

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Zdražil

Kruhová inverze

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor:

Matematika se zaměřením na vzdělávání a deskriptivní geometrie se
zaměřením na vzdělávání

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Kruhová inverze

Autor: Michal Zdražil

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá kruhovou inverzí. Jedná se o konformní zobrazení v rovině, které převádí kruhové křivky opět na kruhové křivky. Text je rozdělen do tří kapitol, přičemž první dvě mají čtenáři přiblížit pojem kruhové inverze a všechny její náležitosti. Třetí kapitola potom obsahuje sady řešených a neřešených příkladů, na kterých si může čtenář ověřit znalosti nabyté v předchozím textu.

Klíčová slova: Inverze, zobrazení, kružnice, Möbiova rovina

Title: Inversion with respect to a circle

Author: Michal Zdražil

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This bachelor's thesis concerns with the topic of the inversion with respect to a circle, which is an angle-preserving transformation of a plane mapping generalized circles into generalized circles. The text is divided into three chapters, the first two of which are supposed to expound the concept of the inversion and some of its properties. The third chapter contains sets of examples and exercises for the reader to verify what knowledge they gained from the text above.

Keywords: Inversion, mapping, circle, Möbius plane

Děkuji zejména RNDr. Janě Hromadové, Ph.D. za její vedení, rady, nápady, návrhy, i v krizích pozitivní přístup a zejména ty hodiny času, které mi byla ochotná věnovat nejen při tvorbě této bakalářské práce. Dále děkuji všem dalším učitelům, kteří mě vedli mým dosavadním studiem pomohli mi tak vystavět základ, na němž mohla tato práce vzniknout.

Obsah

Úvod	2
1. Úvod do problematiky kruhové inverze	4
1.1 Historické okénko	4
1.2 Lineární, konformní a involutorní zobrazení	6
1.3 Základní definice kruhové inverze v eukleidovské rovině a některé důležité pojmy	7
1.4 Zavedení a význam Möbiovy roviny	10
1.5 Odvození některých vlastností a vztahů	12
1.6 Odvození kruhové inverze pomocí prostorových vztahů	19
1.6.1 Vztah kruhové a sférické inverze	19
1.6.2 Odvození kruhové inverze pomocí stereografické projekce	20
2. Analytické vyjádření kruhové inverze	25
2.1 Analytické odvození obrazů kruhových křivek v kruhové inverzi	26
2.2 Kuželosečky v kruhové inverzi	34
2.3 Další zajímavé křivky	42
3. Řešené a neřešené příklady	62
3.1 Apolloniovy úlohy	62
3.2 Kreslení obrazů zadaných útvarů v kruhové inverzi	64
3.3 Úlohy o kruhové inverzi řešené pomocí nástrojů analytické geometrie	67
Závěr	71
Seznam literatury	72
Internetové zdroje	73
Seznam obrázků	74

Úvod

Tento text se věnuje kruhové inverzi. Kruhová inverze je zobrazení v rovině, které nachází své uplatnění v celé řadě oborů, od fyziky, přes statistiku a geografii, až po geometrii a matematiku nebo třeba i design. Cílem této práce je nabídnout čtenáři analytický pohled na inverzi, který může být pro mnohé úplně novým náhledem na tento fenomén obzvláště proto, že ve výuce je tento přístup spíše opomíjený, je mu věnováno jen velmi malé množství materiálů a publikací a zejména v úvodu do tohoto tématu je vhodný o něco názornější syntetický pohled na věc. Součástí práce je i krátká sada příkladů, které mají procvičit zejména schopnost aplikovat znalosti nabyté v textu na konkrétní matematické a geometrické problémy.

První kapitola nabízí první vhled do světa kruhové inverze. Věnuje se historickému vývoji pojmu inverze od jeho nenápadných počátků, přes mílové kroky vpřed učiněné A. F. Möbiem, až po současnost. Dále je zde zjednodušeně osvěžen pojem zobrazení a některé jeho vlastnosti, které jsou pro kruhovou inverzi zásadní. V neposlední řadě v této kapitole také zavedeme samotný pojem kruhové inverze v eukleidovské i Möbiově rovině. Zatím čistě synteticky jsou zde odvozeny některé základní vlastnosti inverze až po její rozšíření a souvislosti v trojrozměrném prostoru.

Druhá kapitola staví na poznacích z kapitoly první a prohlubuje je čistě pomocí nástrojů analytické geometrie. Nejen, že zde objevíme některé další zajímavé vlastnosti inverze, které nejsou v obdobných pracích takto dokázané a ukázané, ale podíváme se i na její vliv na kružnice, přímky, kuželosečky, funkce, křivky kinematické geometrie a mnoho dalšího. Všechny výpočty v podkapitolách věnovaných obrazům křivek jsou doprovázeny řadou ilustračních obrázků.

Třetí kapitola potom nabídne sadu řešených a neřešených příkladů, které by měly procvičit a ukotvit poznatky, které nabízí předchozí text. Tato část

práce řeší některé z Apolloniových úloh, procvičuje schopnost syntetického odvození zadaných obrazů křivek a ploch a v neposlední řadě ověřuje schopnost aplikace analytického přístupu k inverzi na zadané příklady.

Použité obrázky byly vytvořeny v programu Geogebra 5 a upravovány pomocí programů Gimp 2 a Zoner Callisto 5.

1. Úvod do problematiky kruhové inverze

1.1 Historické okénko

Hlavním zdrojem pro sepsání této kapitoly byla práce *Historický vývoj geometrických transformací* (Trnkovská, 2015, kapitola 1.5).

První zdokumentovaná zmínka o kruhové inverzi vůbec se přičítá řeckému geometrovi a matematikovi Apollóniovi z Pergé (cca. 262–190 př. n. l.), který ji zavádí ve své práci *Rovinná místa* (De locis planis), kde se zabývá geometrickými transformacemi roviny, zejména pak jejich vlivem na přímky a kružnice. Záznamy o jeho práci se nám dochovaly hlavně díky jednomu z jeho následovníků – řeckému matematikovi, jímž byl Pappos z Alexandrie (cca. 290–350 n. l.), který Apollóniovi ve svém textu *Sbírka matematiky* (Synagoge mathematice) připisuje právě autorství myšlenky kruhové inverze ale třeba i homotetie.

Apollonius není otcem pouze inverze kruhové. Ve svém díle *Pojednání o kuželosečkách* (Kónika) zmiňuje i další inverze, například na elipse, parabole apod. Těmi se dále zabýval po dlouhých devatenácti letech až francouzský matematik a geometr J. V. Poncelet (1788–1867) v díle *Traktát o projektivních vlastnostech útvarů* (Traité des propriétés projectives des figures). Sama kruhová inverze od Apolloniových dob na dlouhá staletí vymizela ze středu zájmu a povědomí matematiků.

Myšlenku a pojem kruhové inverze a inverzí obecně oživil až v 19. století švýcarský geometr Jacob Steiner (1796–1863), jenž kruhovou inverzi oproti Apollóniovi rozšířil a zobecnil. Svou práci o inverzní geometrii ovšem nikdy nepublikoval a byla nalezena až v jeho pozůstalosti.

Roku 1827 se pak kruhová inverze dočkala svého analytického vyjádření díky belgickému matematikovi Adolhu Queteletovi (1796–1874). Už roku 1836 pak z pera italského matematika Guista Bellavitisise (1803–1880) vzešla první systematická studie zabývající se kruhovou inverzí nazvaná *Teorie inverzních*

útvárů a její využití v elementární geometrii (Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare). V této studii je zformulovaná definice a vysvětleny některé její základní vlastnosti. Nedlouho poté tento pojem zobecnil i pro prostor. Jeho úvahy následně přepracoval a rozebíral i irský matematik J. W. Stubbs (1821–1897) v článku *O aplikaci nové metody v geometrii křivek a křivkových ploch* (On the Application of a New Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces).

V dalších letech byla myšlenka kruhové inverze zrecyklována mimo jiné Williamem Thomsonem (1824–1907), publikujícím pod pseudonymem lord Kelvin, který se jí zabýval v rámci studia elektrostatických jevů a psal o tzv. *transformaci reciprokými průvodiči*. Tyto fyzikální myšlenky následně rozšířil na geometrický prostor.

Své moderní podoby kruhová inverze dosáhla především díky velkému příspěvku matematika Augusta Ferdinanda Möbia (1790–1868) (obr. 1), který ve svém díle *Teorie kružnicové příbuznosti v čistě geometrickém popisu* (Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung) studoval, jak již název napovídá, čistě geometrickými prostředky transformace roviny a jejich vliv na kružnice (příčemž za kružnici považoval i přímku –kružnice s nevlastním středem a nekonečným poloměrem– nebo bod –kružnice s nulovým poloměrem–, nazýváme je kruhové křivky). Byl to právě on, kdo rozšířil eukleidovskou rovinu na Möbiovu.

Jeho výsledků následně využil německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss (1777–1855), jenž odvodil rovnice analytického vyjádření kruhových transformací pro komplexní rovinu. Britský matematik Arthur Cayley (1821–1895) později ukázal, že každá kruhová transformace v rovině vzniká složením vhodných kruhových inverzí a pohybů.

Na jeho úvahy poté volně navázal Francouz Joseph Liouville (1809–1889), který mimo jiné upravil původní Thompsonovy myšlenky a hovořil o *transformaci reciprokými poloměry*. Dále dokázal, že se jedná o jedinou nelineární trans-

formaci prostoru, která je konformní, nebo, že každé konformní zobrazení trojrozměrného prostoru generují právě sférické inverze – jedná se tedy o zobecnění kruhových transformací do prostoru – tato myšlenka je dnes známá jako *Liouvilleův teorém* a byla publikována jako dodatek k pátému vydání Mongeovy knihy *Aplikace analýzy na geometrii* (Application de l'analyse a la geometrie).



Obrázek 1: A. F. Möbius

1.2 Lineární, konformní a involutorní zobrazení

Abychom získali lepší vzhled do problematiky kruhové inverze, je vhodné ujasnit si nejprve několik základních pojmů a jejich dopad na níže vyslovovaná tvrzení. V této krátké podkapitole se ve zkratce podíváme na pojem zobrazení a na některé jeho vlastnosti.

Mluvíme-li v matematice o *zobrazení*, myslíme binární relaci, která jednoznačně zobrazuje vzor na příslušný obraz z jedné matematické struktury do druhé. Jednoduchým příkladem může být třeba i jen lineární funkce, nebo transformace typu posunutí apod.

U různých zobrazení samozřejmě pozorujeme různé vlastnosti. Pro nás zásadní budou tři, a to sice linearita, resp. nelinearita zobrazení, konformita (úhlojevnost) a involutornost.

Lineární zobrazení je takové, které zachovává linearitu čili vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Zjednodušeně to znamená, že zobrazíme-li libovolné tři body ležící na přímce, musí jejich obrazy opět ležet na přímce.

S pojmem lineárního zobrazení je úzce spjatá i afinnost zobrazení, jelikož zobrazení může být afinní jen tehdy, zobrazuje-li body na přímce opět na přímku a zároveň zachovává jejich dělicí poměr.

U takového zobrazení nás samozřejmě může zajímat i to, zachovává-li délky křivek, obsahy útvarů, popřípadě velikosti úhlů sevřených dvěma křivkami. Pro jednotlivé případy mluvíme postupně o izometrickém (délkojevném), ekvivalentním (plochojevném) anebo konformním (úhlojevném) zobrazení. Už názvy samy nám snadno napoví, že délkojevné zobrazení je takové, které zachovává délky křivek, plochojevné zachovává velikosti ploch a úhlojevné zachovává úhly mezi křivkami.

V neposlední řadě je nezbytná znalost pojmu involutorní zobrazení. Jedná se o takové zobrazení, pro které platí, že obrazem obrazu při použití téhož zobrazení je původní vzor. Jinými slovy involutorní zobrazení složeno samo se sebou dává identitu. Matematicky bychom to zapsali takto: $f_{inv}: A_n \rightarrow A_n$ je involutorní $\Leftrightarrow \forall X \in A_n \wedge X' \in A_n: f_{inv}(X) = X' \wedge f_{inv}(X') = X$.

1.3 Základní definice kruhové inverze v eukleidovské rovině a některé důležité pojmy

Mějme v eukleidovské rovině dán bod S a uvažujme číslo $\kappa \neq 0$. Zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ eukleidovské roviny přiřadí bod X' tak, že pro něj platí:

- 1) Polopřímka SX' je totožná s polopřímkou SX právě tehdy, když $\kappa > 0$ a opačná, je-li $\kappa < 0$,
- 2) $|SX||SX'| = |\kappa|$,

nazýváme *kruhová inverze*. Bod S se nazývá *střed inverze* a κ *koefficient inverze*.

Z tohoto zavedení snadno vyčteme, že kruhová inverze je bijekcí eukleidovské roviny s vyjmutým bodem S na sebe.

Už jen samotným pozorováním této definice je možné vytvořit si jistou představu o involutorní povaze kruhové inverze, jelikož v bodě 2) zjevně nezáleží, píšeme-li $|SX||SX'| = \kappa$, nebo $|SX'| |SX| = \kappa$, jelikož násobení je komutativní a oba zápisy jsou tudíž ekvivalentní.

Zajímavostí může být, že se v definici kruhové inverze samotný kruh, respektive kružnice vůbec neobjevuje. Tato definice tedy musí *základní kružnici* přirozeně zadávat. Bude se jednat o samodružnou kružnici tohoto zobrazení (nazveme ji k). X zde tedy musí být rovno X' , tedy z definice platí $|SX|^2 = \kappa$, neboli $|SX| = \sqrt{|\kappa|}$. To znamená, že k je množina bodů v eukleidovské rovině takových, že jejich vzdálenost od S je rovna konstantě $\sqrt{|\kappa|}$, čili se jedná o kružnici $k(S; \sqrt{|\kappa|})$.

Tato kružnice je dále silně samodružná (každý její jednotlivý bod je samodružný) pro $\kappa > 0$ a slabě samodružná (zobrazí se na sebe jako celek, nikoli bodově) pro $\kappa < 0$.

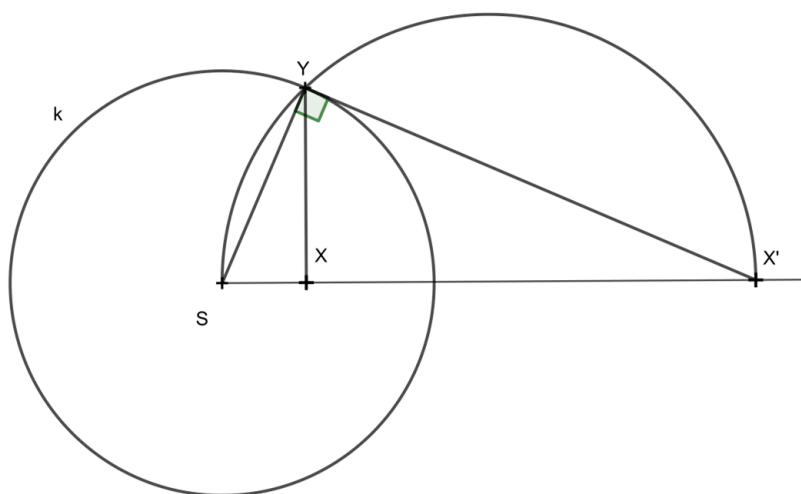
To vychází z jednoduché myšlenky. Pro bod X této kružnice platí: $|SX| = \sqrt{|\kappa|}$, tedy pro jeho obraz X' platí $|SX'| \sqrt{|\kappa|} = |\kappa|$. Tedy $|SX'| = \sqrt{|\kappa|}$, kde pro $\kappa > 0$ $X = X'$ a pro $\kappa < 0$ je X' bodem diametrálně protilehlým bodu X , jelikož polopřímka SX' je opačná k SX .

Když se blíže podíváme na definici kruhové inverze výše, je zřejmé, že kruhová inverze, pro níž je $\kappa < 0$, je totéž zobrazení, jako složení inverze pro $|\kappa|$ se středovou souměrností podle bodu S . Pro zjednodušení další práce s tímto fenoménem tedy budeme dále uvažovat κ vždy větší než 0 .

Z definice si také snadno odneseme všechny informace potřebné ke konstrukci obrazu bodu v kruhové inverzi. Stačí si vzít na pomoc Eukleidovu větu o odvěsně a vhodný obrázek (Obrázek 2). Vztah $\kappa = |SX||SX'|$; $\kappa > 0$ totiž velmi nápadně připomíná právě výše zmíněnou Eukleidovu větu, kde $\sqrt{\kappa}$ je

délka odvěsny, $|SX'|$ je délka přepony a $|SX|$ je délka příslušného úseku přepony v trojúhelníku, který je na obrázku označen jako YSX' .

Známe-li tedy bod X ležící ve vnitřní oblasti základní kružnice a k němu hledáme obraz X' , vztyčíme v bodě X kolmici na přímkou SX . Ta protne základní kružnici ve dvou bodech. Jeden z nich označíme Y . Nyní jednoduše nalezneme bod X' tak, že dokonstruujeme trojúhelník YSX' , tedy vedeme bodem Y přímkou kolmou na přímkou SY a její průsečík s přímkou SX je hledaný bod X' .



Obrázek 2: Konstrukce bodu v kruhové inverzi

Pokud naopak hledáme obraz X bodu X' , který leží ve vnější oblasti základní kružnice, budeme postupovat následovně: Sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem SX' a jeden z jejich průsečíků s kružnicí k označíme Y . Když z bodu Y nyní spustíme kolmici na přímkou SX' , bude jejím průsečíkem s přímkou SX' právě bod X .

Z této konstrukce snadno vypočítáme, že obraz bodu, ležícího ve vnější oblasti základní kružnice leží na poláře tohoto bodu vzhledem k této kružnici neboli na spojnici bodů dotyku tečen vedených ke kružnici z jeho vzoru. V takovém případě platí i, že obraz bodu ležícího ve vnitřní oblasti leží na poláře tohoto bodu vzhledem k téže kružnici (tu získáme například tak, že tímto bodem vedeme libovolnou dvojici různoběžek, z nichž ani jedna není průměrem této kružnice, a z jejich průsečíků s kružnicí vedeme tečny k této kružnici – je-

li jedna z nich kolmice ke spojnici bodu a jeho obrazu získáme díky ní právě hledaný obraz, tím je tedy ukázáno, že tento musí skutečně ležet na poláře vzoru z konstrukce obrazu bodu ležícího ve vnitřní oblasti základní kružnice výše). Říkáme tedy, že pro každý bod a a jeho obraz platí, že jsou polárně sdružené vzhledem k základní kružnici.

1.4 Zavedení a význam Möbiovy roviny

V definici výše je možná trochu zarážející, že takto zavedená kruhová inverze nezobrazuje celou eukleidovskou rovinu, nýbrž jenom její část, vyloučili jsme právě střed inverze S , jelikož mu v eukleidovské rovině opravdu není možné přiřadit žádný bod jako obraz.

Proto se zavádí pojem *Möbiova rovina* (analogicky lze zavést i *Möbiův prostor*). Jedná se o eukleidovskou rovinu rozšířenou o jeden bod M_∞ , který budeme chápat právě jako obraz bodu S . Takový bod M_∞ leží na každé přímce a ve vnější oblasti každé kružnice sestavené v eukleidovské rovině. Přímky rozšířené právě o bod M_∞ budeme nazývat *rozšířené přímky*. Zajímavým triviálním důsledkem tohoto zavedení je to, že každé dvě rozšířené přímky v Möbiově rovině mají alespoň jeden společný bod.

Inverzi v Möbiově rovině definujeme takto: Mějme v Möbiově rovině dán bod S a uvažujme číslo $\kappa \neq 0$. Zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ eukleidovské roviny přiřadí bod X' tak, že pro něj platí:

1) Polopřímka SX' je totožná s polopřímkou SX právě tehdy, když $\kappa > 0$ a opačná, je-li $\kappa < 0$,

$$2) |SX||SX'| = |\kappa|,$$

3) Obrazem bodu S v této inverzi je bod M_∞ a naopak.

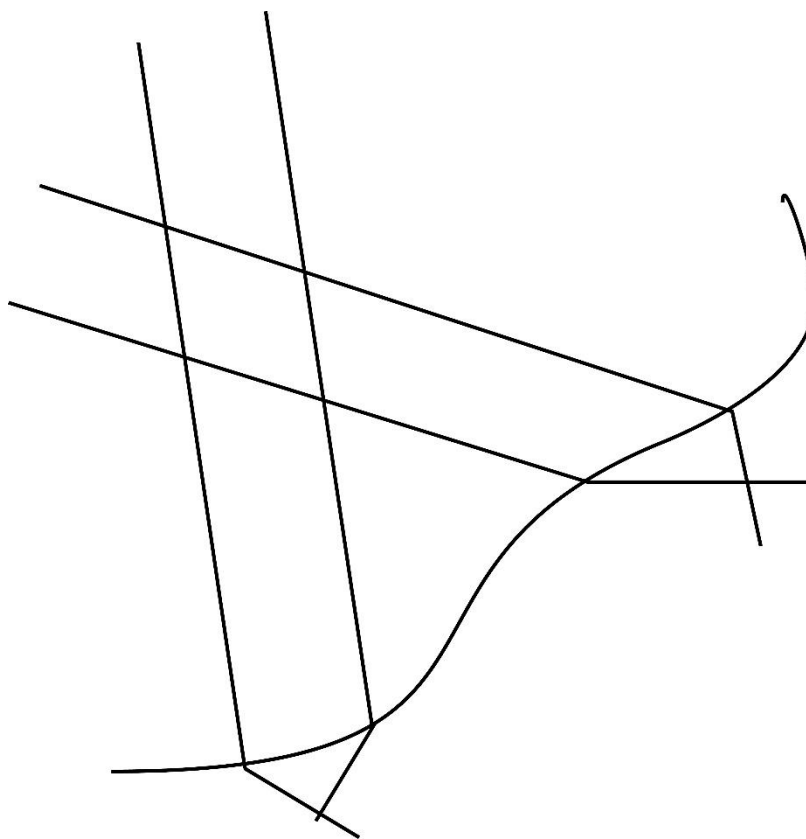
nazýváme *kruhová inverze* v Möbiově rovině. Bod S se nazývá *střed inverze* a κ *koefficient inverze*.

Nyní můžeme říkat, že kruhová inverze je bijekcí Möbiovy roviny na sebe, tedy každému bodu této roviny je jednoznačně přiřazen právě jeden bod jako jeho obraz.

