7 (zákon zachování elektrického náboje):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Rovnici kontinuity využijme na situaci, která je zachycena na následujícím obrázku 4. Obrázek 4 obsahuje tři vodiče vytvářející uzel, kterými prochází proudy I_1 , I_2 , I_3 .



Obrázek 4: Vodiče uvnitř koule

Aplikujme objemový integrál na rovnici kontinuity. Jako objem V zvolme například kouli, uvnitř které se nachází uzel tvořený z vodičů (viz obrázek 4).

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0.$$

V případě stejnosměrných elektrických obvodů (stacionární proudy) je člen $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$, který má význam $\frac{dQ}{dt}$, nulový. Abychom tento člen mohli zanedbat i v případě střídavých proudů, musíme předpokládat pouze pomalé změny elektrických veličin a neuvažovat vliv okolních částí obvodu.

Druhý člen rovnice můžeme upravit pomocí vztahu 3.2 (*Gaussova-Ostrogradského věta*). Po úpravě dostáváme:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Mimo průniky vodičů s koulí (S_1, S_2, S_3) je tok \vec{j} (plošná hustota proudu) nulový.

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.1)$$

Elektrický proud k -tým vodičem je roven:

$$I_k = \int_{S_k} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.2)$$

Kladný směr proudu uvažujeme, pokud jde tok \vec{j} ven z plochy. Na obrázku 4 již máme směry proudu vyznačené.

Uplatníme-li vztah 4.2, tak rovnice 4.1 má tvar:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

1. Kirchhoffův zákon: Algebraický součet všech proudů v uzlu elektrického obvodu se rovná nule.

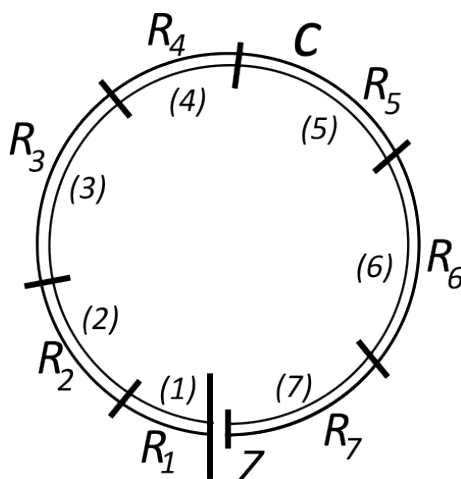
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Co do uzlu vteče, to z něj vyteče.

Vezměme si 4. Maxwellovu rovnici (zákon elektromagnetické indukce):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Mějme jednoduchý obvod (smyčku - uzavřená křivka) tvořený stejnosměrným zdrojem napětí a sedmi vodiči o různém odporu $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$. Křivka (smyčka) c se skládá z úseků (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) a zdroje Z (viz obrázek 5).



Obrázek 5: Obvod vodičů o různém odporu

Na Maxwellovu rovnici 4.3 aplikujeme plošný integrál, plochu tvoří obsah smyčky c :

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Levou stranu rovnice můžeme upravit dle vztahu 3.6 (Stokesova věta). Pravou stranu rovnice $-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ můžeme v případě stejnosměrných obvodů (stacionární případ - magnetická indukce \vec{B} se s časem nemění) zanedbat.

Úpravou rovnice dostáváme:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4.4)$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(3)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(4)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(5)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(6)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(7)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(Z)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pro elektrické napětí na i -té části obvodu platí:

$$U_{(i)} = \int_{(i)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4.5)$$

V mnoha látkách je *proudová hustota* \vec{j} lineárně závislá na *intenzitě vnějšího elektrického pole* \vec{E} . Závislost je možné vyjádřit vztahem:

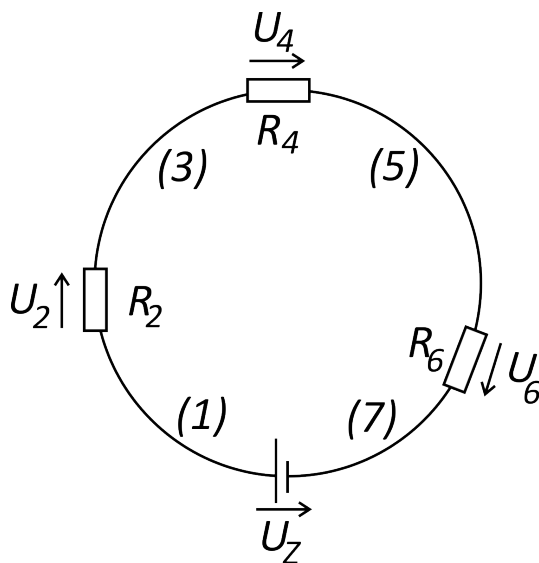
$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (4.6)$$

kde veličina σ je *měrná elektrická vodivost (konduktivita)*, ρ je *měrný elektrický odpor (rezistivita)*. Rovnice 4.6 je známá jako **Ohmův zákon v diferenciálním tvaru**.

Uvažujme nyní hypoteticky, že části smyčky (1), (3), (5), (7) mají nulový *měrný elektrický odpor* ($\rho = 0$, idealizace), pak je i *elektrické pole* nulové a tudíž i příslušný integrál ve vztahu 4.5 je roven nule.

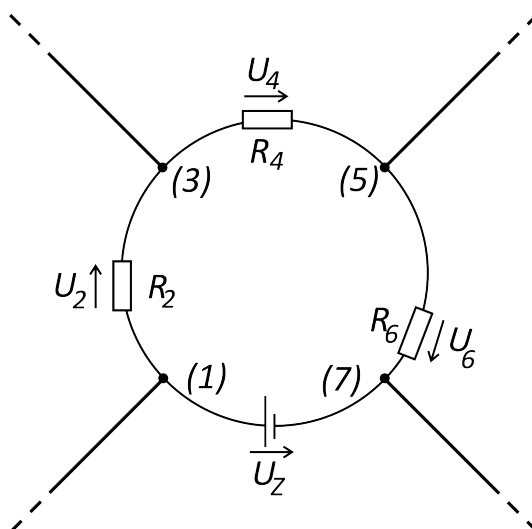
Integrál $\int_Z \vec{E} \cdot d\vec{l}$ představuje napětí mezi svorkami zdroje U_Z . Aplikujeme-li vztahy 4.5 a 4.6 na rovnici 4.4, dostáváme:

$$0 + U_2 + 0 + U_4 + 0 + U_6 + 0 + U_Z = 0.$$



Obrázek 6: Idealizovaný kruhový obvod

Předchozí úvahy zůstanou v platnosti, i když smyčka bude součástí složitějšího elektrického obvodu (obrázek 7).



Obrázek 7: Smyčka součástí dalších elektrických obvodů

Mohou se změnit akorát proudy v jednotlivých částech smyčky a dílčí napětí na částech s nenulovým měrným elektrickým odporem. Rovnice 4.4, 4.5 a 4.6 zůstanou v platnosti.

2. Kirchhoffův zákon: Algebraický součet všech svorkových napětí zdrojů a všech úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené smyčce rovná nule.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

Nosiče náboje při cestě smyčkou elektrického obvodu ztrácejí na rezistorech energii, tu jim dodává elektrické pole zdroje.

Ve většině středoškolských učebnic se setkáváme s formulací 2. Kirchhoffova zákona pomocí tzv. *elektromotorického napětí*, které představuje práci neelektrických sil uvnitř zdroje připadající na jednotkový náboj.

„Součet úbytků napětí na rezistorech je v uzavřené smyčce stejný jako součet elektromotorických napětí zdrojů. Jestliže se ve smyčce nachází n rezistorů a m zdrojů, platí: $\sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{j=1}^m U_{ej}$.“ [8] Z této formulace je lépe vidět zákon zachování energie.

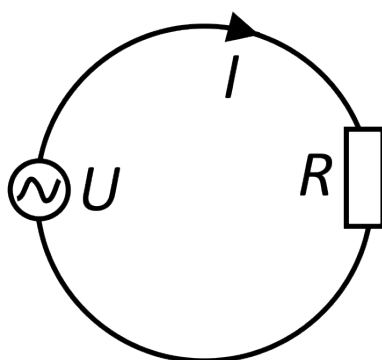
My jsme však 2. Kirchhoffův zákon zformulovali bez pojmu *elektromotorického napětí*. V našem případě používáme *svorkové napětí* zdroje.

Toto znění se nejčastěji používá na školách s technickým zaměřením, kde je kladen větší důraz na řešení elektrických obvodů. Pro tyto účely je vhodnější používat námi zvolenou formulaci 2. Kirchhoffova zákona.

