MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Filipová

Vybrané problémy z náhodných procházek

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Danielu Hlubinkovi, Ph.D. za ochotu a cenné rady a za čas, který vedení mé práce věnoval.

Název práce: Vybrané problémy z náhodných procházek

Autor: Anna Filipová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme symetrickými náhodnými procházkami. Jsou zde definovány různé druhy cest a dokázána věta o principu zrcadlení. Pak jsou na základě cest definovány náhodné procházky. Dále se zabýváme pravděpodobnostmi návratu k nulové ose a prvního návratu k nulové ose v určitém čase, pravděpodobnostmi počtu změn znaménka či počtu návratů k nulové ose do určitého času. Definujeme také maximum cesty a první vstup do dané osy. V druhé kapitole je vyřešena řada problémů, které tvoří důkazy vět z první části práce nebo ji jinak doplňují. Jde například o geometrické důkazy rovnosti počtu cest určitého typu nebo o výpočet pravděpodobnosti toho, že do daného času nastane určitý počet změn znaménka.

Klíčová slova: cesta, náhodná procházka, princip zrcadlení, návrat k počátku

Title: Selected topics of random walks

Author: Anna Filipová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The theme of this thesis are symmetric random walks. We define different types of paths and prove the reflection principle. Then, based on the paths, we define random walks. The thesis also deals with probabilities of returns to the origin and first returns to the origin, further with probabilities of number of changes of sign or returns to the origin up to a certain time. We also define the maximum of the random walk and the first passage through a certain point. In the second chapter, we solve several problems, which form the proofs of some theorems from the first chapter or complement the first chapter in a different way. For example, we prove geometrically that the number of paths of one type equals the number of paths of another type or we compute the probability that there occurs a certain number of changes of sign up to a given time.

Keywords: path, random walk, the reflection principle, return to the origin

Obsah

Seznam použitých zkratek **2**

Úvod **3**

1 Základní poznatky z teorie o symetrických náhodných procházkách **4**

1.1 Základní definice, princip zrcadlení 4

1.2 Návraty k počátku a změny znaménka 7

1.3 Maxima a první vstupy 10

2 Vybrané úlohy **15**

Závěr **23**

Použitá literatura **24**

Seznam použitých zkratek

$Z_{n,x}$ ... počet všech možných cest do bodu (n,x)

$p_{n,x}$ ... pravděpodobnost průchodu bodem (n,x)

u_{2n} ... pravděpodobnost toho, že v čase $2n$ nastane návrat k počátku

f_{2n} ... pravděpodobnost toho, že v čase $2n$ nastane první návrat k počátku

$Z($„...“$)$ ... počet všech cest splňujících „...“

$Z_n($„...“$)$ ... počet všech cest délky n splňujících „...“

$Z_{n,x}($„...“$)$ ... počet všech cest do bodu (n,x) splňujících „...“

$\xi_{r,2n+1}$ ... pravděpodobnost toho, že do času $2n+1$ nastane právě r-krát změna znaménka

$\varphi_{r,n}$ ... pravděpodobnost toho, že první vstup do r nastane v čase n

$\rho_{r,2n}$ ... pravděpodobnost toho, že v čase $2n$ nastane r-tý návrat k nulové ose

$z_{r,2n}$ ... pravděpodobnost toho, že do času $2n$ včetně nastane právě r-krát návrat k nulové ose

Úvod

Tématem této práce jsou symetrické náhodné procházky. Jde o model chování v diskrétním čase, kde začínáme obvykle ve stavu 0 a při každém kroku (každé časové jednotce) dojde k posunu o 1 nebo -1, obojí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

V první kapitole definujeme různé druhy cest a uvedeme důkaz věty o principu zrcadlení. Dále se přesuneme k náhodným procházkám a základním pravděpodobnostem, které jsou s nimi spojeny. Například zkoumáme pravděpodobnost návratu k počátku a prvního návratu k počátku v čase $2n$ a uvádíme jejich souvislosti a vlastnosti. Také se zabýváme pravděpodobností určitého počtu změn znaménka (nebo návratů k počátku) do času n. Nakonec definujeme maximum procházky a vstup do určitého bodu a uvádíme s tím spojené věty.

V druhé kapitole řešíme vybrané problémy, které tvoří důkazy různých vět z první kapitoly nebo tuto kapitolu jiným způsobem doplňují. Jde například o (z části geometrické) důkazy toho, že počet cest jednoho typu je roven počtu cest jiného typu. Dále jde o výpočet různých pravděpodobností, například pravděpodobnost toho, že do daného času nastane určitý počet změn znaménka.

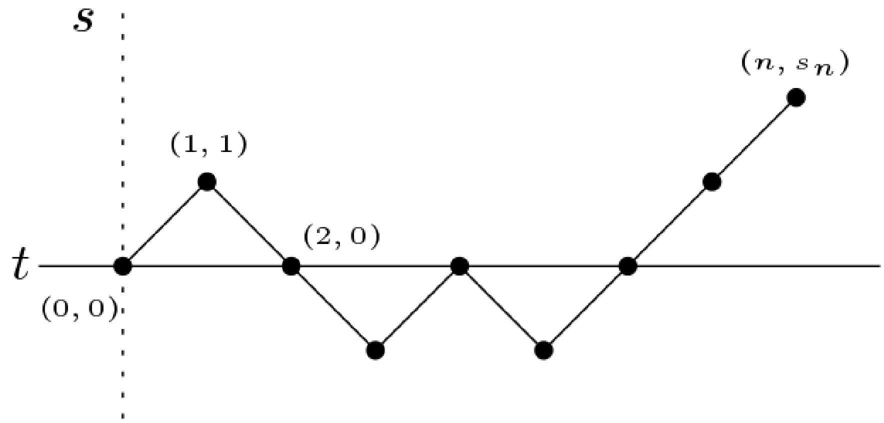
1. Základní poznatky z teorie o symetrických náhodných procházkách

