



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Šenar

Úlohy z mechaniky pro elektronickou sbírku řešených úloh

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2018

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svojí vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Daně Mandíkové, CSc. za pomoc při vypracování bakalářské práce, bez které bych se neobešel. Také bych chtěl poděkovat panu doc. RNDr. Zdeňku Drozdovi, Ph.D. za odborné konzultace. Ještě bych rád poděkoval paní RNDr. Marii Snětinové, Ph.D. za technické rady pro tvorbu úloh a obrázků v elektronické sbírce řešených úloh.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 8. 6. 2018

podpis

Název práce: Úlohy z mechaniky pro elektronickou sbírku řešených úloh

Autor: Jakub Šenar

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc., Katedra didaktiky fyziky

Abstrakt: Úkolem bakalářské práce bylo vytvořit úlohy z mechaniky pro elektronickou sbírku řešených úloh, konkrétně z tématické oblasti deformace kontinua a pružnost. Bylo vypracováno 16 strukturovaných úloh, 11 vysokoškolské obtížnosti, tři náročnější středoškolské a dvě středoškolské. Všechny úlohy obsahují zadání, zápis, rozbor, strukturované nápovědy, podrobné komentované řešení a odpověď.

Práce také obsahuje vymezení problematiky, cíl práce a strukturu práce. Nechybí přehled učiva, které se z daného tématu probírá na středních školách a ve vysokoškolském kurzu pro učitele fyziky na MFF UK. Zařazen je také teoretický úvod do problematiky deformací. Závěr shrnuje, čeho bylo v práci dosaženo. Příloha pak obsahuje ukázkou pěti vytvořených úloh. Součástí je i příloha v podobě CD, na kterém jsou všechny vytvořené úlohy.

Klíčová slova: mechanika, deformace kontinua a pružnost, úlohy, elektronická sbírka řešených úloh

Title: Problems from mechanics for electronic collection of solved problems

Author: Jakub Šenar

Department: Department of Physics Education

Supervisor: RNDr. Dana Mandíková, CSc., Department of Physics Education

Abstract: The assignment of the bachelor work was to create tasks from mechanics for an electronic collection of solved problems. The thematic field is deformation of continuum and elasticity from the point of view of a secondary school and the academic introductory course for physics teachers. 16 structured tasks were created. Eleven of them are on undergraduate difficulty level, three on advanced upper secondary school level and two on upper secondary school level. Each of the tasks includes an assignment, an analysis, structured hints, detailed commented solution and an answer.

The work also includes a defining of the issues, an aim of the work and its structure. There is no absent of an overview of curriculum which is discussed in the given topic at a secondary school and a university course for physics teachers at MFF UK, and a brief introduction of the electronic collection of solved problems. Theoretical introduction to deformation of continuum is also included. A conclusion will prove what was achieved in the work. A part of the work is also a supplement in the form of a CD with all created tasks.

Keywords: mechanics, deformation of continuum and elasticity, tasks, electronic collection of solved problems

Obsah

1. Úvod	1
1.1. Vymezení problematiky	1
1.2. Cíl práce	2
1.3. Struktura práce	2
2. Přehled učiva	4
3. Elektronická sbírka řešených úloh	5
4. Teoretický úvod – Hookův zákon	6
4.1. Deformace	6
4.2. Napětí	9
4.3. Rovnice rovnováhy	10
4.4. Hookův zákon pro izotropní látky	11
4.5. Tah	12
4.6. Čistý smyk	14
4.7. Torze kruhového válce	15
4.8. Ohyb	18
4.9. Poloha neutrální osy	21
5. Vlastní úlohy	24
5.1. Přehled zpracovaných úloh	24
6. Závěr	28

Seznam použité literatury	30
Příloha – Ukázka pěti zpracovaných úloh	31

1. Úvod

1.1. Vymezení problematiky

Pružnost a pevnost jsou jednou z největších problematik technicky zaměřených oborů jako jsou například strojírenství a stavebnictví. Úkolem pružnosti je matematicky popisovat deformace materiálů různých fyzikálních vlastností při působení vnějších sil. Zde se hojně aplikuje matematika, uplatňuje se zde velké množství různých matematických operací. Nejedná se tedy pouze o téma pro příslušné techniky, ale i o téma, ve kterém si mohou matematicky zaměřeni jedinci procvičit matematickou a mnohdy dosti abstraktní teorii. Například studenti při studiu diferenciálních rovnic nemusí hned tušit, že dnešní stavaři mostů by se bez nich neobešli. Možná pohled na nový Trojský most při cestě od budovy fakulty v pražské Troji byl důvodem, proč jsem se rozhodnul v bakalářské práci zaměřit na toto téma. Nutno je také dodat, že fyzici s kvalitním matematickým základem mají v této oblasti pro tuto problematiku mnohdy lepší schopnosti než technici, kteří teorii spíše jenom aplikují. Důležité také je, že pružnost není jen o fyzikálním zkoumání světa, ale je potřebná z hlediska bezpečnosti a ekonomiky. Například stavaři mají velkou zodpovědnost za to, aby každá konstrukce byla schopna odolávat vnějším vlivům, které se předpokládají vzhledem k její funkci. To znamená, že musí dobře znát vlastnosti používaných materiálů, a také dobře určit průběh napětí v konstrukci při daných vnějších vlivech. Avšak i uživatelé různých stavebních zařízení by měli vědět, jak a za jakých podmínek může docházet k nebezpečným deformacím a následným kolapsům. Měli by například tušit, že když stropní konstrukce bude vystavena vyšší teplotě, než bylo předpokládáno pro její funkci, vznikne v konstrukci nežádoucí napětí, které může způsobit nebezpečnou deformaci. Bezpečnost tedy stanovuje nějaké minimum pro funkci konstrukčních prvků. Pak je tu však ekonomická otázka. Žádný materiál pro konstrukce není obecně finančně zanedbatelný. Bylo by například ekonomicky velice nevýhodné stavět obvodové zdi rodinných domů o tloušťce jednoho metru z kamene. Když se podíváme na historické stavby, příkladem může být třeba Bazilika svatého Jiří na Pražském hradě z románského slohu, tak si můžeme všimnout poměrně velké tloušťky

kamenného zdiva. To je samozřejmě dáno tím, že tenkrát ještě nebyli stavaři schopni nějakých složitějších výpočtů, museli tedy používat jen svoje odhady a zkušenosti. Plýtvání materiálu tedy muselo být obrovské. Teprve až v 17. století fyzik Robert Hooke položil základy teorie pružnosti, která se hodně podepsala na moderní dobu.

1.2. Cíl práce

Cílem práce je dát základní představu, o čem teorie pružnosti a pevnosti je. Teoretická část je inspirována především učebnicí Klasická mechanika 2 [1]. Hlavním cílem práce je vybrat vhodné úlohy z dané oblasti a zpracovat je do elektronické sbírky řešených úloh, kde tato oblast dosud není pokryta. K úlohám pak vytvořit podrobná strukturovaná řešení, obrázky a vhodné nápovědy tak, aby vytvořené úlohy mohly být využívány pro samostudium a čtenáře vedly k aktivnímu přemýšlení. Úlohy jsou určeny zejména vysokoškolským studentům, některé jednodušší mohou využít i středoškoláci.

1.3. Struktura práce

První kapitola stručně uvádí, jaký je úkol pružnosti a pevnosti. Zabývá se tím, jaká byla moje motivace pro výběr daného tématu. Volně se zamýšlí nad užitečností teorie v praxi. Dále obsahuje cíl práce a její strukturu.

V druhé kapitole je obsažen stručný přehled toho, co se z teorie pevnosti a pružnosti dnes probírá na středních školách, a také na MFF UK ve studiu učitelství fyziky. Úkolem je dát představu, jak moc se dnes s daným učivem setkáme ve školách.

Představu o tom, co je elektronická sbírka řešených úloh, má udělat třetí kapitola. Je v ní popsána struktura řešených úloh, jejich počet, a také v jakých jazycích se dá sbírka užívat.

Čtvrtou kapitolu tvoří teoretický úvod do problematiky deformací. Na začátku je stručně popsán Hookův zákon ve středoškolském tvaru. Následující podkapitoly se zabývají deformací, napětím, rovnicí rovnováhy, Hookovým zákonem

pro izotropní látky, tahem, čistým smykem, torzí kruhového válce, ohybem a polohou neutrální osy. K odvozením jsou zde mnohdy připojeny obrázky, které mají pomoci k lepšímu porozumění. Teorie byla psána především podle [1], pouze podkapitola o poloze neutrální osy byla inspirována z [4]. Ovšem mnohokrát bylo použito zjednodušení, či menší změny v odvozování. V páté kapitole jsou uvedeny vlastní vytvořené úlohy a jejich charakteristika. Závěr v šesté kapitole se zaměřuje na náplň bakalářské práce. Je analyzováno, zda jsou splněny stanovené cíle, a shrnuto, čeho všeho bylo dosaženo. Dále je připojen přehled literatury.

Práce obsahuje jednu přílohu s ukázkou pěti vytvořených úloh. Všechny vytvořené úlohy jsou pak na přiloženém CD a v elektronické sbírce řešených úloh na www.reseneulohy.cz.

2. Přehled učiva

V této části uvádím stručný přehled učiva, které je probíráno k tématu pružnosti a pevnosti na středních školách a v rámci studia učitelství fyziky na MFF UK.

Na technicky zaměřených SŠ se z daného tématu probírají deformace, napětí, základní zákon pružnosti a pevnosti (Hookův zákon), napětí v tahu (tlaku), napětí vyvolané změnou teploty, napětí vyvolané vlastní tíhou, napětí ve smyku, torze, ohyb, kvadratický moment průřezu. Ve sbírce úloh [2], která je určena zejména pro obor strojírenství na SŠ, se předchozímu věnuje prvních pět kapitol. Další čtyři kapitoly, které se týkají staticky neurčitých nosníků, kombinací druhů deformace, teorie pevnosti, vzpěrnému napětí a periodickým změnám namáhání kovů, dále rozvíjejí danou oblast. Gymnázia se tomuto tématu již tolik nevěnují. V učebnici pro gymnázia [3] se deformaci pevného tělesa, normálovému napětí, a Hookovu zákonu pro pružnou deformaci v tahu lehce věnuje pátá kapitola.

Na MFF UK se pro učitelství fyziky podle sylabu Fyziky I probírají základy mechaniky kontinua. Jedná se o popis tenzoru deformace a tenzoru napětí, pružnost, Hookův zákon, smykovou deformaci a torzi. Podle sylabu Fyziky kondenzovaného stavu se probírá deformace krystalických látek, která zahrnuje například elastickou deformaci pro jednoosý tah a tlak, smyk, Hookův zákon a jeho zobecněný tvar, tenzor napětí, tenzor deformace, elastické konstanty a moduly.

3. Elektronická sbírka řešených úloh

Elektronická sbírka řešených úloh slouží k procvičování matematických a fyzikálních úloh. Sbíрка je určena především studentům úvodních kurzů na vysokých školách k prohlubování a opakování učiva, středoškolským studentům se zájmem o fyziku k rozšiřování a procvičování učební látky, v menší míře v ní lze nalézt i úlohy pro žáky základních škol. Struktura úloh je navržena tak, aby pomáhala čtenářům při samostudiu, vedla je k aktivnímu přístupu a pochopení dané úlohy. Každá úloha proto obsahuje nejen podrobné komentované řešení rozdělené do dílčích kroků, ale i další komentáře a zejména strukturované nápovědy. Uživatel se u dané úlohy zobrazí pouze zadání a další části si pak může postupně rozkrývat. Studentům je doporučeno, aby se snažili úlohu vyřešit nejprve sami, případně s využitím nápověd a pak se teprve podívali na řešení.

Sbíрка v současné době obsahuje přes 1030 řešených úloh z fyziky a přes 460 úloh z matematiky. Kromě české verze obsahuje i úlohy v angličtině a polštině.

Úlohy týkající se pružnosti a pevnosti sbírka dosud neobsahuje. Proto bylo úkolem bakalářské práce rozšířit ji o toto téma.