Kirchhoffovy zákony lze použít pro stejnosměrné a omezeně i pro střídavé obvody. Toto omezení plyne ze zanedbání členů s časovými derivacemi v rovnicích 4.3 a 3.7.

4.2 Meze platnosti 2. Kirchhoffova zákona

Chceme ukázat, jak moc se uplatní člen $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ v rovnici 4.3 v případě použití zdroje střídavého napětí. Abychom nemuseli provádět složitou integraci a řešit přímo rovnici 4.3, použijeme jednoduchou představu obvodu jako kruhového závitu s malým zdrojem a rezistorem R (obrázek 8). Vliv členu $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ bude v našem zjednodušeném případě nahrazovat *vlastní indukčnost* závitu (smyčky) L .



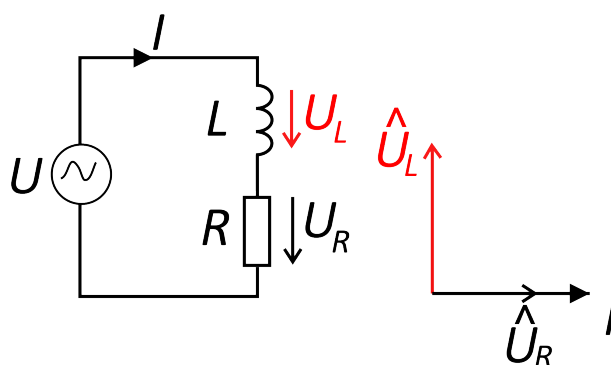
Obrázek 8: Kruhový zavit s malým zdrojem a rezistorem R

Pro indukčnost L jednoho kruhového závitu použijeme vztah převzatý z učebnice [11].

$$L = \mu_0 R \left[\ln\left(\frac{8R}{a_0}\right) - \frac{7}{4} \right], \quad (4.7)$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je *permeabilita vakua*, R poloměr kruhového závitu a a_0 průřez vodiče.

Náhradní schéma obvodu:



Obrázek 9: Náhradní schéma obvodu

Pro napětí na cívce L platí:

$$U_L = IX_L = I\omega L = I2\pi fL.$$

Napětí na rezistoru R :

$$U_R = IR.$$

1) Uvažujme poloměr kruhového závitu $R = 50$ cm (velký obvod) s vodičem o průřezu $a_0 = 0,5$ mm² (zvonkový drát). Dle vztahu 4.7 vypočteme vlastní indukčnost L .

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot \left[\ln\left(\frac{8 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 10^{-6}}\right) - \frac{7}{4} \right] \doteq 8,9 \cdot 10^{-6} H = 8,9 \mu H$$

a) frekvence zdroje $f = 50$ Hz (síťová frekvence)

$$X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 8,9 \cdot 10^{-6} \doteq 2,8 \cdot 10^{-3} \Omega$$

b) frekvence zdroje $f = 100$ MHz (frekvence rozhlasového vysílání FM)

$$X_L = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 8,9 \cdot 10^{-6} \doteq 5592 \Omega$$

2) Nyní uvažujme kruhový závit s poloměrem $R = 1$ cm (malý obvod) s vodičem o průřezu $a_0 = 0,5$ mm² (zvonkový drát). Dle vztahu 4.7 vypočteme vlastní indukčnost L .

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,01 \cdot \left[\ln\left(\frac{8 \cdot 0,01}{0,5 \cdot 10^{-6}}\right) - \frac{7}{4} \right] \doteq 1,29 \cdot 10^{-7} H = 0,129 \mu H$$

a) frekvence zdroje $f = 50$ Hz (síťová frekvence)

$$X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,29 \cdot 10^{-7} \doteq 4,05 \cdot 10^{-4} \Omega$$

b) frekvence zdroje $f = 100$ MHz (frekvence rozhlasového vysílání FM)

$$X_L = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 1,29 \cdot 10^{-7} \doteq 81,1 \Omega$$

Zkusme nyní porovnat indukční reaktanci X_L například s odporem rezistoru $R = 100 \Omega$ (žárovka). Pro většinu obvodů se síťovou frekvencí 50 Hz jsou odpory spotřebičů o několik řádů větší než indukční reaktance X_L obvodu. Její vliv (tedy i vliv členu $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) je možné zanedbat.

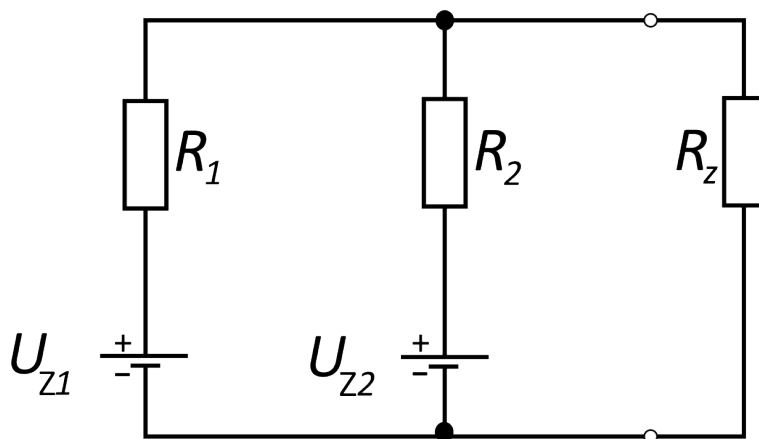
Jak vidíme, tak pro vysokofrekvenční obvody ($f = 100$ MHz) to tak neplatí (viz výpočet X_L). Pro $f = 100$ MHz se uplatní vlastní a vzájemná indukčnost smyček.

4.3 Praktické použití Kirchhoffových zákonů

Nejprve si vysvětleme základní pojmy, které se vyskytují ve formulaci Kirchhoffových zákonů:

- *Uzel*: Místo, kde se setkávají alespoň dva vodiče.
- *Větev obvodu*: Část obvodu mezi *uzly* obsahující alespoň jeden elektrický prvek.
- *Smyčka*: Uzavřená dráha obvodu skládající se z *větví obvodu*.

Ukažme si praktické použití Kirchhoffových zákonů a dalších metod (smyčkové proudy, uzlová napětí, princip superpozice, Théveninova věta) na následujícím obvodu 10 - dva paralelně zapojené reálné zdroje k zátěži (spotřebiči):



Obrázek 10: Zapojení dvou reálných zdrojů k zátěži

Postup řešení:

- 1) Vyznačíme nejdříve šipkami smysly proudů v jednotlivých větvích. Směry šipek (smysly proudů) lze volit libovolně. Pokud skutečný proud teče opačným směrem, než jsme zvolili, projeví se to ve výsledku záporným znaménkem.
- 2) Zvolíme si uzly v obvodu, pro které napíšeme *1. Kirchhoffův zákon*.
- 3) U zdrojů napětí si vyznačíme šipkou polaritu svorkových napětí (šipka od plus k minus - obráceně než se vyznačovalo elektromotorické napětí). Úbytky napětí na rezistorech vyznačíme šipkou ve směru proudu.
- 4) Identifikujeme uzavřené smyčky, zvolíme v nich směr obíhání a pro každou napíšeme *2. Kirchhoffův zákon*. Napětí zdrojů a úbytky napětí, jejichž šipka je v souladu se směrem (proti směru) obíhání, zapíšeme do rovnice kladným znaménkem (záporným znaménkem).
- 5) Z *Kirchhoffových zákonů* takto získáme rovnice (soustavu lineárních rovnic), jejichž řešením nalezneme hodnoty neznámých proudů, případně dle *Ohmova zákona* dopočítáme ostatní hodnoty napětí.

Počet rovnic a smyček [12]:

Nechť má obvod N uzlů. Potom dle 1. Kirchhoffova zákona sestavíme $N - 1$ nezávislých rovnic. Podobné je to i pro rovnice sestavené 2. Kirchhoffovým zákonem. Lineárně nezávislých rovnic je tolik, kolik je nezávislých jednoduchých obvodů sítě. Jednoduchý obvod je nezávislý, jestliže obsahuje alespoň jednu větev, která není součástí žádného jiného nezávislého obvodu. Počet jednoduchých nezávislých obvodů označme například K a počet větví V .