1.1 Základní definice, princip zrcadlení

Procházka po celých číslech je model chování v diskrétním čase. Začínáme ve stavu 0 a v každém okamžiku $k \in \mathbb{N}_0$ nastává krok o 1, nebo o -1. Stav $s_{k-1} \in \mathbb{Z}$ se tedy mění na stav s_k. Index k chápeme jako čas od začátku procházky, má tedy smysl mluvit o minulosti a budoucnosti. Než se dostaneme k samotné náhodné procházce, ujasníme si přesně, jak může vypadat její uskutečnění. Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $p,q \in \mathbb{N}_0$ takové, že $n = p+q$, a uvažujme n hodnot $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ takových, že každá z nich je rovna buď 1, nebo -1. Předpokládejme, že právě p z nich je rovno 1 a q z nich je rovno -1. Částečný součet $s_k = \epsilon_1 + ... + \epsilon_k$ udává rozdíl mezi počtem plus jedniček a minus jedniček na prvních k místech. Platí tedy

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1, \quad s_0 = 0, \quad s_n = p - q, \quad k = 1,2,...,n. \tag{1.1}$$

Budeme používat i geometrickou představu s vyznačeným časem a označení pomocí souřadnic t,s, kde osu t (znázorňující čas) si lze představit jako vodorovnou a osu s (znázorňující stavy) jako svislou. Uspořádání $(\epsilon_1,...,\epsilon_n)$ si pak lze představit jako lomenou čáru, jejíž k-tá strana má sklon ϵ_k a jejíž k-tý vrchol má souřadnice (k,s_k).



Obrázek 1.1: Cesta, uskutečnění náhodné procházky.

Definice 1. *Buď $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{Z}$. Cesta $(s_0,s_1,...,s_n)$ z počátku do bodu (n,x) je lomená čára, jejíž vrcholy jsou body $(0,s_0),(1,s_1),...,(n,s_n)$, $s_n = x$, a která splňuje* (1.1). *Číslu n budeme říkat délka cesty.*

Pozn.: Pojmem *cesta* budeme tedy chápat cestu z počátku. Pokud bude cesta začínat v jiném bodě, bude to v textu uvedeno.

Je zřejmé, že počet všech cest délky n je 2^n, protože každá cesta je jednoznačně určena právě jednou n-ticí $(\epsilon_1,...,\epsilon_n)$ a každý prvek této n-tice je roven jedné ze dvou různých hodnot. Jestliže mezi čísly $\epsilon_1,...,\epsilon_n$ je p z nich rovno 1 a q z nich rovno -1, pak

$$n = p + q, \quad x = p - q. \tag{1.2}$$

Cesta z počátku do bodu (n,x) existuje, pouze pokud n a x splňují tyto podmínky.

Značení
Symbolem $Z_{n,x}$ budeme značit počet všech možných cest z počátku do bodu (n,x).

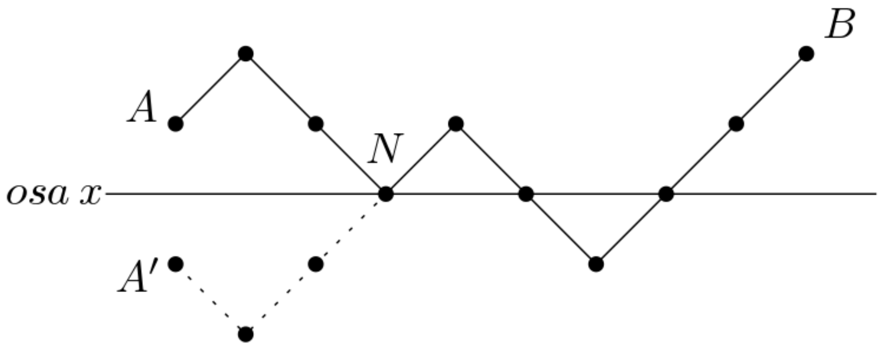
Pokud n,x splňují podmínky (1.2), platí

$$Z_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} = \binom{n}{\frac{n-x}{2}}, \tag{1.3}$$

v opačném případě je $Z_{n,x}$ rovno 0. Mimo jiné dostáváme pro $n = 0$, že $Z_{0,0}$ je rovno 1 a $Z_{0,k}$ je rovno 0 pro nenulová k. Poslední rovnost v (1.3) také dokazuje, že počet cest do bodu (n,x) je stejný jako počet cest do bodu $(n,-x)$. Při použití tohoto faktu v dalším textu budeme často říkat, že daná rovnost „plyne ze symetrie“.

V celé práci se budeme často zabývat cestami, které se dotýkají určité osy nebo ji protínají. Cestou, která „*se v čase k dotýká osy x*“ budeme rozumět cestu, která splňuje $s_k = x$. Cestou, která „*v čase k protíná osu x*“, budeme rozumět cestu, která splňuje $s_k = x$ a $s_{k-1} \neq s_{k+1}$. Pokud se tedy cesta dotýká osy x, neznamená to nutně, že ji neprotíná. V tomto je naše pojmenování odlišné například od „dotyku přímky a kružnice“ v běžných textech.

Věta 1 (Princip zrcadlení)**.** *Mějme body $A = (a,\alpha)$ a $B = (b,\beta)$ takové, že $a,b \in \mathbb{N}_0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ a $b > a$. Dále mějme osu ve výšce $x \in \mathbb{Z}$, pro kterou platí $x \leq min\{\alpha,\beta\}$ nebo $x \geq max\{\alpha,\beta\}$, tzn. neplatí, že body A, B leží na opačných stranách osy. Pak počet cest z bodu A do bodu B takových, že se dotýkají osy x, je roven počtu všech cest z bodu A' do bodu B, kde A' je zrcadlový obraz bodu A podle osy x, tj. $A' = (a,2x-\alpha)$.*



Obrázek 1.2: Princip zrcadlení.

Důkaz. Mějme cestu $\mathbf{s} = (s_a = \alpha, s_{a+1},...,s_b = \beta)$ z bodu A do bodu B, která má alespoň jeden z vrcholů na ose x. Buď (n,s_n), $a < n < b$ první z takových vrcholů, neboli $s_i \neq x$ $\forall i < n$, $s_n = x$. Pak $(2x-\alpha, 2x-s_{a+1}, \ldots, 2x-s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \ldots, s_b = \beta)$ je cesta z bodu A' do bodu B, jejíž první bod, který leží na ose x, je bod $N = (n,x)$. Protože části AN a $A'N$ jsou si vzájemně zrcadlovým obrazem, existuje mezi množinou všech cest z bodu A' do bodu B a množinou všech cest z bodu A do bodu B takových, že mají alespoň jeden bod na ose x, vzájemně jednoznačný vztah. Počty prvků těchto množin se tedy rovnají.