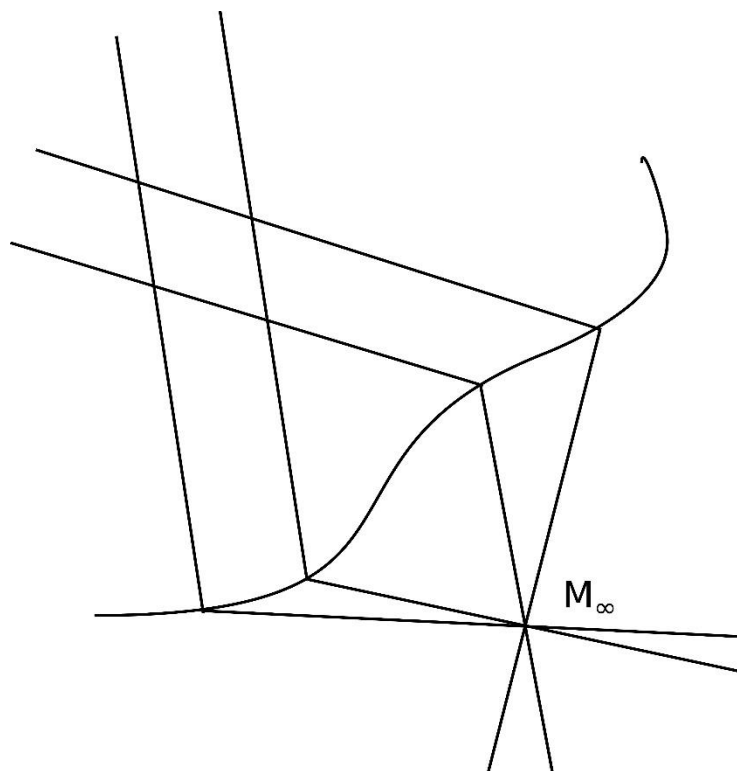
Zde můžeme také zavést důležitý pojem kruhových křivek. Jako *kruhovou křivku* budeme chápat každou kružnici a rozšířenou přímku Möbiovy roviny. Občas se za triviální případ (nulové) kruhové křivky považuje i bod (kružnice s nulovým poloměrem).

Vyloučíme-li nulovou křivku, platí, že každá kruhová křivka je jednoznačně určena právě třemi body v Möbiově rovině. Pro kružnici toto tvrzení platí triviálně stejně jako v eukleidovské rovině, pro přímku potom z toho, že v eukleidovské rovině je jednoznačně zadána dvěma body, zde ovšem vždy známe i třetí bod – bod M_∞ , kterým musí procházet.

Rozdíl mezi projektivním a Möbiovým rozšířením eukleidovské roviny je zjednodušeně znázorněn na obrázcích 3 a 4. Na rozdíl od Möbiovy v projektivní rovině mají společný nevlastní bod pouze rovnoběžné přímky.



Obrázek 3: Projektivní rovina



Obrázek 4: Möbiova rovina

1.5 Odvození některých vlastností a vztahů

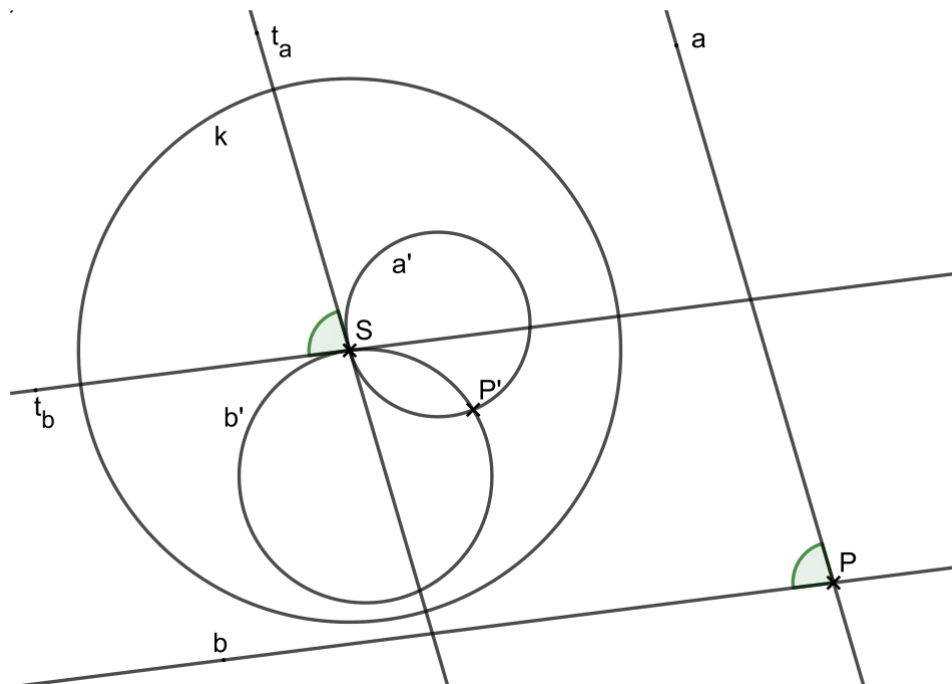
Tato práce je primárně věnována analytickému přístupu ke kruhové inverzi. Ta má ovšem řadu vlastností a souvislostí, jež nelze opomenout a názorněji je osvětlí syntetický přístup k věci. Tato podkapitola tedy připraví podloubí a přiblíží některé pojmy a vlastnosti (nejen) kruhové inverze, na kterých budeme v kapitolách dalších stavět.

Kruhová inverze je involutorní zobrazení. Toto tvrzení jsme už mohli postřehnout krátce po definici kruhové inverze. Zde se na něj podíváme blíže.

Sama definice kruhové inverze v Möbiově rovině nám bez jakéhokoli přemýšlení vyradí, že obrazem obrazu bodu S , tedy obrazem bodu M_∞ je opět bod S . Pro ostatní body roviny musíme uvažovat následovně: Platí, že $X \rightarrow X' \rightarrow X''$. Bez ohledu na to, jestli koeficient κ je kladný nebo záporný, bude z první části definice polopřímka SX totožná s polopřímkou SX'' . Dále musí z druhé části definice platit vztahy $|SX||SX'| = |\kappa|$ a $|SX''||SX''| = |\kappa|$, tedy zjevně platí $|SX| = |SX''|$, z čehož $X = X''$.

Kruhová inverze je konformní zobrazení. To znamená, že zachovává odchylku dvou křivek v jejich společném bodě. Ta je pak definována jako odchylka jejich tečen v tomto bodě. Chceme-li tedy ukázat konformitu kruhové inverze, stačí ukázat, že zachová odchylku libovolných dvou přímek. Ty mohou buď procházet středem inverze, nebo ne. Pokud ano, je důkaz triviální. Přímou z definice totiž plyne, že obraz přímky procházející středem je tatáž přímka. Odchylka se tedy triviálně zachovává.

Dvojice přímek a, b neprocházejících středem se zobrazí na dvojici kružnic a', b' procházejících středem inverze (důkaz v kapitole 2.1), jelikož pro inverzi v Möbiově rovině platí, že bod M_∞ se zobrazí na střed inverze S a bod M_∞ leží na každé přímce v Möbiově rovině. Bod S je tedy společným bodem těchto kružnic a odchylka zobrazených kružnic v něm bude stejná jako v průsečíku zobrazovaných přímek. Tečny t_a a t_b v bodě S ke kružnicím a', b' jsou samozřejmě přímky, které mají s těmito křivkami jediný společný bod. Již víme, že obrazem přímky procházející středem je tatáž přímka. A pokud mají kružnice a' a její tečna t_a jediný společný bod, musí z faktu, že kruhová inverze zachovává incidenci mít jediný společný bod i t_a a přímka a . Aby toto v Möbiově rovině platilo, musí být přímky t_a a a vzájemně rovnoběžné – společným bodem je pro ně bod M_∞ – v jiném případě by měly další společný (reálný) bod. Obdobně to bude i pro kružnici b' , její tečnu t_b a přímku b . Je tedy zřejmé, že odchylka tečen kružnic a', b' je stejná jako odchylka přímek a, b (obr. 5). Kruhová inverze tedy zachovává odchylky křivek – je to konformní zobrazení.



Obrázek 5: Odchylky

V kapitolách níže budou důležité některé vlastnosti kruhových křivek, tedy přímek a kružnic.

Jako překvapivě užitečná vlastnost se může jevit následující: Jestliže jsou A, A', B, B' dvě dvojice navzájem různých bodů a jejich obrazů v kruhové inverzi se středem S (A, B, S nejsou kolineární), platí pro ně $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SB'A'|$.

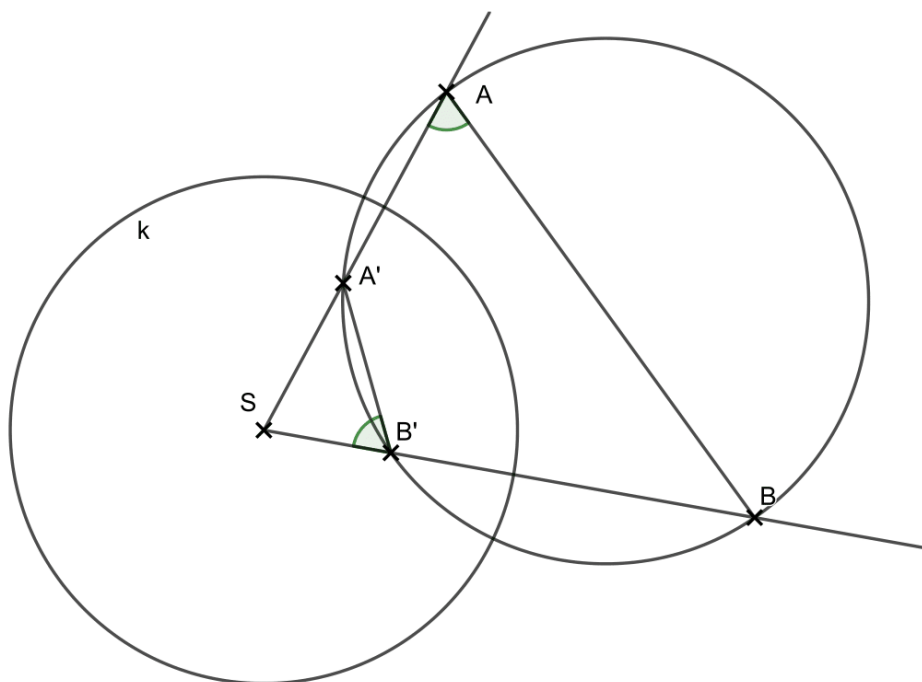
Z definice kruhové inverze přímo plynou dva fakty: První z nich je ten, že $|SA||SA'| = \kappa = |SB||SB'|$ (uvažujeme jenom $\kappa > 0$), tedy platí i $|SA|:|SB| = |SB'|:|SA'|$. Druhou vlastností potom je, že body S, A a A', S, B a B' jsou kolineární, tedy platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle B'SA'|$. Z toho všeho plyne podobnost trojúhelníků SAB a $SB'A'$ a tedy i shodnost $\sphericalangle SAB$ a $\sphericalangle SB'A'$.

K čemu nám tento fakt tedy je? Otevírá nám cestu k nové konstrukci obrazu bodu v kruhové inverzi, a to sice tehdy, známe-li již bod a jeho obraz v dané inverzi.

Z obrázku 6 je dobře vidět, že platí, že součet $|\sphericalangle B'BA| + |\sphericalangle B'A'A| = 180^\circ$, jelikož $|\sphericalangle B'A'S| = |\sphericalangle SBA|$. Stejně tak je $\sphericalangle A'AB$ doplňkem do přímého úhlu pro $\sphericalangle A'B'B$. Čtyřúhelník, který tvoří libovolné

nekolineární body $A'ABB'$ je tedy tětívový – všechny tyto body leží na kružnici.

Pro libovolné tři body z této čtveřice jsme tedy schopni pomocí průsečíku kružnice, na které musí všechny body ležet, a spojnice příslušného vzoru se středem inverze, nalézt čtvrtý bod.



Obrázek 6: Tětívový čtyřúhelník

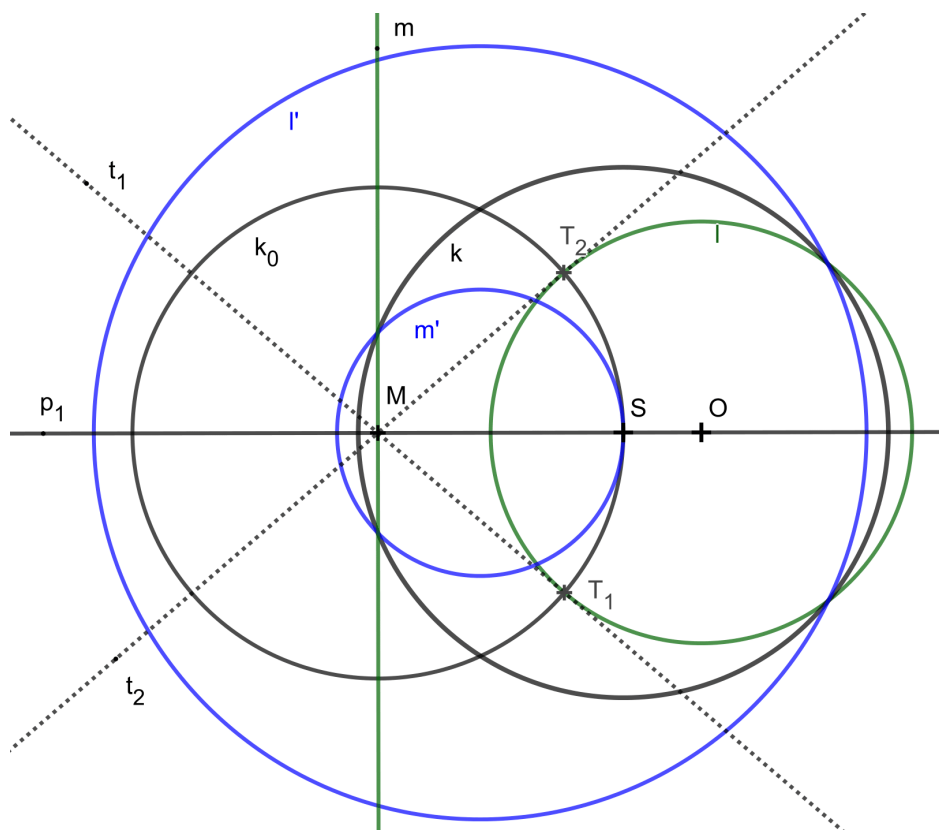
Pro dvě různé nenulové kruhové křivky bez společných bodů (bod M_∞ se samozřejmě počítá jako společný bod) existuje taková kruhová inverze, která je zobrazí na dvojici soustředných kružnic.

Mějme tedy dvojici kruhových křivek l a m , které splňují danou podmínku, tedy nemají žádný společný bod. Může se tedy jednat o dvojici kružnic, nebo přímku a kružnici.

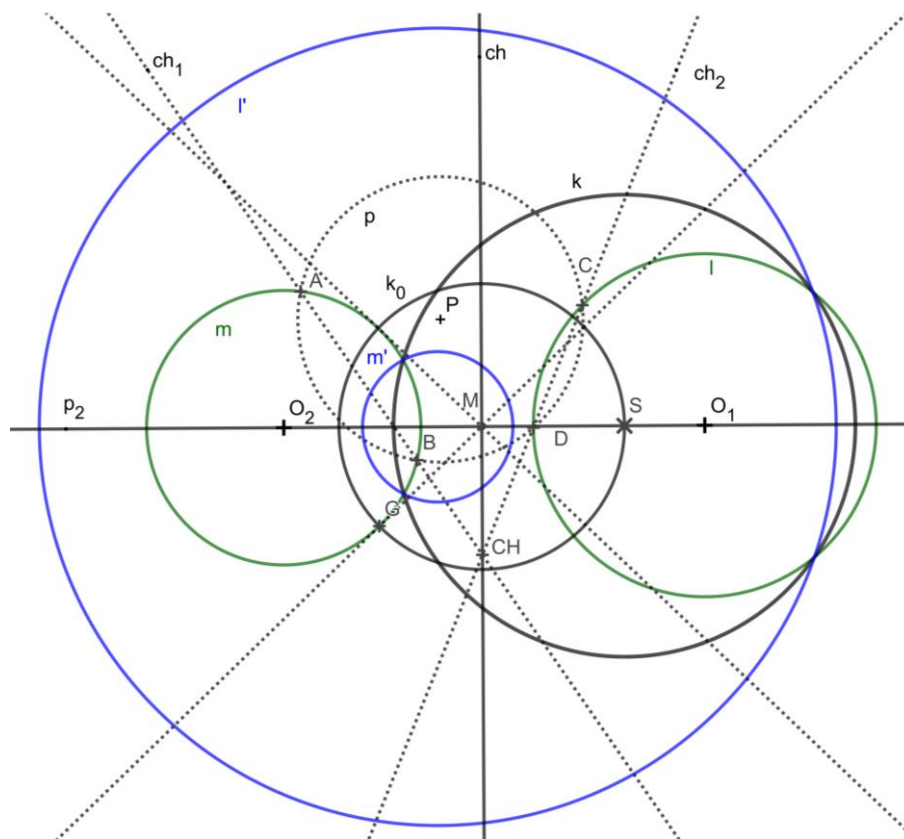
Označíme-li k_0 kružnici, která je k oběma křivkám kolmá. To v případě přímky a kružnice (obr. 7) znamená, že k_0 bude mít střed M v průsečíku zadané přímky s kolmicí p_1 vedenou ze středu kružnice na tuto přímku, v případě dvou kružnic (obr. 8) pak bude její střed průsečíkem spojnice středů p_2 a chordály

těchto kružnic. Kružnice k_0 protne přímkou p_1 , respektive p_2 v bodě S . Kruhovú inverze se středem v bodě S zobrazí dvojici křivek l, m na soustředné kružnice l', m' .

To vychází z faktu, že kruhovú inverze zachovává odchylky dvou křivek. Leží-li bod S na kružnici k_0 , bude jejím obrazem přímkou k'_0 . Jelikož byla ale kružnice k_0 kolmá na obě zadané křivky, musí toto z konformity kruhové inverze platit i pro k'_0 a oba obrazy l', m' zadaných křivek, jež budou v obou případech kružnice. Jediná přímkou, pro kterou toto platí je průměr obou kružnic. Zároveň z definice kruhové inverze odvodíme, že středy obou kružnic musí ležet na přímkou p_1 , resp. p_2 . Kružnice l', m' jsou tedy soustředné kružnice.



Obrázek 7: Soustředné kružnice z přímky a kružnice



Obrázek 8: Soustředné kružnice ze dvou kružnic

Jednou dalších důležitých znalostí bude výpočet odchyly kruhových křivek, mají-li společné body.

Odchylna přímek je relativně známá záležitost. Pro odchylnu ϕ dvou různoběžných přímek $p_1: a_1x + b_1y + d_1 = 0$ a $p_2: a_2x + b_2y + d_2 = 0$ platí:

$$\cos\phi = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad (1.5.1).$$

Jedná se o známý vztah, který asi není třeba dokazovat.

Co ale platí pro odchylnu přímky a kružnice, mají-li společné body? Mějme tedy přímku p_1 definovanou výše a kružnici $k_1: x^2 + y^2 - 2m_1x - 2n_1y + c_1 = 0$ o středu $S = [m_1; n_1]$ a poloměru r_1 . Jejich odchylna je pak definována jako odchylna normálového vektoru $\vec{n} = (a_1; b_1)$ přímky od vektoru \vec{v} kolmého na tečnu kružnice ve společném bodě $P = [x_0; y_0]$. Vektor \vec{v} zapíšeme jako $\overrightarrow{PS} = S - P = (m_1 - x_0; n_1 - y_0)$. Pro odchylnu ϕ vektorů \vec{v} a \vec{n} platí již známý vzorec, tedy
$$\cos\phi = \frac{|a_1(m_1-x_0)+b_1(n_1-y_0)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{(m_1-x_0)^2+(n_1-y_0)^2}}.$$
 Když se na tento vztah podíváme blíže, umocníme, roznásobíme a díky faktu, že bod P leží na obou křivkách dosadíme ze vztahů $-ax_0 - by_0 = d$ a $x_0^2 + y_0^2 - 2m_1x_0 - 2n_1y_0 = -c_1$, získáme:

$$\cos\phi = \frac{|a_1m_1+b_1n_1+d|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2-c}} \quad (1.5.2).$$

Představme si další kružnici $k_2: x^2 + y^2 - 2m_2x - 2n_2y + c_2 = 0$. Nyní se můžeme podívat na odchylnu dvou kružnic $k_1([m_1; n_1], r_1)$ a $k_2([m_2; n_2], r_2)$, pokud samozřejmě platí, že vzdálenost jejich středů je menší než součet jejich poloměrů. Mají tedy společný bod $K = [x_{00}; y_{00}]$. Odchylna těchto kružnic je právě odchylna jejich tečen t_1 a t_2 v bodě K . Normálové vektory těchto tečen jsou $\vec{n}_{t_1} = (m_1 - x_{00}; n_1 - y_{00})$ a $\vec{n}_{t_2} = (m_2 - x_{00}; n_2 - y_{00})$. Platí tedy

$$\cos\phi = \frac{|(m_1-x_{00})(m_2-x_{00})+(n_1-y_{00})(n_2-y_{00})|}{\sqrt{(m_1-x_{00})^2+(n_1-y_{00})^2}\sqrt{(m_2-x_{00})^2+(n_2-y_{00})^2}} \quad / \cdot \frac{2}{2}$$

$$\cos\phi = \frac{|2m_1m_2+2n_1n_2+(2x_{00}^2+2y_{00}^2-2m_1x_{00}-2m_2x_{00}-2n_1y_{00}-2n_2y_{00})|}{2\sqrt{m_1^2+n_1^2+(x_{00}^2+y_{00}^2-2m_1x_{00}-2n_1y_{00})}\sqrt{m_2^2+n_2^2+(x_{00}^2+y_{00}^2-2m_2x_{00}-2n_2y_{00})}}.$$

Vidíme, že podobně jako výše lze některé výrazy zjednodušit pomocí rovnic těchto kružnic, jelikož z faktu, že bod K je bodem obou kružnic, platí: $x_{00}^2 + y_{00}^2 - 2m_i x_{00} - 2n_i y_{00} = -c_i; i = 1, 2$. Tedy výsledná rovnice bude mít tvar

$$\cos\phi = \frac{|2m_1 m_2 + 2n_1 n_2 - c_1 - c_2|}{2\sqrt{m_1^2 + n_1^2 - c_1}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 - c_2}} \quad (1.5.3).$$

1.6 Odvození kruhové inverze pomocí prostorových vztahů

1.6.1 Vztah kruhové a sférické inverze

Sférická inverze je analogické zobrazení ke kruhové inverzi rozšířené do prostoru. Její definice je tedy stejná, jen se tentokrát pohybujeme v trojrozměrném prostoru. Definujme ji rovnou v Möbiově prostoru.