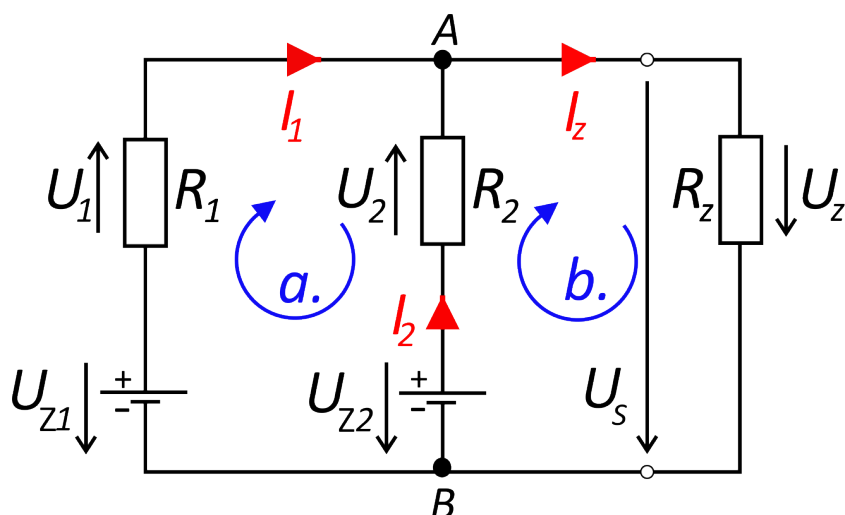
Pak platí vztah:

$$V = K + (N - 1).$$

Tento vztah určuje kolik je třeba zvolit rovnic pro 1. a 2. Kirchhoffův zákon.

V našem obvodu je $N = 2$ a $V = 3$, to znamená, že potřebujeme $K = V - (N - 1) = 2$ rovnice pro 2. Kirchhoffův zákon.

Řešení obvodu:



Obrázek 11: Obvod řešený pomocí Kirchhoffových zákonů

1. Kirchhoffův zákon pro uzel (A): $I_1 + I_2 - I_Z = 0 \Rightarrow I_Z = I_1 + I_2$.

2. Kirchhoffův zákon pro smyčku (a.): $I_1 R_1 - I_2 R_2 - U_{Z1} + U_{Z2} = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1 I_1 + U_{Z2} - U_{Z1}}{R_2}$.

2. Kirchhoffův zákon pro smyčku (b.): $I_2 R_2 + R_Z I_Z - U_{Z2} = 0$.

Nyní máme lineární soustavu třech rovnic o třech neznámých, kde neznámé jsou proudy I_1, I_2, I_Z . Soustavu rovnic vyřešíme:

$$I_2 R_2 + R_Z (I_1 + I_2) - U_{Z2} = I_2 R_2 + R_Z I_1 + R_Z I_2 - U_{Z2} = 0.$$

$$\begin{aligned}
(R_2 + R_Z) \frac{R_1 I_1 + U_{Z2} - U_{Z1}}{R_2} + I_1 R_Z - U_{Z2} &= 0 \\
(R_2 + R_Z)(R_1 I_1 + U_{Z2} - U_{Z1}) + I_1 R_Z R_2 - U_{Z2} R_2 &= 0 \\
R_2 R_1 I_1 + U_{Z2} R_2 - U_{Z1} R_2 + R_Z R_1 I_1 + U_{Z2} R_Z - U_{Z1} R_Z + R_Z R_2 I_1 - U_{Z2} R_2 &= 0 \\
I_1 (R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z) = U_{Z1} R_2 - U_{Z2} R_Z + U_{Z1} R_Z & \\
I_1 (R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z) = R_Z (U_{Z1} - U_{Z2}) + U_{Z1} R_2 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{R_Z (U_{Z1} - U_{Z2}) + U_{Z1} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z} \\
I_2 &= \frac{U_{Z2} (R_1 + R_Z) - U_{Z1} R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z} \\
I_Z &= \frac{U_{Z1} R_2 + U_{Z2} R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}
\end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad R_Z = 220 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}$$

$$I_1 = 0,056 \text{ A} = 56 \text{ mA}$$

$$I_2 = -0,027 \text{ A} = -27 \text{ mA}$$

$$I_Z = 0,029 \text{ A} = 29 \text{ mA}.$$

Proud I_2 nám vyšel záporný. To znamená, že při volbě proudu I_2 jsme zvolili opačný směr.

Dopočítáme svorkové napětí U_S :

$$U_S = I_Z R_Z = 6,38 \text{ V}.$$

5 Metoda smyčkových proudů

Metoda vychází z 2. Kirchhoffova zákona a její použití vylučuje sestavit rovnice, které by byly na sobě závislé. Metoda spočívá v tom, že zavádíme do každé smyčky tzv. *smyčkový proud*. *Smyčkové proudy* označíme v každé smyčce a jejich směr volíme libovolně.

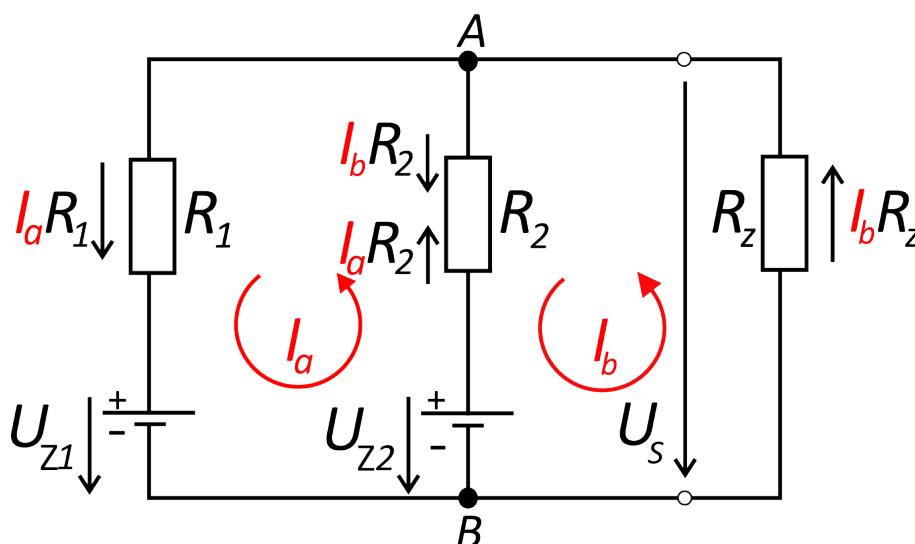
Tyto *smyčkové proudy* jsou pro nás neznámé veličiny. Musíme sestavit tolik rovnic, kolik je v obvodu smyček. Pro každou smyčku sestavíme rovnici podle 2. Kirchhoffova zákona, kde za proud každým prvkem dosazujeme algebraický součet *smyčkových proudů* všech smyček, do kterých daný prvek patří. Tím získáme dostatečný počet rovnic, který je vždy menší, než jsou-li za neznámé veličiny považovány proudy v jednotlivých větvích obvodu (smyček je vždy méně než větví).

Vyřešením rovnic, tj. určením *smyčkových proudů*, získáme proudy jednotlivých prvků obvodu vždy jako součty *smyčkových proudů* všech smyček, do kterých daný prvek patří.

Postup řešení:

- 1) U zdrojů napětí si vyznačíme šipkou polaritu *svorkových napětí* (šipka od plus k minus - obráceně než se vyznačovalo *elektromotorické napětí*).
- 2) Zvolíme proudové uzavřené smyčky a jejich směry. *Smyčkový proud* je fiktivní proud, který protéká celou námi zvolenou smyčkou.
- 3) Napíšeme rovnice dle 2. Kirchhoffova zákona pro jednotlivé smyčky I_a, I_b . Směr obíhání zachováme v souladu se směrem *smyčkových proudů*.
- 4) Vyřešíme získané rovnice, tj. spočítáme neznámé *smyčkové proudy* I_a a I_b .
- 5) Z fiktivních *smyčkových proudů* I_a, I_b určíme reálné proudy I_1, I_2, I_Z .

Řešení obvodu:



Obrázek 12: Obvod řešený pomocí *Metody smyčkových proudů*

Pomocí 2. Kirchhoffova zákona napíšeme rovnice (viz předchozí podkapitulu) pro *smyčkové proudy*:

$$\text{Smyčkový proud } I_a : R_1 I_a + R_2(I_a - I_b) + U_{Z1} - U_{Z2} = 0$$

$$\text{Smyčkový proud } I_b : R_2(I_b - I_a) + R_z I_b + U_{Z2} = 0$$

Rezistor R_2 patří do smyčky I_a i do smyčky I_b , proto je třeba při výpočtu úbytku napětí uvažovat oba smyčkové proudy. Znaménka udávají směry smyček (viz šipky u rezistoru R_2 v obrázku 12).

Řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$I_a(R_1 + R_2) - R_2 I_b = U_{Z2} - U_{Z1}$$

$$I_b(R_2 + R_z) - R_2 I_a = -U_{Z2}.$$

Dosadíme hodnoty:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad R_z = 220 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}$$

$$69I_a - 47I_b = -2,5$$

$$-47I_a + 267I_b = -5,2.$$

Ze soustavy rovnic spočítáme smyčkové proudy I_a, I_b :

$$I_a = -0,056 \text{ A} = -56 \text{ mA}$$

$$I_b = -0,029 \text{ A} = -29 \text{ mA}.$$

Smyčkové proudy nám vyšly záporné, což znamená, že proud teče opačným směrem, než je zvolený směr smyčky.

Nyní potřebujeme určit hodnoty reálných proudů (viz obrázek 11 v předchozí podkapitole) pomocí smyčkových proudů.

1. Kirchhoffův zákon pro uzel (A): $I_1 + I_2 - I_Z = 0 \Rightarrow I_2 = I_Z - I_1$

$$I_1 = -I_a = 0,056 \text{ A} = 56 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_Z - I_1 = -0,027 \text{ A} = -27 \text{ mA}$$

$$I_Z = -I_b = 0,029 \text{ A} = 29 \text{ mA}.$$

Dopočítáme svorkové napětí U_S :

$$U_S = I_Z R_Z = 6,38 \text{ V}.$$

6 Metoda uzlových napětí

Metoda řešení elektrických obvodů pomocí *uzlových napětí* usnadňuje a zrychluje výpočty především tam, kde se vyskytují proudové zdroje. Její princip vychází z *Kirchhoffových zákonů* a zavádí nové veličiny, tzv. *uzlové napětí* a *referenční uzel*.

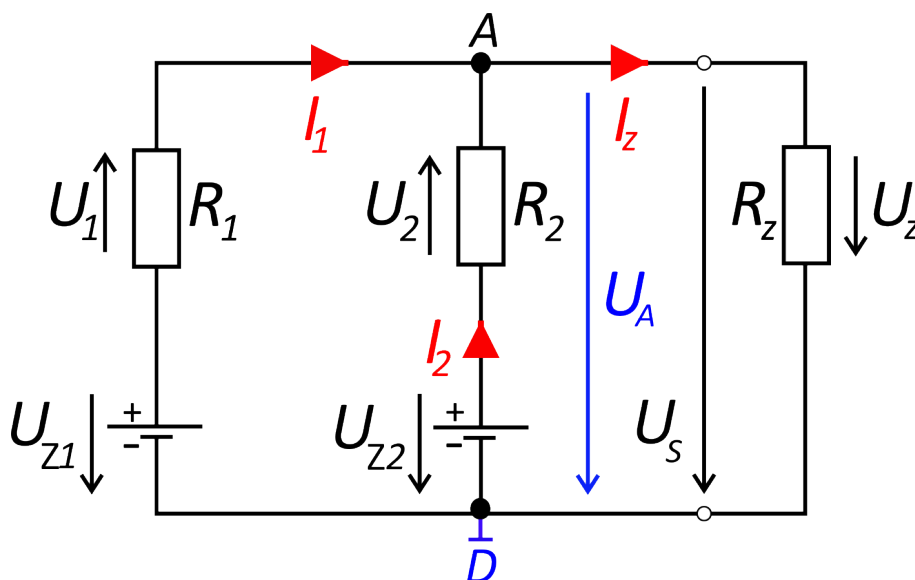
Jeden vhodně zvolený uzel (nejvýhodnější je ten, ve kterém je spojeno nejvíce prvků) označíme jako *uzel referenční*. Napětí každého z ostatních uzlů vůči *uzlu referenčnímu* označujeme jako *uzlové napětí*. Proudů v prvcích obvodu potom vyjádříme pomocí rozdílu *uzlových napětí*.

Poznámka: Lze na to také nahlížet tak, že v *referenčním uzlu* je nulový *potenciál* a *uzlové napětí* je vlastně *potenciál* daného uzlu při této volbě nulového *potenciálu*.

Postup řešení:

- 1) Vyznačíme nejdříve šipkami smysly proudů v jednotlivých větvích. Směry šipek (smysly proudů) lze volit libovolně. Pokud skutečný proud teče opačným směrem, než jsme zvolili, projeví se to ve výsledku záporným znaménkem.
- 2) Zvolíme si uzly v obvodu, pro které napíšeme dle *1. Kirchhoffova zákona* rovnici pro proudy.
- 3) U zdrojů napětí si vyznačíme šipkou polaritu *svorkových napětí* (šipka od plus k minus - obráceně než se vyznačovalo *elektromotorické napětí*).
- 4) V zapojení si vyznačíme jednotlivé uzly (A , D) a jeden z nich označíme jako *uzel referenční* (v této úloze zvolíme uzel D). *Referenční uzel* volíme tak, aby k němu bylo připojeno co nejvíce prvků (součástek).
- 5) *Uzlové napětí* mezi uzlem A a *referenčním uzlem* D označíme jako napětí U_A .
- 6) Proudů v jednotlivých prvcích obvodu vyjádříme pomocí *uzlových napětí*, napětí zdrojů a odporů rezistorů. Získáme tím soustavu rovnic, jejíž výsledek je hledané *uzlové napětí* U_A .
- 7) Z *uzlového napětí* jsme schopni dopočítat všechny proudy v obvodu.

Řešení obvodu:



Obrázek 13: Obvod řešený pomocí *Metody uzlových napětí*

1. Kirchhoffův zákon pro uzel (A): $I_1 + I_2 - I_Z = 0 \Rightarrow I_Z = I_1 + I_2$.

Proudy vyjádříme pomocí *uzlového napětí* U_A , což je vlastně napětí mezi uzlem A a referenčním uzlem D:

$$U_1 = U_{Z1} - U_A \Rightarrow I_1 = \frac{U_{Z1} - U_A}{R_1}$$

$$U_2 = U_{Z2} - U_A \Rightarrow I_2 = \frac{U_{Z2} - U_A}{R_2}$$

$$U_Z = U_A \Rightarrow I_Z = \frac{U_A}{R_Z}$$

Tyto vztahy dosadíme do výše napsaného 1. Kirchhoffova zákona pro uzel A:

$$\frac{U_{Z1} - U_A}{R_1} + \frac{U_{Z2} - U_A}{R_2} = \frac{U_A}{R_Z},$$

kde je jediná neznámá U_A , kterou vyjádříme. Vynásobením rovnice výrazem $R_1 R_2 R_Z$ a roznásobením závorek dostaneme:

$$U_{Z1} R_2 R_Z - U_A R_2 R_Z + U_{Z2} R_1 R_Z - U_A R_1 R_Z = U_A R_1 R_2.$$

Odtud plyne:

$$U_A = \frac{U_{Z1} R_2 R_Z + U_{Z2} R_1 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}.$$

Dosadíme hodnoty:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad R_Z = 220 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}$$

$$U_A = \frac{7,7 \cdot 47 \cdot 220 + 5,2 \cdot 22 \cdot 220}{22 \cdot 47 + 22 \cdot 220 + 47 \cdot 220} = 6,46 \text{ V.}$$

Spočítali jsme *uzlové napětí* U_A . Nyní můžeme dopočítat proudy dle vztahů uvedených výše:

$$I_1 = \frac{U_{Z1} - U_A}{R_1} \Rightarrow I_1 = 0,056 \text{ A} = 56 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U_{Z2} - U_A}{R_2} \Rightarrow I_2 = -0,027 \text{ A} = -27 \text{ mA}$$

$$I_Z = \frac{U_A}{R_Z} \Rightarrow I_Z = 0,029 \text{ A} = 29 \text{ mA.}$$

Uzlové napětí U_A je stejné jako svorkové napětí U_S :

$$U_A = U_S = 6,46 \text{ V.}$$

7 Metoda lineární superpozice

Metoda *lineární superpozice* vyjadřuje závislost mezi příčinou (působení jednotlivých zdrojů napětí a proudu v obvodu) a následkem (napětí a proud na uvažovaném prvku v obvodu). Platí, že účinek součtu příčin je roven součtu následků jednotlivých příčin působících samostatně (tzv. *princip superpozice*). Metodu lze použít pouze v obvodech s lineárními prvky.