□

Nyní se již přesuneme k náhodným procházkám. Všech cest délky N je 2^N. Definujeme si tedy Ω_N jako množinu všech cest délky N, $\mathcal{A}_N$ jako množinu všech podmnožin Ω_N a P_N jako pravděpodobnostní míru na Ω_N takovou, že $P_N(\{\omega\}) = 2^{-N}$ pro všechna $\omega \in \Omega_N$. Takto dostáváme pravděpodobnostní prostor $(\Omega_N, \mathcal{A}_N, P_N)$. Kvůli omezení délky cesty vzniká otázka, proč bychom nemohli vzít $N = \infty$. To by ale Ω_N obsahovala nekonečně mnoho cest a pravděpodobnost každé z nich (protože pro ně potřebujeme rovnoměrné rozdělení) by byla nulová. Toto tedy (stejně jako jakékoliv rovnoměrné diskrétní rozdělení na nekonečně mnoha bodech) není dobře definováno, a proto si ponecháme $N \in \mathbb{N}$. Závislost na N neboli to, že máme prostor omezený pouze na cesty určité délky, se může zdát znepokojující, ale všimněme si, že pravděpodobnost jevů, které budeme v této práci zkoumat, na tomto N nezávisí. Vezměme například takový jev, že cesta prochází bodem $(1,1)$. Tomu odpovídá 2^{N-1} cest, protože první krok cesty je podmínkou pevně dán. Pravděpodobnost takové cesty je pak $2^{N-1} \cdot 2^{-N} = \frac{1}{2}$, což nezávisí na N. Obecněji, pro jakékoliv přirozené $k \leq N$ lze přesně předepsat prvních k kroků cesty. Pak pravděpodobnost toho, že taková cesta nastane, je rovna $2^{N-k} \cdot 2^{-N} = 2^{-k}$, což opět nezávisí na N. Proto pro naše účely řekněme, že si zvolíme N dostatečně velké (větší než všechna přirozená čísla, která budou v práci ve spojitosti s délkou cesty zmíněna). Pak se budeme vždy pohybovat v tomto pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_N, \mathcal{A}_N, P_N)$, ale nebudeme to již zmiňovat a pravděpodobnostní míru P_N budeme značit pouze písmenem P.

Podobně jako jsme definovali cesty, zavedeme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$ i následující náhodné veličiny:

$$\begin{aligned} &X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{R}\{-1,1\} \text{ nezávislé}, \\ &S_0 = 0 \text{ s.j.}, \ S_k = X_1 + \ldots + X_k, \ 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pozn.: Náhodnou procházku či cestu si lze představit jako postupný záznam hry, při které si dva hráči házejí mincí a při každém hodu dostane výherce od druhého hráče 1 Kč. Pokud budeme náhodnou procházku chápat jako záznam této hry z pohledu prvního hráče, odpovídá X_k tomu, zda po k-tém hodu první hráč přišel o 1 Kč, nebo zda po tomto hodu 1 Kč získal. S_k je pak jeho peněžní stav po k-tém hodu.

Značení

Při popisování jevů budeme používat již jen náhodné veličiny S_k, tedy např. jev „*cesta prochází bodem* (n,x)“ budeme značit $\{S_n = x\}$. Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(S_n = x)$, ale protože se bude v textu vyskytovat často, zavedeme pro ni označení $p_{n,x}$.

Počet cest do bodu (n,x) je dán vzorcem (1.3), a proto platí

$$p_{n,x} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \cdot 2^{-n}. \tag{1.5}$$

Čísla $\binom{n}{\frac{n+x}{2}}$ tvoří n-tý řádek Pascalova trojúhelníka, pro $x = \pm n$ jsou rovna 1 a směrem k $x = 0$ (tedy doprostřed n-tého řádku) rostou.

1.2 Návraty k počátku a změny znaménka

V této podkapitole se budeme zabývat tím, kdy se náhodná procházka vrací k nulové ose. Zkoumání těchto jevů přináší poměrně zajímavé výsledky, které nás pak budou provázet po zbytek textu.

Budeme říkat, že *v čase* $2n$ *nastal návrat k počátku* či *k nulové ose* nebo také že *v čase* $2n$ *nastala návštěva nulové osy* nebo *vstup do nuly*, pokud $S_{2n} = 0$. Všimněme si, že protože cesta začíná v bodě (0,0), může návrat k počátku nastat opravdu jen v sudém čase. Dále nás bude zajímat, kdy tento jev nastal poprvé. Proto řekneme, že *v čase* $2n$ *nastal první návrat k nulové ose (k počátku)*, pokud

$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0 \text{ a } \ S_{2n} = 0.$$

Značení
Pravděpodobnost $p_{2n,0}$, že v čase $2n$ nastane návrat k počátku, budeme značit také u_{2n}. Pravděpodobnost, že v čase $2n$ nastane první návrat k počátku, budeme značit f_{2n}.

Podle (1.5) pro u_{2n} platí:

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n}.$$

Pozn.: Tento vzorec je správný i pro $n = 0$: $P(S_0 = 0) = 1 = u_0$. Naopak pro první návrat k počátku v čase 0 z definice platí $f_0 = 0$.
Za zmínku stojí, že se stoupajícím n klesá pravděpodobnost u_{2n}:

$$1 > \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{4}$$
$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n} > \binom{2n+2}{n+1} \cdot 2^{-2n-2} = u_{2n+2},$$

kde první (triviální) nerovnost jsme z obou stran vynásobili výrazem $\binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n}$.

Značení
Zápisem $Z(„...“)$ budeme značit počet cest splňujících „...“.
Počet cest délky n splňujících „...“ budeme značit $Z_n(„...“)$.
Počet cest do bodu (n,x) splňujících „...“ budeme značit $Z_{n,x}(„...“)$.
Pokud není v závorce uvedeno jinak, budeme ve všech z těchto případů uvažovat cesty začínající v bodě (0,0).