4. Teoretický úvod - Hookův zákon

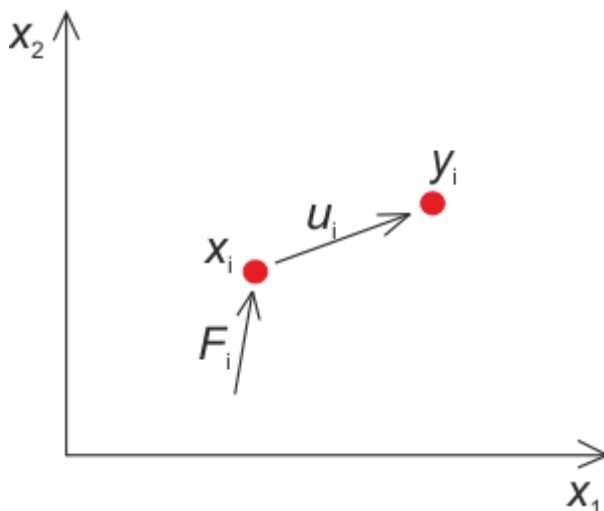
Hookův zákon udává vztah mezi napětím a deformací. Předpokládá jejich přímou úměrnost. Dobře popisuje chování pružných materiálů při malých deformacích. Na střední škole je Hookův zákon formulován takto: „Při pružné deformaci tahem je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení.“ Zapsáno matematicky ([3], s. 122):

$$\sigma_n = E\varepsilon.$$

My si ukážeme, jak vypadá v obecnějším tvaru, a rozebereme několik speciálních případů. Nejprve si blíže vymezíme pojmy deformace a napětí. Následující text je zpracován podle [1].

4.1. Deformace

Nechť je dáno spojitě těleso, pak toto těleso má nekonečně mnoho bodů, kterým můžeme přiřadit prostorové souřadnice x_i . Deformace znamená, že působením sil na těleso (to znamená na jednotlivé body tělesa) body obecně změni svoji polohu o posunutí u_i (to zde rozumíme vektorem) na souřadnice y_i . To je znázorněno na obrázku 1.



Obr. 1

Zde se neuvažuje souřadnice času t , tedy nás nezajímá rychlost deformace, která je zapotřebí například při výpočtech viskózních kapalin. Budeme dále uvažovat vektory nedeformovaného tělesa dx_i , jejichž velikosti jsou délky mezi dvěma dost blízkými body. Pro popis deformace elementárních délek není složité odvodit vztah (uvažuje se diferenciální okolí bodů)

$$dy_i dy_i - dx_i dx_i = 2\varepsilon_{jk} dx_j dx_k. \quad (1)$$

Z početních důvodů se používá rozdíl čtverců konečné a počáteční vzdálenosti bodů.

ε_{jk} je symetrický tenzor druhého řádu deformace, a pro malé deformace je

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right). \quad (2)$$

Odvození lze nalézt např. v [1].

Jestliže vektor dx_i má nenulovou pouze složku například dx_1 , pak pro $j = k = 1$ (2) přibližně udává relativní změnu délky vektoru dx_i . Při tomto vybraném případě (1) přepíšeme na

$$dy_i dy_i - dx_1 dx_1 = 2\varepsilon_{11} dx_1 dx_1. \quad (3)$$

Tento výraz můžeme přepsat na

$$(\sqrt{dy_i dy_i} - \sqrt{dx_1 dx_1})(\sqrt{dy_i dy_i} + \sqrt{dx_1 dx_1}) = 2\varepsilon_{11} dx_1 dx_1. \quad (4)$$

Stačí uvažovat malé deformace, takže lze psát

$$\sqrt{dy_i dy_i} + dx_1 \cong 2dx_1. \quad (5)$$

Připomínám, že v odmocnině je skalární součin vektorů, takže nelze psát jen dy_i .

Pak můžeme (4) napsat ve tvaru

$$(\sqrt{dy_i dy_i} - dx_1)2dx_1 = 2\varepsilon_{11} dx_1 dx_1. \quad (6)$$

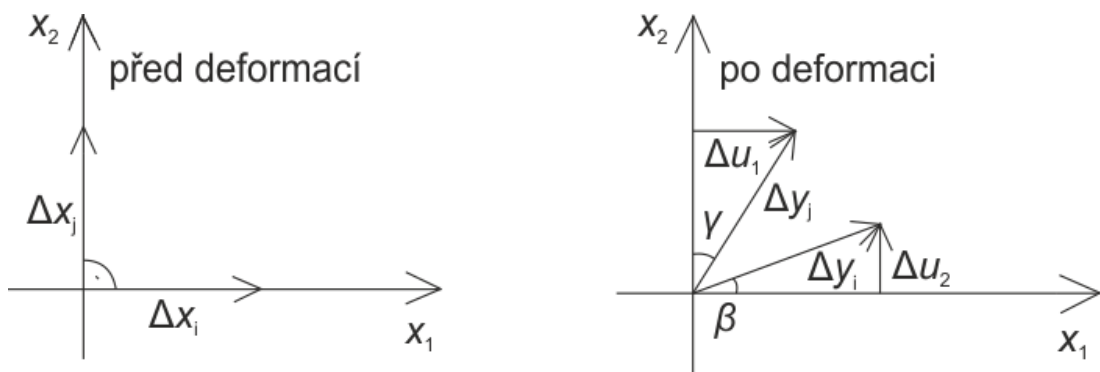
Z toho již je zřejmá rovnice relativního prodloužení

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sqrt{dy_i dy_i} - dx_1}{dx_1}. \quad (7)$$

Uvažujme kartézskou soustavu s osami 1 a 2, a že nenulové jsou pouze parciální derivace $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. Pak dochází ke změně pravého úhlu mezi $dx_i = (dx_1, 0, 0)$ a $dx_j = (0, dx_2, 0)$ o úhel α (úhel smyku). Uvažujme, že mezi dx_i a dy_i je úhel β , a mezi dx_j a dy_j je úhel γ . Příslušná geometrie je zobrazena na obrázku 2. Úhel α je pak součtem úhlů β a γ . $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ můžeme položit rovno $\tan \beta$, podobně $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \tan \gamma$. Protože se v Hookově zákoně uvažují malé deformace, můžeme položit $\tan \beta \cong \beta$ a $\tan \gamma \cong \gamma$, a pro příslušný případ (2) přepsat na

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\alpha. \quad (8)$$

To znamená, že nediagonální členy tenzoru malých deformací jsou rovny polovičnímu úhlu smyku mezi danými osami.



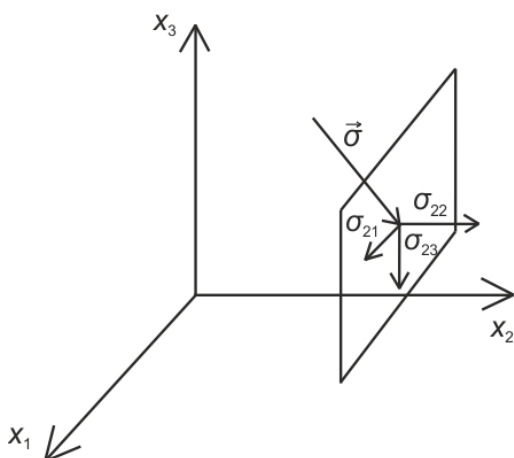
Obr. 2

4.2. Napětí

Symetrický tenzor druhého řádu se používá též pro napětí. Napětí se určuje jakožto síla působící na plochu, přitom důležité nejsou pouze velikosti, ale i orientace síly vzhledem k ploše. Uvažujeme-li kartézskou soustavu souřadnic s určitým bodem, na který působí vektor napětí $\vec{\sigma}$, pak tento vektor lze rozložit do třech složek vzhledem ke kladně orientované ploše kolmé k první ose (normála je ve směru osy), totéž k plochám kolmých k ostatním osám. Jedná se o rozklad vektoru napětí na tři vzájemně kolmé vektory, kdy jeden je kolmý k ploše, ostatní dva v ní leží. Vektor napětí je pak jejich vektorovým součtem. Na obrázku 3 je vidět rozklad vektoru napětí vůči rovině kolmé k druhé ose. Celkově se tedy dostává devět složek tenzoru, které se značí σ_{ij} . Například složka σ_{21} znamená vektor, který je určen plochou kolmou k ose 2, a má stejný nebo opačný směr osy 1. Z podmínky rovnováhy pro bod (lze si představit jako nekonečně malý objem ohraničený vhodnými plochami) není složité určit vztah (sčítá se v něm přes všechna i)

$$\sigma_j = \sigma_{ij}n_i, \quad (9)$$

kde σ_j jsou složky vektoru $\vec{\sigma}$ a n_i jsou složky normály plochy, vzhledem ke které se napětí určuje. Odvození lze nalézt např. v [1]. Také je v [1] ukázáno pomocí podmínky rovnováhy momentu sil, že tenzor musí být symetrický, to znamená $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.



Obr. 3

4.3. Rovnice rovnováhy

Budu uvažovat, že všechny hmotné body látky jsou během působení sil v klidu. Můžeme odvodit rovnici rovnováhy pro všechny body spojitého kontinua, která při výpočtech deformací při napětí musí vždy být splněna. Zde zanedbáme objemové síly. Mějme hodně malý kvádr o rozměrech s_1 , s_2 , a s_3 , kde dolní indexy značí orientaci ve směru určité osy. Pak máme šest stran kolmých k osám, jejichž normály jsou orientovány směrem ven od kvádru. Při této volbě stran je napětí na nich popsáno tenzorem napětí. Složky tenzoru napětí na stranách, jejichž normály jsou kladně orientované, značme σ_{ij} , a pro ostatní strany σ_{ij}^* . Pak pro směr první osy při rovnováze kvádru platí (užije se zde jen principu superpozice sil a podmínky silové rovnováhy)

$$(\sigma_{11} - \sigma_{11}^*)s_2s_3 + (\sigma_{21} - \sigma_{21}^*)s_1s_3 + (\sigma_{31} - \sigma_{31}^*)s_1s_2 = 0. \quad (10)$$

Napětí můžeme uvažovat jako spojitou funkci, také můžeme uvažovat s_1 jako interval. Lze tedy použít matematickou větu o střední hodnotě. Povrch kvádru uvažujeme na dosti malém okolí hmotného bodu takovém, že se změna napětí na s_1 již příliš nemění. Proto ve vztazích

$$(\sigma_{11} - \sigma_{11}^*) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} s_1, (\sigma_{21} - \sigma_{21}^*) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} s_2, (\sigma_{31} - \sigma_{31}^*) = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} s_3 \quad (11)$$

můžeme derivace uvažovat v hmotném bodě, ve kterém rovnováhu určujeme. Dosazením vztahů (11) do (10) získáme po vykrácení objemu

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} = 0. \quad (12)$$

Zobecníme-li (12) i na ostatní souřadnice, pak můžeme psát

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (13)$$

Význam (13) si lze představit třeba tak, že když budeme nějakou tyč podélně namáhat napětím, a tyč bude v rovnováze a v klidu, pak napětí ve všech bodech tyče

bude stejné. Pokud bychom neuvažovali hmotné body v klidu, pak bychom pouze na pravou stranu rovnice (13) dosadili součin objemové hustoty a druhé derivace posunutí (zrychlení).

4.4. Hookův zákon pro izotropní látky

V úlohách budeme uvažovat látky, které mají stejné vlastnosti v různých směrech. Tyto látky se nazývají izotropní. Uvažuje se u nich nezávislost mezi objemovou a tvarovou deformací. Budeme-li uvažovat původní objem dV_0 a objem po deformaci dV , vrátíme-li se k (7), a nebudeme-li uvažovat tvarové deformace (místo $\sqrt{dy_i dy_i}$ lze psát dy_1 , protože dx_1 pouze změni velikost), potom můžeme psát

$$dV = dy_1 dy_2 dy_3 = (\varepsilon_{11} dx_1 + dx_1)(\varepsilon_{22} dx_2 + dx_2)(\varepsilon_{33} dx_3 + dx_3). \quad (14)$$

Deformace se uvažují malé, to znamená, že součiny diagonálních členů tenzoru deformace se mohou zanedbat, potom z (14) můžeme přejít k rovnici

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \quad (15)$$

Součet všech diagonálních členů tenzoru nám dává relativní objemovou změnu. Předpokládáme-li lineární závislost napětí na deformaci, a nezávislost mezi objemovou a tvarovou deformací, je třeba napětí zapsat jako lineární kombinaci určitých členů. Jeden člen je nenulový pouze pro objemovou deformaci, ovšem nulový pro tvarovou, kdy uvažujeme deformace úhlů (souvisí s nediagonálními členy tenzorů). Druhý člen je naopak nenulový pro tvarovou deformaci, ale nulový pro čistě objemovou deformaci bez změny tvaru (například deformace krychle na jinou krychli, nikoliv na kvádr). Tato lineární kombinace pak obsahuje požadovanou nezávislost mezi objemovou a tvarovou deformací. Té lze dosáhnout vztahem

$$\sigma_{ij} = A \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right) + B \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right), \quad (16)$$

kde A, B jsou materiálové konstanty. V (16) lze vidět použití vztahu (15) pro objemové změny. Pro čistě objemovou deformaci (změna krychle na krychli o jiném objemu) jsou diagonální členy tenzoru stejné, proto při této deformaci člen s konstantou B zmizí. Jednoduchými úpravami a substitucemi se z (16) můžeme dostat k rovnici, která se bere jako zobecněný Hookův zákon pro izotropní látky

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (17)$$

ve kterém jsou použity takzvané Laméovy koeficienty. Odvození lze nalézt v [1].