Mějme v Möbiově prostoru M_3 dán bod S a uvažujme číslo $\kappa \neq 0$. Zobrazení, které každému bodu $X \neq S, X \neq M_\infty$ Möbiova prostoru přiřadí bod X' tak, že pro něj platí:

- 1) Polopřímka SX' je totožná s polopřímkou SX právě tehdy, když $\kappa > 0$ a opačná, je-li $\kappa < 0$,
- 2) $|SX||SX'| = |\kappa|$,
- 3) Obrazem bodu S je bod M_∞ a naopak,

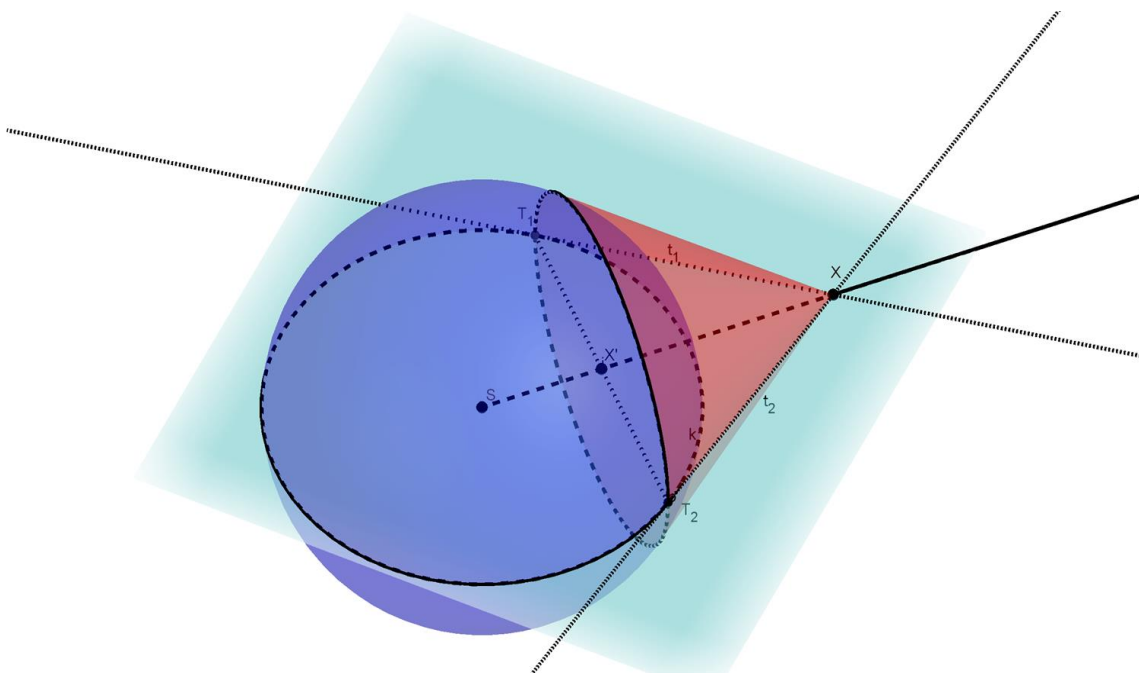
nazýváme *sférická inverze*. Bod S se nazývá *střed inverze* a číslo κ *koeficient inverze*.

Tato definice, obdobně jako ta v rovině, přirozeně zadává sféru samodružných bodů – *základní sféru* Ω .

Stále platí, že Möbiův bod je bodem každé přímky, musí být tedy i bodem každé roviny v Möbiově prostoru, a stále leží ve vnější oblasti každé kružnice, a tedy i sféry v M_3 .

Vztah kruhové a sférické inverze je potom nasnadě.

Pokud sféru Ω protneme libovolnou rovinou ρ obsahující střed sféry S , pak pro všechny body X, X' , které leží v této rovině a byly zobrazené sférickou inverzí o středu S s koeficientem κ platí, že jsou ve vztahu kruhové inverze se středem S a koeficientem κ v rovině ρ , kde základní kružnice je křivka řezu sféry Ω rovinou ρ – značíme k (obr. 9). Rovina ρ má všechny atributy Möbiovy roviny.



Obrázek 9: Sférická a kruhová inverze

1.6.2 Odvození kruhové inverze pomocí stereografické projekce

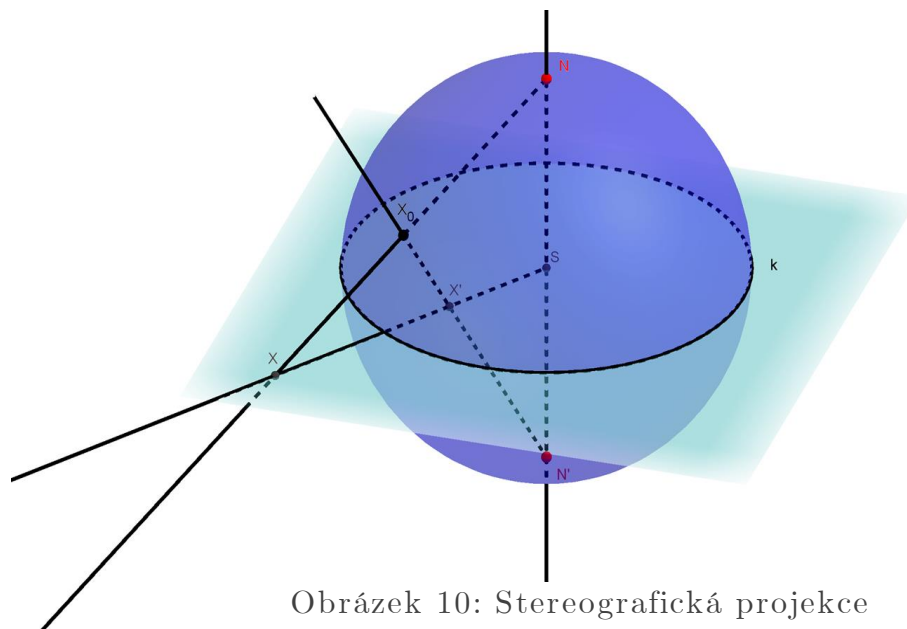
Další cesta k zavedení kruhové inverze může vést přes takzvanou *stereografickou projekci*. Téma stereografické projekce je velmi rozsáhlé, proto ji nebudeme rozvádět do podrobností a ukážeme si čistě její vztah ke kruhové inverzi.

Podobně jako kruhová inverze je i stereografická projekce úhlojevné (konformní) zobrazení, které není plochojevné, ani délkojevné. Už to nás může vést k myšlence, jestli nemá právě s kruhovou inverzí nějakou spojitost.

Mějme tedy v trojrozměrném eukleidovském prostoru sféru Ω o středu S a poloměru κ , dále rovinu ρ , procházející bodem S a konečně body N a N' sféry budou body kolmé s bodem S , ležící na kolmici k ρ .

Zobrazení, které každému bodu $X_0 \neq N$ sféry Ω přiřadí bod X jakožto průsečík roviny ρ s polopřímku NX_0 , nazýváme stereografická projekce.

Obdobně lze každému bodu $X_0 \neq N'$ sféry samozřejmě přiřadit i jeho obraz X' jakožto průsečík polopřímky $N'X_0$ s rovinou ρ . Platí-li tedy, že $X_0 \neq N \wedge X_0 \neq N'$. Potom můžeme říkat, že bod X' je obrazem bodu X ve sférické inverzi podle sféry Ω a naopak, pokud oba vznikly postupem popsaným výše. Vzhledem k tomu, že tyto body budou ovšem vždy ležet pouze v rovině ρ , nemá cenu mluvit o sférické inverzi jako takové, jelikož ta zobrazuje celý eukleidovský prostor (vyjma bodu S). Můžeme se tedy omezit jen na rovinu ρ . Řez sféry Ω rovinou ρ nazveme k a již si snadno odvodíme, že body X a X' jsou navzájem obrazy v kruhové inverzi se středem S , koeficientem κ a samodružnou kružnicí k (obr.10).

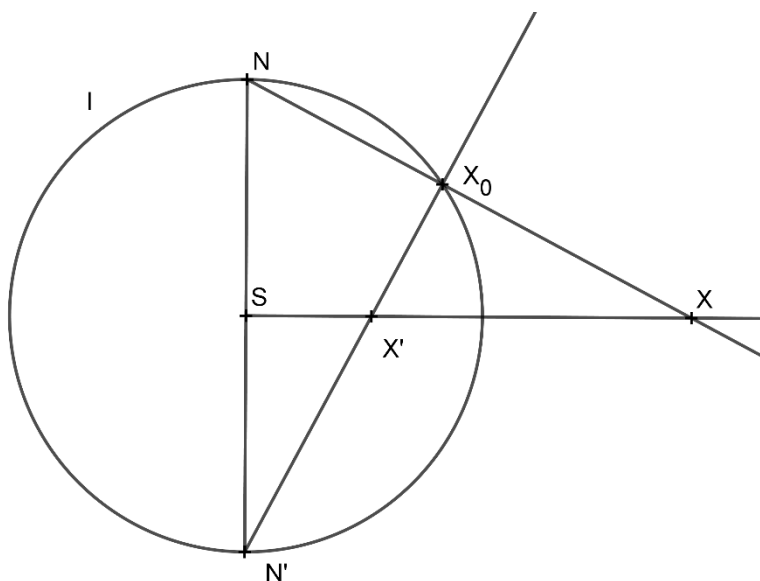


Obrázek 10: Stereografická projekce

Způsobů, jak dokázat, že tyto body si odpovídají v kruhové inverzi vzhledem ke kružnici k , je hned několik. Zde si ukážeme dva, jeden vycházející přímo z definice kruhové inverze a druhý, který vychází z jedné z jejich vlastností, a to sice, že tyto body musí být vzájemně polárně sdružené.

1. zp.: (Obr. 11) Body S , X a X' jsou evidentně kolineární a zároveň body X_0 , X , X' leží v téže polorovině, jejíž hraniční přímkou je NN' . Dále vidíme, že trojúhelníky XSN a $N'X_0N$ jsou si podobné, jelikož jsou oba pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu N . Stejně tak jsou si podobné i trojúhelníky $N'X_0N$ a $N'SX'$ – oba jsou pravoúhlé a sdílejí úhel u vrcholu N' . Jelikož pro podobnost platí tranzitivita, jsou si podobné i trojúhelníky XSN a $N'SX'$, tedy můžeme

psát rovnost $|SX|:|NS| = |N'S|:|SX'|$. Odtud $|SX||SX'| = |\kappa|$, což je analytické vyjádření kruhové inverze v rovině ρ o středu S a koeficientu κ .



Obrázek 11: Stereografická projekce a kruhová inverze (zp. 1)

2. zp.: Již bylo zmíněno, že v této části důkazu využijeme faktu, že v kruhové inverzi jsou bod a jeho obraz polárně sdružený, tedy, že bod X leží na poláře bodu X' a naopak. Tento důkaz vychází z projektivní geometrie.

Průsečík polopřímky NX' se sférou Ω , který je různý od bodu N označíme X'_0 . Body N, N', X_0 a X'_0 leží v jedné rovině.

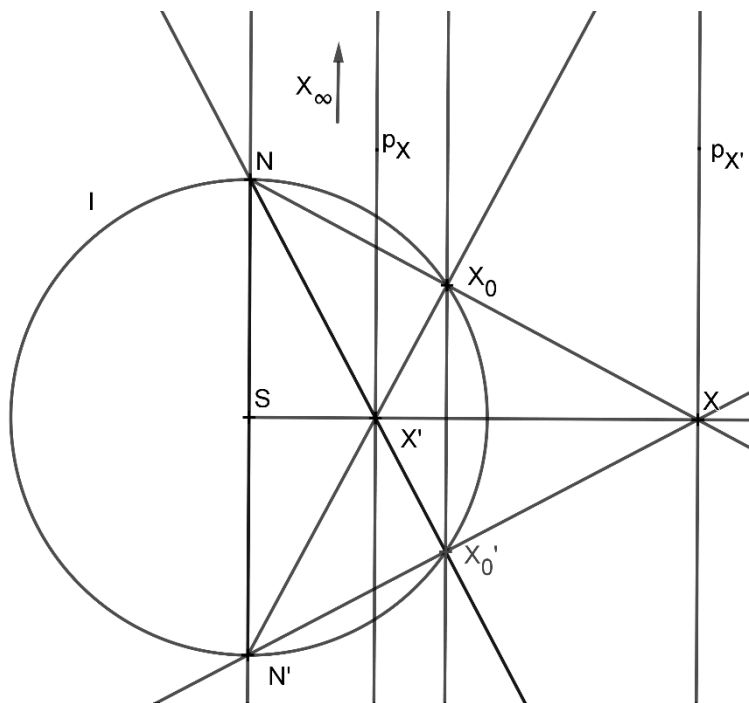
Každá čtveřice bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá úplný čtyřroh. Body N, N', X_0, X'_0 nazveme jeho vrcholy. Šest přímek, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazveme stranami úplného čtyřrohu N, N', X_0, X'_0 . Tyto strany se protínají v dalších třech bodech, jimž budeme říkat diagonální vrcholy úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá diagonální a stejně tak jeho strany jsou diagonálními stranami úplného čtyřrohu.

Čtveřici koplanárních bodů N, N', X_0, X'_0 (obr. 12) tedy sestrojíme množinu všech možných přímek, která je určena všemi různými dvojicemi těchto bodů. Průsečík přímky NX'_0 s $N'X_0$ je bod X' , průsečík NX_0 s $N'X'_0$ je bod X a

NN' s X_0X_0' jsou rovnoběžné (v rozšířeném eukleidovském prostoru mají nevlastní společný bod – označme jej X_∞).

V projektivní geometrii platí věta: Je-li kuželosečce vepsán čtyřroh, pak každý jeho diagonální vrchol je pólem protější diagonální strany.

Daná čtveřice bodů leží v jedné rovině a zároveň na sféře, tedy všechny leží na kružnici, což je kuželosečka. Přímka XX_∞ je tedy polárou bodu X' , zároveň přímka $X'X_\infty$ je polárou bodu X . Body X a X' jsou tedy polárně sdružené vůči kružnici $k(S; \sqrt{\kappa})$ a splňují tak vztah kruhové inverze v rovině ρ se středem S a koeficientem κ .



Obrázek 12: Stereografická projekce a kruhová inverze (zp. 2)

Ukázali jsme tedy, že každou kruhovou inverzi s kladným koeficientem lze získat jako složení inverzního zobrazení ke stereografické projekci z bodu N a stereografické projekce z bodu N' , který je k N diametrálně protilehlý.

Stereografická projekce nachází své uplatnění zejména v kartografii, kde se ale pro názornost volí rovina ρ jako rovina tečná ke sféře v bodě N' . Pro úplnost jen zmiňme, že i v takovém případě lze pomocí ní samozřejmě zadat kruhovou inverzi všech bodů X a X' v ρ . Bod X bychom získali obdobně jako výše

– jako průsečík polopřímky NX_0 s rovinou ρ , bod X' by pak vznikl jako průsečík polopřímky NX'_0 s ρ , kde X'_0 je obrazem bodu X_0 v rovinové souměrnosti podle roviny rovnoběžné s ρ procházející středem sféry Ω . Středem takovéto inverze by byl bod N' a její koeficient by byl roven $\sqrt{2\kappa}$.

2. Analytické vyjádření kruhové inverze

V této kapitole budeme na kruhovou inverzi nahlížet čistě početně. S využitím výše položených základů a předpokladů zde postupně analyticky odvodíme obrazy různých křivek od základních, jakými jsou zobecněné kružnice, až po ty složitější.

Základem je samozřejmě odvození rovnice pro zobrazení obecného bodu. Z vlastností a definice plynou pro nás dvě zásadní vlastnosti.

Za prvé, střed inverze S , libovolný bod X a jeho obraz X' jsou kolineární a pro $\kappa > 0$ leží dokonce na stejné polopřímce. Platí tedy vztah:

$$X' - S = k(X - S) \quad (2.0.1),$$

kde číslo $k > 0$. Z výše zmíněného vztahu samozřejmě přímo plyne $|SX'| = k \cdot |SX|$. Z definice inverze víme, že platí také rovnost $|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}$. Vidíme, že porovnáme-li vyjádření $|SX'|$ z obou vztahů dostaneme po úpravách hodnotu $k = \frac{\kappa}{|SX|^2}$. Nyní dosadíme tuto hodnotu do rovnosti (2.0.1) a přičteme oběma stranám rovnice S , získáme tak rovnici

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} (X - S),$$

ze které rozepsáním po souřadnicích ve zvolené kartézské soustavě souřadnic získáme obecné vyjádření obrazu $X' = [x'_1, x'_2]$ bodu $X = [x_1, x_2]$ v kruhové inverzi se středem $S = [s_1, s_2] \neq [x_1, x_2]$ a koeficientem $\kappa > 0$:

$$x'_1 = s_1 + \frac{\kappa}{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} (x_1 - s_1),$$

$$x'_2 = s_2 + \frac{\kappa}{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} (x_2 - s_2).$$

Získaný předpis by samozřejmě bylo možné zobecnit i pro n -rozměrný eukleidovský prostor jako

$$x'_i = s_i + \frac{\kappa}{\sum_{j=1}^n (x_j - s_j)^2} (x_i - s_i),$$

$i = 1, 2, \dots, n$, kde $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $X' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$, $S = [s_1, s_2, \dots, s_n] \neq X$.

Přímo z této rovnosti snadno odvodíme, proč obraz středu není v eukleidovské rovině definován. Při dosazení $X = S$ dostáváme $X' = S + \frac{\kappa}{|SS|^2}(S-S)$. Vzdálenost $|SS|$ je samozřejmě rovna nule, jednalo by se tedy o případ dělení nulou, který je nepřipustný. Dále budeme uvažovat místo eukleidovské roviny rovinu Möbiovu, kde, jak již víme, je obrazem středu S doplněný bod M_∞ , který je bodem každé přímky a leží ve vnější oblasti každé kružnice.

Pro zjednodušení dalších výpočtů můžeme bez újmy na obecnosti ztožnit střed inverze S s počátkem zvolené kartézské soustavy souřadnic O . Získáme tak jednodušší rovnice

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{\kappa x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\x_2' &= \frac{\kappa x_2}{x_1^2 + x_2^2}.\end{aligned}\quad (2.0.2)$$

Díky involutornosti, tedy faktu, že odpovídá-li bodu X v inverzi bod X' , odpovídá v téže inverzi i bodu X' bod X . Platí tedy též:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\kappa x_1'}{x_1'^2 + x_2'^2}, \\x_2 &= \frac{\kappa x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2}.\end{aligned}\quad (2.0.3)$$

2.1 Analytické odvození obrazů kruhových křivek v kruhové inverzi

V kapitolách výše je pojem kruhových křivek již několikrát zmíněný, připomeňme jen, že se jedná o všechny kružnice a přímky (připustíme-li triviální případ nulových křivek, tak i body) v Möbiově rovině. Analytický zápis všech takových kruhových křivek by byl následující:

$$k: E(x_1^2 + x_2^2) + 2Ax_1 + 2Bx_2 + C = 0 \quad (2.1.1),$$

Kde $A, B, C, E \in \mathbb{R}$ a platí $A^2 + B^2 - CE \geq 0$.

Podmínka $A^2 + B^2 - CE \geq 0$ vychází z následující úvahy: Aby rovnice (2.1.1) měla smysl, musí být alespoň jeden z koeficientů A , B , E nenulový. Potom může nastat buď případ, že $E = 0$ a $A^2 + B^2 \neq 0$, zde se potom jedná o rovnici přímky, nebo $E \neq 0$.

V druhém případě můžeme rovnici vydělením koeficientem E upravit na tvar:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{2A}{E}x_1 + \frac{2B}{E}x_2 + \frac{C}{E} = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{A}{E}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{B}{E}\right)^2 + \frac{CE - A^2 - B^2}{E^2} = 0.$$

Zde je již vidět, že pro $CE - A^2 - B^2 > 0$ bude řešením prázdná množina, pro $CE - A^2 - B^2 = 0$ se pak jedná o bod $\left[-\frac{A}{E}; -\frac{B}{E}\right]$ (resp. o kružnici s nulovým poloměrem a středem právě v tomto bodě).

Za x_1 a x_2 z rovnice (2.1.1) dosadíme popořadě vyjádření z rovnic (2.0.3) výše a provedeme diskuzi. Dostáváme tedy následující vztahy:

$$k': E \left(\frac{\kappa x_1'}{x_1'^2 + x_2'^2}\right)^2 + E \left(\frac{\kappa x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2}\right)^2 + 2A \frac{\kappa x_1'}{x_1'^2 + x_2'^2} + 2B \frac{\kappa x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2} + C = 0$$

$$k': E \kappa^2 \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{(x_1'^2 + x_2'^2)^2} + \kappa \frac{2Ax_1' + 2Bx_2'}{x_1'^2 + x_2'^2} + C = 0,$$

po zkrácení výrazu v prvním sčítanci a vynásobením celé rovnice (z faktu, že $X \neq S = [0,0]$) nenulovým výrazem $x_1'^2 + x_2'^2$ dostaneme:

$$k': C(x_1'^2 + x_2'^2) + 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' + E\kappa^2 = 0 \quad (2.1.2).$$

Nyní máme připravenou rovnici v ideálním stavu pro provedení diskuze. Po vyloučení nulové křivky ($A^2 + B^2 - CE = 0$) tedy může nastat jeden z následujících případů:

a) Křivka k je přímka procházející středem inverze, tzn. $E = 0$, $C = 0$, tedy:

$$k: 2Ax_1 + 2Bx_2 = 0,$$

$$k': 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' = 0,$$

čili vidíme, že $k \equiv k'$.

Její syntetické sestrojení je tedy triviální.

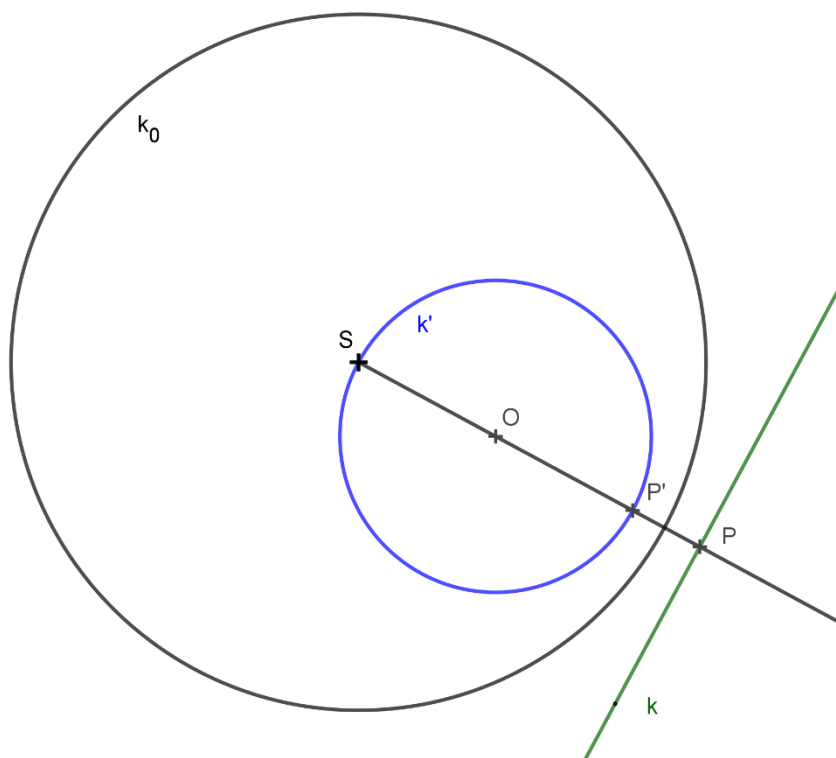
b) k je přímka a neprochází středem inverze neboli $E = 0$, $C \neq 0$, z čehož:

$$k: 2Ax_1 + 2Bx_2 + C = 0,$$

$$k': C(x_1'^2 + x_2'^2) + 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' = 0$$

a jedná se tedy zřejmě o kružnici k' procházející středem inverze (počátkem).