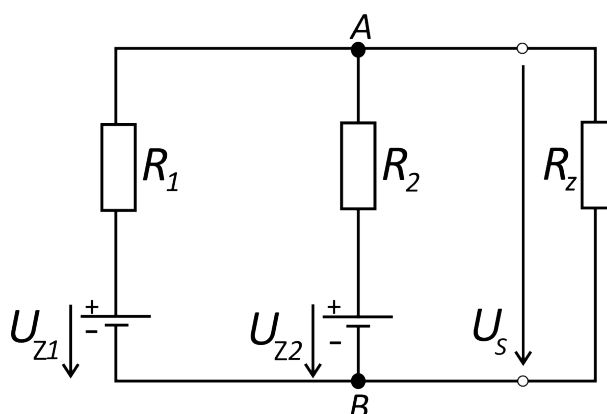
Pokud tedy působí v lineárním elektrickém obvodu několik zdrojů současně, můžeme určovat napětí (nebo proud) na libovolném prvku jako součet příslušných napětí (proudů) vyvolaných jednotlivými zdroji samostatně. Necháme tedy zapojený vždy jen jeden zdroj napětí nebo proudu a stanovíme napětí (proud) na uvažovaném prvku. Ostatní zdroje napětí zkratujeme (případně nahradíme jejich vnitřními odpory) a zdroje proudu vyřadíme. To provedeme postupně pro každý zdroj.

Poznámka: U lineárních obvodů platí *superpozice* jen pro napětí a proud. Vztahy pro výkon jsou v těchto obvodech kvadratické ($P = RI^2$, $P = U^2/R$), a proto pro tyto veličiny metoda lineární superpozice obecně neplatí.

Postup řešení:

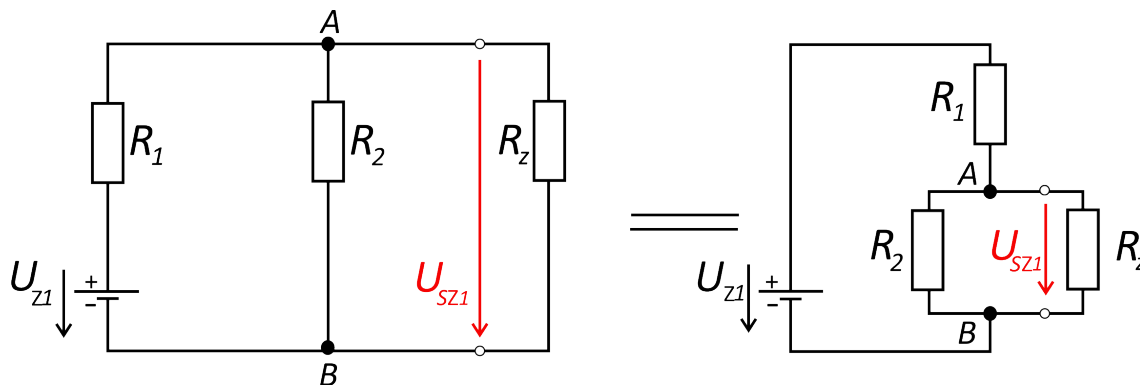
- 1) U zdrojů napětí si vyznačíme šipkou polaritu *svorkových napětí* (šipka od plus k minus - obráceně, než se vyznačovalo *elektromotorické napětí*).
- 2) Vypočteme napětí nebo proud na uvažovaném prvku (budeme počítat například napětí U_S na rezistoru R_Z) při působení jednoho zdroje. Přitom ostatní zdroje napětí nahradíme zkratem (případně jejich vnitřním odporem) a vyřadíme zdroje proudu.
- 3) Bod 2 provedeme postupně pro každý zdroj v obvodu.
- 4) Výsledné napětí nebo proud na uvažovaném prvku jsou pak dány algebraickým součtem všech dílčích napětí nebo proudů.

Řešení obvodu:



Obrázek 14: Obvod řešený pomocí *Metody lineární superpozice*

Nejprve uvažujme napětí zdroje U_{Z1} , zdroj U_{Z2} tedy nahradíme zkratem (jedná se o ideální zdroj bez vnitřního odporu).



Obrázek 15: Obvod řešený lineární superpozicí se zdrojem U_{Z1}

Naším úkolem je v tomto jednodušším obvodu určit napětí U_{SZ1} .

V obvodu jsou rezistory R_2 a R_Z zapojeny paralelně a k nim je sériově připojen rezistor R_1 . Nejdříve spočítáme celkový odpor paralelního zapojení rezistorů R_2 a R_Z .

Odpor paralelně zapojených rezistorů:

$$R_{2Z} = \frac{R_2 R_Z}{R_2 + R_Z}.$$

Celkový odpor R :

$$R = R_1 + R_{2Z} = R_1 + \frac{R_2 R_Z}{R_2 + R_Z}.$$

Obvodem teče proud $I = \frac{U_{Z1}}{R}$. Hledané napětí U_{SZ1} je rovno napětí na R_{2Z} :

$$U_{SZ1} = I R_{2Z}$$

$$U_{SZ1} = \frac{U_{Z1}}{R_1 + \frac{R_2 R_Z}{R_2 + R_Z}} \cdot \frac{R_2 R_Z}{R_2 + R_Z}.$$

Což po úpravě dává:

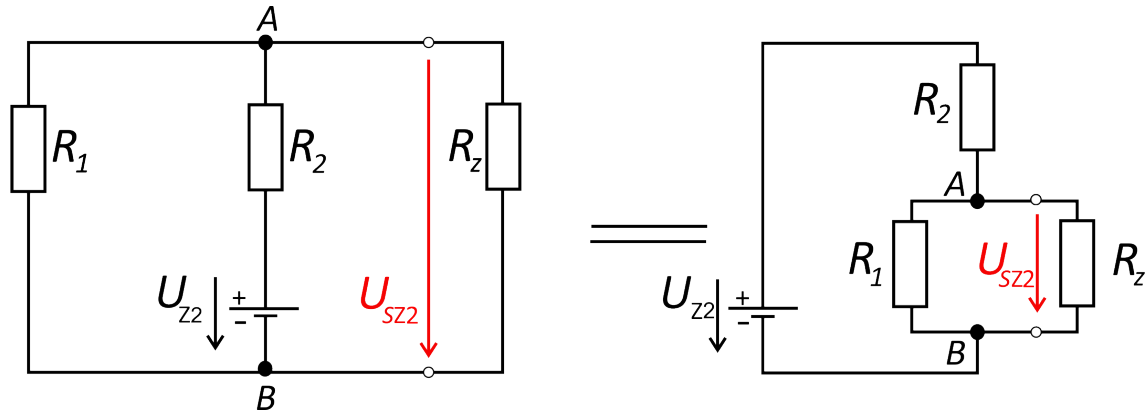
$$U_{SZ1} = \frac{U_{Z1}}{\frac{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}{R_2 + R_Z}} \cdot \frac{R_2 R_Z}{R_2 + R_Z} = U_{Z1} \frac{R_2 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}.$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad R_Z = 220 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}$$

$$U_{SZ1} = 7,7 \cdot \frac{47 \cdot 220}{22 \cdot 47 + 22 \cdot 220 + 47 \cdot 220} = 4,91 \text{ V.}$$

Podobně jako v předchozím případě uvažujme pouze zdroj napětí U_{Z2} , zdroj U_{Z1} nahradíme zkratem (jedná se také o ideální zdroj bez vnitřního odporu).



Obrázek 16: Obvod řešený lineární superpozicí se zdrojem U_{Z2}

Naším úkolem je určit napětí U_{Z2} . Budeme postupovat úplně stejně jako u zdroje U_{Z1} . V tomto obvodu jsou rezistory R_1 a R_Z zapojeny paralelně a k nim je sériově připojen rezistor R_2 .

Odpor paralelně zapojených rezistorů:

$$R_{1Z} = \frac{R_1 R_Z}{R_1 + R_Z}.$$

Celkový odpor R :

$$R = R_2 + R_{1Z} = R_2 + \frac{R_1 R_Z}{R_1 + R_Z}.$$

Obvodem teče proud $I = \frac{U_{Z2}}{R}$. Hledané napětí U_{SZ2} je rovno napětí na R_{1Z} :

$$U_{SZ2} = I R_{1Z}$$

$$U_{SZ2} = \frac{U_{Z2}}{R_2 + \frac{R_1 R_Z}{R_1 + R_Z}} \cdot \frac{R_1 R_Z}{R_1 + R_Z}.$$

Což po úpravě dává:

$$U_{SZ2} = \frac{U_{Z2}}{\frac{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}{R_1 + R_Z}} \cdot \frac{R_1 R_Z}{R_1 + R_Z} = U_{Z2} \frac{R_1 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}.$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad R_Z = 220 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}$$

$$U_{SZ2} = 5,2 \cdot \frac{22 \cdot 220}{22 \cdot 47 + 22 \cdot 220 + 47 \cdot 220} = 1,55 \text{ V.}$$

Poznámka: Tento výpočet se od výpočtu v předchozím oddíle liší jen tím, že se prohodily role zdrojů U_{Z1} a U_{Z2} . Stačilo tedy vzít obecné řešení z konce předchozího oddílu a zaměnit indexy 1 a 2.