4.5. Tah

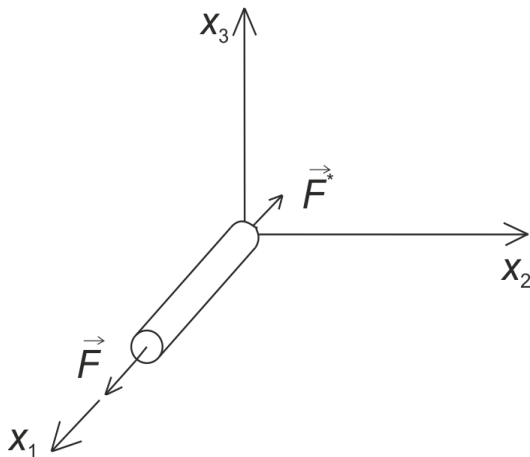
Uvažujme tyč s konstantním průřezem, jejíž jeden konec je připevněn v počátku kartézské soustavy souřadnic, a jejíž osa leží například v první ose. Dále uvažujme sílu F působící na druhý konec tyče ve směru její osy, tedy ve směru první osy, a že tyč je v rovnováze (první konec je připevněn, takže na tyč působí dvě stejně veliké a opačné síly). Vybraná situace je znázorněna na obrázku 4, kde síla F^* je způsobena připevněním prvního konce. Složky tenzoru napětí lze považovat za konstantní v každém bodě tyče. Z podmínek rovnováhy (9) potom vychází, že jedinou nenulovou složkou tenzoru napětí je člen σ_{11} . Tento člen se udává roven $\pm \frac{F}{S}$, kde kladné znaménko náleží tahu, záporné náleží tlaku. Plocha průřezu tyče S , která leží kolmo k ose, se v Hookově zákoně pro malé deformace uvažuje před deformací. Totiž po deformaci se změna plochy bere jako zanedbatelná. Za předchozích podmínek se ze vztahu (17) snadno určí, že složky tenzoru deformace ε_{ij} jsou nulové pro případ $i \neq j$, to znamená, že zde nedochází ke smyku. Z (17) také plyne rovnost $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$. Pro $i = j = 2$ v (17) můžeme uvažovat rovnici

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{22}. \quad (18)$$

Z (18) můžeme určit poměr deformací

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = -2 \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}, \quad (19)$$

který je v převrácené a absolutní hodnotě znám jako Poissonův poměr. Známe-li Laméovy koeficienty a relativní prodloužení tyče, pak můžeme určit i příčné zúžení. Že se v případě tahu tyč zúží je poznat ze záporného znaménka v rovnici (19).



Obr. 4

Pro tah v Hookově zákoně se jako směrnice mezi deformací a napětím používá Youngův modul pružnosti E . Pokud uvažujeme napětí ve směru některé souřadnicové osy, pak můžeme psát

$$E \varepsilon_{ii} = \sigma_{ii}. \quad (20)$$

Budeme-li chtít z Lámeových koeficientů přejít k Youngovu modulu pružnosti, pak vztahem

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (21)$$

Podrobnější postup lze nalézt v [1].

4.6. Čistý smyk

Uvažujme kvádr v kartézské soustavě tak, že každá stěna kvádru je orientovaná kolmo k příslušné ose kartézské soustavy. Dále uvažujme sílu F působící na horní stěnu o ploše S kolmé k druhé ose, a že síla je orientovaná ve směru první osy. Navíc uvažujme ještě sílu opačně orientovanou a působící na protilehlou stěnu. Pak je-li kvádr volný, tedy nepůsobí-li na něj žádné jiné síly, tak dojde pouze k otočení kvádru bez deformací pravých úhlů. Jestliže kvádr uvedeme do stavu rovnováhy, k žádnému otočení nedojde, ovšem vlivem napětí vzniklých ve stěnách kolmých k první ose dojde k deformaci pravých úhlů v rovině určené první a druhou osou. Situace je znázorněna na obrázku 5. Jediné nenulové složky tenzoru napětí jsou podle (9)

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{F}{S}. \quad (22)$$

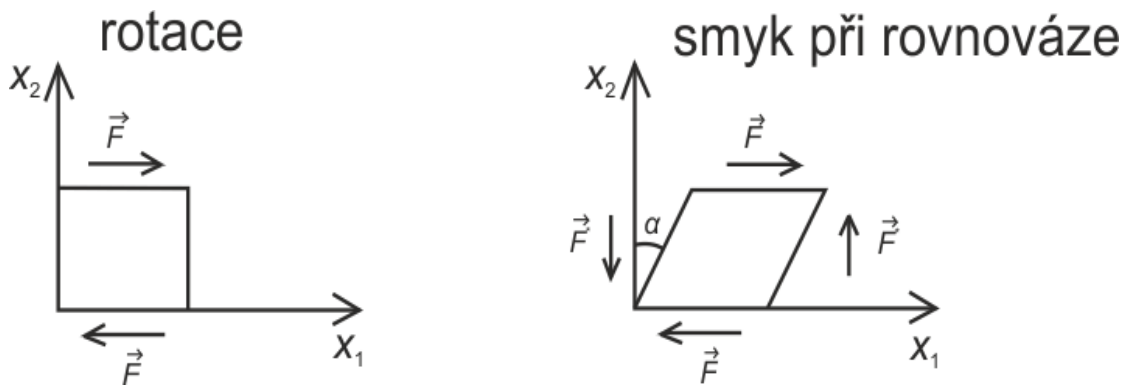
Zde se jedná o rovnováhu momentových sil působících na kvádr, proto nás zde zajímají pouze příslušné symetrické složky. Právě z rovnováhy momentových sil plyne symetrie tenzoru napětí. Pro složku σ_{12} má Hookův zákon (17) tvar

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad (23)$$

Pomocí (8) můžeme (23) upravit na tvar

$$\sigma_{12} = \mu\alpha, \quad (24)$$

kde α je úhel smyku.



Obr. 5

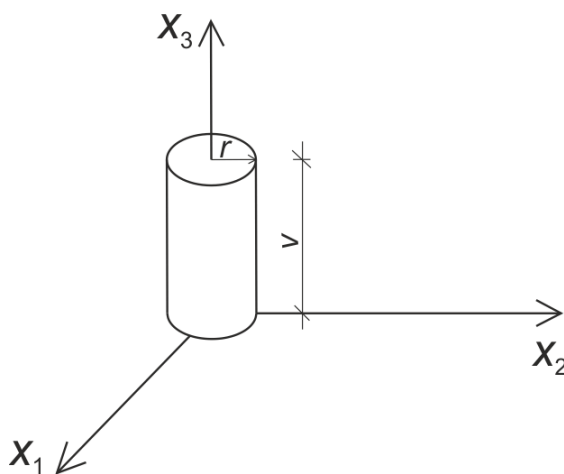
Používaný modul pružnosti ve smyku G (obdoba s modulem pružnosti v tahu) je zde identický s μ . Dosazením ze (22) můžeme psát

$$\alpha = \frac{1}{G} \frac{F}{s}. \quad (25)$$

Dostali jsme tedy pro čistý smyk vztah mezi úhlem smyku a napětím od síly F .

4.7. Torze kruhového válce

Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic, a kruhový válec délky v a poloměru r , jehož osa leží ve třetí ose kartézské soustavy, tak jak je zobrazeno na obrázku 6.



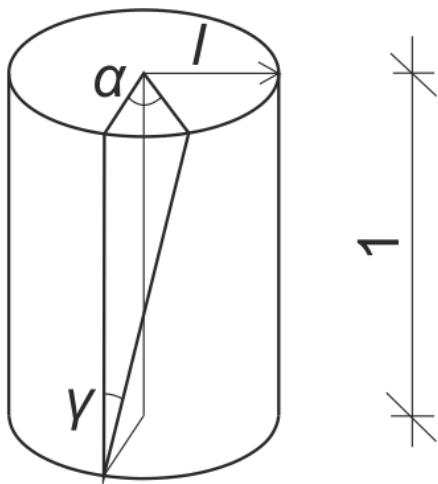
Obr. 6

Torze kruhového válce vzniká při takovém momentovém silovém působení na válec (v rovnováze), kdy jsou nenulové pouze složky σ_{31} a σ_{32} tenzoru napětí. To znamená smyková napětí na plochách kolmých k třetí ose. Uvažujeme-li dva kruhové průřezy válce kolmé k ose vzdálené od sebe o jednotkovou délku, pak při tomto působení dojde mezi nimi k pootočení o úhel α . Celkové pootočení β mezi podstavami (vzdálenost mezi nimi je v) lze pro malé deformace uvažovat jako lineární funkci závislou na v se směrnicí α , tedy

$$\beta = \alpha v. \quad (26)$$

Tenzor je symetrický (uvažuje se rovnováha), dochází tedy ke smyku i na plochách rovnoběžných se třetí osou (složky σ_{13} a σ_{23}). To si můžeme představit tak, že na plášti povedeme přímkou rovnoběžnou s osou válce, pak se po deformaci tato přímkou posune o úhel γ . Když si představíme dosti malý obdélník na povrchu pláště válce, a jeho strany budou například rovnoběžné s osami 1 a 3, pak zde máme analogickou situaci jako v předchozí kapitole o čistém smyku, tentokrát s úhlem smyku γ a se složkami napětí σ_{31} a σ_{13} . Uvažujme, že úhel γ roste lineárně od osy se vzdáleností l (ovšem pro dost malá l). Mějme malý válec s jednotkovou výškou a poloměrem l . Pro představu by měl posloužit obrázek 7. Představme si na hraně například horní podstavy (na kružnici poloměru l) pevný bod. Po deformaci se podstavy od sebe natočí o úhel α , libovolná přímkou na povrchu válce rovnoběžná s osou o úhel γ . Pak pevný bod se posune po kruhovém oblouku o délce αl . Deformace se uvažují malé, kruhový oblouk bude blízký k úsečce. Pak se ale k délce tohoto oblouku dá dost přiblížit délkou 1. γ . Takže můžeme psát

$$\gamma = \alpha l. \quad (27)$$

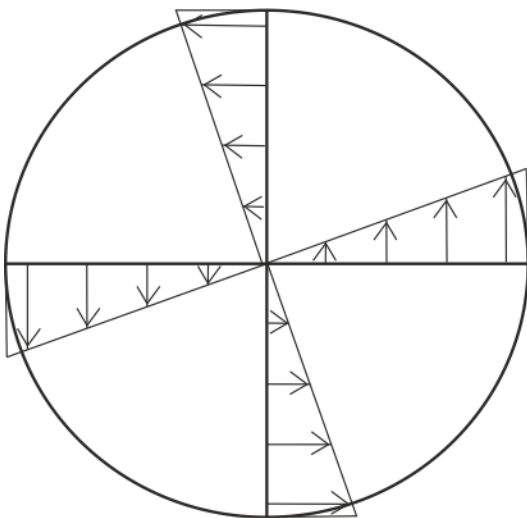


Obr. 7

S použitím rovnic (8), (17) a (27), kdy uvažujeme úhel smyku γ , můžeme velikost napětí σ (máme zde sférickou symetrii rozložení napětí v kolmém průřezu válce, proto je lepší uvažovat velikost) napsat ve tvaru

$$\sigma = \mu \alpha l. \quad (28)$$

Při rozepsání složek tenzoru napětí se lze přesvědčit, že jsou splněny podmínky rovnováhy. Průběh napětí v kolmém řezu válce ukazuje obrázek 8.