K sestrojení takové kružnice potřebujeme běžně tři obecné body, zde využijeme toho, že obraz bodu M_∞ přímky už máme – je to bod S – a také víme, kruhová inverze je úhlojevné zobrazení. Tedy nejsnazším způsobem by bylo navést středem inverze přímku kolmou k přímce k . Již víme, že taková kolmice se zobrazí sama na sebe, tedy výsledná kružnice k ní musí být ve vzniklém a zobrazeném průsečíku P' také kolmá. Úsečka SP' tedy zjevně bude průměrem vzniklé kružnice k' , její sestrojení je pak triviální (obr. 13).



Obrázek 13: Obraz přímky neprocházející středem

c) Uvažujme kružnici procházející středem, tedy $E \neq 0, C = 0$.

$$k: E(x_1^2 + x_2^2) + 2Ax_1 + 2Bx_2 = 0,$$

$$k': 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' + E\kappa = 0,$$

z čehož vidíme, že výsledná křivka je přímka neprocházející středem.

Opět bychom mohli při zobrazování této přímky postupovat tak, že si zobrazíme libovolné dva body a jimi vedeme přímku. Rychlejší cestou je potom postup obrácený k tomu, který je popsán v odřážce b). Tedy sestrojíme bodem S průměr zobrazované kružnice, jeho druhý průsečík s kružnicí označíme P , najdeme jeho obraz v inverzi a tím vedeme kolmici na sestrojený průměr SP . Tato kolmice je hledaným obrazem kružnice k . Obrázek by byl analogií k obrázku 13.

d) k je opět kružnice, tentokrát neprocházející středem, což nám dává pro $E \neq 0, C \neq 0$ následující rovnice:

$$k: E(x_1^2 + x_2^2) + 2Ax_1 + 2Bx_2 + C = 0,$$

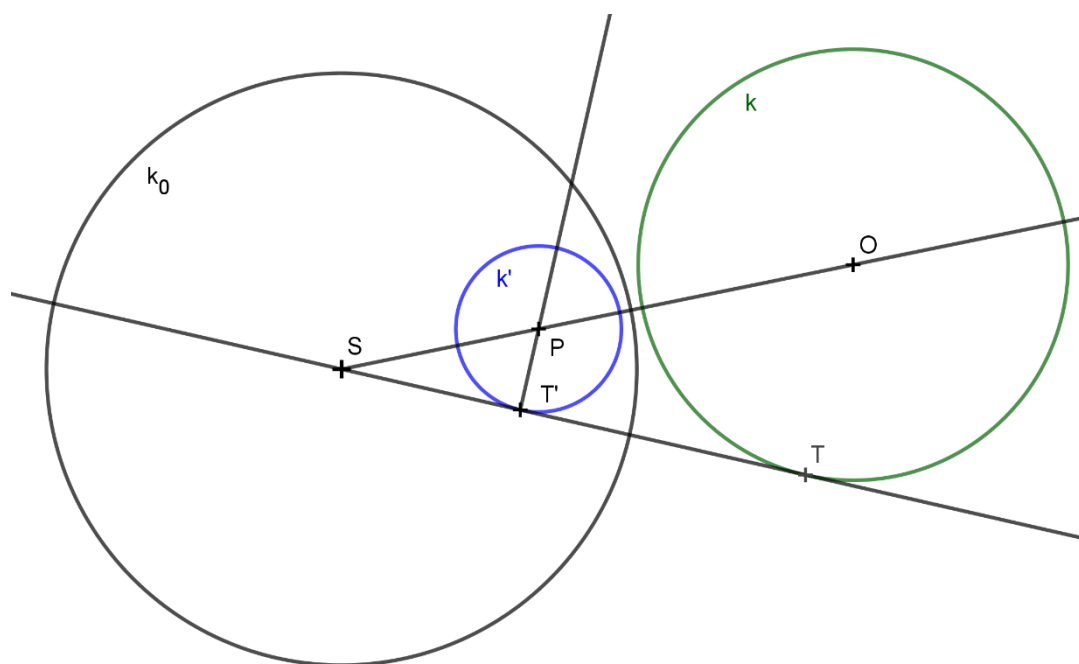
$$k': C(x_1'^2 + x_2'^2) + 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' + E\kappa^2 = 0,$$

z čehož snadno poznáme, že výsledkem je kružnice, která opět neprochází středem inverze.

Jako nejlogičtější možnost by se v tomto případě jevilo zobrazit střed a jeden bod původní kružnice. Zde bohužel narazíme na problém, který má na svědomí fakt, že kruhová inverze nezachovává dělicí poměr (v Möbiově rovině zachovává pouze dvojpoměr, a i ten pouze v případě přímek procházejících středem). Střed obrazu nemusí odpovídat obrazu středu vzorové kružnice (důkaz níže).

Využit tedy můžeme buď téhož, čeho jsme využili ve dvou případech výše. Tedy zobrazení průměru kružnice, s tím rozdílem, že zde bychom si potřebovali zobrazit dva body, jelikož žádný bod (pokud kružnice neprotíná základní kružnici) nezískáme triviálně.

Alternativní volbou by pak bylo navést ze středu inverze tečnu t k zobrazované kružnici a zobrazit bod dotyku T . Opět z faktu, že kruhová inverze zachovává odchyly křivek bude platit, že tato přímka musí být tečnou i pro obraz této kružnice. Z úhlojevnosti zároveň platí, že střed obrazu kružnice bude ležet na přímce p , která spojuje střed vzoru se středem inverze. Když tedy z bodu T' povedeme kolmici na přímku $t \equiv t'$, získáme jejím průsečíkem s přímkou p bod P , který bude středem obrazu kružnice k . Její sestrogení je



Obrázek 14: Obraz kružnice neprocházející středem

nyň už opět triviální. Tento postup je naznačen na obrázku 14.

Jednoduchým důsledkem důkazu výše a této konstrukce je to, že kružnice neprocházející středem inverze a její obraz v kruhové inverzi jsou stejno-
lehlé se středem stejnolehlosti v bodě S .

V případech a) a d) se můžeme analyticky podívat i na několik zajímavých vlastností zmíněných v kapitolách výše.

Vidíme, že nerovnost $A^2 + B^2 - CE > 0$ může pro $E \neq 0, C \neq 0$ být splněna i v případě, že koeficienty A a B budou rovny nule a to tehdy, když $\text{sgn}(C) = -\text{sgn}(E)$. Pak by rovnice takto obecně zadané kružnice vypadala

po úpravách následovně: $k: x_1^2 + x_2^2 = -\frac{C}{E}$ a její obraz by byl vyjádřen jako $k': x_1'^2 + x_2'^2 = -\frac{E}{C}\kappa^2$ a číslo $-\frac{C}{E}$, resp $-\frac{E}{C}$, je z předpokladu výše kladné. Jedná se tedy zřejmě o soustředné kružnice se středem v počátku – středem inverze. Pro případ, kdy je $-\frac{C}{E} = \kappa$ potom po úpravách získáme rovnice $k: x_1^2 + x_2^2 = \kappa$ a $k': x_1'^2 + x_2'^2 = \kappa$ a vidíme, že platí $k \equiv k'$, tedy, že kružnice, vzhledem ke které invertujeme, je samodružná.

V případě a) platí poměrně užitečný fakt a to sice, že kruhová inverze na Möbiově rovině zachovává dvojpoměr na přímkách procházejících středem inverze.

Dvojpoměr je jeden z méně známých pojmů, na rozdíl od dělicího poměru. Dvojpoměr je v podstatě poměr dělicích poměrů. Máme-li tedy body K, L, M, N ($K \neq L$ a $M \neq K$) na přímce p , která prochází středem inverze S a platí pro ně, že je-li $N \neq K$ a $N \neq L$, pak $\frac{(KLM)}{(KLN)} = \mu$ (kde $(KLM) = \frac{|KM|}{|LM|}$ a $(KLN) = \frac{|KN|}{|LN|}$), pokud se $N = L$, pak $\mu = 0$ a pokud $N = K$, pak $\mu = \infty$, číslo μ nazveme dělicí dvojpoměr bodů K, L, M, N .

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že tyto body leží na přímce p dané rovnicí $y = 0$. Tedy jejich souřadnice můžeme zapsat jako $K = [x_K; 0]$, $L = [x_L; 0]$, $M = [x_M; 0]$, $N = [x_N; 0]$.

Pro jejich dělicí poměry tedy platí: $(KLM) = \frac{|x_M - x_K|}{|x_M - x_L|}$ a $(KLN) = \frac{|x_N - x_K|}{|x_N - x_L|}$,
čili dvojpoměr $\mu = \frac{|x_M - x_K||x_N - x_L|}{|x_N - x_K||x_M - x_L|}$.

Zobrazíme-li body K, L, M, N v inverzi, získáme následující: $K' = \left[\frac{\kappa}{x_K}; 0\right]$,
 $L' = \left[\frac{\kappa}{x_L}; 0\right]$, $M' = \left[\frac{\kappa}{x_M}; 0\right]$, $N' = \left[\frac{\kappa}{x_N}; 0\right]$.

Potom:

$$(K'/L'/M') = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa}{x_K} - \frac{\kappa}{x_M}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\kappa}{x_L} - \frac{\kappa}{x_M}\right)^2}} = \frac{|\kappa(x_M - x_K)x_L x_M|}{|\kappa(x_M - x_L)x_K x_M|} = \frac{|(x_M - x_K)x_L|}{|(x_M - x_L)x_K|} \quad \text{a} \quad \text{obdobně}$$

$$(K'/L'/N') = \frac{|(x_N - x_K)x_L|}{|(x_N - x_L)x_K|}. \quad \text{Nyní už není daleko k dopočítání dvojpoměru}$$

$$\mu' = \frac{|x_M - x_K||x_N - x_L||x_K||x_L|}{|x_N - x_K||x_M - x_L||x_K||x_L|} = \frac{|x_M - x_K||x_N - x_L|}{|x_M - x_K||x_N - x_L|}. \quad \text{Vidíme zde, že } \mu = \mu'.$$

Další zajímavou vlastností, na kterou se můžeme analyticky ve spojitosti tentokrát s případem d) podívat, je, zdali se střed zobrazované kružnice zobrazí na střed jejího obrazu.

Obecnou rovnici křivky k si dovedeme převést na středovou jako

$$\left(x_1 + \frac{A}{E}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{B}{E}\right)^2 = r^2, \quad \text{kde } r^2 = \frac{A^2 + B^2 - CE}{E^2}, \quad \text{ze které vidíme souřadnice středu } O = \left[-\frac{A}{E}; -\frac{B}{E}\right].$$

Stejně tak převedeme na středovou i rovnici zobrazené křivky k' .

$$\left(x'_1 + \frac{A\kappa}{c}\right)^2 + \left(x'_2 + \frac{B\kappa}{c}\right)^2 = r'^2, \quad \text{kde } r'^2 = \kappa^2 \left(\frac{A^2 + B^2 - EC}{c^2}\right), \quad \text{tedy střed je } O' = \left[-\frac{A\kappa}{c}; -\frac{B\kappa}{c}\right].$$

Bod $O = \left[-\frac{A}{E}; -\frac{B}{E}\right]$ si dále zobrazíme v dané kruhové inverzi na bod $\bar{O} = [\bar{o}_1, \bar{o}_2]$.

$$\bar{o}_1 = \frac{-\frac{A\kappa}{c}}{\left(-\frac{A}{E}\right)^2 + \left(-\frac{B}{E}\right)^2} = -\frac{AE\kappa}{A^2 + B^2} \quad \text{a vidíme, že tento výraz se obecně nerovná } -\frac{A\kappa^2}{c}. \quad \text{Můžeme je však porovnat:}$$

$$-\frac{AE\kappa}{A^2 + B^2} = -\frac{A\kappa}{c}, \quad \text{po několika úpravách získáme rovnost } A^2 + B^2 - CE = 0, \quad \text{kteřou jsme výše vyloučili, jelikož pro tyto hodnoty kruhová křivka degeneruje na bod. Ke stejnému výsledku bychom došli i pro souřadnici } \bar{o}_2 = -\frac{BE\kappa}{A^2 + B^2}.$$

Kruhová inverze tedy obecně nezobrazuje střed zobrazované kružnice na střed zobrazené kružnice. Výjimkou je případ, kdy kružnice degeneruje na bod.

Dalším zajímavým závěrem, který můžeme z rovnic (2.1.1) a (2.1.2) analyticky odvodit je, že kruhová inverze zachovává odchylky mezi dvěma (zde kruhovými) křivkami. Důkaz provedeme následovně:

Odchylka ϕ dvou libovolných nenulových kruhových křivek $k_1: E_1(x_1^2 + x_2^2) + 2A_1x_1 + 2B_1x_2 + C_1 = 0$ a $k_2: E_2(x_1^2 + x_2^2) + 2A_2x_1 + 2B_2x_2 + C_2 = 0$, které mají nějaké společné body, se při správném přepisu rovností (1.5.1), (1.5.2), (1.5.3) odvozených v kapitole 1.5 počítá následovně:

$$\cos\phi = \frac{|2A_1A_2 + 2B_1B_2 - C_1E_2 - C_2E_1|}{2\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1E_1}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2E_2}}$$

rozšíříme-li tento výraz zlomkem $\frac{\kappa^2}{\kappa^2}$, dostaneme rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2|2A_1A_2 + 2B_1B_2 - C_1E_2 - C_2E_1|}{2\kappa^2\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1E_1}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2E_2}} &= \frac{|2\kappa A_1A_2 + 2\kappa B_1B_2 - \kappa C_1E_2 - \kappa C_2E_1|}{2\sqrt{\kappa A_1^2 + \kappa B_1^2 - \kappa C_1E_1}\sqrt{\kappa A_2^2 + \kappa B_2^2 - \kappa C_2E_2}} = \\ &= \frac{|2A'_1A'_2 + 2B'_1B'_2 - C'_1E'_2 - C'_2E'_1|}{2\sqrt{A_1'^2 + B_1'^2 - C_1'E_1'}\sqrt{A_2'^2 + B_2'^2 - C_2'E_2'}} = \cos\phi', \end{aligned}$$

tedy $(\cos\phi = \cos\phi') \wedge (\phi, \phi' \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle) \Rightarrow \phi = \phi'$.

Nyní se můžeme ptát, existují-li vyjma základní i jiné samodružné kružnice. Koneckonců (slabě) samodružných přímek je nekonečně mnoho.

Výše jsme odvodili, jak vypadá předpis kružnice, která je výsledkem zobrazení jiné kružnice. Předpokládejme, že je tato kružnice slabě samodružná, to znamená, že se nemusí rovnat jednotlivé souřadnice, ale výrazy, kterými jsou tato kružnice a její obraz zadány, jako celky. Porovnejme je tedy:

$$\begin{aligned} k: E(x_1^2 + x_2^2) + 2Ax_1 + 2Bx_2 + C &= 0 \\ k': C(x_1'^2 + x_2'^2) + 2A\kappa x_1' + 2B\kappa x_2' + E\kappa^2 &= 0. \end{aligned}$$

Je možno vidět, že druhý a třetí člen první a druhé rovnosti se liší pouze o násobek κ a my se nechceme omezovat předpokladem, že $\kappa = 1$. Vydělme tedy druhou rovnicí nenulovým číslem κ .

$$\begin{aligned} k: E(x_1^2 + x_2^2) + 2Ax_1 + 2Bx_2 + C &= 0 \\ k': \frac{C}{\kappa}(x_1'^2 + x_2'^2) + 2Ax_1' + 2Bx_2' + E\kappa &= 0 \end{aligned}$$

Nyní už snadno vyčteme, že pro $C \neq 0$ a $E \neq 0$ musí platit $\frac{C}{E} = \kappa$. Tato kružnice je tedy bude samodružná, platí-li pro ni tento poměr. Co to ale reálně znamená?

Je zřejmé, že samodružná kružnice musí mít se základní kružnicí nějaké společné body – aby mohla vůbec být samodružná musí její část ležet jak ve vnitřní, tak ve vnější oblasti základní kružnice. Ne nadarmo se zabýváme touto otázkou až po výpočtu odchylek dvou kruhových křivek.

Konkrétně nás bude zajímat odchylka této kružnice od kružnice základní.

Základní kružnice má rovnici: $x_1^2 + x_2^2 - \kappa = 0$. Pro odchylku ϕ tedy

$$\text{bude platit: } \cos\phi = \frac{|2 \cdot 0 \cdot A + 2 \cdot 0 \cdot B + \kappa E - 1 \cdot C|}{2\sqrt{0^2 + 0^2 + 1 \cdot \kappa \sqrt{A^2 + B^2 - CE}}} = \frac{|0 + 0 + \frac{C}{E}E - C|}{2\sqrt{\kappa \sqrt{A^2 + B^2 - CE}}} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Odpovědí tedy je, že kromě základní kružnice existují i další (slabě) samodružné kružnice, a to sice ty, které jsou kolmé na základní kružnici.

2.2 Kuželosečky v kruhové inverzi

Když nyní víme, jak se zobrazují kruhové křivky a odvodili jsme si analyticky i některé ze základních vlastností kruhové inverze, můžeme přejít k problematice o poznání specifitější. Můžeme se podívat, jak v kruhové inverzi dopadnou obrazy regulárních kuželoseček, popořadě tedy prozkoumáme obrazy elips, parabol a hyperbol v různých polohách vůči středu a kružnici, zadávající inverzi. Vzhledem k involutornosti kruhové inverze budou níže uvedené závěry o obrazech kuželoseček platit i obráceně. To znamená, že kdybychom zobrazili výslednou křivku, byla by jejím obrazem příslušná kuželosečka.

Jelikož se budeme pohybovat výhradně ve dvojrozměrném prostoru, přejdeme také od výše užívaného indexovaného značení souřadnic k přehlednějšímu značení $[x; y]$.

1) Elipsa s ohnisky E, F , hlavními vrcholy A, B a vedlejšími vrcholy C, D

Středová rovnice takové elipsy v kartézských souřadnicích by vypadala následovně:

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, kde $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge m, n \in \mathbb{R}$, bez újmy na obecnosti předpokládejme $a > b$ a pak platí $a = |AS| = |BS|$, $b = |CS| = |BS|$, střed elipsy $S = [m, n]$, z Pýthagorovy věty a vlastností elipsy dále platí $a^2 - b^2 = e^2$, kde $e \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ je tzv. excentricita a $e = |ES| = |FS|$.

a) Střed inverze je ve středu elipsy e

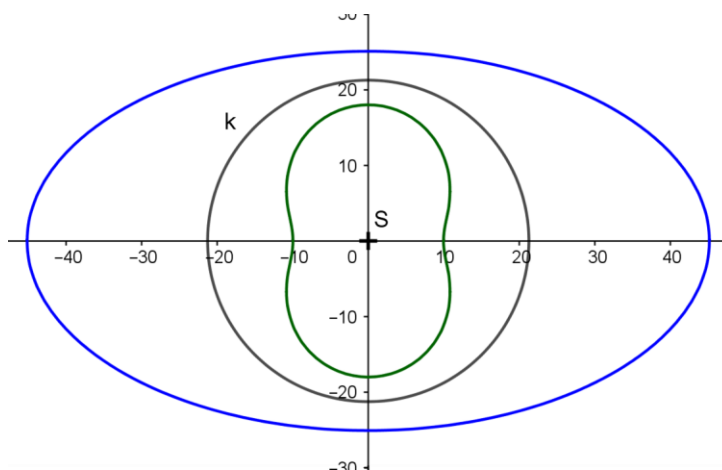
Předpis dané elipsy, tedy pro střed inverze v počátku soustavy souřadnic vypadá takto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sem dosadíme z výše zmíněného a odvozeného vyjádření kruhové inverze a dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\kappa^2 x}{x^2 + y^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\kappa^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{a^2} \kappa^4 x^2 + \frac{1}{b^2} \kappa^4 y^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ \left(\frac{\kappa^2}{a}\right)^2 \left(x^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2\right) &= (x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

Křivku zadanou poslední rovnicí nazýváme ovál (obr. 15).



Obrázek 15: Elipsa a ovál

b) Střed inverze je v jednom z ohnisek elipsy e

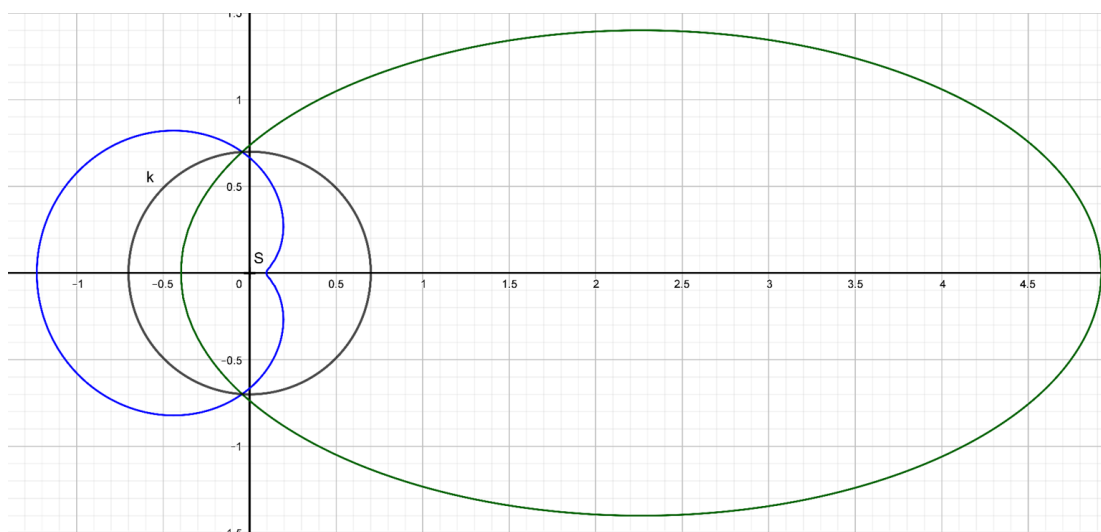
Předpis dané elipsy tedy bude pro $E = [0; 0]$ vypadat následovně:

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nyní je možné opět dosadit.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\kappa x}{x^2 + y^2} - e\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\kappa y}{x^2 + y^2}\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{a^2}(\kappa x - e(x^2 + y^2))^2 + \frac{1}{b^2}\kappa^2 y^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ \kappa(b^2\kappa x^2 + a^2\kappa y^2 - 2b^2ex^3 - 2b^2exy^2) + (x^2 + y^2)^2(b^2e^2 - a^2b^2) &= 0 \\ (b^2(\kappa - 2ex)x^2 + (\kappa a^2 - 2b^2ex)y^2) &= \frac{b^4}{\kappa}(x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

Poslední rovnice je (pravda, trochu složitější) rovnicí Pascalovy *závitnice* (obr. 16). $(x^2 + y^2 + 2dx)^2 = r^2(x^2 + y^2)$



Obrázek 16: Elipsa a Pascalova závitnice

c) Střed inverze splývá s jedním z vrcholů elipsy e

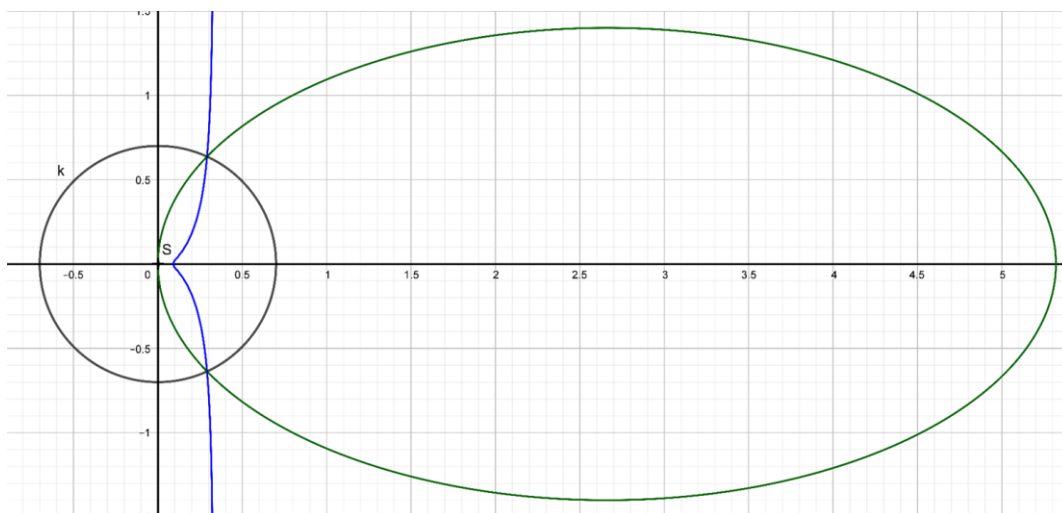
Elipsa e , jejíž vrchol A má souřadnice $[0; 0]$, bude mít následující předpis:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Po dosazení se můžeme výpočtem inspirovat výše, když místo e budeme psát a .