Nyní už máme spočítaná napětí U_{ZS1} a U_{ZS2} , vzhledem k tomu, že v obvodu se už nevyskytuje další zdroj, tak výsledné napětí U_S je dáno dle principu superpozice součtem U_{ZS1} a U_{ZS2} .

$$U_S = U_{ZS1} + U_{ZS2} = U_{Z1} \frac{R_2 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z} + U_{Z2} \frac{R_1 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z}$$

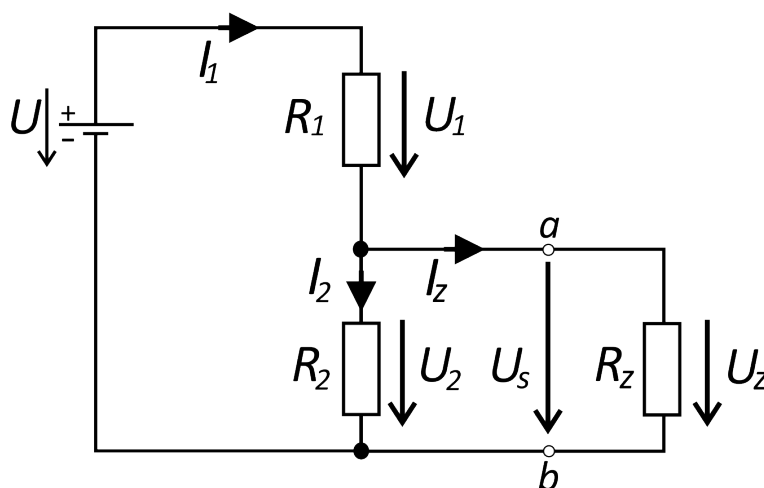
$$U_S = \frac{U_{ZS1} R_2 R_Z + U_{Z2} R_1 R_Z}{R_1 R_2 + R_1 R_Z + R_2 R_Z} = 6,46 \text{ V}$$

8 Théveninova věta

Théveninova věta o náhradním zdroji napětí tvrdí, že libovolně složitý lineární obvod lze vzhledem k libovolným dvěma svorkám nahradit ideálním zdrojem napětí U_0 se sériově zapojeným rezistorem R_i (skutečným zdrojem napětí o vnitřním odporu R_i).

Představme si nyní rozvětvený obvod, ve kterém nás zajímá pouze jedna jeho větev (máme určit proud procházející touto větví a její napětí). Schéma obvodu překreslíme tak, že zkoumanou větev ponecháme a zbytek obvodu nahradíme dle Théveninovy věty ideálním zdrojem napětí se sériově zapojeným rezistorem.

Nejdříve na příkladu jednoduchého děliče napětí (viz obrázek 17) ukážeme, že část obvodu vlevo od svorek a, b lze (dle Théveninovy věty) nahradit skutečným zdrojem napětí.



Obrázek 17: Zatížený dělič napětí

Pokusíme se vyjádřit svorkové napětí v závislosti na proudu procházejícím zátěží: $U_S = f(I_Z)$.

Proud I_2 jsme schopni vyjádřit:

$$I_2 = \frac{U_S}{R_2}.$$

1. *Kirchhoffův zákon*:

$$I_1 = I_2 + I_Z \Rightarrow I_1 = I_Z + \frac{U_S}{R_2}.$$

Napišeme rovnici pro smyčku dle 2. *Kirchhoffova zákona*:

$$U = U_1 + U_S = I_1 R_1 + U_S = \left(I_Z + \frac{U_S}{R_2}\right) \cdot R_1 + U_S = I_Z R_1 + \frac{U_S R_1}{R_2} + U_S = I_Z R_1 + U_S \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right).$$

Z rovnice vyjádříme napětí U_S :

$$U - I_Z R_1 = U_S \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

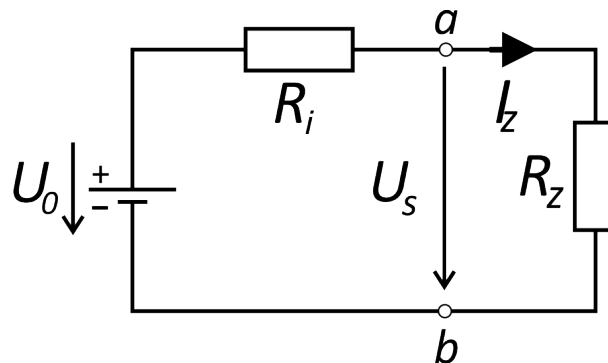
$$U_S = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I_Z \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Člen $U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ označme jako U_0 a zlomek $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ jako R_i .

Rovnice, kterou takto dostaneme:

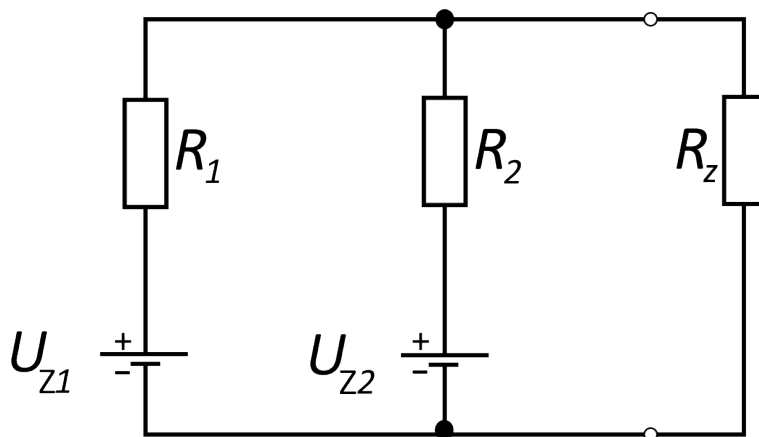
$$U_S = U_0 - I_Z R_i,$$

představuje závislost svorkového napětí U_S na zatěžovacím proudu pro případ skutečného zdroje napětí s vnitřním odporem R_i . Napětí naprázdno tohoto zdroje je U_0 . Z předchozího označení je vidět, že jde o napětí na výstupu nezátíženého děliče. Zlomek $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ pak představuje výsledný odpor paralelní kombinace rezistorů R_1, R_2 .



Obrázek 18: Ekvivalentní obvod zatíženého děliče napětí dle *Théveninovy věty*

Vraťme se nyní k obvodu, který jsme řešili pomocí dřívějších metod (následující obrázek 19). Pojďme nyní určit napětí U_Z na zátěži R_Z s využitím Théveninovy věty.



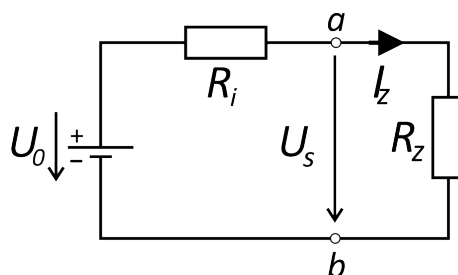
Obrázek 19: Zapojení dvou reálných zdrojů k zátěži

Postup řešení:

- 1) Ponecháme tedy větev s rezistorem R_Z a zbytek obvodu nahradíme ideálním zdrojem napětí U_0 a sériově zapojeným rezistorem R_i .
- 2) V ekvivalentním obvodu určíme vnitřní odpor R_i tak, že odpojíme zátěž (v našem případě rezistor R_Z) a napěťové zdroje U_{Z1}, U_{Z2} zkratujeme (jde o ideální zdroj). Odpor R_i pak vypočítáme jako odpor takto vzniklého obvodu vůči svorkám a, b .
- 3) Napětí U_0 určíme jako napětí mezi svorkami a, b při odpojené zátěži.
- 4) V ekvivalentním obvodu již známe R_i a U_0 , z toho můžeme určit hledané napětí U_S .

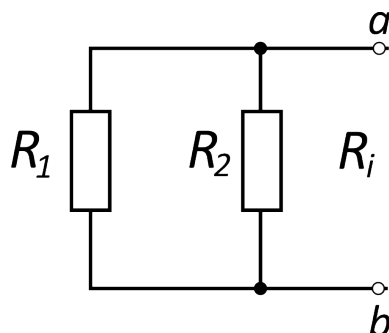
Řešení obvodu:

- 1) Dle Théveninovy věty nakreslíme ekvivalentní obvod (zajímá nás pouze část obvodu vpravo za svorkami a, b , proto ji zachováme a celou levou část obvodu nahradíme skutečným zdrojem napětí).