Obr. 8

Protože napětí (28) vzniká při působení silového momentu podle osy válce, můžeme vypočítat vztah mezi velikostí momentu M a velikostí úhlu β . Moment od elementární plošky dS v podstavě válce celkové plochy S můžeme zapsat vztahem

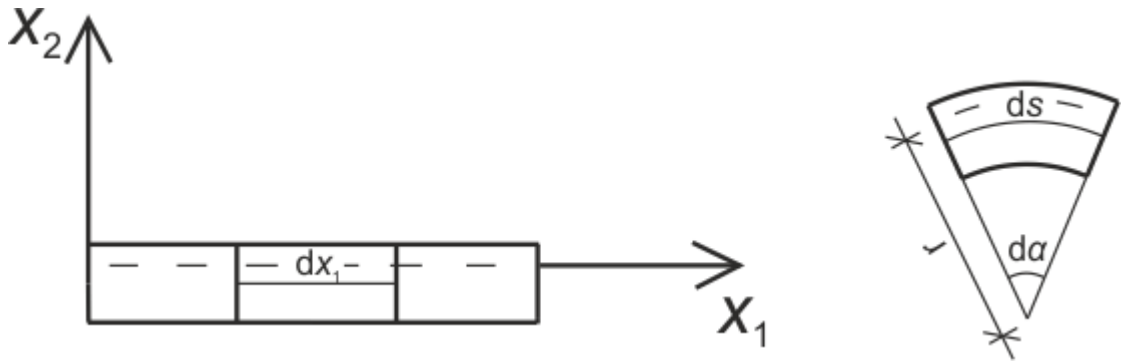
$$dM = \sigma l dS. \quad (29)$$

Celkový moment je integrací přes celou plochu, tedy

$$M = \int (\mu \alpha l) l dS = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\mu \beta l^3}{v} dl d\varphi = \frac{\mu \pi r^4}{2v} \beta. \quad (30)$$

4.8. Ohyb

Ohyb vzniká, když na nosník působí vnější momentové síly, a nosník se dostane do rovnováhy působením vnitřních napětí. Pro výpočty ohybů nosníků se používá zjednodušení, při kterém se uvažuje, že průřezy rovinné před deformací jsou rovinné i po deformaci. Také se uvažuje pouze podélná deformace, tedy že ostatní složky tenzoru deformace jsou nulové, jestliže nosník umístíme do směru některé z os. Při momentovém působení sil se ve zjednodušení neuvažuje smyk. Při ohybu se podél nosníku nachází osa, jejíž délka zůstává po deformaci stejná jako před deformací. Tato osa se nazývá neutrální. V závislosti na tvaru ohybu dochází nad neutrální osou k tahu nebo tlaku, pod neutrální osou je tomu naopak. Můžeme brát jen dva rozměry pro dost tenký nosník (tenký ve směru třetí osy). Mějme tedy osu x_1 obsahující neutrální osu a osu x_2 po směru výšky nosníku. Berme část nosníku mezi dvěma dost blízkými kolmými průřezy. Po deformaci se dost malá podélná část nosníku dx_1 změní na část kruhového oblouku ds . Na obrázku 9 je znázorněna příslušná geometrie (neutrální osa je čárkovaně).



Obr. 9

V případě neutrální osy, tedy pro $x_2 = 0$, se velikost zachovává. Ovšem pro x_2 různé od nuly dochází ke změně délky. Pokud bereme pro neutrální osu poloměr r kruhového oblouku, a úhel $d\alpha$ mezi oběma průřezy po deformaci, pak můžeme deformaci ε_{11} (relativní změna délky elementu) zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds - dx_1}{dx_1} = \frac{(r+x_2)d\alpha - rd\alpha}{rd\alpha} = \frac{x_2}{r}. \quad (31)$$

V závislosti na orientaci osy x_2 a na tvaru ohybu (tah nebo tlak) bude výraz (31) kladný, nebo záporný. S použitím (20) můžeme přejít k napětí

$$\sigma_{11} = E \frac{x_2}{r}. \quad (32)$$

Momentové působení vnějších sil M na nosník závisí na souřadnici x_1 . V každém kolmém průřezu o ploše S je moment sil konstantní, tedy na každý bod (lze uvažovat jako dS) průřezu působí stejný moment dM . Každý bod kolmého průřezu o ploše S bude v rovnováze, když moment od napětí v bodě kolem bodu neutrální osy vyrovná moment vnějších sil působících na bod. Podmínku rovnováhy můžeme zapsat ve tvaru

$$dM = x_2 \sigma_{11} dS = E \frac{x_2^2}{r} dS. \quad (33)$$

Pak tedy

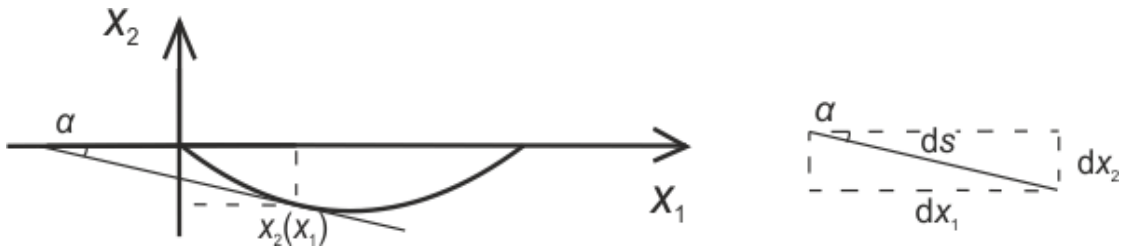
$$M = \frac{E}{r} \int_S x_2^2 dS. \quad (34)$$

Závislost M na x_1 je ve (34) dána tím, že r závisí na x_1 . Dále je třeba si vyjádřit poloměr r . Uvažujme, že nosník je již deformovaný, a že neutrální osa je funkcí x_2 závislé na proměnné x_1 . Pro každý bod neutrální osy můžeme uvažovat úhel α , který leží mezi první osou a tečnou neutrální osy procházející bodem. Z geometrie a z toho, že deformace jsou malé, můžeme uvažovat úhel α jako derivaci funkce $x_2 = x_2(x_1)$. Geometrii ukazuje obrázek 10. Potom

$$d\alpha = d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) = \left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) dx_1. \quad (35)$$

Pak ale

$$ds = r d\alpha = r \left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) dx_1. \quad (36)$$



Obr. 10

Ze (36) můžeme vyjádřit převrácenou hodnotu poloměru r

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) \frac{dx_1}{ds} = \left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) \frac{dx_1}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}}. \quad (37)$$

Hodně malý kruhový oblouk se podobá úsečce, proto lze ds vyjádřit pomocí Pythagorovy věty jako $\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$. Protože deformace uvažujeme malé, zanedbáme ještě člen dx_2^2 . Pak

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} \right). \quad (38)$$

Dosazením (38) do (34) dostáváme již rovnici popisující ohyb nosníku, tedy

$$\left(\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} \right) = \frac{M}{E \int_S x_2^2 dS}. \quad (39)$$

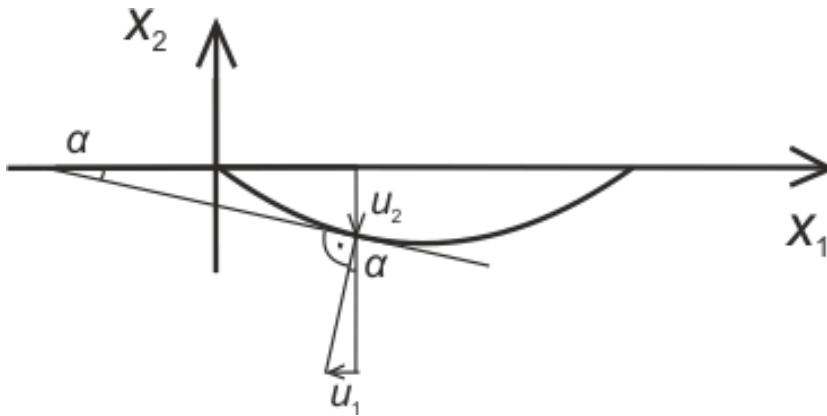
Zde x_2 je x_2 uvažované ve (34) (dva odlišné souřadné systémy).

4.9. Poloha neutrální osy

Zde se bude uvažovat jen případ, kdy na nosník působí síly pouze ve směru osy x_2 tak, že je nenulový jen moment orientovaný ve směru osy x_3 (síly procházejí těžištěm průřezu, aby nedošlo k momentu kolem osy x_1), a osa x_1 vede podél nosníku a těžištěm konstantního průřezu. Úhel α při ohybu zde budeme uvažovat jako

$$\alpha = \frac{du_1}{dx_2} = - \frac{du_2}{dx_1}. \quad (40)$$

Vztah (40) plyne z toho, že velikost úhlu mezi osou nosníku před deformací a její tečnou po deformaci je stejná jako velikost úhlu mezi kolmým průřezem před a po deformaci. Ke geometrické představě by mohl posloužit obrázek 11 (pozor, obrázek zde však může trochu zavádět, jelikož zde neuvažujeme x_2 funkcí x_1). Znaménko je dáno orientací posunutí.



Obr. 11

Můžeme odvodit

$$u_1 = -\frac{du_2}{dx_1}x_2 + C(x_1). \quad (41)$$

Napětí se uvažuje pouze σ_{11} , pak tedy s uvážením (20) a (2) ($\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1}$, není nutné zde psát v parciálním tvaru) a tím, že v této části nebereme x_2 jako funkci x_1 (při odvozování ohybové rovnice se x_2 uvažovalo jako funkce popisující ohyb), platí

$$\sigma_{11} = -E \frac{d^2u_2}{dx_1^2}x_2 + E \frac{dC}{dx_1}. \quad (42)$$

Z rovnice (42) nyní potřebujeme vyjádřit členy $\frac{d^2u_2}{dx_1^2}$ a $\frac{dC}{dx_1}$ (závisí pouze na x_1).

Máme tedy dvě neznámé, pak potřebujeme dvě lineárně nezávislé rovnice. Můžeme psát

$$M_3 = \int \sigma_{11}x_2 dS = -E \frac{d^2u_2}{dx_1^2} \int x_2^2 dS + E \frac{dC}{dx_1} \int x_2 dS, \quad (43)$$

$$F_1 = 0 = \int \sigma_{11} dS = -E \frac{d^2u_2}{dx_1^2} \int x_2 dS + E \frac{dC}{dx_1} S. \quad (44)$$

V předchozích rovnicích si bylo třeba uvědomit, že kolmý průřez není funkcí x_1 , z integrálu bylo tedy možné vytknout členy závislé pouze na x_1 . Člen $\int x_2 dS$ musí být nulový, protože průřez má těžiště na ose x_1 . Pak i člen $\frac{dC}{dx_1}$ podle (44) musí být nulový. Po úpravě rovnice (43) a dosazením do (42) dostáváme (v našem speciálním případě namáhání nosníku)

$$\sigma_{11} = \frac{M_3}{\int x_2^2 dS} x_2. \quad (45)$$

Nejenže ze vztahu (45) můžeme znát průběh napětí, ale také nám říká, že jestli síly působí na nosník tak, že vzniká pouze silový moment vůči ose x_3 , pak neutrální osa (případ, kdy $\sigma_{11} = 0$) prochází těžištěm průřezu. S uvážením orientace soustavy souřadné může být záporné znaménko. Pro obecnější případ by postup byl stejný, jen o trochu manuálně pracnější. To lze nalézt ve [4].

5. Vlastní úlohy

Do sbírky jsem zpracoval celkem 16 úloh. Čtyři úlohy jsem převzal z [5], sedm úloh jsem zařadil na doporučení doc. Drozda, který je využívá v rámci cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu. Pět úloh jsem vytvořil sám. Jedenáct úloh je vysokoškolské obtížnosti, tři náročnější středoškolské a dvě středoškolské.

5.1. Přehled zpracovaných úloh

Prodloužení železného drátu vlastní tíhou (2091)¹, obtížnost VŠ; úloha z [5]:
Příklad na tahovou deformaci, který ovšem vyžaduje znalost určitých integrálů.

Vodorovně zavěšená tyč (2092), obtížnost SŠ+; úloha z [5]: Úloha, ve které si čtenáři procvičí výpočty pro podmínky rovnováhy, a vzorec pro tahové napětí. Zde se očekává, že čtenář bude aktivně přemýšlet při jednodušším odvození rovnice pro určitou vzdálenost.

Změna průměru drátu při jeho protažení (2093), obtížnost SŠ+; úloha z [5]:
Typický příklad na vztah mezi podélnou deformací a příčnou deformací při namáhání drátu tahem. Předpokládá se zde znalost Poissonovy konstanty.

Zahřátí ocelové tyče (2094), obtížnost SŠ; úloha z [5]: V této úloze se předpokládá znalost délkové teplotní roztažnosti. Čtenář si může uvědomit souvislost mezi teplotní roztažností a tahovou deformací při příslušných podmínkách (oba konce tyče jsou pevně vetknuty).

Kubický krystal (2145), obtížnost VŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: Úloha pro anizotropní látku. Zde je nejprve třeba sestavit příslušné rovnice. Pak čtenář musí za aktivního přemýšlení rovnice zjednodušit podle dané fyzikální

¹ Číslo, pod kterým lze úlohu vyhledat ve sbírce na www.reseneulohy.cz.

situace, a následně určit hledaný vztah. Zde je připojena teorie a značení pro anizotropní látky.