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\kappa x}{x^2 + y^2} - a\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\kappa y}{x^2 + y^2}\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{a^2}(\kappa x - a(x^2 + y^2))^2 + \frac{1}{b^2}\kappa^2 y^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ \kappa(b^2\kappa x^2 + a^2\kappa y^2 - 2b^2ax^3 - 2b^2axy^2) + (x^2 + y^2)^2(b^2a^2 - a^2b^2) &= 0 \\ b^2(\kappa - 2ax)x^2 + a(\kappa a - 2b^2x)y^2 &= 0 \end{aligned}$$

A výsledná rovnice je (opět trochu složitějším) tvarem rovnice *Dioklovy kisoidy* (obr. 17). $y^2(k - x) - x^3 = 0$



Obrázek 17: Elipsa a Dioklova kisoida

2) Parabola s ohniskem F a vrcholem V

Pro zjednodušení pozdějšího zápisu lehce vybočíme ze zasetých kolejí a pro parabolu použijeme tento předpis (tedy parametr pro nás bude $2p$):

$$(x - m)^2 = 4p(y - n),$$

kde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $m, n \in \mathbb{R}$, vrchol V má souřadnice $[m, n]$ a $|FV| = p$

a) Střed inverze splývá s ohniskem F paraboly p

Pro ohnisko $F = [0, 0]$ vypadá rovnice paraboly následovně:

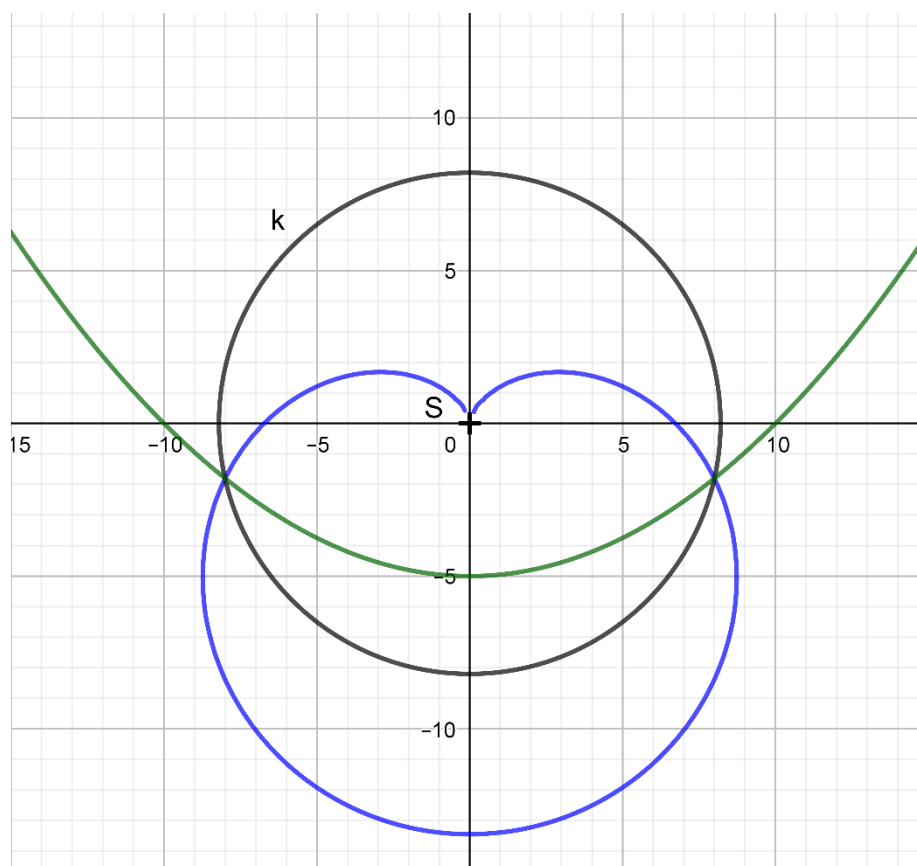
$$x^2 = 4p(y + p)$$

Po dosazení bude situace vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa^2 x}{x^2 + y^2} \right)^2 &= 4p \left(\frac{\kappa^2 y}{x^2 + y^2} - p \right) \\ \kappa^4 x^2 &= 4p\kappa^2 y x^2 + 4p\kappa^2 y^3 - 4p^2(x^2 + y^2)^2 \\ \kappa^2(x^2(4py - \kappa^2) + 4py^3) &= 4p^2(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

Jako výsledek jsme zde získali rovnici *kardioidy* (obr. 18).

$$(x^2 + y^2 - k^2)^2 = 4k^2((x - k)^2 + y^2)$$



Obrázek 18: Parabola a kardioida

b) Vrchol V paraboly p je ve středu inverze

Má-li vrchol V souřadnice $[0,0]$, bude rovnice požadované paraboly takováto:

$$x^2 = 4py.$$

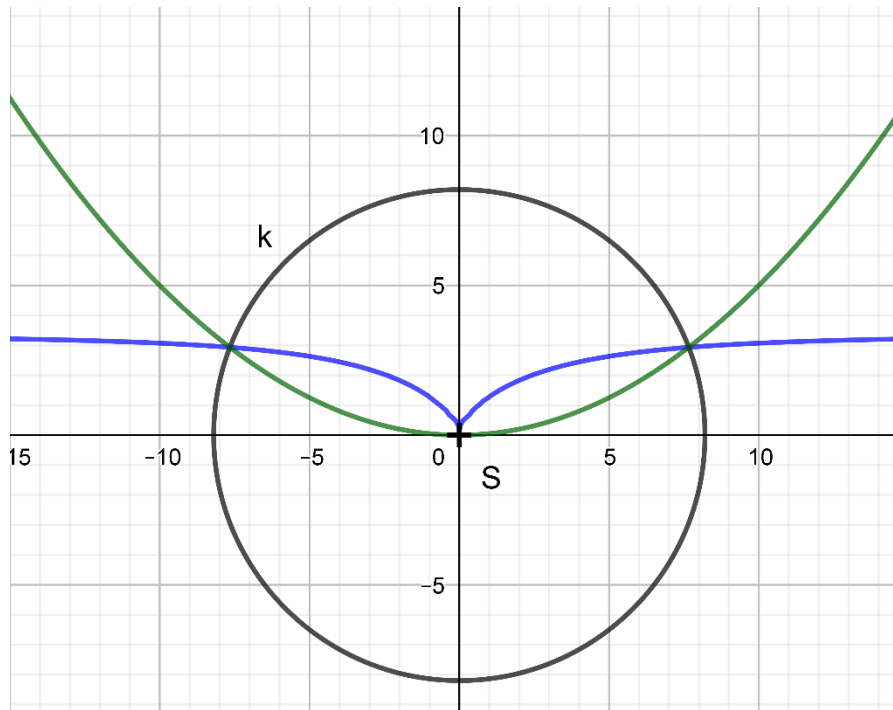
Dosadíme-li nyní, k výsledku se v tomto případě dobereme velmi rychle:

$$\left(\frac{\kappa x}{x^2 + y^2}\right)^2 = 4p \frac{\kappa y}{x^2 + y^2}$$

$$x^2(\kappa^2 - 4p\kappa y) - 4p\kappa y^3 = 0.$$

Jako výsledek zde dostáváme *Dioklovu kisioidu* (obr. 19).

$$x^2(k - y) - y^3 = 0$$



Obrázek 19: Parabola a Dioklova kisa

3) Hyperbola s ohnisky E, F a vrcholy A, B

Zde máme středovou rovnici hyperboly v kartézské soustavě souřadnic, jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge m, n \in \mathbb{R}.$$

Bez újmy na obecnosti dále předpokládáme, že hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x . Pak $a = |AS| = |BS|$ a $e^2 = a^2 + b^2$, kde $e = |ES| = |FS|$ a $S = [m, n]$

a) Střed inverze je ve středu hyperboly h

Rovnice hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic vypadá následovně:

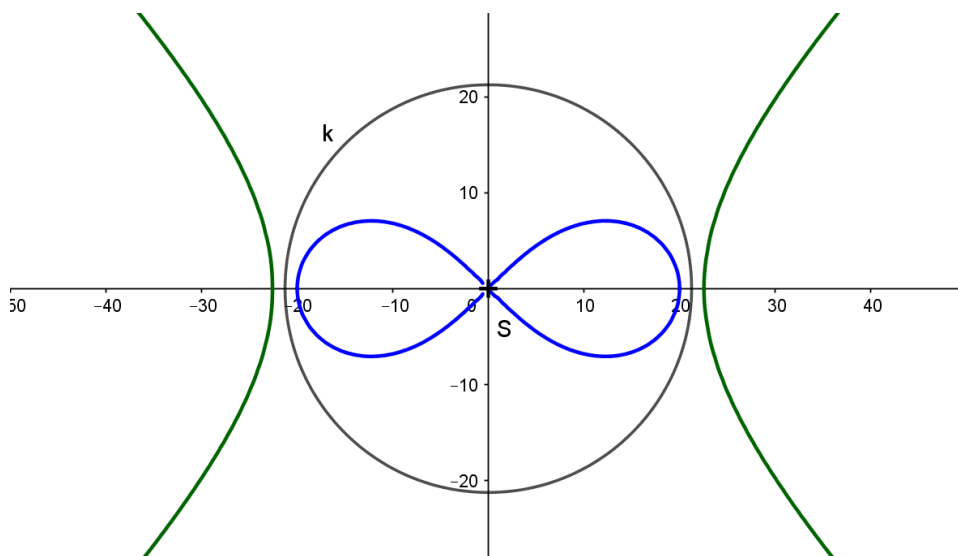
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Po dosazení z rovnic inverze získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\kappa^2 x}{x^2+y^2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\kappa^2 y}{x^2+y^2}\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{a^2} \kappa^4 x^2 - \frac{1}{b^2} \kappa^4 y^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ \left(\frac{\kappa^2}{a}\right)^2 \left(x^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2\right) &= (x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

a vidíme, že poslední rovnice je po provedených úpravách rovnicí *lemniskáty* (obr 20). Pro případ, kdy je číslo $\frac{a}{b} = 1$ se pak jedná o *Bernoulliho lemniskátu*.

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2(x^2 - y^2)$$



Obrázek 20: Hyperbola a lemniskáta

b) Střed inverze splývá s vrcholem hyperboly h

Předpokládáme-li, že střed inverze splyne s bodem A , pak $A = [0; 0]$ a rovnice hyperboly vypadá následovně:

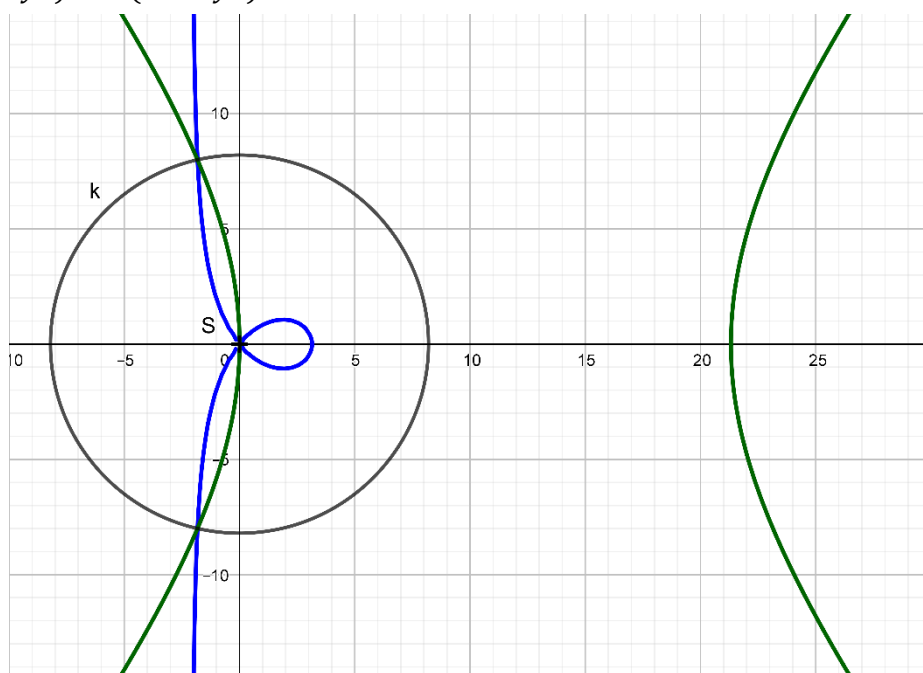
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Opět dosadíme a upravujeme následující rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\kappa x}{x^2+y^2} - a\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\kappa y}{x^2+y^2}\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{a^2} (\kappa x - a(x^2 + y^2))^2 - \frac{1}{b^2} \kappa^2 y^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ \kappa(b^2 \kappa x^2 - a^2 \kappa y^2 - 2b^2 a x^3 - 2b^2 a x y^2) + (x^2 + y^2)^2 (b^2 a^2 - a^2 b^2) &= 0 \\ x(x^2 + y^2) &= \frac{\kappa}{2ab^2} (b^2 x^2 - a^2 y^2). \end{aligned}$$

Poslední rovnice pak přináší křivce známé jako *přímá strofoida* (obr. 21).

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$



Obrázek 21: Hyperbola a přímá strofoida

c) Ohnisko hyperboly h leží ve středu inverze

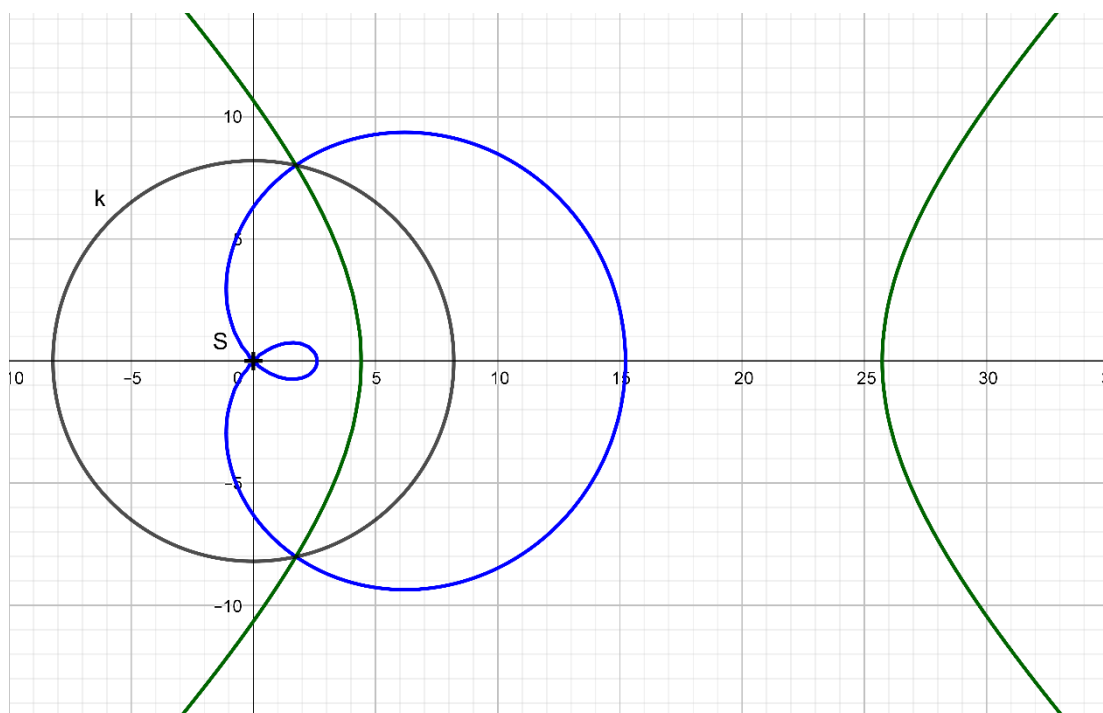
Výpočet provedeme pro $E = S = [0,0]$ z čehož bude požadovaná hyperbola následující předpis:

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Po zobrazení této křivky v inverzi dostáváme následující:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\kappa x}{x^2 + y^2} - e\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\kappa y}{x^2 + y^2}\right)^2}{b^2} = 1 \\ & \frac{1}{a^2}(\kappa x - e(x^2 + y^2))^2 - \frac{1}{b^2}\kappa^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 \\ & \kappa(b^2\kappa x^2 - a^2\kappa y^2 - 2b^2ex^3 - 2b^2exy^2) + (x^2 + y^2)^2(b^2e^2 - a^2b^2) = 0 \\ & (b^2(\kappa - 2ex)x^2 - (\kappa a^2 + 2b^2ex)y^2) = -\frac{b^4}{\kappa}(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

Křivku, která je popsána poslední rovnicí nazýváme *Pascalova závitnice* (obr. 22). $(x^2 + y^2 + 2dx)^2 = r^2(x^2 + y^2)$



Obrázek 22: Hyperbola a Pascalova závitnice

2.3 Další zajímavé křivky

V kruhové inverzi je samozřejmě možné zobrazit libovolnou křivku v eukleidovské rovině. Již v předchozích kapitolách jsme mohli pozorovat, že kruhová inverze může vytvářet křivky vyšších stupňů, než jaké jsou vstupní. Příkladem nám může být hyperbola, která má stupeň 2, jejímž obrazem může být kupříkladu lemniskáta, kterážto má stupeň 4. Můžeme tedy cítit, že obrazy některých křivek a grafů funkcí, se kterými se běžně setkáváme, mohou dopadnout opravdu zajímavě a netradičně.

V této podkapitole nahlédneme ještě jednou krátce do světa křivek a jejich obrazů, ale tentokrát se zaměříme na některé základní funkce i trochu netradičtější křivky, které jsou po invertování opravdu k nepoznání.

Velmi zajímavé jsou v tomto ohledu zvláště periodické funkce. Podíváme se tedy na tři páry těch nejznámějších. Členy jednotlivých dvojic níže jsou v podstatě tytéž křivky, lišící se v eukleidovské rovině jen o jistou afinní transformaci, ale pro jednoduchost a z důvodu, že jsme si střed inverze zafixovali do bodu $[0,0]$, si ukážeme vždy, jak se zobrazí grafy obou funkcí, jelikož se jejich

obrazy budou lišit na základě toho, procházejí-li středem, kolik mají společných bodů s kružnicí inverze apod.

Sinus a kosinus

Funkce sinus a kosinus jsou základní goniometrické funkce, jejich definiční obor je shodně \mathbb{R} a obor hodnot je $(-1,1)$. Jejich grafy nazýváme sinusoida a kosinusoida a navzájem se liší pouze o posunutí o $\frac{\pi}{2}$ ve směru osy x . V našem případě bude mít obraz sinusoidy jeden nevlastní bod, jelikož prochází středem inverze a bude souměrný podle bodu S , oproti tomu obraz kosinusoidy nevlastní body mít nebude a bude osově souměrný podle osy y .

Na rozdíl od toho, jak jsme počítali kuželosečky, zde můžeme s výhodou použít trochu nezvyklé parametrické vyjádření těchto křivek.

Sinus tedy získáme takto:

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= \sin(t); t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Takto vyjádřené hodnoty jednoduše dosadíme do rovnic inverze odvozených výše a získáme parametrické vyjádření výsledné křivky:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + \sin^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa \sin(t)}{t^2 + \sin^2(t)}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Tato křivka je vcelku těžko představitelná, přibližuje nám ji proto obrázek 24.