Nyní si ukážeme vztah mezi u_{2n} a f_{2n}. Jev $\{S_{2n} = 0\}$ je složením disjunktních jevů $\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0, S_{2n} = 0\}$ (neboli *„první návrat k počátku je v čase* $2k$ *a v čase* $2n$ *je (také) návrat k počátku“*) pro všechna $1 \leq k \leq n$. Každou cestu, která toto splňuje, lze rozdělit na dvě cesty — jedna je dlouhá $2k$

a má v čase $2k$ první návrat k počátku, druhá je dlouhá $2n - 2k$ a má v čase $2n - 2k$ návrat k počátku. Proto

$$\begin{aligned} &Z_{2n}(s_1 \neq 0,..., s_{2k-1} \neq 0, s_{2k} = 0, s_{2n} = 0) \\ =&Z_{2k}(s_1 \neq 0,..., s_{2k-1} \neq 0, s_{2k} = 0) \cdot Z_{2n-2k}(s_{2n-2k} = 0). \end{aligned}$$

Pomocí uvedeného rozložení na disjunktní jevy (podle věty o úplné pravděpodobnosti) tedy můžeme u_{2n} vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} P(S_1 \neq 0,..., S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0, S_{2n} = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{-2n} \cdot Z_{2n}(s_1 \neq 0,..., s_{2k-1} \neq 0, s_{2k} = 0, s_{2n} = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [2^{-2k} \cdot Z_{2k}(s_1 \neq 0,..., s_{2k-1} \neq 0, s_{2k} = 0)] \cdot [2^{-(2n-2k)} \cdot Z_{2n-2k}(s_{2n-2k} = 0)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{2k} \cdot u_{2n-2k} \\ &= f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + ... + f_{2n-2} u_2 + f_{2n} u_0. \end{aligned}$$

Nyní se dostáváme ke klíčové větě, která se využívá v mnoha dalších poznatcích o náhodných procházkách.

Věta 2. *Pravděpodobnost toho, že do času $2n$ včetně nenastane žádný návrat k nulové ose, je rovna pravděpodobnosti toho, že v čase $2n$ návrat nastane, neboli*

$$P(S_1 \neq 0,...,S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) = u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Důkaz. Pokud v prvních $2n$ krocích nesmí nastat návrat k nule, nesmí být nulová osa ani protnuta. Jinými slovy, buď musí být všechna S_i, $1 \leq i \leq 2n$ kladná, nebo musí být všechna záporná. Protože tyto dvě možnosti jsou symetrické, mají stejnou pravděpodobnost a nám tedy stačí dokázat pouze

$$P(S_1 > 0,...,S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n}. \tag{1.7}$$

V druhé kapitole (problém 8) bude dokázáno, že

$$P(S_1 > 0,..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} P(S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0). \tag{1.8}$$

$2n - 1$ je liché číslo, proto $S_{2n-1} \neq 0$ skoro jistě. Z toho plyne, že $P(S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0) = P(S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} \geq 0)$, a proto k dokončení důkazu stačí jen ukázat, že

$$P(S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} \geq 0) = u_{2n}, \tag{1.9}$$

což je obsahem problému 7 v druhé části práce.

□

Lemma 3. *Pro pravděpodobnost prvního návratu v čase $2n$ platí*

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}. \tag{1.10}$$

Důkaz. Provedeme rozložení jevu na disjunktní sjednocení:

$$\{S_1 \neq 0,...,S_{2n-2} \neq 0\} = \{S_1 \neq 0,...,S_{2n} \neq 0\} \cup \{S_1 \neq 0,...,S_{2n-1} \neq 0,S_{2n} = 0\}.$$

Pokud těmto jevům přiřadíme pravděpodobnosti a použijeme větu 2, získáme

$$u_{2n-2} = u_{2n} + f_{2n}.$$

Po jednoduché úpravě pak dostaneme

$$\begin{aligned}
f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} &= \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-2n+2} - \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n} \\
&= \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 \cdot 2^{2n-2}} - \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} = \frac{(2n-2)! \cdot (4n^2 - 2n(2n-1))}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \\
&= \frac{1}{2n-1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}.
\end{aligned}$$

□

Pozn.: Ze vzorce (1.10) lze vidět, že $f_2 + f_4 + ... = 1$: vyjádřeme si částečný součet

$$s_n = f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = u_0 - u_2 + u_2 - u_4 + ... + u_{2n-2} - u_{2n} = u_0 - u_{2n} = 1 - u_{2n}.$$

Jak již víme, u_{2n} monotónně klesá s rostoucím n a navíc je kladné pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Proto $u_{2n} \to 0$ a tedy $s_n \to 1$ pro n jdoucí do nekonečna.

Kromě toho, kdy nastane první návrat k nulové ose, nás může zajímat i to, kolikrát v určitém časovém úseku takový návrat nastane. Rozdělení počtu návratů je odvozeno v následujícím lemmatu.

Lemma 4. *Pravděpodobnost, že do času $2n$ včetně nastane právě r návratů k nulové ose, je rovna*

$$\frac{1}{2^{2n-r}} \cdot \binom{2n-r}{n} = p_{2n-r,r}, \quad r = 0, 1, ..., n. \tag{1.11}$$

Toto lemma bude dokázáno v druhé kapitole (problémy 9 a 10).

Vraťme se k představě o dvou hráčích házejících si mincí. Pokud je S_k kladné, znamená to, že první hráč v čase k vede, pokud je S_k rovno 0, je hra vyrovnaná, a pokud je S_k záporné, vede druhý hráč. S touto představou se nabízí otázka — kolikrát v určitém časovém úseku proběhne změna vedení (vedoucího hráče)? Geometricky si tuto změnu můžeme představit jako protnutí nulové osy. Budeme tedy říkat, že *v čase $2n$ došlo ke změně znaménka*, pokud S_{2n-1} a S_{2n+1} mají opačné znaménko. Zjevně pak platí, že $S_{2n} = 0$ a $S_{2n-1} = -S_{2n+1} \in \{-1,1\}$.

Značení

Pravděpodobnost, že do času $2n+1$ nastane právě r-krát změna znaménka, budeme značit $\xi_{r,2n+1}$.

Věta 5. *Pravděpodobnost, že do času $2n+1$ nastane právě r-krát změna znaménka, je rovna $2P(S_{2n+1} = 2r+1)$. Jinými slovy*

$$\xi_{r,2n+1} = 2p_{2n+1,2r+1}, \quad r = 0, 1, 2, ... \tag{1.12}$$

Důkaz této věty je proveden v druhé části práce (problém 11).