Kubický krystal a hydrostatický tlak (2146), obtížnost VŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: V této úloze čtenář sestaví příslušné rovnice pro danou anizotropní látku, a pak bude muset přemýšlet, jak se při zadaných podmínkách ze soustavy rovnic dostane ke vztahu pro objemovou deformaci. Zde je připojena teorie a značení pro anizotropní látky.

Tvrdoost oceli podle Brinela (2147), obtížnost SŠ+; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: V tomto příkladu si čtenář může zapřemýšlet u geometrie. Jakmile příslušnou geometrii zvládne, bude mu stačit zapsat vztah podle Brinela, a dále určit hledaný průměr otisku.

Válcový vzorek polykrystalického materiálu (2148), obtížnost VŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: Zde se očekává, že čtenář ví, co znamenají deformační rychlost, smluvní deformace a smluvní napětí. V tomto příkladu se už objevuje časový průběh, kdy se vzorek postupně prodlužuje. Je zde nutná znalost určitých integrálů.

Změna objemu železné tyče (2150), obtížnost VŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: V této úloze je třeba uvážit, jak se mezi sebou liší deformace ve směrech rozměrů kvádrů, jestliže je zde tahové namáhání, a jak je pomocí zadaných veličin vyjádřit. Čtenáři pak bude stačit znát vztah pro objemovou deformaci.

Roztrhnutí železného drátu vlastní tíhou (2151), obtížnost SŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: Tady je klíčové určit místo s největším napětím a tíhovou silou. Objevuje se zde pojem mez pevnosti.

Poissonova konstanta (2152), obtížnost VŠ; úloha ke cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu: Tato úloha je spíše teoretickým odvozením. Klade si velké nároky na čtenářovo aktivní přemýšlení. Ovšem úloha může výrazně vylepšit čtenářovy schopnosti v dané oblasti. Kromě tahového napětí uvažuje i smykové napětí. Hodně se zde vyskytuje geometrie. Řešení je uvažováno pro malé deformace.

Je přidáno ještě druhé řešení ve formě poznámky, kde se vychází ze zobecněného Hookova zákona pro izotropní látky.

Krychle na dně pod vodou (2155), obtížnost VŠ; autorská úloha: Jde o typický příklad pro určení objemové deformace. Lehce obsahuje i zákony hydrostatiky. Vyžaduje znalost objemových integrálů. Řešitel příkladu si může kromě manuálního použití některých vzorců zapřemýšlet, proč vůbec použít určitý vzorec, tedy jaký je průběh napětí v objemu a jaké jsou příslušné deformace. Navíc si připomene význam integrálů ve fyzice.

Deformace kvádru (2156), obtížnost VŠ; autorská úloha: Úloha obsahuje kromě samotného výpočtu určité deformace i pohybové zákony. Je v ní i malá kontrolní teoretická otázka. V mnoha úlohách může podmínka rovnováhy působit pouze jako formalita, proto není ke škodě to připomenout trochu aktivnější formou. Dále si řešitel zapřemýšlí, jaké síly působí na dané těleso. Také si procvičí vzorec pro smykovou deformaci.

Napětí na okraji válce (2157), obtížnost VŠ; autorská úloha: Úloha se zabývá odvozením vztahu mezi zadaným napětím a pootočením horní podstavy kolmého kruhového válce. Postup řešení je stejný jako část odvození v teoretické části, jen trošku více zjednodušený a přizpůsobený pro konkrétní příklad. S ohledem na malé deformace zde vystačí jednoduchá geometrie a jedna jednoduchá rovnice pro smykovou deformaci.

Ohyb nosníku (2158), obtížnost VŠ; autorská úloha: Úloha je o průběhu deformace nosníku při určitém, trošku nestandardním, zatížení. Požadavkem pro řešení je znalost integrálů. Kromě toho, že si uživatelé mohou procvičit standardní postup při řešení těchto typů příkladů, mohou být k řešení motivováni trochou matematiky.

Napětí na průřezu nosníku (2159), obtížnost VŠ; autorská úloha: Úloha obsahuje určení momentového průběhu, kvadratického momentu průřezu a průběhu napětí na kolmém průřezu pomocí vhodných vzorců. Snad každý si dovede intuitivně představit, že například nosník obdélníkového tvaru se prohne více, když ho zatížíme ve směru kratší strany obdélníku, než když ve směru delší strany. Zde se bude moci přesvědčit, že to je fyzikálně podloženo. Dále se uživatel může podívat na to, jak

v konkrétním případě vypadá průběh napětí na kolmém průřezu, tedy kde je tah a kde tlak, kde je napětí největší, a jakou má velikost.

6. Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vybrat vhodné úlohy z oblasti deformace kontinua a pružnosti a zpracovat je do elektronické sbírky řešených úloh, kde tato oblast dosud není pokryta. K úlohám pak vytvořit podrobná strukturovaná řešení, obrázky a vhodné nápovědy tak, aby vytvořené úlohy mohly být využívány pro samostudium a čtenáře vedly k aktivnímu přemýšlení.

Nejprve bylo třeba se seznámit s technickým řešením sbírky řešených úloh a zadáváním úloh do databáze. Bylo nutné si aspoň trochu osvojit HTML kód, také kód LATEX. Dále bylo třeba se naučit pracovat v programu Corel kvůli tvorbě obrázků do sbírky.

Dále jsem zmapoval tematickou oblast deformace kontinua a pružnosti z hlediska výuky na SŠ a na MFF UK pro učitele fyziky. To bylo pro SŠ učiněno pomocí sbírky řešených úloh [2] a učebnice [3]. Zjištěno bylo, že například na strojírenských oborech se dané téma hojně probírá, na gymnáziích už jen to nejzákladnější, to znamená tah a tlak v Hookově zákoně pro SŠ. Podle sylabu se na MFF UK ve studiu učitelství fyziky v předmětu Fyzika I dané téma probírá, ale jen dosti stručně. Dále se látka v určité míře nachází v předmětu Fyzika kondenzovaného stavu, kde se jedná o anizotropních materiálech, kdežto zde se většinou uvažují jen izotropní látky. V dosavadním obsahu elektronické sbírky řešených úloh příklady z této oblasti chyběly.

V práci uvádím i stručný teoretický úvod do problematiky deformací. Při jeho zpracování jsem vycházel zejména z publikací [1] a [4]. Odvození jsem se snažil trochu zjednodušit a doplnit obrázky pro lepší pochopení. Teorii mohou využít též studenti technických vysokých škol jako základní přípravu pro předměty zabývající se pružností a také studenti středních škol, kteří se zajímají o tuto problematiku a zvládají základy diferenciálního a integrálního počtu. Pro elektronickou sbírku řešených úloh jsem zpracoval celkem 16 úloh. Čtyři úlohy jsem převzal z [5], dalších sedm je využíváno na cvičení z Fyziky kondenzovaného stavu. Pět úloh jsem vytvořil sám. Ke dvěma úlohám, které se týkají kubických krystalů, je ve sbírce ještě připojena příslušná teorie.

Vybrané úlohy byly v elektronické sbírce řešených úloh zpracovány tak, aby vždy obsahovaly zadání, zápis, rozbor, nápovědy, řešení a na konec odpověď. Zadání jsem

volil tak, aby bylo co nejkratší, a přesto jednoznačné. K zadání je často připojen obrázek, který má nejen graficky znázornit zadanou situaci, ale také zlepšit estetickou stránku a zpříjemnit uživatelům čas trávený u úloh. Rozbor byl dělán tak, aby se v něm zamýšlelo nad příslušnou teorií, a zároveň nastínil strategii správného řešení. Náповěda již navádí ke konkrétním krokům v řešení. Každá úloha pak obsahuje podrobné komentované řešení. Je dbáno na to, aby byla vždy zřejmá cesta z jednoho kroku do následujícího. Řešení jsou často doprovázena obrázky.

Výsledkem práce je tedy šestnáct úloh z oblasti deformace kontinua a pružnosti zpracovaných v elektronické podobě včetně vhodných obrázků a nápověd, které se neopakují ve svých hlavních myšlenkách. Úlohy mohou využívat k samostudiu a k aktivnímu přemýšlení studenti vysokých a středních škol.

Seznam použité literatury

[1] HAVRÁNEK A. *Klasická mechanika II. Kontinuum*. Praha: Karolinum, 2003

[2] ŠÁMAL O. *Mechanika. Pružnost a pevnost. Sbíрка řešených úloh*. Úvaly: ALBRA, 2006

[3] BARTUŠKA K., SVOBODA E. *Molekulová fyzika a termika*. Praha: Prometheus, 2010

[4] ŠEJNOHA J., BITTNAROVÁ J. *Pevnost a pružnost*. Praha: ČVUT, 1996

[5] MANDÍKOVÁ D., ROJKO M. *Soubor úloh z mechaniky pro studium učitelství. I. část. Interní materiál*. Praha: MFF UK, 1994

Příloha – Ukázka pěti zpracovaných úloh

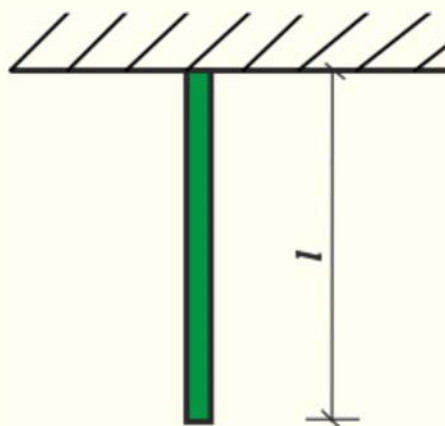
Všechny zpracované úlohy jsou na www.reseneulohy.cz a na přiloženém CD.

Sbírka řešených úloh

Prodloužení železného drátu vlastní tíhou

Úloha číslo: 2091

Určete velikost celkového prodloužení železného drátu, které způsobí vlastní tíha. Předpokládejte, že drát má konstantní průřez a je dlouhý 200 m. Uvažujte pružnou deformaci.



<http://reseneulohy.cz/>

Zápis

$$S = \text{konst}$$

průřez drátu

$$l = 200 \text{ m}$$

délka drátu

Z tabulek:

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$$

hustota železa

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

Youngův modul pružnosti železa v tahu

$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

tíhové zrychlení

$$\Delta l = ?$$

prodloužení drátu

Rozbor

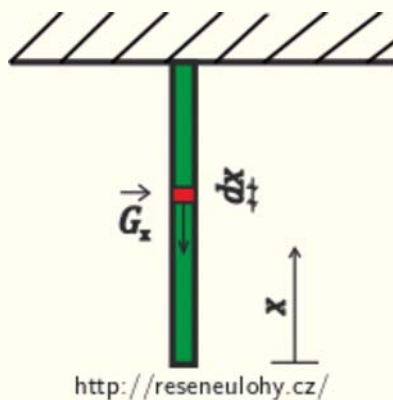
Zatížení drátu se po jeho délce mění a tedy i napětí v něm. Nejvíce je zatížena část nahoře pod místem upevnění, za kterou táhne celý zbytek drátu. Nejméně je zatížená část na dolním volném konci drátu. Představíme si, že je drát rozdělený na malé tenké kousky. Napětí v takovém malém kousku již můžeme považovat za konstantní. Prodloužení každého takového kousku určíme pomocí Hookova zákona a všechna prodloužení pak posčítáme.

Nápověda

Vyznačte si na drátu jeden element o tloušťce dx . Napište, jak velkou silou na něj působí část visící pod ním a vyjádřete tahové napětí v tomto kousku drátu.

Pomocí Hookova zákona určete relativní prodloužení kousku drátu a pak i jeho absolutní prodloužení. Posčítejte pak prodloužení všech kousků po celé délce drátu.



Řešení

Na element ve vzdálenosti x od konce drátu působí tíhová síla o velikosti:

$$G_x = m_x g = \rho S x g. \quad (1)$$

Tahové napětí získáme jako podíl tíhové síly a průřezu drátu:

$$\sigma_x = \frac{G_x}{S} = \rho x g. \quad (2)$$

Tahové napětí v jednotlivých elementech můžeme považovat za konstantní. Relativní prodloužení elementu pak určíme pomocí Hookova zákona.