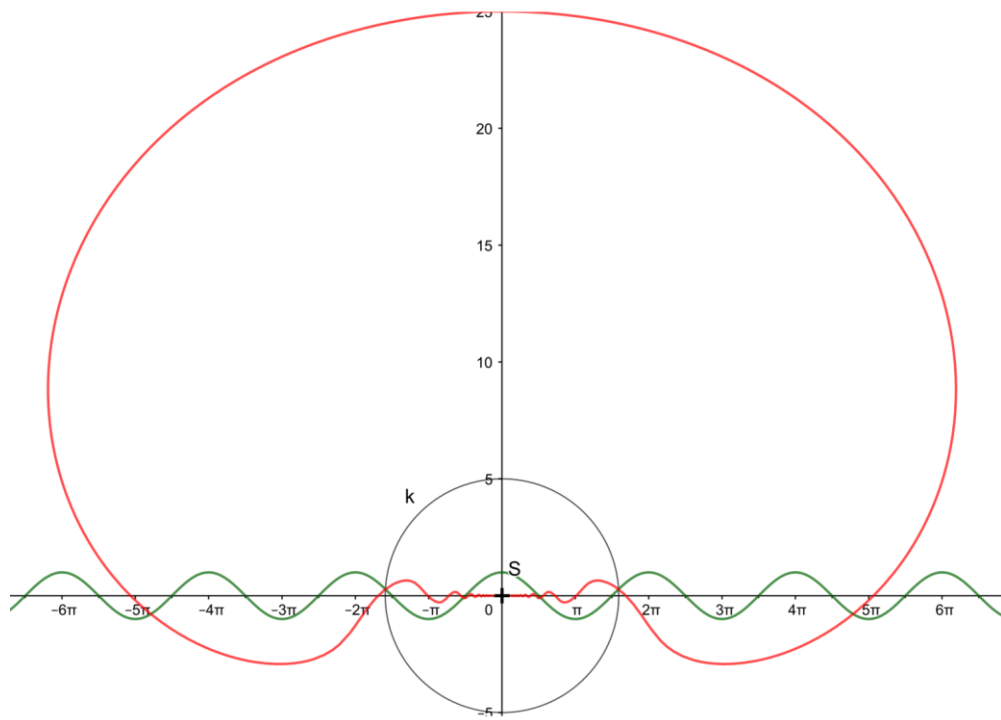
Pro kosinusoidu by byl postup obdobný. Z parametrického vyjádření

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= \cos(t); t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

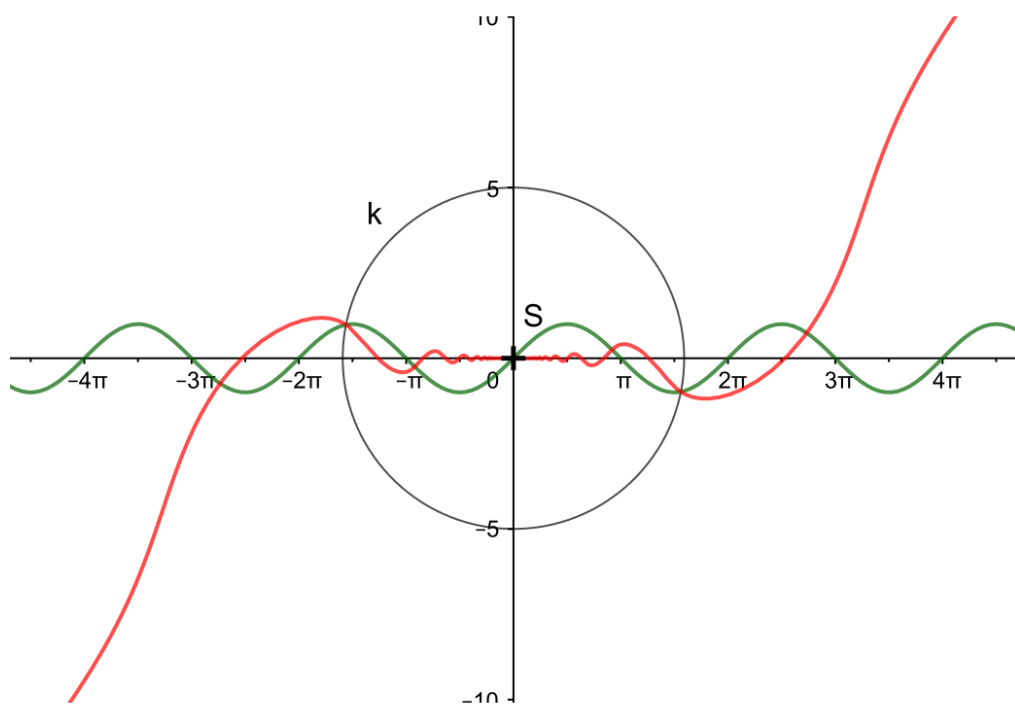
bychom stejnou cestou došli k výsledné křivce:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + \cos^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa \cos(t)}{t^2 + \cos^2(t)}; t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Necháme-li si tuto křivku vykreslit, dostaneme tu, jež vidíme na obrázku 23.



Obrázek 23: Kosinusoida a její obraz



Obrázek 24: Sinusoida a její obraz

Tangens a kotangens

Tangens a kotangens jsou další dvě významné goniometrické funkce, obě mají shodně obor hodnot roven \mathbb{R} , ale jejich definiční obory se liší. Zatímco tangens není definován pro hodnoty $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, tak kotangens není definován pro $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Křivky, jež znázorňují jejich průběh, se nazývají tangentoida a kotangentoida a liší se mezi sebou o posunutí ve směru osy x o $\frac{\pi}{2}$ a osovou souměrnost podle osy y .

K získání obrazů těchto křivek přistoupíme stejně jako v případě sinu a kosinu. Rovnou můžeme říct, že obě výsledné křivky budou souměrné podle počátku a tangens bude mít nevlastní bod.

Tangens má předpis

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= tg(t); t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

z čehož rovnice obrazu křivky bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + tg^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa tg(t)}{t^2 + tg^2(t)}; t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0; (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Tato křivka je vykreslena na obrázku 25.

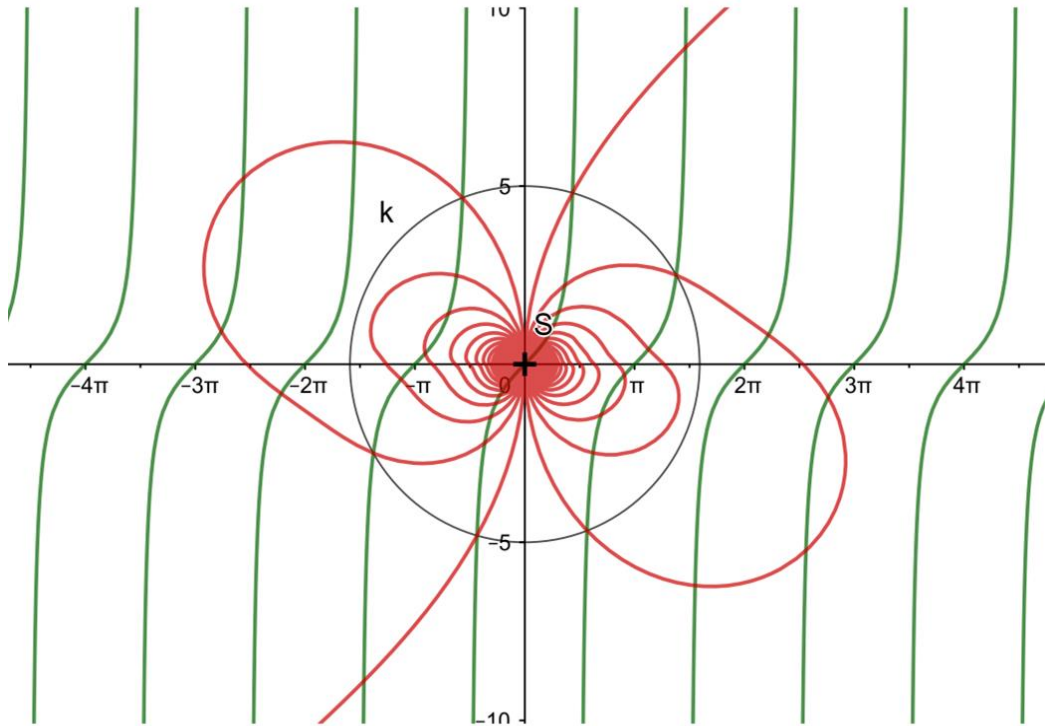
Kotangens

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= cotg(t); t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

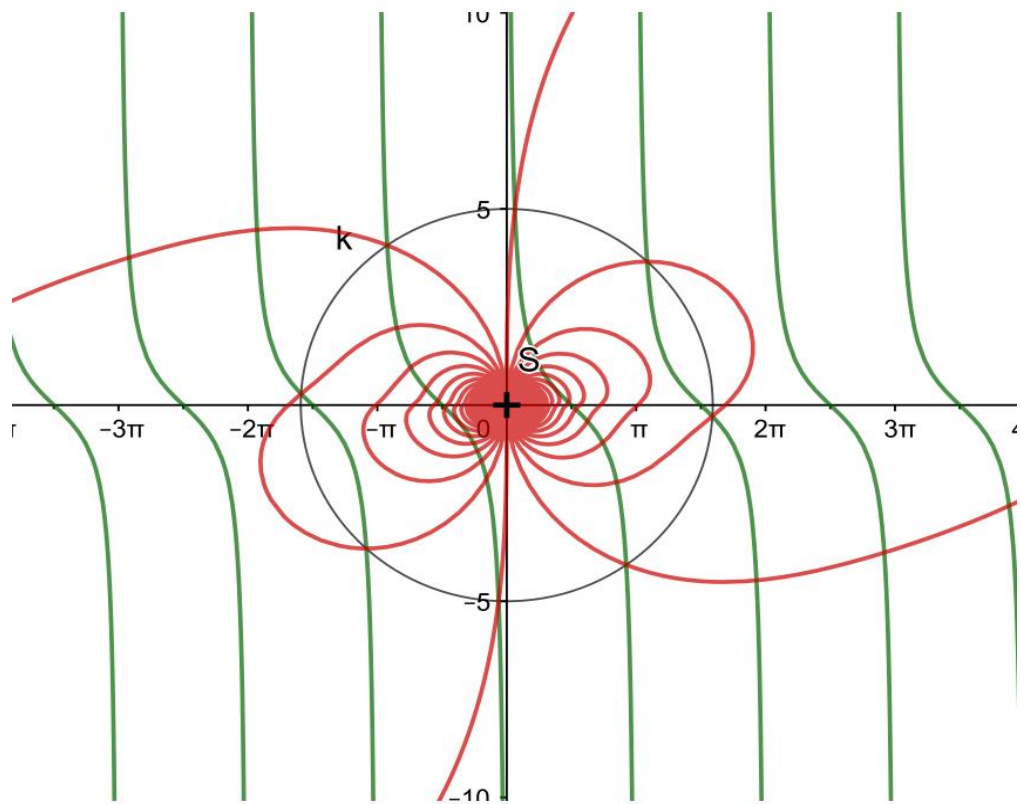
dopadne opět obdobně, tedy:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + cotg^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa cotg(t)}{t^2 + cotg^2(t)}; t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Tento předpis zadává křivku na obrázku 26.



Obrázek 25: Tangentoida a její obraz



Obrázek 26: Kotangentoida a její obraz

Sekans a kosekans

Funkce sekans a kosekans získáme převrácením hodnot kosinu a sinu, tedy $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ a $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Jejich obory hodnot jsou shodně $\mathbb{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle$, definiční obory se pak liší. Pro sekans musíme vyřadit hodnoty, v nichž je kosinus nulový neboli $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Pro kosekans zase vyřazujeme hodnoty, v nichž nabývá nuly sinus, to znamená $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Křivky jejich grafů nazýváme pochopitelně sekantoida a kosekantoida a podobně jako sinusoida a kosinusoida se liší pouze o posunutí o $\frac{\pi}{2}$ ve směru osy x .

Žádná z těchto křivek z definice nemůže procházet počátkem, tedy všechny body jejich obrazů budou vlastní a sekans bude po vzoru kosinu souměrný podle osy y , zatímco kosekans pouze podle počátku. Jak dopadnou předpisy jejich obrazů je z předchozího už asi zřejmé.

Sekans

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \sec(t); t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

se zobrazí na křivku danou předpisem:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + \sec^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa \sec(t)}{t^2 + \sec^2(t)}; t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

jež zadává křivku na obrázku 27.

Kosekans

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \operatorname{cosec}(t); t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

se obdobně zobrazí na:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + \operatorname{cosec}^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa \operatorname{cosec}(t)}{t^2 + \operatorname{cosec}^2(t)}; t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

což je předpis křivky z obrázku 28.

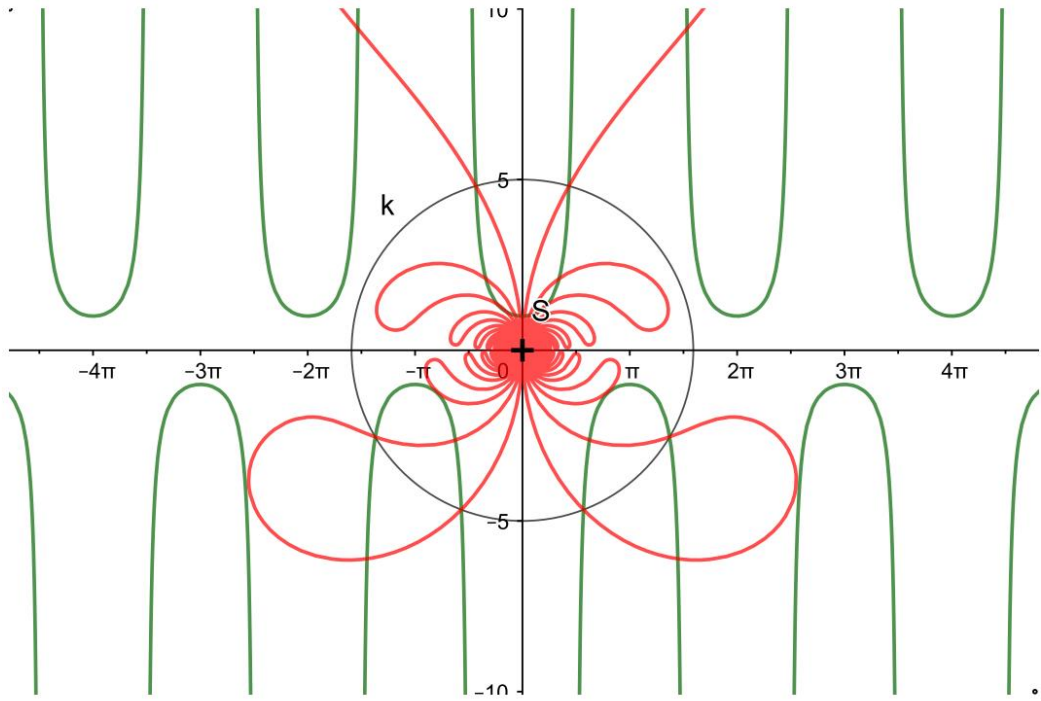
Obdobným postupem samozřejmě dokážeme poměrně snadno odvodit i obrazy složitějších goniometrických a jiných funkcí. Jako jeden příklad za všechny si můžeme uvést třeba graf funkce $y = 4\sin(x\cos(3\ln|x|))$. Tuto křivku můžeme naparametrizovat například takto:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 4\sin(t\cos(3\ln|t|)); t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

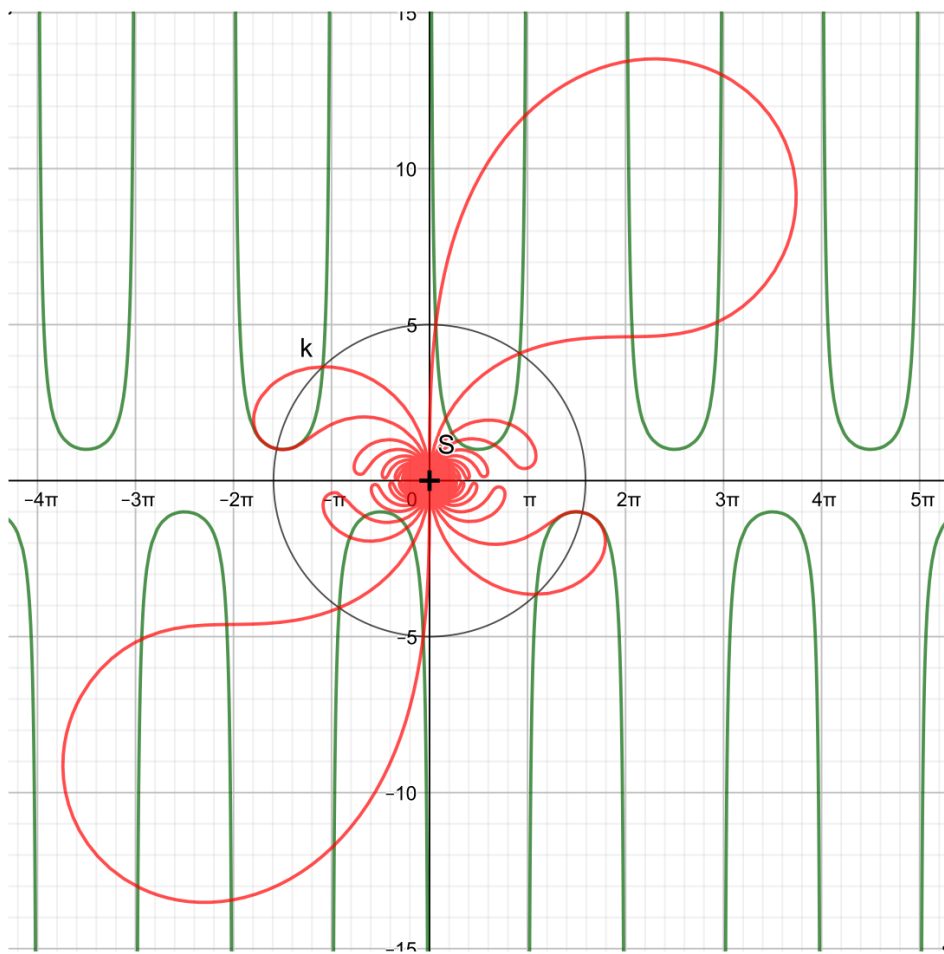
Její obraz potom odvodíme velmi snadno z příkladů výše a bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa t}{t^2 + 4\sin(t\cos(3\ln|t|))} \\ y' &= \frac{4\kappa\sin(t\cos(3\ln|t|))}{t^2 + 16\sin^2(t\cos(3\ln|t|))}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

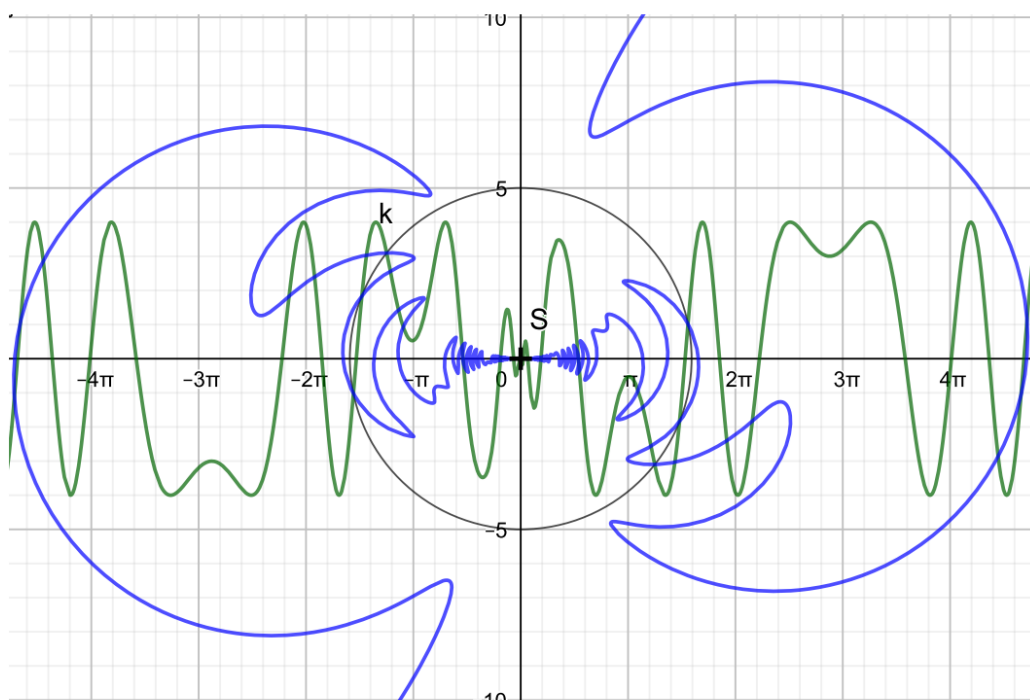
Tento předpis nám vykreslí na pohled velmi zajímavou křivku, znázorněnou včetně původního grafu na obrázku 29.



Obrázek 28: Sekantoida a její obraz



Obrázek 27: Kosekantoida a její obraz



Obrázek 29: Graf složitější goniometrické funkce a jeho obraz

Spirály

Dalším zajímavým předmětem našeho zájmu mohou být také takzvané spirály. V matematice je spirála křivka chápaná jako dráha bodu, který konstantně rotuje kolem jiného pevně daného bodu v rovině, při čemž se od něj soustavně vzdaluje.

Pro nás jsou zde spirály zajímavé zejména tím, že mnohé z nich jsou si navzájem obrazem právě v kruhové inverzi.

Archimédova a hyperbolická spirála

Archimédova spirála je pravděpodobně nejznámější spirálou. Kinematicky je zadána jako dráha bodu, který leží na polopřímce, po níž se rovnoměrně přímočaře pohybuje směrem od jejího krajního bodu, zatímco polopřímka sama se kolem svého krajního bodu rovnoměrně otáčí.

Hyperbolická spirála je oproti tomu křivka, jež začíná v nekonečné vzdálenosti od svého pólu a nekonečně se na něj navíjí, přičemž čím blíže je pólu, tím je její křivost větší.

Tyto dvě spirály jsou si vzájemně inverzní.

Opět zde budeme využívat parametrické předpisy. Postupy budou obdobné jako v kapitolách výše. Nebudeme tedy zacházet tolik do podrobností.

Archimédova spirála je dána předpisem:

$$\begin{aligned}x &= t\cos(t) \\ y &= t\sin(t); t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Po aplikaci rovnic inverze získáme předpis:

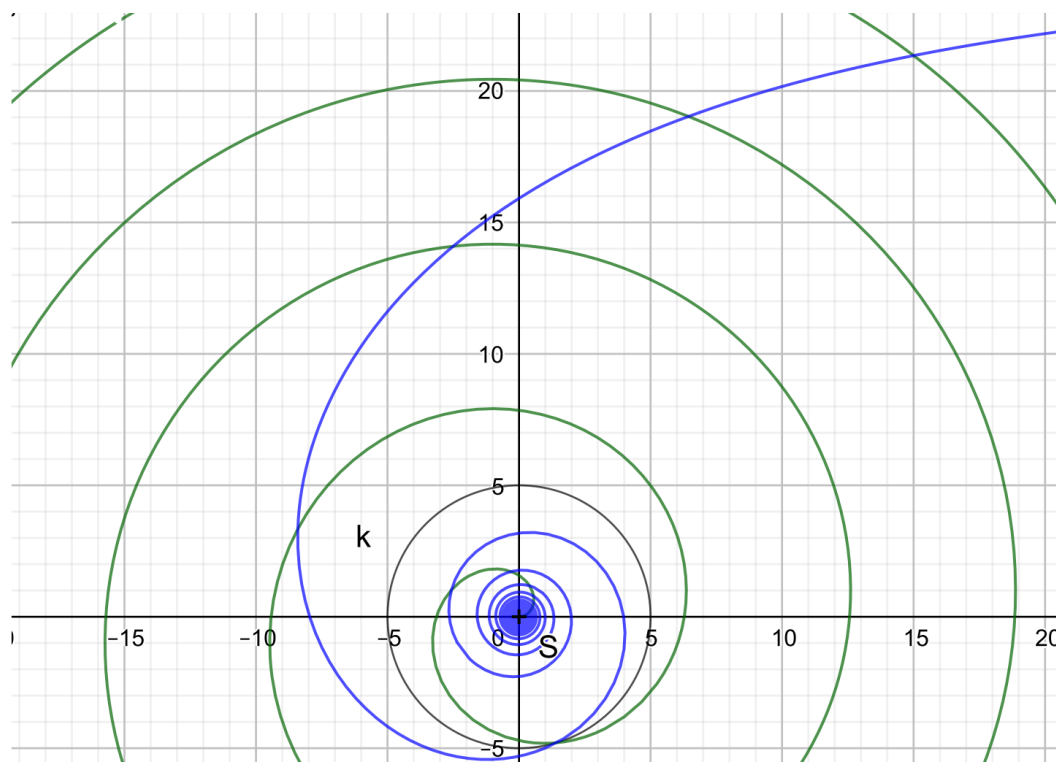
$$\begin{aligned}x' &= \frac{\kappa t \cos(t)}{t^2 \cos^2(t) + t^2 \sin^2(t)} \\ y' &= \frac{\kappa t \sin(t)}{t^2 \cos^2(t) + t^2 \sin^2(t)}.\end{aligned}$$

Po úpravě (přepsání pomocí goniometrické jedničky a zkrácení):

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\kappa \cos(t)}{t} \\ y' &= \frac{\kappa \sin(t)}{t}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\end{aligned}$$

což je parametrické zadání hyperbolické spirály.