Lemma 6. *Pravděpodobnost* $\xi_{r,2n+1}$*, že do času* $2n+1$ *proběhne právě* r*-krát změna znaménka, klesá s rostoucím* r*, neboli*

$$\xi_{0,2n+1} > \xi_{1,2n+1} > \xi_{2,2n+1} > \dots > \xi_{n,2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ pevné.}$$

Důkaz. Ze zřejmé nerovnosti

$$\frac{n+r+2}{n-r} > 1$$

plyne $\xi_{r,2n+1} = 2^{-2n} \cdot \binom{2n+1}{n+r+1} > 2^{-2n} \cdot \binom{2n+1}{n+r+2} = \xi_{r+1,2n+1}$

vynásobením obou stran výrazem $\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n} \cdot (n+r+2)! \cdot (n-r-1)!}$.

□

Ukázali jsme si tedy, že pravděpodobnost toho, že při hře s házením mincí dlouhé $2n+1$ hodů celou dobu povede jeden hráč, je větší než pravděpodobnost toho, že se vedení vymění r-krát, a to pro každé r kladné. Zajímavější by ale bylo vědět, jaká je vlastně střední hodnota počtu změn znaménka. Označme si náhodnou veličinu počtu změn znaménka při procházce dlouhé $2n+1$ jako C_{2n+1}. Pak

$$\mathrm{E}C_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \xi_{k,2n+1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2p_{2n+1,2k+1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{2n+1}{n+k+1} 2^{-2n}.$$

To už nelze upravit do jednoduššího tvaru, a proto tu uvedeme tabulku se zaokrouhlenými hodnotami $\mathrm{E}C_{2n+1}$ pro několik určitých n. Ta nám dává zajímavé výsledky — například při procházce dlouhé 1001 kroků je střední hodnota počtu změn znaménka přibližně 12, což je vzhledem k délce procházky malé číslo.

Tabulka 1.1: Střední hodnota počtu změn znaménka na procházce dlouhé $2n+1$ pro různá n.

n	délka procházky	$\mathrm{E}C_{2n+1}$
1	3	0,25
3	7	0,59
5	11	0,85
50	101	3,52
250	501	8,43
500	1001	12,13

1.3 Maxima a první vstupy

Prozatím jsme se zabývali hlavně tím, kdy (a kolikrát) nastane návrat k nulové ose. Nyní se přesuneme i k osám ostatních celých čísel. Řekneme, že *v čase* n *nastal vstup do* r*, pokud* $S_n = r$. Obdobně jako v předchozí podkapitole definujeme *první vstup do* r. Nezapomeňme, že $P(S_n = r) = p_{n,r} = 0$, pokud n a r nemají stejnou paritu. Dále budeme přirozeně říkat, že *maximum do času* n *včetně je rovno* r, pokud $\max\{S_0,\dots,S_n\} = r$. Podívejme se na pravděpodobnost toho, že procházka vede do určitého bodu a v průběhu dosáhne meze r.

Lemma 7. *Buďte $n, r \in \mathbb{N}_0$ a $k \leq r$ celé. Pravděpodobnost, že procházka délky n vede do bodu $A = (n,k)$ a její maximum je větší nebo rovno r, je rovna $p_{n,2r-k} = P(S_n = 2r - k)$.*

Důkaz. Maximum je větší nebo rovno r právě tehdy, když nastane vstup do r. Proto stačí použít větu 1 (princip zrcadlení) a dostáváme:

$$\begin{aligned}
&P(S_n = k, \max\{S_1,...,S_n\} \geq r) = 2^{-n} \cdot Z_{n,k}(\max\{S_1,...,S_n\} \geq r) \\
=&2^{-n} \cdot Z_{n,k}(\text{dotýká se osy } r) = 2^{-n} \cdot Z_{n,k}(\text{začíná v bodě } (0,2r)) \\
=&2^{-n} \cdot Z_{n,k-2r} = p_{n,k-2r} = p_{n,2r-k},
\end{aligned}$$

poslední rovnost plyne ze symetrie cest do bodů $(n,k-2r)$ a $(n,2r-k)$.

□

Často se můžeme ptát, jaké je maximum cesty (délky n), aniž bychom chtěli specifikovat, do jakého bodu povede. Tak se dostáváme k větě, kterou nám předchozí lemma umožní dokázat.

Věta 8. *Buď $r \geq 0$. Pravděpodobnost, že maximum procházky délky n je rovno r, je rovna $p_{n,r} + p_{n,r+1}$.*

Pozn.: Jeden ze členů tohoto součtu je roven nule. Proto bychom mohli tuto větu také formulovat tak, že daná pravděpodobnost je rovna kladnému z obou členů.

Důkaz. Nejprve spočtěme pravděpodobnost pro maximum při daném koncovém bodu. Jev „*maximum je větší nebo rovno r*“ je sjednocením disjunktních jevů „*maximum je rovno r*“ a „*maximum je větší nebo rovno r+1*“. Proto (dle lemmatu 7) platí:

$$\begin{aligned}
&P(S_n = k, \max\{S_1,...,S_n\} = r) \\
=&P(S_n = k, \max\{S_1,...,S_n\} \geq r) - P(S_n = k, \max\{S_1,...,S_n\} \geq r+1) \\
=&p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Nyní stačí toto sečíst přes všechna k, $-n + 2r \leq k \leq r$.

$$\begin{aligned}
P(\max\{S_1,...,S_n\} = r) &= \sum_{k=-n+2r}^{r} P(S_n = k, \max\{S_1,...,S_n\} = r) = \\
&= p_{n,n} - p_{n,n+2} + p_{n,n-1} - p_{n,n+1} + p_{n,n-2} - \\
&- p_{n,n} + p_{n,n-3} - p_{n,n-1} + p_{n,n-4} - p_{n,n-2} + ... \\
... &+ p_{n,r+2} - p_{n,r+4} + p_{n,r+1} - p_{n,r+3} + p_{n,r} - p_{n,r+2}.
\end{aligned}$$

Každý člen, před kterým je znaménko +, se o pět členů dále opakuje, tentokrát se znaménkem $-$. Proto se většina členů navzájem odečte a zbydou jen tyto: $-p_{n,n+2}, -p_{n,n+1}, +p_{n,r+1}, +p_{n,r}$. První dva z těchto členů jsou rovny 0, protože $n + 2 > n + 1 > n$ (taková cesta tedy neexistuje). Takto dostáváme požadovaný vzorec

$$P(\max\{S_1,...,S_n\} = r) = p_{n,r} + p_{n,r+1}. \tag{1.14}$$

□

Na začátku této podkapitoly bylo zmíněno, co je *první vstup do r*. Tomu se věnuje následující věta.