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (3)$$

Dále můžeme ze (2) dosadit do (3):

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\rho x g}{E}. \quad (4)$$

Ze (4) určíme absolutní prodloužení jednoho elementu:

$$\Delta dx = \frac{\rho x g}{E} dx. \quad (5)$$

Celkové prodloužení drátu je pak součtem všech prodloužení jednotlivých elementů:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho x g}{E} dx = \frac{\rho g l^2}{2E}. \quad (6)$$

Po číselném dosazení do (6) máme:

$$\Delta l = \frac{7,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 200^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} \text{ m} = 7,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Odpověď

Velikost celkového prodloužení drátu je:

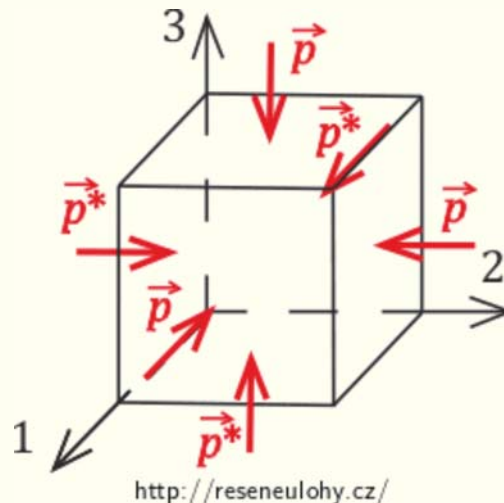
$$\Delta l = 7,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Sbírka řešených úloh

Kubický krystal a hydrostatický tlak

Úloha číslo: 2146

Kubický krystal je podroben hydrostatickému tlaku. Ukažte, v jakém vztahu je stlačitelnost krystalu a modul objemové pružnosti k elastickým konstantám. Krystal uvažujte jako dost malou krychli, a tlak berte ve všech třech směrech stejný.



Zápis

 $s_{ij}; i, j = (1; 2; 4)$
 $K = ? \text{ Pa}$
 $\gamma = ? \text{ Pa}^{-1}$

elastické konstanty

modul objemové pružnosti

stlačitelnost

Teorie a značení

V Hookově zákoně pro anizotropní látku používáme soustavu rovnic:

$$\varepsilon_{xx} = s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{zx} + s_{16}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_{yy} = s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + s_{23}\sigma_{zz} + s_{24}\tau_{yz} + s_{25}\tau_{zx} + s_{26}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_{zz} = s_{31}\sigma_{xx} + s_{32}\sigma_{yy} + s_{33}\sigma_{zz} + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{zx} + s_{36}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{yz} = s_{41}\sigma_{xx} + s_{42}\sigma_{yy} + s_{43}\sigma_{zz} + s_{44}\tau_{yz} + s_{45}\tau_{zx} + s_{46}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{zx} = s_{51}\sigma_{xx} + s_{52}\sigma_{yy} + s_{53}\sigma_{zz} + s_{54}\tau_{yz} + s_{55}\tau_{zx} + s_{56}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{xy} = s_{61}\sigma_{xx} + s_{62}\sigma_{yy} + s_{63}\sigma_{zz} + s_{64}\tau_{yz} + s_{65}\tau_{zx} + s_{66}\tau_{xy},$$

kde

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$$

jsou tahová napětí,

$$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

jsou smyková napětí,

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$$

jsou normálové deformace,

$$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$$

jsou smykové deformace, a

$$s_{ij}$$

jsou elastické konstanty.

Tenzorem napětí zde rozumíme:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Tenzor je symetrický, to znamená že platí

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Stačí nám tedy uvažovat pouze členy

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$$

Tenzorem deformace je:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

I tento tenzor je symetrický, takže

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz}.$$

Máme tedy celkově šest členů pro deformaci

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}.$$

Soustavu rovnic můžeme uvažovat i inverzně, tedy složky tenzoru napětí lze napsat lineárními vztahy:

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{zx} + C_{16}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_{yy} = C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\gamma_{yz} + C_{25}\gamma_{zx} + C_{26}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_{zz} = C_{31}\varepsilon_{xx} + C_{32}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{34}\gamma_{yz} + C_{35}\gamma_{zx} + C_{36}\gamma_{xy},$$

$$\tau_{yz} = C_{41}\varepsilon_{xx} + C_{42}\varepsilon_{yy} + C_{43}\varepsilon_{zz} + C_{44}\gamma_{yz} + C_{45}\gamma_{zx} + C_{46}\gamma_{xy},$$

$$\tau_{zx} = C_{51}\varepsilon_{xx} + C_{52}\varepsilon_{yy} + C_{53}\varepsilon_{zz} + C_{54}\gamma_{yz} + C_{55}\gamma_{zx} + C_{56}\gamma_{xy},$$

$$\tau_{xy} = C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{64}\gamma_{yz} + C_{65}\gamma_{zx} + C_{66}\gamma_{xy},$$

kde

$$C_{ij}$$

jsou elastické moduly (moduly pružnosti).

Rozbor

Krychle se zde uvažuje dost malá na to, aby se tlak mohl brát ze všech stran konstantní. Není zde žádné smykové působení a jsou zde stejné vlastnosti ve všech třech směrech. Z matice elastických konstant tak dostaneme tři rovnice pro deformace. Pomocí deformací vyjádříme relativní objemovou změnu a z ní pak hledanou stlačitelnost.

Nápověda

Připomeňte si, jak je definovaná stlačitelnost a čemu je roven modul objemové pružnosti.

Vyjádřete si přechod od napětí k deformacím pomocí příslušné matice elastických konstant. Neuvažujte zde rovnice pro úhlové deformace. Ve všech třech směrech budou podmínky stejné, takže všechna tři tahová napětí lze označit stejným tlakem, a budou zde hrát roli pouze dvě elastické konstanty. Získáte tři rovnice pro deformace. Použijte dále vztah mezi deformacemi a relativní objemovou změnou. Pak už lze vyjádřit stlačitelnost a v převrácené hodnotě i modul objemové pružnosti.

Řešení

Stlačitelnost je daná vztahem:

$$\gamma = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}. \quad (1)$$

Pro modul objemové pružnosti platí:

$$K = \frac{1}{\gamma}. \quad (2)$$

Ze symetrie krystalu plyne, že zde stačí uvažovat pouze tři elastické konstanty:

$s_{11}, s_{12}, s_{44}.$

Poznámka: jako matici přechodu od složek tenzoru napětí do složek tenzoru deformace můžeme pro kubický krystal uvažovat:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix}.$$

Hookův zákon pro kubický krystal má tedy tvar:

$$\varepsilon_{xx} = s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{12}\sigma_{zz}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{yy} = s_{12}\sigma_{xx} + s_{11}\sigma_{yy} + s_{12}\sigma_{zz}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{zz} = s_{12}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{11}\sigma_{zz}, \quad (5)$$

$$\gamma_{yz} = s_{44}\tau_{yz}, \quad (6)$$

$$\gamma_{zx} = s_{44}\tau_{zx}, \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = s_{44}\tau_{xy}. \quad (8)$$

Tečná napětí jsou nulová:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$$

Krychli uvažujeme dost malou na to, abychom napětí působící na stěny kubického krystalu mohli brát za konstantní. Také zde uvažujme, že napětí je ve všech třech směrech stejné. Složky napětí v prvních třech rovnicích pak můžeme označit jako tlak p . Musíme ještě uvažovat záporné znaménko, jelikož jde o tlak, nikoliv tah.

Pak:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

Z (3), (4), (5) dostáváme:

$$\varepsilon_{xx} = -p(s_{11} + 2s_{12}), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{yy} = -p(s_{11} + 2s_{12}), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{zz} = -p(s_{11} + 2s_{12}). \quad (11)$$

Pro objemovou deformaci při počátečním objemu V_0 platí:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (12)$$

Pravou stranu vztahu (12) můžeme získat sečtením rovnic (9), (10) a (11), takže získáme rovnici:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3p(s_{11} + 2s_{12}). \quad (13)$$

Tlak p je v podstatě tou změnou, kterou jsme potřebovali pro změnu původního objemu. Takže ještě můžeme (13) trochu upravit na:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3\Delta p(s_{11} + 2s_{12}). \quad (14)$$

Pro stlačitelnost pak podle (1) dostáváme:

$$\gamma = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} = 3(s_{11} + 2s_{12}). \quad (15)$$

Modul objemové pružnosti K je jen převrácenou hodnotou stlačitelnosti γ , pak tedy:

$$K = \frac{1}{3(s_{11} + 2s_{12})}.$$

Poznámka: Kdybychom chtěli K vyjádřit pomocí elastických modulů C , pak platí:

$$C_{11} + 2C_{12} = \frac{1}{(s_{11} + 2s_{12})},$$

a tedy

$$K = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12}).$$

Odpověď

Stlačitelnost kubického krystalu při působení hydrostatického tlaku vzhledem k elastickým konstantám je:

$$\gamma = 3(s_{11} + 2s_{12}).$$

Pro modul objemové pružnosti platí:

$$K = \frac{1}{3(s_{11} + 2s_{12})}.$$

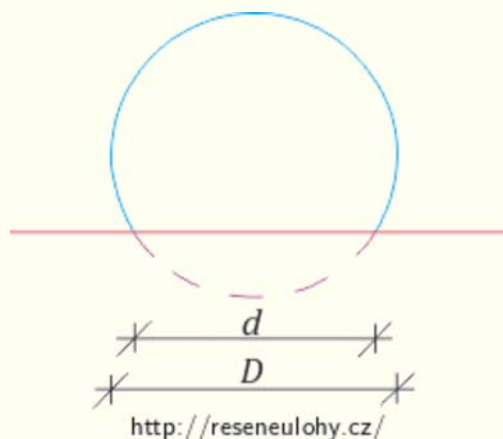
Sbírka řešených úloh

Tvrдост oceli podle Brinela

Úloha číslo: 2147



Tvrдост oceli podle Brinela je 450. Jaký je průměr otisku, byla-li zkouška provedena kuličkou o průměru 5 mm při zatížení 2700 N?



Poznámka

Johan Augustus Brinell byl švédský inženýr, který přišel s metodou pro určení tvrdosti materiálu statickou zkouškou. Ta probíhá tak, že ocelová kulička působením síly proniká do zkoumaného materiálu. Důsledkem toho vzniká v materiálu otisk. Tvrдост pak můžeme určit pomocí poměru zatížení na kuličku a plochou vrchlíku otisku. Tvrдост je udána v $\text{kg} \cdot \text{mm}^{-2}$.

Zápis

$$H_B = 4500 \text{ Nmm}^{-2}$$

$$D = 5 \text{ mm}$$

$$F = 2700 \text{ N}$$

$$d = ? \text{ mm}$$

tvrdost podle Brinela

průměr kuličky

zatížení při zkoušce

průměr otisku

Rozbor

Tvrдост oceli podle Brinela se bere jako podíl mezi silou, kterou kuličku tlačíme kolmo na povrch oceli, a plochou vrchlíku kuličky, která na povrchu oceli zůstane jako otisk. Budeme tedy potřebovat vyjádřit plochu vrchlíku ne v závislosti na jeho výšce, ale jeho průměru a tedy i průměru otisku.

Nápověda

Připomeňte si vztah pro obsah vrchlíku. Využijte Thaletovu kružnici k vyjádření obsahu vrchlíku v závislosti na jeho průměru. Pak si napište vztah pro tvrdost a vyjádřete z něj hledaný průměr.