Obrázek 20: Ekvivalentní obvod dle Théveninovy věty

2) Spočteme vnitřní odpor R_i tak, že v obrázku 19 odpojíme zátěž (v našem případě rezistor R_Z) a napěťové zdroje U_{Z1}, U_{Z2} zkratujeme (jde o ideální zdroj). Obvod překreslíme:

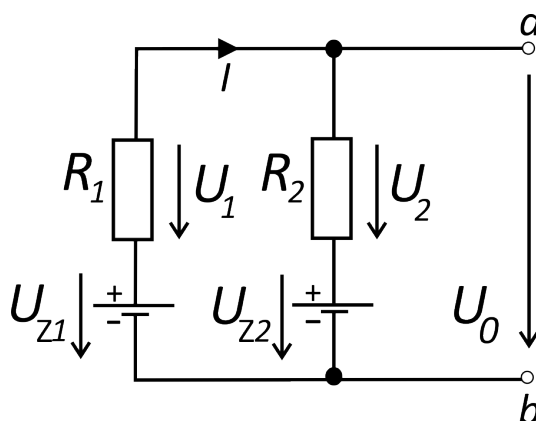


Obrázek 21: Vnitřní odpor

Rezistory R_1 R_2 jsou zapojeny paralelně. Hodnoty odporů rezistorů jsou $R_1 = 22 \Omega$ a $R_2 = 47 \Omega$. Vypočítáme odpor R_i :

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{22 \cdot 47}{22 + 47} = 15 \Omega.$$

3) Zbývá nám určit napětí U_0 na svorkách a, b . To získáme tak, že opět v obrázku 19 odpojíme zátěž R_Z a zdroje ponecháme.



Obrázek 22: Ideální zdroj napětí

Zadané hodnoty:

$$R_1 = 22 \Omega \quad R_2 = 47 \Omega \quad U_{Z1} = 7,7 \text{ V} \quad U_{Z2} = 5,2 \text{ V}.$$

Proud obvodem určíme:

$$I = \frac{U_{Z1} - U_{Z2}}{R_1 + R_2} = \frac{7,7 - 5,2}{22 + 47} = 0,036 \text{ A} = 36 \text{ mA}.$$

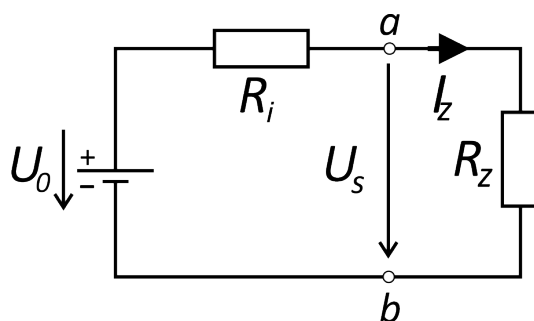
Napětí na rezistoru R_2 spočteme:

$$U_2 = R_2 I = 47 \cdot 0,036 = 1,69 \text{ V.}$$

Napětí U_0 nakonec určíme:

$$U_0 = U_{Z2} + U_2 = 5,2 + 1,69 = 6,9 \text{ V.}$$

4) V ekvivalentním obvodu dopočteme napětí U_S :



Obrázek 23: Ekvivalentní obvod dle *Théveninovy věty*

$$U_S = U_0 \frac{R_Z}{R_i + R_Z} = 6,9 \cdot \frac{220}{15 + 220} = 6,46 \text{ V.}$$

Svorkové napětí U_S nám vyšlo stejně jako při použití předchozích metod.

9 Praktická část

V teoretické části jsme se věnovali několika metodám řešení elektrických obvodů. Tyto metody jsme aplikovali na obvod, který byl tvořen dvěma zdroji napětí a třemi rezistory. Na obvod lze také nahlížet tak, že je tvořen dvěma skutečnými zdroji napětí a k ním připojenou zátěží.

Abychom mohli naše výpočty ověřit, rozhodli jsme se obvod postavit. Cílem praktické části je demonstrovat metody řešení elektrických obvodů.

Velmi důležitou částí bylo vymyslet, jak didakticky správně a efektivně tento obvod zkonstruovat. Hlavním záměrem bylo obvod postavit tak, aby si ho každý zájemce mohl sám rychle a levně vyrobit.

První úkol byl vybrat vhodné součástky, které v obvodu použijeme. Jelikož obvod není nijak složitý, stačilo šikovně zvolit odpory rezistorů a napětí zdrojů tak, abychom nemuseli přepínat rozsahy ampérmetrů a voltmetrů.

Druhým krokem bylo vybrat správný typ zdroje napětí. Potřebovali jsme takové zdroje, kterými může protékat proud oběma směry (nabíjení, vybíjení) a zároveň jsou snadno dostupné. Jako vhodnou volbu jsme vyhodnotili tužkové *NiMH* nabíjecí články, přičemž každý z nich má napětí 1,2 V. Články jsme umístili do pouzder po čtyřech a dvou kusech.

9.1 Popis konstrukce

Zapojení obsahuje 5 součástek (tři rezistory, dva zdroje napětí), přičemž každá z nich je umístěna na svém modulu. Modul je tvořen danou součástkou, destičkou ze smrkového dřeva a přístrojovými panelovými svorkami.

Kvůli rozměrům držáku článků a stabilitě modulu při zapojování více banánků do sebe byly zvoleny rozměry dřevěné destičky 9,5 cm × 6,7 cm, tloušťka destičky je 1 cm (byla k dispozici).

Panelové přístrojové svorky [13] jsou uchycené do dřevěné destičky pomocí matice, zapuštěné ze spodní strany. Otvor pro šroub panelové svorky byl vyvrtán vrtákem o průměru 5 mm. Zahloubení pro zapuštění matice do destičky bylo vyvrtáno ze spodní strany destičky vrtákem o průměru 8 mm. Šroub přístrojové panelové svorky byl zkrácen (uříznut) pilkou na železo tak, aby nevyčníval ze spodní strany destičky (viz obrázky 24 a 25).

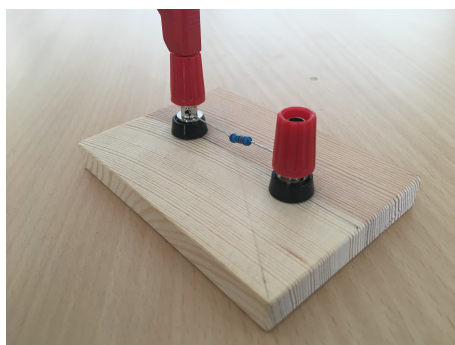


Obrázek 24: Rezistor v přístrojových svorkách

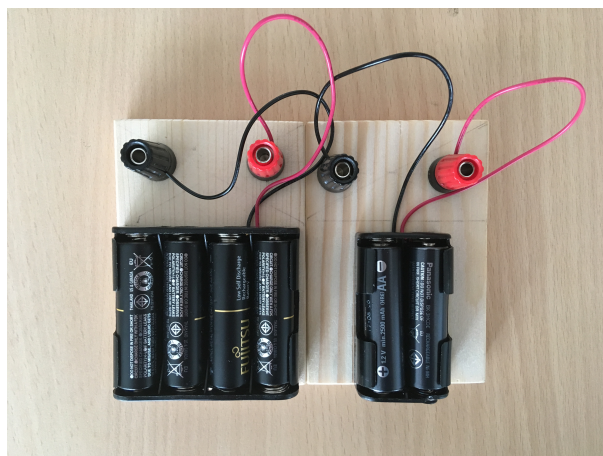


Obrázek 25: Zadní stěna modulu - uchycení svorek

Výhodou této konstrukce je, že rezistor či jinou součástku lze uchytnit do díry v panelové sorce jednoduchým zašroubováním svorky bez použití pájení. K propojování modulů pak použijeme běžné propojovací vodiče s banánky (obrázek 26).