Věta 9. *Pravděpodobnost $\varphi_{r,n}$, že první vstup do r nastane v čase n, je rovna*

$$\varphi_{r,n} = \frac{1}{2}(p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}) = \frac{r}{n}\binom{n}{\frac{n+r}{2}}2^{-n}. \tag{1.15}$$

Důkaz. Cesta, která do r poprvé vstupuje v čase n, musí procházet i bodem $(n-1,r-1)$, proto platí:

$$\varphi_{r,n} = \frac{1}{2}P(S_{n-1} = r-1, \max\{S_1,\ldots,S_{n-1}\} = r-1),$$

kde $\frac{1}{2}$ reprezentuje pravděpodobnost, že po vstupu do bodu $(n-1,r-1)$ bude následovat vstup do bodu (n,r). Dále použijeme vzorec (1.13) z důkazu věty 8 a vzorec (1.5) ze základních poznatků o cestách a náhodných procházkách:

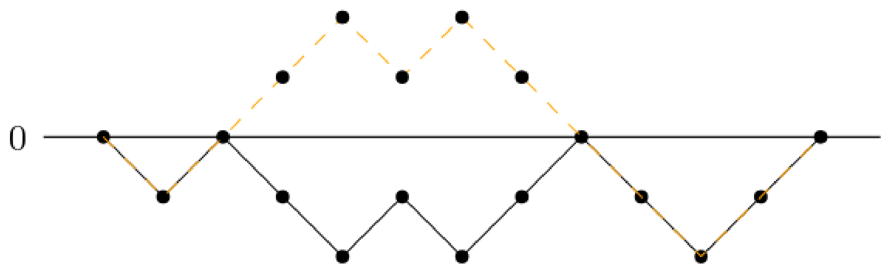
$$\begin{aligned}\varphi_{r,n} &= \frac{1}{2}(p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\binom{n-1}{\frac{n+r-2}{2}}\cdot 2^{-n+1} - \binom{n-1}{\frac{n+r}{2}}\cdot 2^{-n+1}\right] \\ &= 2^{-n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n!\cdot\left(\frac{n+r}{2}-\frac{n-r}{2}\right)}{\left(\frac{n+r}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n-r}{2}\right)!} = \frac{r}{n}\binom{n}{\frac{n+r}{2}}2^{-n}.\end{aligned}$$

□

Další věta ukazuje, jak první vstup do r souvisí s r-tým návratem k počátku.

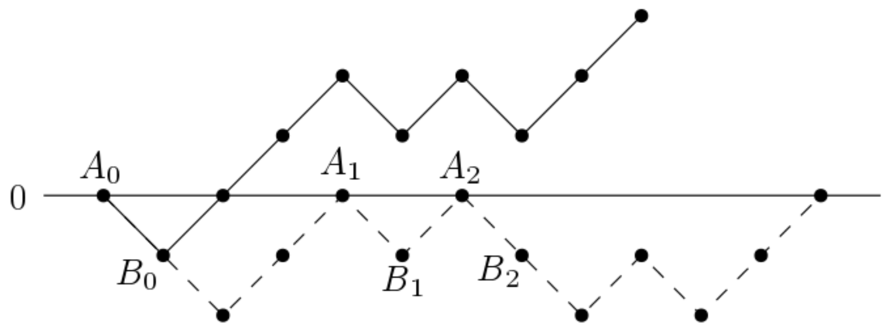
Věta 10. *Pravděpodobnost, že v čase n nastane r-tý návrat k nulové ose, je rovna $\varphi_{r,n-r}$.*

Důkaz. Uvažujme cestu do bodu $(n,0)$, která má právě $r-1$ vnitřních bodů na nulové ose a jejíž všechny body jsou pod nulovou osou nebo na ní. Takové cestě budeme v tomto důkazu říkat *reprezantativní.* Reprezentativní cesta se skládá z r menších cest, kde každá z nich má oba koncové body na nulové ose. Každou z těchto r menších cest můžeme (a nemusíme) zrcadlově převrátit podle nulové osy. Tímto způsobem dostáváme 2^r cest do bodu $(n,0)$ takových, že mají body na nulové ose na stejných místech jako původní reprezentativní osa. Nyní ukážeme,



Obrázek 1.3: Reprezentativní cesta a převracením získaná nová cesta.

že počet reprezentativních cest je stejný jako počet cest takových, že první vstup do r u nich nastává v čase $n-r$. Mezi těmito dvěma množinami cest totiž existuje bijektivní zobrazení, které lze popsat následovně. Mějme reprezentativní cestu. Pro každý bod na nulové ose (včetně počátečního a kromě koncového) — označme je $A_k = (i_k,0)$, $k = 0,\ldots,r-1$ — a jeho následující bod $B_k = (i_k+1,-1)$ vymažme úsečku A_kB_k (neboli ztotožněme body A_k a B_k). Takto dostaneme cestu, která poprvé vstoupí do r v čase $n-r$. Toto zobrazení označíme ψ_1. Inverzní zobrazení, které zatím označíme ψ_2, lze popsat následovně. Mějme cestu, která poprvé vstupuje do r v čase $n-r$. Mezi počátek a následující bod vložíme jednu příčku cesty se záporným sklonem. Takto vznikne další bod na nulové ose (od počátku je to hned první další bod na nulové ose). Mezi něj a další bod vložíme příčku, stejně jako jsme to udělali s počátkem, a takto provedeme vložení příčky dohromady r-krát. Tím dostáváme reprezentativní cestu.



Obrázek 1.4: Bijekce mezi množinami cest.

Krátce ověříme vlastnosti popsaného zobrazení. Pro toto ověření označme množinu všech reprezentativních cest jako R a množinu všech cest délky $n-r$, které do r poprvé vstupují v čase $n-r$, označme jako V.

- ψ_1 přiřadí každému $\mathbf{s} \in R$ právě jedno $\psi_1(\mathbf{s}) \in V$.
  Že ψ_1 je opravdu zobrazení, je z popisu zřejmé. Dále platí $(\psi_1(\mathbf{s}))_{n-r} = r$, protože $s_n = 0$ a v průběhu zobrazení r-krát vymažeme příčku se sklonem -1. Pokud navíc zachováme indexy z popisu zobrazení, jsou při zobrazení ψ_1 body s_0,...,s_{i_k} posunuty maximálně o $r-1$ výš, a proto má cesta $\psi_1(\mathbf{s})$ v čase $n-r$ opravdu první vstup do r. Tedy $\psi_1(\mathbf{s}) \in V$.