Obě spirály jsou vykresleny na obrázku 30.



Obrázek 30: Hyperbolická a Archimédova spirála

Fermatova a Lituuova spirála

Fermatova spirála (též známá jako parabolická spirála) byla popsána P. de Fermatem v polárních souřadnicích rovnicí $r^2 = a^2\phi$.

Lituuova spirála je oproti tomu popsána rovnicí $r^2 = \frac{a^2}{\phi}$. Již z toho je vidět, že jsou si obě spirály inverzní.

Obě spirály můžeme vyjádřit parametricky. Toto vyjádření může záviset na tom, chceme-li zobrazit obě jejich ramena. V našem případě přesně to chtít budeme.

Parametrické vyjádření Fermatovy spirály vypadá následovně:

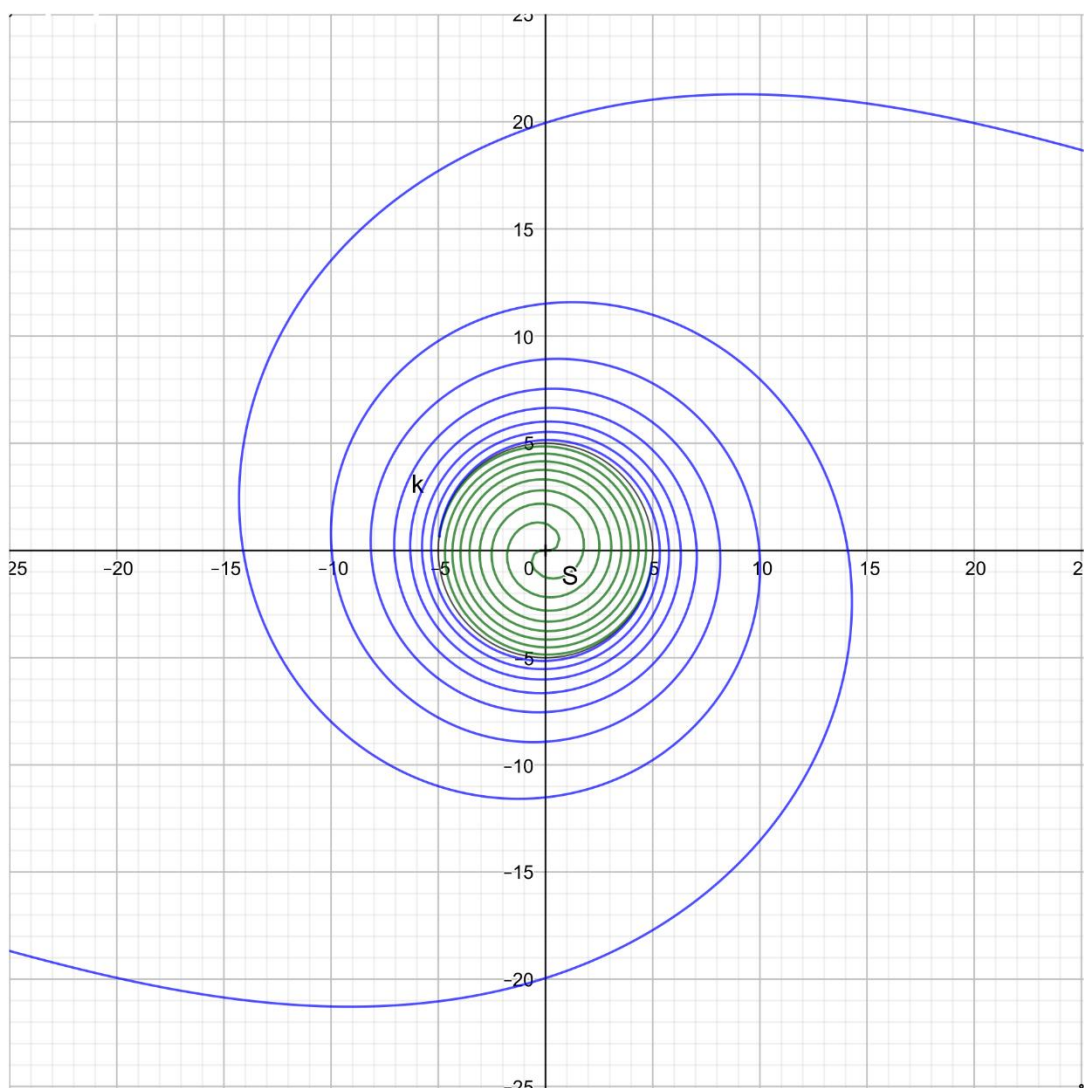
$$\begin{aligned}x &= \operatorname{sgn}(t)\sqrt{|t|}\cos(t) \\y &= \sqrt{|t|}\sin(t); t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Opět aplikujeme rovnice inverze, upravíme a získáme:

$$\begin{aligned}x' &= \operatorname{sgn}(t)\frac{\kappa\cos(t)}{\sqrt{|t|}} \\y' &= \frac{\kappa\sin(t)}{\sqrt{|t|}}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\end{aligned}$$

což je předpis, v němž už snadno poznáme spirálu inverzní k Fermatově – Lituuovu spirálu.

Části obou spirál jsou vykresleny na obrázku 31.



Obrázek 31: Fermatova a Lituuova spirála

Epicykloida a hypocykloida

Dalším za jímavým fenoménem mohou být i cykloidy. Cykloida je chápána jako dráha bodu pevně spjatého s kružnicí, která se valí po křivce.

Epicykloida

Epicykloida vzniká, valí-li se výše zmíněná kružnice z vnějšku po jiné kružnici.

Opět budeme postupovat obdobně jako výše, tedy pomocí parametrických vyjádření s tím, nehybná kružnice je kružnice inverze. Epicykloidu pak lze parametricky zadat například takto:

$$x = (\kappa + r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right)$$

$$y = (\kappa + r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right).$$

Parametr t volíme většinou v závislosti na poměru parametrů $\sqrt{\kappa}$ a r (poloměr pohybující se kružnice), nevadí-li nám případná násobnost křivky, může být $t \in \mathbb{R}$.

Nyní invertujeme a získáme:

$$x' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa + r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)}{\left((\kappa + r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)^2 + \left((\kappa + r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)^2}$$

$$y' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa + r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)}{\left((\kappa + r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)^2 + \left((\kappa + r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)^2},$$

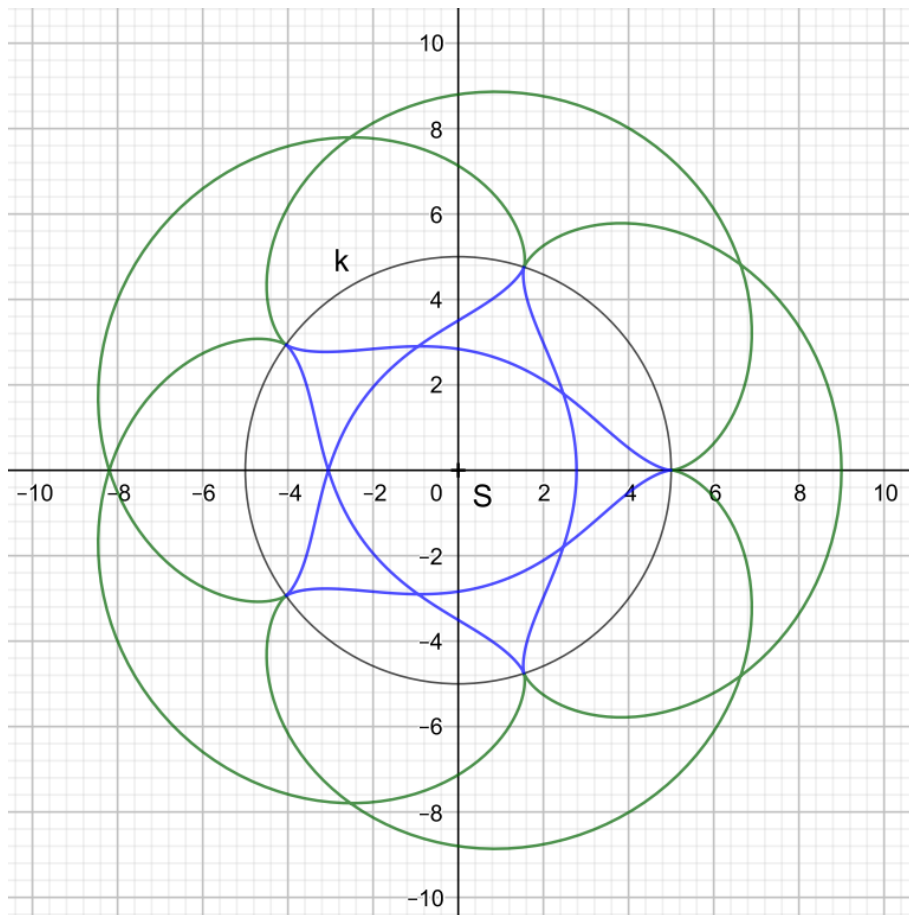
po několika úpravách pak můžeme dojít třeba k tomuto tvaru:

$$x' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa + r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)}{\kappa^2 + 2r(\kappa + r) \left(1 - \cos\left(\frac{\kappa}{r}t\right) \right)}$$

$$y' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa + r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\kappa + r}{r}t\right) \right)}{\kappa^2 + 2r(\kappa + r) \left(1 - \cos\left(\frac{\kappa}{r}t\right) \right)},$$

což je předpis křivky na obrázku 32. Může nás překvapit fakt, že se nejedná o hypocykloidu, kterou bychom jako obraz epicykloidy mohli očekávat. Konec konců obrazem kružnice, jež má s kružnicí inverze vnější dotyk, je kružnice s dotykem vnitřním a obraz bodu na vnější kružnici se posouvá po vnitřní kružnici podobně jako jeho vzor po té vnější. Kde je tedy problém?

Ten tkví v pohybu bodu po kružnici, který vzhledem k vlastnostem inverze není zcela rovnoměrný. Pro porovnání jsou níže obrázky obou hypocykloidy (obr. 33) a obrazu epicykloidy (obr. 32) v kruhové inverzi, když mají obě křivky týž poměr $\frac{\sqrt{\kappa}}{r}$.



Obrázek 32: Epicykloida a její obraz

Hypocykloida

Hypocykloida je potom chápána jako dráha bodu kružnice, která se opět valí po kružnici, tentokrát ale zevnitř. Obvykle proto požadujeme, aby poloměr vnitřní kružnice byl menší než té, po které se valí.

Za statickou kružnici opět považujeme kružnici inverze a parametrické vyjádření je pak následující:

$$x = (\sqrt{k} - r)\cos(t) + r\cos\left(\frac{\sqrt{k} - r}{r}t\right)$$

$$y = (\sqrt{k} - r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{\sqrt{k} - r}{r}t\right),$$

kde, podobně jako výše, r je poloměr pohybující se kružnice a parametr volíme $t \in \mathbb{R}$, pokud nám nezáleží na případné násobnosti.

A můžeme invertovat. Tedy:

$$x' = \frac{\kappa \left((\sqrt{\kappa} - r) \cos(t) + r \cos\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)}{\left((\sqrt{\kappa} - r) \cos(t) + r \cos\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)^2 + \left((\sqrt{\kappa} - r) \sin(t) - r \sin\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)^2}$$

$$y' = \frac{\kappa \left((\sqrt{\kappa} - r) \sin(t) - r \sin\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)}{\left((\sqrt{\kappa} - r) \cos(t) + r \cos\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)^2 + \left((\sqrt{\kappa} - r) \sin(t) - r \sin\left(\frac{\sqrt{\kappa} - r}{r} t\right) \right)^2}.$$

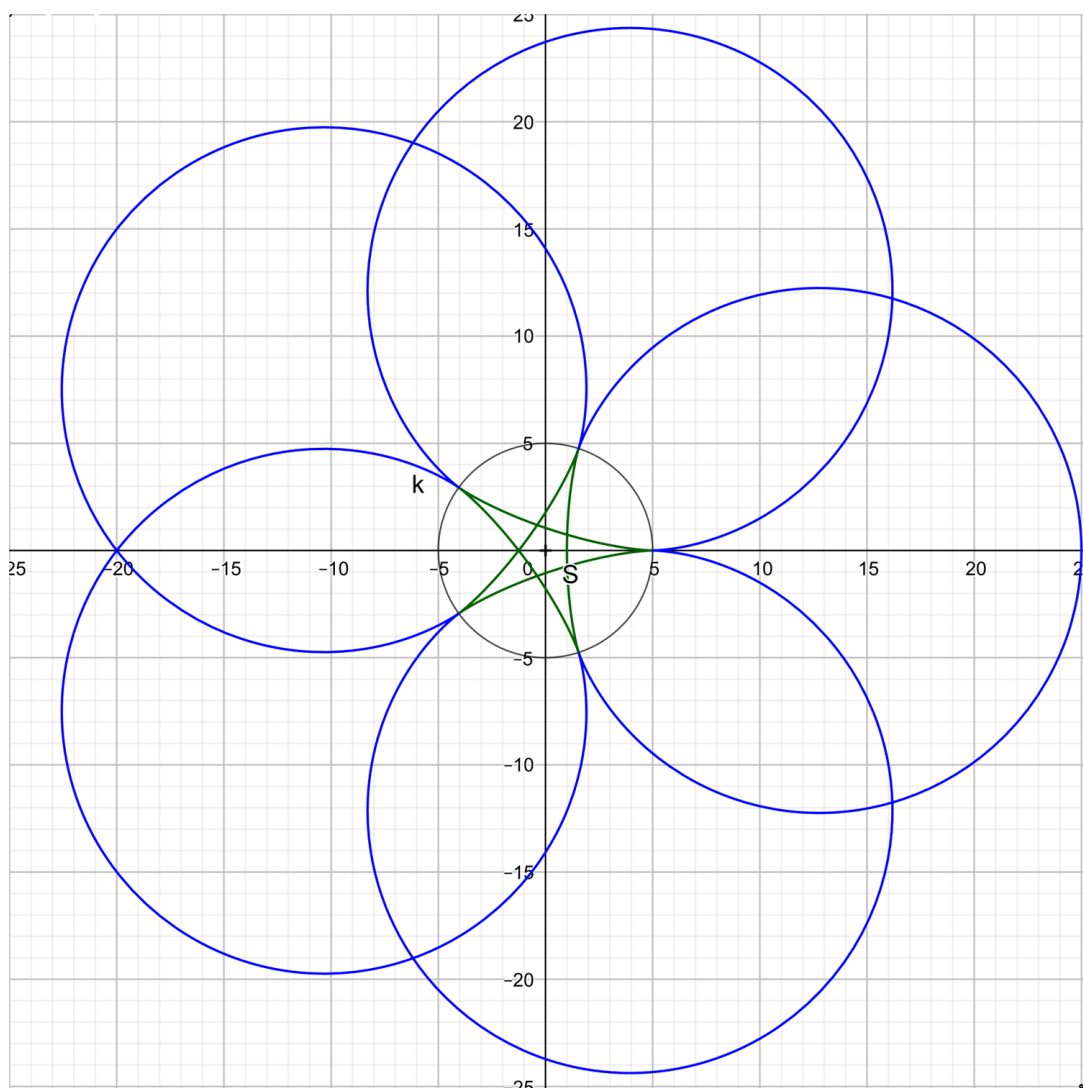
Rovnice už stačí jen zjednodušit:

$$x' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa - r) \cos(t) + r \cos\left(\frac{\kappa - r}{r} t\right) \right)}{\kappa^2 + 2r(r - \kappa) \left(1 - \cos\left(\frac{\kappa}{r} t\right) \right)}$$

$$y' = \frac{\kappa^2 \left((\kappa - r) \sin(t) - r \sin\left(\frac{\kappa - r}{r} t\right) \right)}{\kappa^2 + 2r(r - \kappa) \left(1 - \cos\left(\frac{\kappa}{r} t\right) \right)}.$$

Výsledná křivka by opět mohla připomínat epicykloidu, ale samozřejmě ani zde se o ni nejedná. Problém je zde obdobný jako v případě obrazu epicykloidy výše.

Výsledek je vykreslen na obrázku 33.



Obrázek 33: Hypocykloida a její obraz

Obecná kinematicky zadaná křivka

Tato křivka se dá zadat například jako dráha průsečíku dvou pohybujících se přímek, a to v našem případě $p_1: y = -x + t$ a $p_2: y = xtg^2(t)$, kde t je parametr z \mathbb{R} . Aby výsledná křivka byla spojitá, nevyklučujeme body, ve kterých není $tg^2(t)$ definovaný (tedy hodnoty $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$), pro tyto hodnoty zkrátka dodefinujeme, že přímka p_2 pro ně splývá s osou y . Získáme tak na pohled zajímavou křivku, kterou lze vidět na obrázku 34 (zeleně).

Jak ale získat její obraz v kruhové inverzi?

Jde na to opět jít více způsoby. Jeden je nám již známý, a to sice najít její parametrické vyjádření a dosadit do rovnic pro inverzi. Tento postup zde budeme ale používat jen jako podpůrný. Ukážeme si totiž, že výslednou křivku,

jak je asi možné vytušit, lze získat i jako průsečík obrazů obou tvořících křivek v kruhové inverzi.

Nejprve tedy první způsob. Musíme si obstarat parametrické vyjádření x a y . Za předpokladu, že $x \neq 0$, můžeme provést následující úpravy:

$$\begin{aligned}x + y &= t \\ \frac{y}{x} &= \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.\end{aligned}$$

Když rozepíšeme $1t$ v první rovnici pomocí goniometrické jedničky jako $t\cos^2(t) + t\sin^2(t)$ a zlomek ve druhém výrazu rozšíříme číslem $\frac{t}{t}$, snadno již dojdeme k výsledku:

$$\begin{aligned}x &= t\cos^2(t) \\ y &= t\sin^2(t).\end{aligned}$$

Je sice pravda, že úpravami výše jsme ztratili některé kořeny a hodnoty t , ale porovnáme-li toto parametrické vyjádření s definicí křivky výše, vidíme, že je stále možné dosazovat stejné hodnoty a získávat stejné kořeny, proto se nebudeme nikterak omezovat a řekneme, že $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{R}$.

Nyní dosadíme do rovnic inverze.

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\kappa\cos^2(t)}{t(\cos^4(t)+\sin^4(t))} \\ y' &= \frac{\kappa\sin^2(t)}{t(\cos^4(t)+\sin^4(t))}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned} \tag{2.3.0}$$

Druhý zmíněný způsob vedl přes zobrazení obou tvořících křivek. Zde dokonce ani nemusíme zobrazovat křivku p_2 . Jelikož prochází středem, tak bude samodružná a její předpis tedy zůstane stejný neboli $y' = x'tg^2(t)$. Druhá tvořící křivka je přímka neprocházející středem inverze. Již jsme si odvodili, že ta se zobrazí na kružnici procházející středem. Můžeme zde tedy využít odvozený předpis z oddílu 2.1 a dosadit za jednotlivé koeficienty. Výsledná křivka potom bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned}t(x'^2 + y'^2) - \kappa^2 x' - \kappa y' &= 0 \\ x'(tx' - \kappa) + y'(ty' - \kappa) &= 0.\end{aligned}$$

Průnik těchto křivek získáme tak, že za y' z druhého předpisu dosadíme to z předpisu prvního a získáme:

$$\begin{aligned} t(x'^2 + x'^2 tg^4(t)) - \kappa x' - \kappa x' tg^2(t) &= 0 \\ tx'^2(1 + tg^2(t)) &= \kappa x'(1 + tg^2(t)) \\ x' &= \frac{\kappa(1 + tg^2(t))}{t(1 + tg^4(t))}. \end{aligned}$$

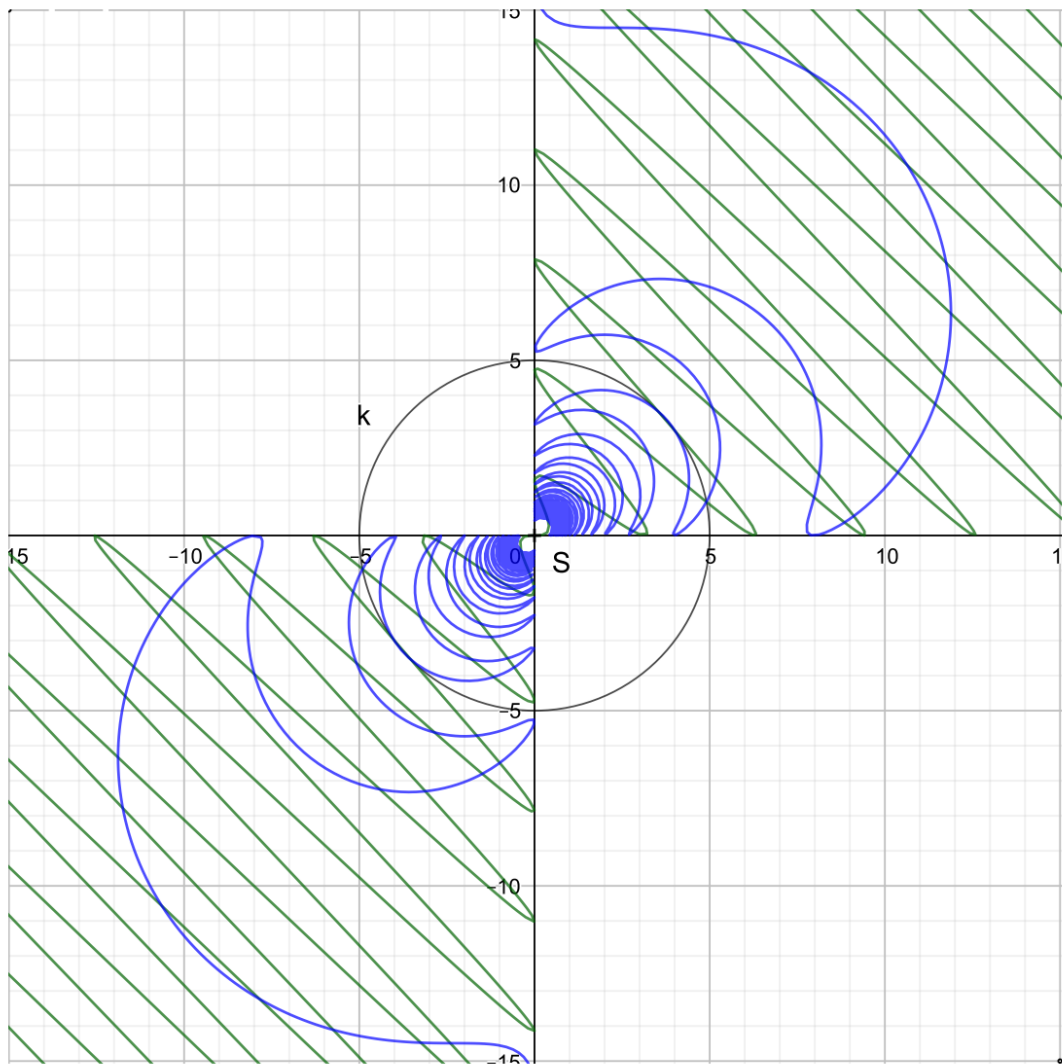
Získanou hodnotu pro x' nyní dosadíme do předpisu přímky $y' = x' tg^2(t)$ a získáme y' .

$$y' = \frac{\kappa tg^2(t)(1 + tg^2(t))}{t(1 + tg^4(t))}$$

Výsledná křivka tedy bude mít parametrické vyjádření následující:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\kappa(1 + tg^2(t))}{t(1 + tg^4(t))} \\ y' &= \frac{\kappa tg^2(t)(1 + tg^2(t))}{t(1 + tg^4(t))}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Podíváme-li se na tento předpis blíže, můžeme vypořádat, že při rozšíření zlomku v prvním i druhém výrazu výrazem $\frac{\cos^4(t)}{\cos^4(t)}$ a několika drobných úpravách získáme právě předpis (2.3.0). Oběma těmito postupy tedy dospějeme k téže křivce.