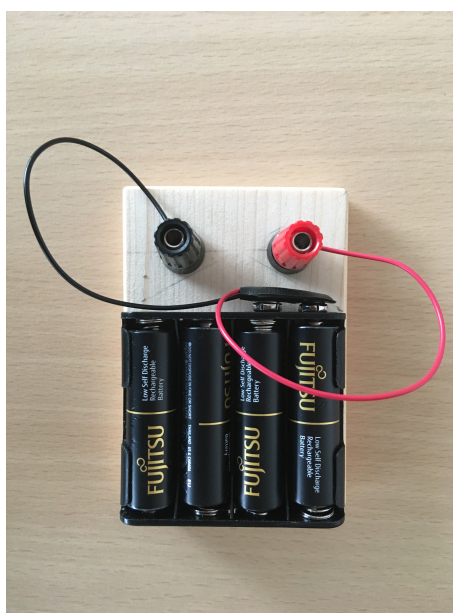


Obrázek 26: Rezistor v přístrojových svorkách s banánkem



Obrázek 27: Zdroj napětí U_{Z1}

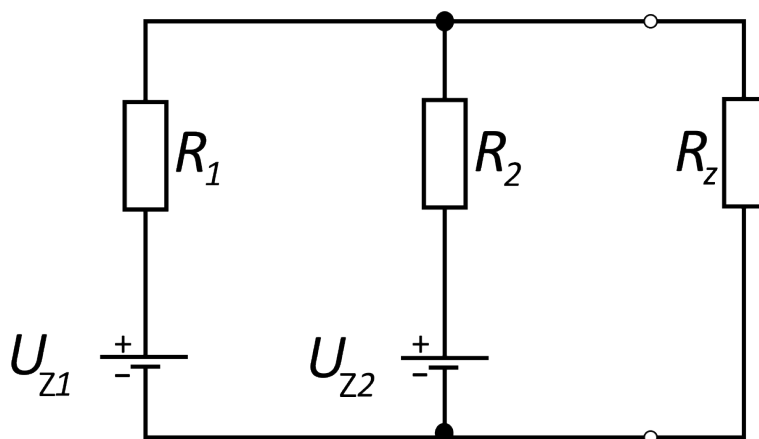
Zdroje napětí jsme vyrobili podobně, tužkové *NiMH* nabíjecí články jsme umístili do pouzder dvakrát po 4 článcích a jednou po 2 článcích. Pouzdra jsme připevnili k dřevěné destičce pomocí malých vrtů do dřeva, přičemž jsme si předtím předvrtali malinkou díрку, aby nedošlo k prasknutí dřevěné destičky. Destičku jsme opět opatřili přístrojovými panelovými svorkami, na které jsme přivedli pomocí drátků napětí vodiče držáku článku (obrázky 27, 28).



Obrázek 28: Zdroj napětí U_{Z2}

9.2 Zapojení

Pomocí výše popsaných modulů nyní prakticky ověříme teoretické výpočty z předchozích kapitol. Obvod zapojme dle obrázku 29, kde napětí zdrojů (změřená digitálním multimetrem) jsou $U_{Z1} = 8,03 \text{ V}$ a $U_{Z2} = 5,40 \text{ V}$. Odporů jednotlivých rezistorů jsou $R_1 = 22 \Omega$, $R_2 = 47 \Omega$ a $R_Z = 22 \Omega$.



Obrázek 29: Zapojení dvou reálných zdrojů k zátěži

Hodnoty proudů byly změřeny $I_1 = 56,5 \text{ mA}$, $I_2 = -27,1 \text{ mA}$ a $I_Z = 30,0 \text{ mA}$ (viz obrázek 30). Napětí zdrojů se mírně liší od hodnot použitých v teoretické části (odpovídají aktuálnímu stavu nabití akumulátorů). Přesto změřené proudy I_1 , I_2 a I_Z s přihlédnutím k rozdílu napětí zdrojů, odpovídají teoretickým hodnotám.

Použitím výše uvedených modulů můžeme také názorně demonstrovat princip metody superpozice. Elektrický obvod zapojíme dle obrázku 29. Poté odpojíme zdroj U_{Z1} (nahradíme ho zkratem) a změříme proudy v jednotlivých větvích. Zdroj zařadíme zpět do obvodu a zopakujeme předchozí krok s vyřazeným zdrojem U_{Z2} . Algebraický součet proudů z obou měření nám dává proudy zjištěné v úvodu této části. Podobně lze ukázat princip ostatních dříve uvedených metod řešení elektrických obvodů.



Obrázek 30: Obvod zapojený dle obrázku 29

9.3 Zkušenosti z používání

V průběhu praktického používání modulů došlo několikrát k nahodilému zkratu zdrojů. Následkem bylo poškození držáků článků - protavení plastových pouzder a přehřátí kontaktních pružinek (obrázky 31, 32).



Obrázek 31: Poškozený držák - protavení plastového pouzdra



Obrázek 32: Poškozený držák - přehřátí kontaktních pružinek

Proto jsme moduly zdrojů dodatečně opatřili pojistkovými držáky pro trubičkové pojistky. Pojistky jsme zvolili T/2A - stejné, jaké jsou použity pro ochranu proudových rozsahů multimetrů (obrázky 33, 34).



Obrázek 33: Zdroj napětí U_{Z1} vybavený pojistkou



Obrázek 34: Zdroj napětí U_{Z2} vybavený pojistkou

10 Závěr

V rámci této bakalářské práce vznikl na základě provedené rešerše učebnic nový studijní text popisující základní metody řešení elektrických obvodů.

V teoretické části práce byly nejdříve shrnuté a vysvětlené základní fyzikální pojmy a představené potřebné matematické operátory. Byl zde naznačený význam pojmů divergence a rotace vektorového pole. Rovněž byla uvedena rovnice kontinuity. To vše nám následně posloužilo k odvození Kirchhoffových zákonů k odvození Maxwellových rovnic.

Na jednoduchém kruhovém obvodu jsme pak ukázali mez platnosti druhého Kirchhoffova zákona pro střídavé proudy. Kirchhoffovy zákony jsme prakticky aplikovali na vhodně zvolený elektrický obvod, který jsme řešili i pomocí dalších metod - Metoda smyčkových proudů, Metoda uzlových napětí, Princip superpozice a Théveninova věta.

Poslední část práce popisuje jednoduše vyrobitelnou sadu modulů rezistorů a zdrojů pro použití se školními multimetry a standardními propojovacími vodiči s banánky. Tato sada nejen umožňuje ověřit teoretické výpočty z předchozích částí, ale také názorně demonstrovat princip superpozice a další popsané metody. V úplném závěru práce najdeme navíc návrhy na vylepšení původní sady modulů, které vyplynuly ze zkušenosti s používáním.

Reference

- [1] Metody řešení lineárních obvodů 1. *Sbírka řešených úloh* [online]. Praha: Katedra didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK [cit. 2018-4-17]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1812/metody-reseni-linearnich-obvodu-1>
- [2] RAUNER, KAREL ET AL *Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2004. 2 sv. ISBN 80-7238-210-1
- [3] ROJKO, MILAN ET AL *Fyzika kolem nás: fyzika 1 pro základní a občanskou školu: [žákovská verze]* 1. vyd. Praha: Scientia, 1995. [103] s. ISBN 80-85827-77-8
- [4] MACHÁČEK, MARTIN *Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000. 160 stran. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-186-8
- [5] RAUNER, KAREL ET AL *Fyzika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2006. 3 sv. ISBN 80-7238-525-9
- [6] ROJKO, MILAN ET AL *Fyzika kolem nás: fyzika 3 pro základní a občanskou školu* [učitelská verze]. Praha: Scientia, 1997. 89 s. ISBN 80-7183-102-6
- [7] MACHÁČEK, MARTIN *Fyzika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia* 2. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 160 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-220-1
- [8] LEPIL, OLDŘICH A ŠEDIVÝ, PŘEMYSL *Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus* Svazek 3 [hmatové písmo].]. Brno: Masarykova univerzita, Teiresiás, Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky, 2007. s. 553-764 tištěné a v Braillově písmu
- [9] BLAHOVEC, ANTONÍN *Elektrotechnika 1* Praha: Informatorium 2005. ISBN 80-7333-043-1
- [10] Nalítím džbán kreslený– stock ilustrace. In: *Depositphotos* [online]. USA, c2009-2018 [cit. 2018-4-2]. Dostupné z: <https://cz.depositphotos.com/57796007/stock-illustration-pouring-jug-cartoon.html>
- [11] SEDLÁK, BEDŘICH A ŠTOLL, IVAN *Elektřina a magnetismus. 2 opr. a rozš. vyd.* Praha: Academia, 2002. 632 s. ISBN 80-200-1004-1
- [12] JAREŠOVÁ, Miroslava. *Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku.* In: Fyzikální olympiáda [online]. Česká republika, c2002-2018 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>
- [13] Zdířka panelová 4mm červená K205. *GM Elektronik* [online]. Praha [cit. 2018-05-9]. Dostupné z: <https://www.gme.cz/zdirka-panelova-4mm-cervena-k205>