- ψ_2 přiřadí každému $\mathbf{t} \in V$ právě jedno $\psi_2(\mathbf{t}) \in R$.
  Že ψ_2 je opravdu zobrazení, je z popisu opět zřejmé. Protože zobrazení ψ_2 přidá k cestě z množiny V právě r příček se sklonem -1, platí $(\psi_2(\mathbf{t}))_n = 0$. Navíc ať cesta $\mathbf{t}$ začíná jakýmkoli směrem, přidáním příčky se sklonem -1 hned na začátek vzniká o několik kroků dále nový bod na nulové ose. Ten můžeme chápat jako nový počátek a přidání příčky opakovat. Z popisu zobrazení víme, že to se opakuje celkem r-krát. Navíc to, že mezi návratem s pořadím $r-1$ a mezi bodem $(n,0)$ již žádný bod na ose není, je zajištěno tím, že původní cesta má v čase $n-r$ první vstup do r. Proto $\psi_2(\mathbf{t})$ bude mít celkem r návratů k nulové ose a tedy $\psi_2(\mathbf{t}) \in R$.

- ψ_2 je opravdu zpětná transformace k ψ_1.
  Mějme $\mathbf{s} \in R$ a uplatněme na ni zobrazení ψ_1. Z určitých míst jsme tedy vymazali r příček se sklonem -1 a cestu $\mathbf{s}$ znovu dostaneme, pokud tyto příčky vložíme zpět na správná místa. Přesně to ale dělá zobrazení ψ_2. Víme totiž, že první příčku jsme odebrali hned u počátku. Zobrazení ψ_2 hned za počátek jednu příčku vrací. Tím vzniká nový bod na nulové ose, který je navíc totožný s bodem prvního návratu k nulové ose cesty $\mathbf{s}$ — je to bod $(i_1,0)$. Proto víme, kde byla při zobrazení ψ_1 odebrána další příčka a můžeme

ji tam vrátit, což zobrazení ψ_2 dělá. Takto postup pokračuje a dostáváme původní cestu $\mathbf{s}$.

Nyní už je jednoduché odvodit, že ψ_1 je bijekce:

- ψ_1 je prosté: mějme $\mathbf{s}, \mathbf{z} \in R$ taková, že $\psi_1(\mathbf{s}) = \psi_1(\mathbf{z})$. Aplikujeme-li na tuto rovnost zobrazení ψ_2, dostáváme
$$\mathbf{s} = \psi_2(\psi_1(\mathbf{s})) = \psi_2(\psi_1(\mathbf{z})) = \mathbf{z}.$$
- ψ_1 je na: mějme $\mathbf{t} \in V$. Pak pro $\mathbf{s} := \psi_2(\mathbf{t})$ platí $\psi_1(\mathbf{s}) = t$.

Pravděpodobnost, že v čase n nastane r-tý návrat k nulové ose, je tedy rovna

$$\begin{aligned}
&2^{-n} \cdot Z_{n,0}(\text{právě } r-1 \text{ vnitřních bodů leží na nulové ose}) = \\
=&2^{-n} \cdot 2^r \cdot Z_{n,0}(\text{je to reprezentativní cesta}) \\
=&2^{-(n-r)} \cdot Z_{n-r,r}(\text{první vstup do } r \text{ nastává v čase } n-r) = \varphi_{r,n-r}.
\end{aligned}$$

$\square$

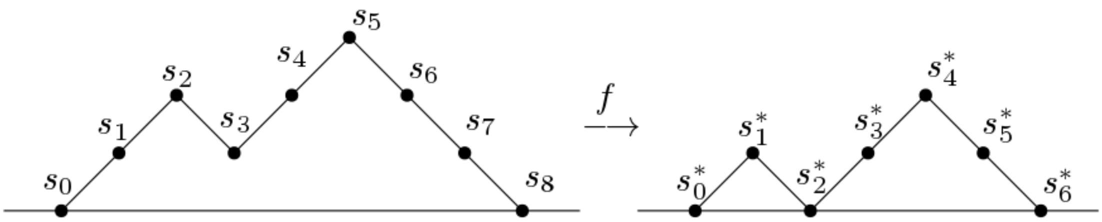
2. Vybrané úlohy

V této kapitole jsou uvedena řešení některých problémů navržených na konci třetí kapitoly knihy Williama Fellera: An Introduction to Probability Theory and Its Applications - Volume I (John Wiley & Sons, 1968). Číslování problémů z knihy zůstalo zachováno.

Problém 6. *Dokažte, že počet všech cest do bodu* $(2n+2{,}0)$*, jejichž všechny vnitřní body jsou nad osou, je roven počtu všech cest do bodu* $(2n{,}0)$*, jejichž vnitřní body jsou nad osou nebo na ose.*

Důkaz. Nechť A je množina všech cest $(s_0, s_1,..., s_{2n+2})$ do bodu $(2n + 2{,}0)$ takových, že všechny jejich vnitřní body jsou nad osou, a B je množina všech cest $(s^*_0, s^*_1,..., s^*_{2n})$ do bodu $(2n{,}0)$ takových, že všechny jejich body jsou nad osou nebo na ose. Nyní definujeme zobrazení $f : A \to B$ předpisem

$$f((s_0, s_1,..., s_{2n+2})) = (s_1 - 1, s_2 - 1,..., s_{2n+1} - 1).$$



Obrázek 2.1: Zobrazení f, $(s^*_0, s^*_1,..., s^*_{2n}) = s_1 - 1, s_2 - 1,..., s_{2n+1} - 1$.