Obrázek 34: Obecná kinematická křivka a její obraz

3. Řešené a neřešené příklady

3.1 Apolloniovy úlohy

Mezi pravděpodobně nejznámější použití kruhové inverze patří řešení Apolloniových úloh. Aspoň krátce je tedy zmiňme i zde. Apolloniovy úlohy jsou obecně úlohy, ve kterých hledáme kružnice, jež se dotýkají všech útvarů z libovolné trojice vybrané z množiny kruhových křivek – body, kružnice, přímky. Ty jednodušší se řeší pomocí množin bodů daných vlastností, popřípadě pomocí stejnolehlosti. Ve složitějších případech přichází na pomoc právě kruhová inverze, jelikož ta dokáže převádět kruhové křivky se kterými se pracuje obtížněji – kružnice – na ty jednodušší – přímky. Inverzi tedy využíváme převážně k tomu, abychom si komplikovanou Apolloniovu úlohu převedli na snazší, kterou již umíme vyřešit pomocí množiny bodů daných vlastností nebo stejnolehlosti.

Příkladem může být úloha typu Bpk (bod, přímka, kružnice). Konkrétně taková, kde přímka p a kružnice k mají nějaké společné body a bod B neleží ani na jedné z nich. Víme totiž, že přímka procházející středem inverze se zobrazí opět na tutéž přímku, a navíc kružnice procházející středem se zobrazí na přímku. Tedy správně zvolená kruhová inverze by nám měla umožnit tuto úlohu převést na mnohem snazší variantu Bpp (bod, přímka, přímka). Správná volba středu inverze je samozřejmě v průsečíku přímky p a kružnice k . Obtížnost nám může ovlivnit i volba koeficientu inverze. Ideální volba je taková, při které bude daný bod B samodružný, abychom si ušetřili práci s jeho zobrazováním. Po převedení problému na Bpp využijeme k dořešení úlohy stejnolehlost (tečkovaně). Výsledkem by měla být dvojice kružnic l', m' (modře). Tu zobrazíme zpět ve zvolené kruhové inverzi. Zobrazí se opět na dvojici kružnic l, m (červeně), která bude řešením dané úlohy (obr. 35).

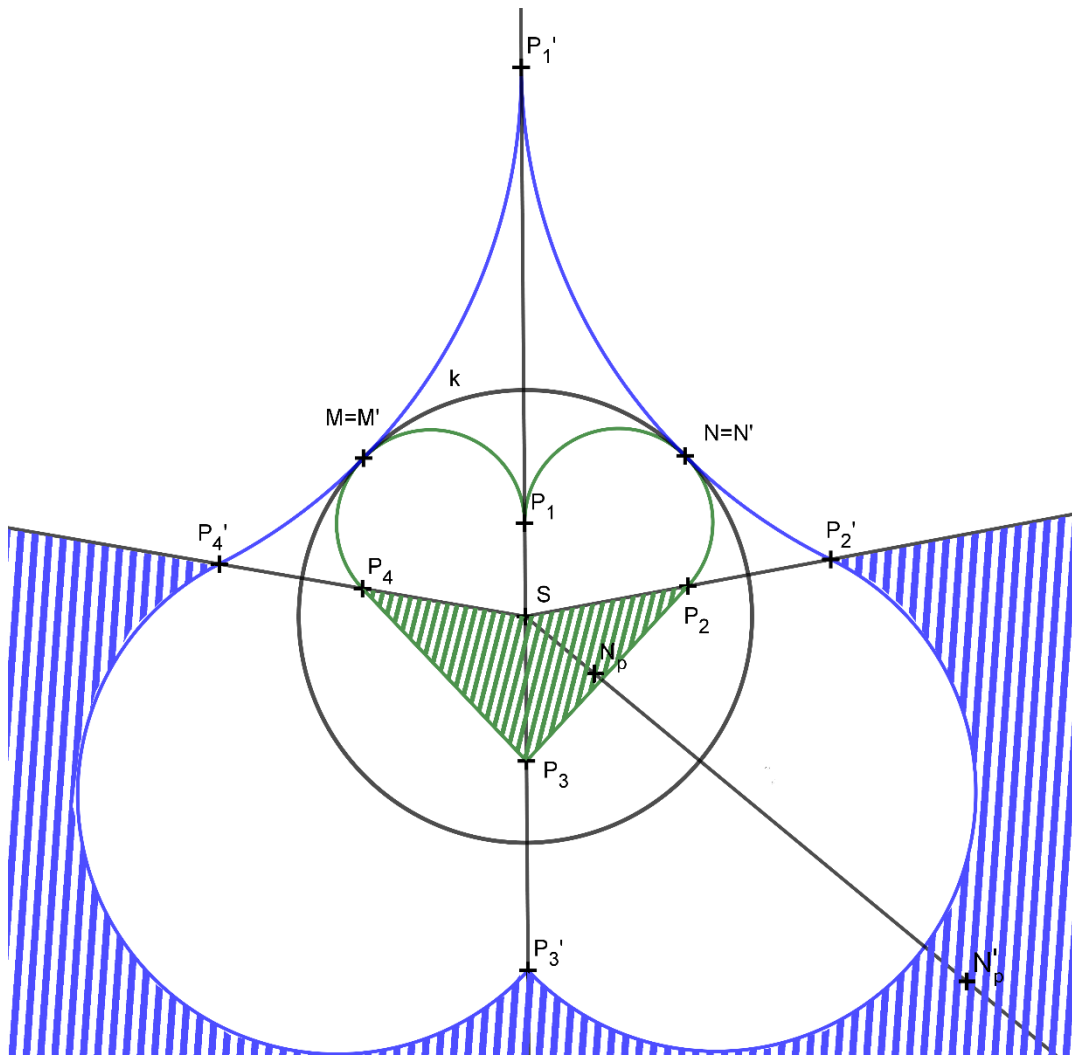
Úloha 1: Na obrázku 36 je předkreslena Apolloniova úloha typu kkk (tři kružnice), kde všechny tři kružnice procházejí společným bodem. Zvolte vhodný střed inverze a úlohu vyřešte.

Úloha 2: Vymyslete alespoň dvě další zadání Apolloniových úloh takových, aby pro ně byla kruhová inverze vhodným nástrojem k řešení. Popište a zdůvodněte nejvhodnější volbu středu inverze.

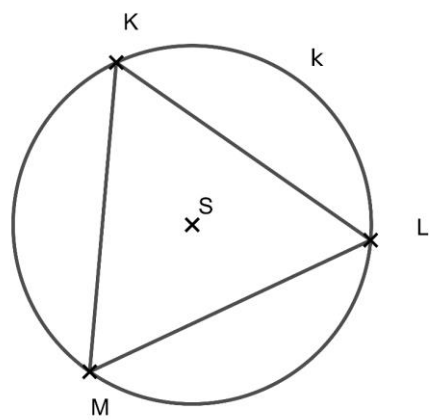
3.2 Kreslení obrazů zadaných útvarů v kruhové inverzi

V následujících obrázcích (obr. 38 – obr. 45) dle vzoru dorýsujte obrazy zadaných geometrických útvarů v kruhové inverzi zadané základní kružnicí k a jejím středem S . Koeficient κ uvažujte vždy kladný. Je-li v obrázku vyšrafovaná oblast, vyšrafujte její obraz. Ve všech případech jsou dané křivky vždy pouze části kružnic nebo přímek.

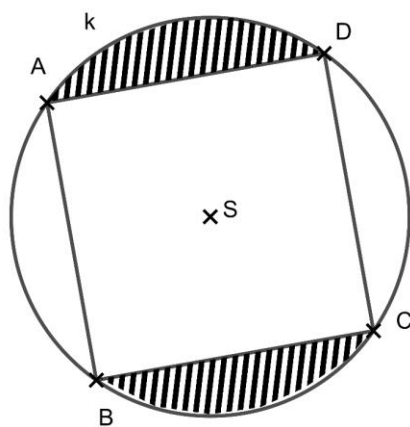
Vzorová úloha (obr. 37): Vzor (zeleně) se zjevně sestává ze dvou kruhových oblouků nepocházejících středem inverze a dvou úseček, které také nepocházejí bodem S . To znamená, že výsledkem budou čtyři kruhové oblouky. Návod na zobrazení každého z nich je v kapitole 2.1. Výsledné křivky na sebe musí navazovat, jelikož na sebe navazují i jejich vzory. Body P_1 až P_4 jsou právě body, kde jedna křivka přechází ve druhou. Obraz zeleně vyšrafované oblasti určíme tak, že si zobrazíme její libovolný bod (zde N_p) a posoudíme jeho polohu vůči obrazu hraniční křivky. Oblast, ve které tento bod leží, je obrazem původní oblasti. Po pár cvičení a zobrazeních už je většinou možné oblast uhodnout i bez zobrazování bodu.



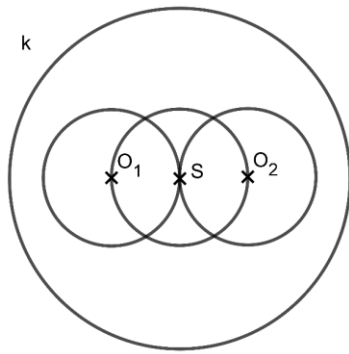
Obrázek 37: Vzorové řešení k úlohám 38–45



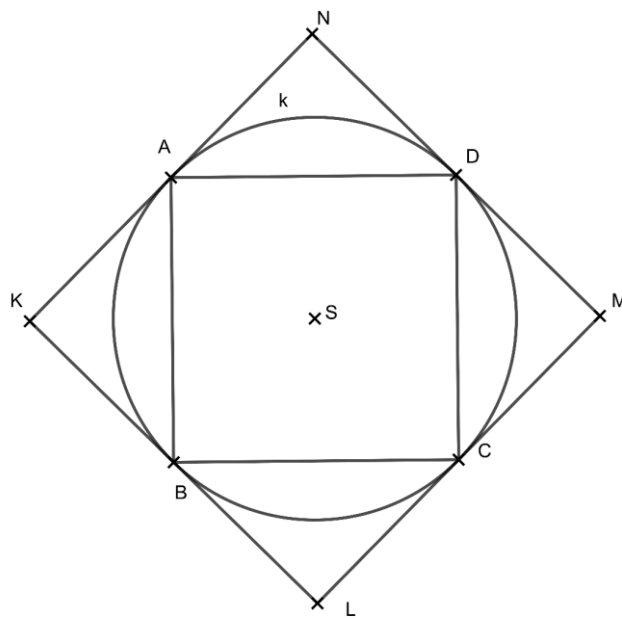
Obrázek 38



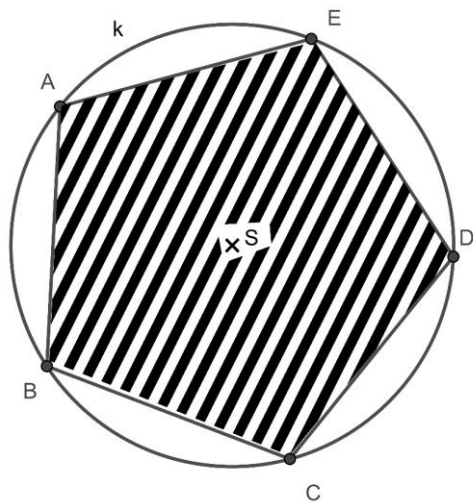
Obrázek 39



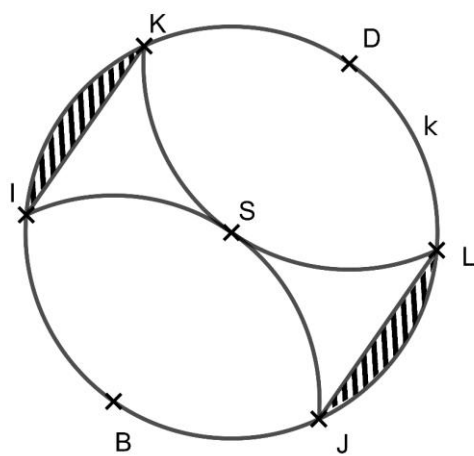
Obrázek 41



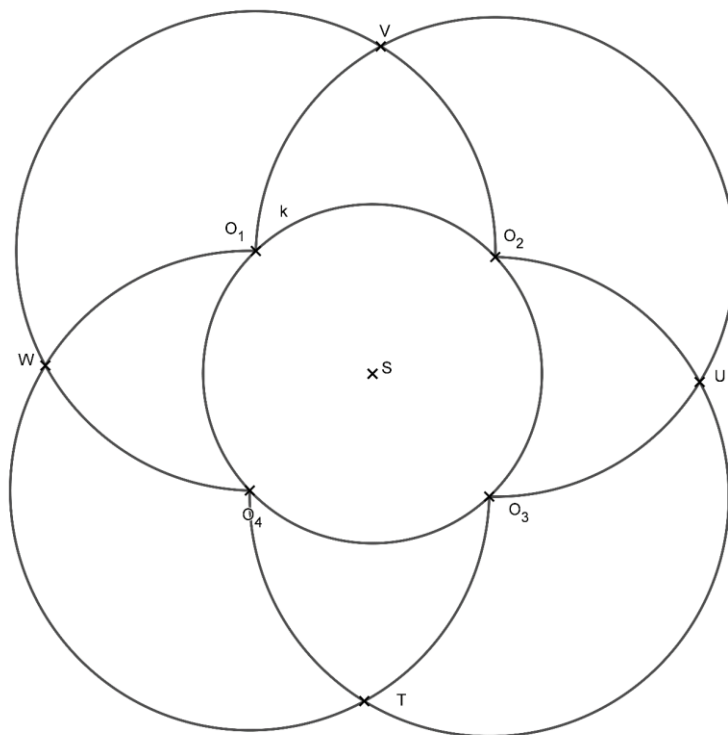
Obrázek 40



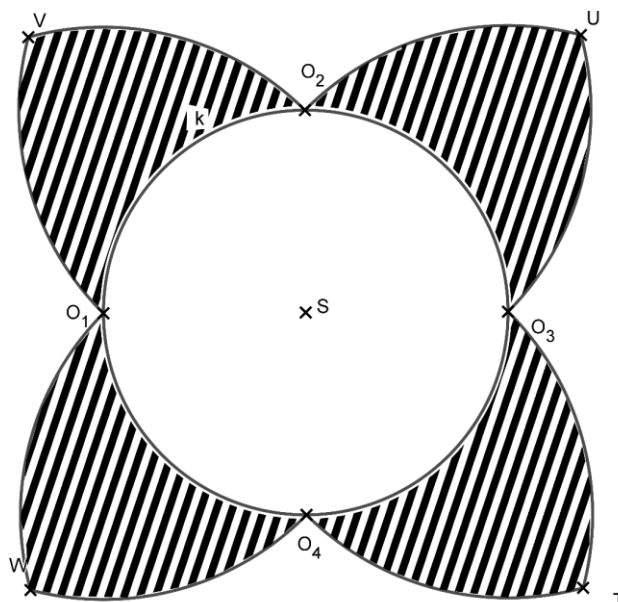
Obrázek 43



Obrázek 42



Obrázek 44



Obrázek 45

3.3 Úlohy o kruhové inverzi řešené pomocí nástrojů analytické geometrie

Úloha 1: Analyticky ukažte, že libovolná nekolineární čtveřice bodů A, A', B, B' leží na kružnici, jestliže $A' = [a'_1; a'_2]$ je obrazem bodu $A = [a_1; a_2]$ a $B' = [b'_1; b'_2]$ je obrazem bodu $B = [b_1; b_2]$ v kruhové inverzi se středem v bodě $S = [0; 0]$ a koeficientem κ .

Úloha 2: Analyticky odvoďte obraz kružnice m dané rovnicí $m: (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$ v kruhové inverzi se středem $S = [0; 0]$ a koeficientem $\kappa = 18$. Určete obraz středu kružnice m a střed jejího obrazu.

Úloha 3: Vypočítejte poloměr kružnice, která má střed v bodě $O = [-4; 0]$ tak, aby byla samodružnou kružnicí v kruhové inverzi se středem v bodě $S = [0; 0]$ a koeficientem $\kappa = 8$.

Úloha 4: Najděte střed a koeficient inverze, která zobrazí kružnici m , danou rovnicí $m: (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 8$ na přímku $p: x - y = 3$.

Úloha 5: Najděte střed inverze, která zobrazí přímku $p: x - y = 3$ a kružnici $m: (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 8$ na dvojici soustředných kružnic.

Úloha 6: Napište parametrický předpis obrazu funkce $f: y = e^x$ v kruhové inverzi se středem $S = [1; e]$ a koeficientem $\kappa = e^2$ a najděte samodružné body tohoto zobrazení.

Úloha 7: Určete rovnici a pojmenujte křivku, která je obrazem Bernoulliho lemniskáty zadané rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ v kruhové inverzi se středem $S = [0; 0]$ a poloměrem základní kružnice $r = 2$.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře nejen s kruhovou inverzí jako takovou, ale zejména s její analytickou stránkou a nabídnout tak zvláště vysokoškolským studentům pomocnou ruku a další možný nástroj při studiu toho tématu a všech jeho náležitostí. Teorie budovaná od úplných základů rovinné geometrie a elementární algebry je zde přetvořena v užitečný nástroj nejen pro řešení nejjednějších úloh, ale i pro rozvoj geometrické představivosti a zručnosti v užití analytické geometrie jako takové.

Významným nástrojem a pomocníkem nejen při vytváření obrazů složitějších křivek byla GeoGebra. I ta měla s některými křivkami numerické problémy a nevykreslovala je vždy perfektně, jak je možno u některých obrázků postřehnout.

K tématu mě jako slepého k houslím přivedlo právě „hraní si“ s GeoGebrou. (První vytvořený obrázek byl obrázek 29.) Při bližším studiu tohoto tématu jsem objevil (mimo jeho estetických možností) i opravdu širokou škálu reálných aplikací, na jejichž rozvedení v práci nezbyl prostor. Kruhová inverze je tedy užitečnější a významnější zobrazení, než jak se může na první pohled jevit a jistě si zaslouží svou porci pozornosti.

Seznam literatury

- [1] Boček L., Zhouf J.: *Planimetrie*. 1. vyd. Praha: UK PedF, 2009. 148 str.
- [2] Drs, L. Novák, J. Roubek, O. *Konstruktivní geometrie*. Praha: ČVUT v Praze, 1983.
- [3] Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1968. 222 str.
- [4] Lockwood, E. H.: *Book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 198 str.
- [5] Pottmann, H.: *Architectural geometry*. Bentley Institute Press, 2007, 724 str.
- [6] Sekanina, M. a kol.: *Geometrie II*. 1. vyd Praha: SPN, 1988. 308 str.
- [7] Šedivý, O. a kol.: *Geometria 2 pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách*. SPN Bratislava, 1987.
- [8] Trkovská, D.: *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015. str. 7-30.

Internetové zdroje

[9] Krump, L.: *Projektivní geometrie – přednáška a cvičení pro 1. ročník U, LS 2017.*

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~krump/projektiv_1_2017.htm

[10] Wolfram|Alpha Examples: *Curves and Surfaces* (online).

<http://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/geometry/curves-and-surfaces/>

[11] Janyška, J.: *Geometrická zobrazení*. Brno, 2012. kapitola 4 (online).

<http://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf>.

Seznam obrázků

Obrázek 1: A. F. Möbius	6
Obrázek 2: Konstrukce bodu v kruhové inverzi	9
Obrázek 3: Projektivní rovina.....	11
Obrázek 4: Möbiova rovina.....	12
Obrázek 5: Odchyly	14
Obrázek 6: Tětivový čtyřúhelník	15
Obrázek 7: Soustředné kružnice ze dvou kružnic	17
Obrázek 8: Soustředné kružnice z přímky a kružnice.....	17
Obrázek 9: Sférická a kruhová inverze	20
Obrázek 10: Stereografická projekce	21
Obrázek 11: Stereografická projekce a kruhová inverze (zp. 1)	22
Obrázek 12: Stereografická projekce a kruhová inverze (zp. 2)	23
Obrázek 13: Obraz přímky neprocházející středem	28
Obrázek 14: Obraz kružnice neprocházející.....	30
Obrázek 15: Elipsa a ovál	35
Obrázek 16: Elipsa a Pascalova závitnice	36
Obrázek 17: Elipsa a Dioklova kisoida.....	37
Obrázek 18: Parabola a kardioida.....	38
Obrázek 19: Parabola a Dioklova kisoida	39
Obrázek 20: Hyperbola a lemniskáta	40
Obrázek 21: Hyperbola a přímá strofoida	41
Obrázek 22: Hyperbola a Pascalova závitnice.....	42
Obrázek 23: Kosinusoida a její obraz	45
Obrázek 24: Sinusoida a její obraz.....	45
Obrázek 25: Kotangentoida a její obraz.....	47
Obrázek 26: Tangentoida a její obraz	47
Obrázek 27: Kosekantoida a její obraz.....	50
Obrázek 28: Sekantoida a její obraz.....	50
Obrázek 29: Graf složitější goniometrické funkce a jeho obraz	51
Obrázek 30: Hyperbolická a Archimédova spirála.....	52
Obrázek 31: Fermatova a Lituuova spirála.....	54
Obrázek 32: Epicykloida a její obraz.....	56
Obrázek 33: Hypocykloida a její obraz.....	58
Obrázek 34: Obecná kinematická křivka a její obraz	61
Obrázek 35: Řešená Apolloniova úloha typu Bpk.....	63
Obrázek 36: Zadání úlohy Apolloniovy typu kkk.....	63
Obrázek 37: Vzorové řešení k úlohám 38–45.....	65
Obrázek 38.....	66
Obrázek 39.....	66

Obrázek 40.....	67
Obrázek 41.....	67
Obrázek 42.....	68
Obrázek 43.....	68
Obrázek 44.....	69
Obrázek 45.....	69

Pozn.: Obrázek 1 byl převzat z WWW <https://www.britannica.com/biography/August-Ferdinand-Mobius>

Obrázky 2 a 5 až 45 byly vytvořeny autorem v programu GeoGebra 5 (obr. 37, 39, 42, 43 a 45 byly dále upravovány v programu Gimp 2) a obrázky 3 a 4 byly vytvořeny autorem v programu Zoner Callisto 5.