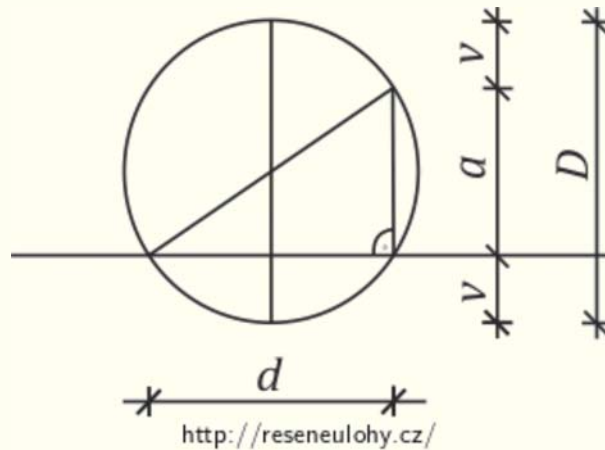
Řešení

Pro obsah vrchlíku platí vztah:

$$S = \pi Dv.$$

Otisk kuličky si můžeme představit jako vrchlík koule. Proto bude dobré si zavést ještě výšku vrchlíku v a také a tak, aby platilo (viz obrázek):

$$D = 2v + a. \quad (1)$$



Když použijeme vlastnost Thaletovy kružnice, jak je tomu na obrázku, a Pythagorovu větu, pak můžeme a napsat ve tvaru:

$$a = \sqrt{D^2 - d^2}. \quad (2)$$

Ze (2) dosadíme do (1), pak:

$$D = 2v + \sqrt{D^2 - d^2}. \quad (3)$$

Ze (3) vyjádříme v :

$$v = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right). \quad (4)$$

Pak už můžeme určit obsah vrchlíku:

$$S = \pi Dv = \frac{\pi D}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right). \quad (5)$$

Vztah pro tvrdost podle Brinela je:

$$H_B = \frac{F}{S} = \frac{2F}{\pi D \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)}. \quad (6)$$

Rovnici (6) můžeme upravit na:

$$D - \sqrt{D^2 - d^2} = \frac{2F}{\pi D H_B}. \quad (7)$$

Dále ještě můžeme upravit na:

$$D^2 - d^2 = D^2 - \frac{4F}{\pi H_B} + \frac{4F^2}{\pi^2 D^2 H_B^2}. \quad (8)$$

Nyní nám už zbývá pouze vyjádřit z (8) průměr otisku d :

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi H_B} - \frac{4F^2}{\pi^2 D^2 H_B^2}}. \quad (9)$$

Můžeme už tedy dosadit, a vypočítat:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 2700}{\pi \cdot 4500} - \frac{4 \cdot 2700^2}{\pi^2 \cdot 5^2 \cdot 4500^2}} \text{ mm} = 0,871 \text{ mm}.$$

Odpověď

Průměr otisku je:

$$d = 0,871 \text{ mm}.$$

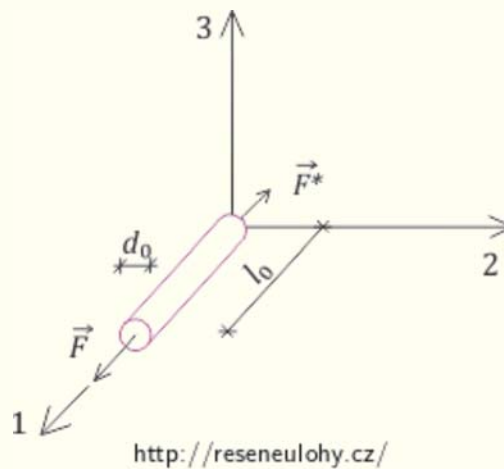
Sbírka řešených úloh

Válcový vzorek polykrystalického materiálu

Úloha číslo: 2148



Válcový vzorek polykrystalického materiálu byl deformován jednoosým tahem. Počáteční délka vzorku byla 50 mm, průměr 6 mm. Deformační rychlost byla $3,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Po 20 minutách deformování byla deformační síla 5,655 kN. Vypočítejte relativní a skutečnou deformaci a smluvní (tzv. inženýrské) a skutečné napětí po 20 minutách deformování vzorku. Poissonovo číslo uvažujte 0,5.



<http://reseneulohy.cz/>

Zápis

$$l_0 = 50 \text{ mm}$$

$$d_0 = 6 \text{ mm}$$

$$\dot{\epsilon}_0 = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$F = 5,655 \text{ kN}$$

$$\mu = 0,5$$

$$\epsilon_r = ?$$

$$\epsilon_T = ?$$

$$\sigma_i = ? \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = ? \text{ MPa}$$

počáteční délka vzorku

počáteční průměr vzorku

deformační rychlost

deformační síla po 20 minutách

deformování

Poissonovo číslo

relativní deformace po 20 minutách

skutečná deformace po 20 minutách

smluvní napětí po 20 minutách

skutečné napětí po 20 minutách

Rozbor

Relativní deformaci po 20 minutách určíme ze známé rychlosti deformace a času. Relativní deformace uvažuje jen stav po 20 minutách, nikoliv děj, při kterém se délka postupně mění. Jestliže se tyč nějaké původní délky prodlouží o elementární délku, to znamená dost malou délku, pak při dalším prodloužení o další elementární délku je pro elementární relativní deformaci pro tuto část třeba uvažovat už změněnou původní délku. Pro zohlednění tohoto děje se používá skutečná deformace. Tu můžeme získat jako součet všech elementárních relativních deformací při celkovém prodloužení.

Smluvní napětí je napětí vztažené k původnímu průřezu vzorku. Pro skutečné napětí je třeba uvažovat průběh změny průměru průřezu vzorku analogicky jako průběh změny délky u skutečné deformace.

Nápověda

Stanovte při zadané deformační rychlosti relativní deformaci po 20 minutách. Relativní deformace zde znamená relativní prodloužení tyče, tak můžete určit i koncovou délku tyče po 20 minutách. Pro skutečnou deformaci ve vztahu pro relativní deformaci uvažujte prodloužení jen o elementární délku, to znamená hodně malou délku. Jinými slovy diferencujte vztah relativní deformace. Určitým integrálem od počáteční do koncové délky přes tento diferencovaný vztah již dostanete skutečnou deformaci. V integrálu uvažujte, že se délka postupně při zatěžování mění. Smluvní (inženýrské) napětí je jen klasický podíl síly a počátečního průřezu tyče. Pro skutečné napětí uvažujte deformaci průměru průřezu tyče podobně jako u skutečné deformace. Dále využijte Poissonovo číslo, které udává vztah mezi zúžením a prodloužením tyče. Nakonec dopočtete průměr průřezu tyče po 20 minutách a skutečné napětí.

Řešení

Relativní deformaci můžeme přímo určit ze zadaných údajů o deformační rychlosti a době deformování, takže:

$$\varepsilon_r = \dot{\varepsilon}_0 t. \quad (1)$$

Dosazením číselných hodnot do (1) dostáváme:

$$\varepsilon_r = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot 1200 \text{ s} = 0,396.$$

Jestliže známe relativní deformaci a počáteční délku, tak můžeme určit změnu délky vzorku. Pro relativní deformaci platí:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Odtud:

$$\Delta l = \varepsilon_r l_0. \quad (2)$$

Můžeme si také rovnou určit délku vzorku po 20 minutách deformování:

$$l^* = \Delta l + l_0 = \varepsilon_r l_0 + l_0 = l_0 (\varepsilon_r + 1). \quad (3)$$

Po číselném dosazení máme:

$$l^* = 50 \cdot 10^{-3} (0,396 + 1) \text{ m} = 69,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Ze vztahu (2) získáme pro prodloužení o elementární délku dl po diferencování:

$$d\varepsilon_r = \frac{dl}{l_0}. \quad (4)$$

Skutečnou deformaci získáme integrací (4) od počáteční do koncové délky vzorku. V

integraci musíme ale ještě kvůli průběhu deformování odlišit původní délku ve vztahu (4) od délky l_0 vzorku před zatěžováním. Takže:

$$\varepsilon_T = \int_{l_0}^{l^*} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l^*}{l_0}\right). \quad (5)$$

Číselně:

$$\varepsilon_T = \ln\left(\frac{69,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{50 \cdot 10^{-3} \text{ m}}\right) = 0,337.$$

Smluvní napětí je síla vztažená na počáteční kolmý průřez vzorku:

$$\sigma_i = \frac{F}{S_0} = \frac{4F}{\pi d_0^2}. \quad (6)$$

Číselně:

$$\sigma_i = \frac{4 \cdot 5655}{\pi \cdot 36 \cdot 10^{-6}} \text{ MPa} = 200 \text{ MPa}.$$

Zbývá už jen určit skutečné napětí. Pro zúžení vzorku zde budeme uvažovat analogický vztah jako u skutečné deformace při prodloužení. Využijeme Poissonovo číslo, které vyjadřuje vztah mezi zúžením a prodloužením.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{zkrácení}}{\varepsilon_{prodloužení}} \right|$$

Jelikož Poissonovo číslo se udává kladné, musíme přidat záporné znaménko, protože se při prodloužení vzorek zúží, nikoliv rozšíří. Můžeme tedy psát:

$$\ln\left(\frac{d^*}{d_0}\right) = -\mu \ln\left(\frac{l^*}{l_0}\right). \quad (7)$$

Pomocí pravidel při počítání s logaritmy můžeme ze (7) vyjádřit průměr průřezu po 20 minutách:

$$d^* = d_0 \left(\frac{l_0}{l^*}\right)^\mu. \quad (8)$$

Po číselném dosazení do (8) je:

$$d^* = 6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{50}{69,8}\right)^{0,5} \text{ m} = 5,078 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Už tedy můžeme vyjádřit skutečné napětí:

$$\sigma_T = \frac{F}{S^*} = \frac{4F}{\pi d^{*2}}. \quad (9)$$

Stačí už jenom číselně vyjádřit skutečné napětí:

$$\sigma_T = \frac{4 \cdot 5655}{\pi \cdot 25,786 \cdot 10^{-6}} \text{ MPa} = 279 \text{ MPa}.$$

Odpověď

Relativní deformace po 20 minutách je:

$$\varepsilon_r = 0,396.$$

Skutečná deformace po 20 minutách je:

$$\varepsilon_s = 0,337.$$

Dále jsme určili smluvní napětí:

$$\sigma_i = 200 \text{ MPa.}$$

A ještě skutečné napětí je:

$$\sigma_s = 279 \text{ MPa.}$$

Sbírka řešených úloh

Poissonova konstanta

Úloha číslo: 2152

Odvoďte vztah mezi modulem pružnosti v tahu, smykovým modulem pružnosti a Poissonovou konstantou.



Zápis

E	modul pružnosti v tahu
G	smykový modul pružnosti
m	Poissonova konstanta

Rozbor

Poissonova konstanta je převrácenou hodnotou Poissonova čísla. To vyjadřuje (u kruhové tyče) poměr mezi zmenšením průměru a zvětšením délky při namáhání tahem v oblasti pružných deformací. Hodnoty se pohybují mezi 0 (absolutně stlačitelný materiál) a 0,5 (absolutně nestlačitelný materiál).

Budeme uvažovat tyč. Protože nás zajímá i smykový modul pružnosti, potřebujeme si vyjádřit i tečné napětí, a odpovídající úhlovou deformaci. Nejlepší volbou je uvažovat řez tyčí, který je odchýlen o 45° od osy tyče. Tečné napětí na ploše tohoto řezu lze vyjádřit pomocí tahového napětí. Je potřeba určit, o jaký úhel v porovnání s úhlem v rovnici smyku se odchýlí plocha řezu po deformaci. Dále musíme uvažovat prodloužení a zúžení tyče, která lze vyjádřit modulem pružnosti v tahu a Poissonovou konstantou, a pomocí geometrie je dát do vztahu s úhlovou deformací. Je potřeba brát v úvahu, že uvažujeme malé deformace. Dále už jenom použijeme rovnici pro smyk.

Nápověda

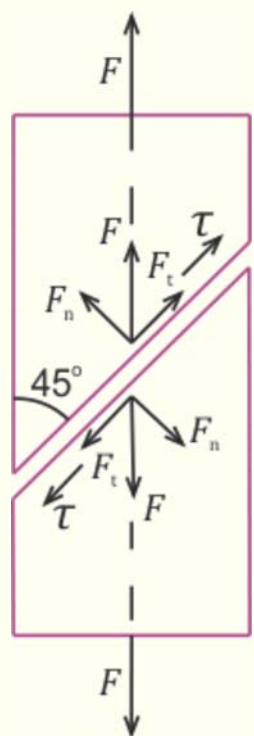
Uvažujte tyč namáhanou tahovou silou. Dále uvažujte řez tyčí, který svírá s osou tyče 45° , a tahovou sílu rozložte tak, aby jedna její složka byla tečná k ploše řezu, a druhá k ní kolmá. Vyjádřete tečné napětí na ploše vzhledem k normálovému napětí. Dále si vzpomeňte, co znamená úhel smyku v rovnici pro smyk. Určete, o jaký úhel v porovnání s úhlem smyku se po deformaci plocha řezu pootočí. Nebo uvažujte tento úhel rovnou jako polovinu úhlu smyku, a pomocí vhodné geometrie a předpokladu malých deformací to dokažte. Dále si geometricky vhodně zakreslete obrázek, který bude znázorňovat prodloužení, zúžení a úhlovou deformaci plochy řezu. Pomocí geometrie, konkrétněji funkce tangens, vyjádřete vztah mezi těmito deformacemi. Ovšem zanedbejte kvadratické členy deformací. Ve vztahu dosadte z rovnic, které vyjadřují vztah mezi deformací a napětím.

Řešení

Uvažujme tyč namáhanou v tahu silou F a řez, který s osou tyče svírá 45° . Potom sílu působící na plochu tohoto řezu S můžeme rozložit na dvě stejně velké složky, kde

jedna F_t leží v dané ploše, a druhá F_n je kolmá k ploše. Jejich velikosti jsou:

$$F_t = F_n = \frac{F}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$



Protože nás zajímá i smykový modul, potřebujeme vyjádřit i tečné napětí τ :

$$\tau = \frac{F_t}{S}. \quad (2)$$

Když označíme plochu kolmého řezu tyče S_0 , potom platí:

$$S = S_0\sqrt{2}. \quad (3)$$

Normálové napětí σ , které působí podél tyče, je:

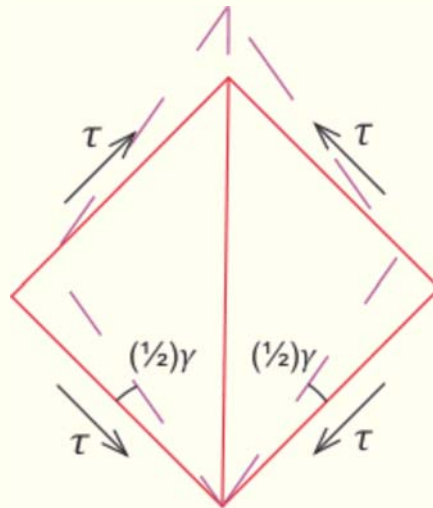
$$\sigma = \frac{F}{S_0}. \quad (4)$$

Dosazením do (2) z (1), (3) a (4) získáme vztah:

$$\tau = \frac{F}{2S_0} = \frac{\sigma}{2}. \quad (5)$$

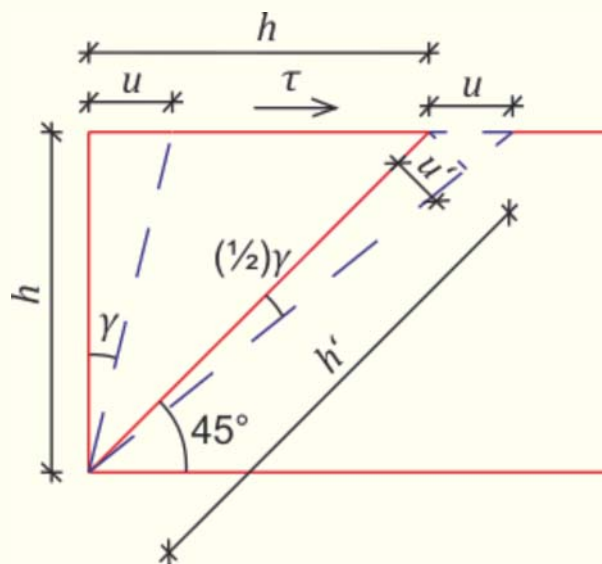
Nemůžeme zde ignorovat sílu F_n , která způsobuje tečné napětí na ploše kolmé k ploše S , a též s osou tyče svírá 45° . V podélném řezu tyče si představme čtverec, jehož jedna diagonála leží ve směru osy tyče, a na jehož každou stranu působí stejně veliké tečné napětí, ovšem každé orientové tak, aby čtverec byl v rovnováze. To znamená, že když jedna strana je ve směru síly F_t , tedy působí na ní tečné napětí τ , pak symetricky podle osy tyče na sousední straně působí tečné napětí od síly F_n . Tečná napětí na

ostatních stranách musí splňovat podmínky rovnováhy. Jelikož se osa tyče, tedy i jedna diagonála čtverce, v tahu o žádný úhel nezmění, úhlová deformace se bude týkat pouze stran čtverce. Úhlem smyku γ rozumíme úhel, o který se změní pravý úhel při působení tečného napětí. Ze symetrie hned lze vidět, že každá strana se deformuje o poloviční úhel smyku. To znamená také to, že plocha S se pootočí o tento úhel.



<http://reseneulohy.cz/>

Nebo když bychom uvažovali jednu stranu čtverce připevněnou místo toho, abychom uvažovali pevně diagonálu jako předtím, pak jeho diagonála by se deformovala o poloviční úhel smyku. Lepší představu udělá obrázek.



<http://reseneulohy.cz/>

K obrázku je ještě třeba doplnit vztahy plynoucí z Pythagorovy věty:

$$h' = \sqrt{2}h, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{2}}$$

Podle veličin v obrázku můžeme sestavit rovnici:

$$\tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{u'}{h'} = \frac{u}{2h} = \frac{1}{2}\tan \gamma. \quad (6)$$

Protože zde uvažujeme dosti malé deformace, vidíme že rovnost (6) platí, tedy že plocha S se skutečně posune o polovinu úhlu smyku.

Dále si musíme uvědomit, že zatímco se tyč prodlouží, tak se zároveň i zúží. Situaci ukazuje následující obrázek.

Zavedeme si relativní prodloužení:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta l = \varepsilon_r l_0. \quad (7)$$

Pro relativní prodloužení můžeme ještě uvažovat vztah:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E}. \quad (8)$$

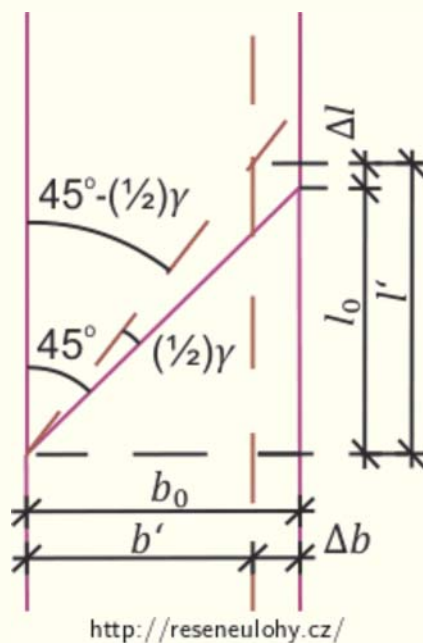
Zrovna tak můžeme uvažovat relativní zúžení:

$$\eta = \frac{\Delta b}{b_0} \Rightarrow \Delta b = \eta b_0. \quad (9)$$

Protože Poissonovo číslo μ udává vztah mezi mezi prodloužením a zúžením, lze ještě psát

$$\eta = \frac{\mu\sigma}{E}. \quad (10)$$

Na následujícím obrázku můžeme vidět geometrii deformace plochy S .



V souladu s obrázkem můžeme dále psát:

$$l' = l_0 + \Delta l = l_0 + l_0 \varepsilon_r = l_0 (1 + \varepsilon_r), \quad (11)$$

a:

$$b' = b_0 - \Delta b = b_0 - b_0 \eta = b_0 (1 - \eta). \quad (12)$$

Pro další postup je třeba si ujasnit, že vzhledem k tomu, když uvažujeme deformace dost malé, tak můžeme zanedbávat kvadratické členy. To znamená, že dále zanedbáme členy:

$$\gamma^2, \varepsilon_r^2, \eta^2, \eta \varepsilon_r.$$

Budeme uvažovat rovnosti:

$$1 \approx 1 - \frac{1}{4} \gamma^2 = \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right) \left(1 + \frac{1}{2} \gamma\right), \quad (13)$$

$$1 \approx 1 - \varepsilon_r^2 = (1 - \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_r). \quad (14)$$

Když se vrátíme k obrázku, můžeme psát:

$$\tan\left(45^\circ - \frac{1}{2} \gamma\right) = \frac{b'}{l'} = \frac{b_0 (1 - \eta)}{l_0 (1 + \varepsilon_r)} = \frac{1 - \eta}{1 + \varepsilon_r} \approx (1 - \eta)(1 - \varepsilon_r) \approx 1 - \varepsilon_r - \eta. \quad (15)$$

V (15) jsme využili toho, že b_0 je rovno l_0 a rovnice (14).

Použijeme goniometrický vzorec pro funkci tangens:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

A to, že pro malé α je:

$$\tan \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Pak:

$$\tan\left(45^\circ - \frac{1}{2} \gamma\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \frac{1}{2} \gamma}{1 + \tan 45^\circ \tan \frac{1}{2} \gamma} = \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \gamma}{1 + \tan \frac{1}{2} \gamma} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} \gamma}{1 + \frac{1}{2} \gamma} \approx \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right)^2 \approx 1 - \gamma. \quad (16)$$

Porovnáním (15) a (16) získáme:

$$1 - \varepsilon_r - \eta = 1 - \gamma,$$

tedy:

$$\varepsilon_r + \eta = \gamma. \quad (17)$$

Dosazením z (8) a (10) do (17) dostaneme:

$$\gamma = \frac{\sigma}{E} + \frac{\mu \sigma}{E} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma. \quad (18)$$

Nyní už zbývá přidat vztah:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (19)$$

Do (19) dosadíme z (5) a (18).

$$\frac{1 + \mu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{2G}. \quad (20)$$

Ze (20) můžeme vyjádřit vztah:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (21)$$

Ovšem podle zadání místo Poissonova čísla μ chceme Poissonovu konstantu m . Vztah mezi nimi je:

$$\mu = \frac{1}{m}. \quad (22)$$

Dosazením (22) do (21) již dostáváme hledaný vztah:

$$G = \frac{Em}{2(m + 1)}.$$

Poznámka: Protože pro Poissonovu konstantu platí:

$$0 < \mu < \frac{1}{2},$$

pak musí platit i:

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}.$$

Poznámka

Tato úloha se dá ještě stručněji vyřešit pomocí zobecněného Hookova zákona (pro izotropní materiály):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

kde λ a μ (pozor, neplést si s Poissonovým číslem) jsou takzvané Laméovy konstanty. Budeme nyní uvažovat tah, takže jestli tah uvažujeme ve směru x , tak musí být:

$$\sigma_{xx} \neq 0, \quad ij \neq xx \Rightarrow \sigma_{ij} = 0. \quad (2)$$

Poznámka: Jestliže i je různé od j , pak z (1) a (2) plyne:

$$0 = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

a to znamená, že platí:

$$\varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0. \quad (4)$$

To je v souladu s tím, že se jedná čistě o tah, takže se neprojeví úhlové deformace. S ohledem na symetrii je tedy nulových šest složek deformace z devíti.

Pro i rovno j získáme z (1) a (2) tři rovnice:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad (5)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad (6)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}. \quad (7)$$

Porovnáním rovnic (6) a (7) lze hned vidět:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}. \quad (8)$$

Když dosadíme z (8) do (6), dostaneme:

$$0 = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (2\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy}. \quad (9)$$

Vztah (9) dále upravíme na:

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} = -2 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right). \quad (10)$$

Poissonovu konstantu m už v podstatě máme určenou v (10), ale je třeba tuto rovnici uvažovat v absolutní hodnotě. To znamená:

$$m = \left| \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} \right| = \left| -2 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) \right| = 2 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right). \quad (11)$$

Protože uvažujeme, že při prodloužení se tyč zúží, musí být výraz:

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda}$$

v souladu s (10) kladný.

Teď už zbývá vyjádřit Laméovy koeficienty pomocí modulů E a G . Nyní budeme pro smyk uvažovat (1) obecně, tedy ne přímo pro speciální případ tah. Pro smykový modul pružnosti platí:

$$2G\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}. \quad (12)$$

Pak podle (1) máme:

$$2G\varepsilon_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}. \quad (13)$$

Takže:

$$G = \mu. \quad (14)$$

Pro modul pružnosti v tahu platí:

$$E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}. \quad (15)$$

S uvážením (1) a (8) dostáváme:

$$E\varepsilon_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2G\varepsilon_{xx}. \quad (16)$$

(16) dále upravíme na:

$$E\varepsilon_{xx} = \lambda \left(1 + 2\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \right) \varepsilon_{xx} + 2G\varepsilon_{xx}. \quad (17)$$

Po vykrácení v (17) a pomocí (11) dále máme:

$$E = \lambda \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2G. \quad (18)$$

Nyní už z (18) dostaneme:

$$\lambda = \frac{(E - 2G)}{\left(1 - \frac{2}{m}\right)} = (E - 2G) \left(\frac{m}{m - 2} \right). \quad (19)$$

Nyní už můžeme dosadit z (19) a (14) do (11), takže:

$$m = 2 \frac{(E - 2G) + G \left(\frac{m-2}{m} \right)}{(E - 2G)}. \quad (20)$$

Dále:

$$(E - 2G)m = 2(E - 2G) + 2G \left(\frac{m - 2}{m} \right). \quad (21)$$

To ještě lze upravit na:

$$(E - 2G)(m - 2) = 2G \left(\frac{m - 2}{m} \right). \quad (22)$$

Ještě:

$$E - 2G = 2G \left(\frac{1}{m} \right). \quad (23)$$

Po další úpravě již máme:

$$E = 2G \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 2G \left(\frac{m + 1}{m} \right). \quad (24)$$

Nakonec tedy:

$$G = \frac{Em}{2(m + 1)}.$$

Odpověď'

Vztah mezi modulem pružnosti v tahu E , smykovým modulem pružnosti G a Poissonovou konstantou m je:

$$G = \frac{Em}{2(m + 1)}.$$