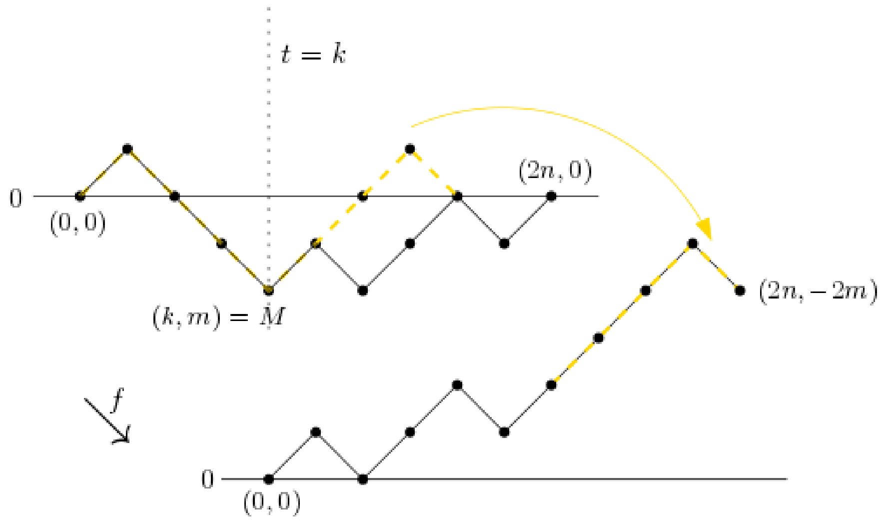
- Toto zobrazení je prosté: mějme cesty $\mathbf{s}^* = (s^*_0, s^*_1,..., s^*_{2n}) \in B$ a $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in A$ takové, že $f(\mathbf{s}) = f(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^*$. Protože $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in A$, nutně $s_0 = t_0 = 0$ a $s_{2n+2} = t_{2n+2} = 0$. Z povahy zobrazení f pro $i = 1,...,2n+1$ platí $s_i - 1 = s^*_{i-1} = t_i - 1$, tedy $s_i = t_i$ a $\mathbf{s} = \mathbf{t}$.
- Toto zobrazení je na: mějme cestu $\mathbf{s}^* \in B$. Potom pro $\mathbf{s} = (0, s^*_0 + 1, s^*_1 + 1,..., s^*_{2n} + 1, 0) \in A$ platí $f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^*$.

Zobrazení f je tedy bijekce, navíc jsou množiny A i B konečné, a proto mají tyto množiny stejný počet prvků.

□

Problém 7. *Dokažte geometricky, že* $P(S_1 \geq 0,...,S_{2n} \geq 0) = u_{2n}$. *Použijte následující zobrazení: Mějme cestu do bodu* $(2n{,}0)$*. Bod jejího minima, který leží nejvíce vlevo, označíme* $M = (k{,}m)$*. K části od počátku do bodu* M *vytvoříme zrcadlový obraz podle osy* $t = k$ *a tento obraz navážeme na konec cesty* $(2n{,}0)$*. Pokud za počátek nové cesty a nového systému os vezmeme bod* M*, dostaneme cestu, která vede do bodu* $(2n, -2m)$ *a má všechny body nad osou nebo na ose.*

Důkaz. Popsané zobrazení lze formálně zapsat následovně. Množinu všech cest



Obrázek 2.2: Zobrazení f.

do bodu $(2n,0)$ označme A a množinu všech cest délky $2n$, jejichž body jsou nad osou nebo na ose, označme B. Nyní si definujeme zobrazení $f : A \to B$ předpisem

$$f(s_0,...,s_{2n}) = (s_k - m, s_{k+1} - m,...,s_{2n} - m, s_{k-1} - 2m, s_{k-2} - 2m,...,s_0 - 2m),$$
$$\mathbf{s} \in A, m := min\{s_0,...,s_{2n}\}, k := min\{i : s_i = m\}.$$

Ověříme několik vlastností zobrazení f.

- $f(\mathbf{s})$ opravdu patří do B pro všechna $\mathbf{s}$ z A:
  pokud $s_i \geq 0 \ \forall \ i \in \{0,...,2n\}$, pak $m = 0$ a $k = 0$, tedy
  $f(\mathbf{s}) = (s_0,...,s_{2n}) \in B$.
  Pokud $m < 0$, pak $min\{s_k - m,...,s_{2n} - m,s_{k-1} - 2m,...,s_0 - 2m\} =$
  $= min\{s_k,...,s_{2n},s_{k-1} - m,...,s_0 - m\} - m \geq$
  $\geq min\{s_k,...,s_{2n},s_{k-1},...,s_0\} - m = s_k - m = 0$, tedy $f(\mathbf{s})$ patří do B.

- f je prosté:
  nechť

$$\begin{aligned} f(\mathbf{s}) &= (s_k - m, s_{k+1} - m,...,s_{2n} - m, s_{k-1} - 2m, s_{k-2} - 2m,...,s_0 - 2m) \\ = f(\mathbf{t}) &= (t_l - j, t_{l+1} - j,...,t_{2n} - j, t_{l-1} - 2j, t_{l-2} - 2j,...,t_0 - 2j) \\ &= (b_0,...,b_{2n}) \end{aligned}$$

  pro nějaká $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ z A; k, m, l, j odpovídají definici zobrazení f.
  Pokud $b_{2n} = 0$, nutně $m = \frac{1}{2}s_0 = 0 = \frac{1}{2}t_0 = j$, tedy $\mathbf{s} = f(\mathbf{s}) = f(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$.
  Pokud je $b_{2n} > 0$, pak $0 - 2m = s_0 - 2m = t_0 - 2j = 0 - 2j$, nutně tedy $m = j$. Uvědomme si, že

$$s_0,...,s_{k-1} > s_k = m = s_{2n} + m, \text{ tedy}$$
$$s_0 - 2m,...,s_{k-1} - 2m > s_k - 2m = -m = s_{2n} - m.$$

  Označme si $x := max\{i : b_i = -m\}$. Z předchozí nerovnosti vyplývá, že $x = 2n - k = 2n - l$, tedy $k = l$.
  Protože víme, že $m = j$ a $k = l$, je lehké odvodit, že $s_i = t_i \ \forall \ i \in \{0, ..., 2n\}$, tedy $\mathbf{s} = \mathbf{t}$.

- f je *na*:
  mějme $\mathbf{b} \in B$. Už víme, že pokud $b_{2n} = 0$, pak $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.
  Buď $b_{2n} > 0$. Označme si $m := -\frac{1}{2}b_{2n}$ a stejně jako v předchozí části $x := max\{i : b_i = -m\}$. Pak pro
  $\mathbf{s} = (b_{2n} + 2m, b_{2n-1} + 2m, ..., b_{x+1} + 2m, b_0 + m, b_1 + m, ..., b_x + m)$
  je $f(\mathbf{s}) = (b_0, ..., b_{2n})$.

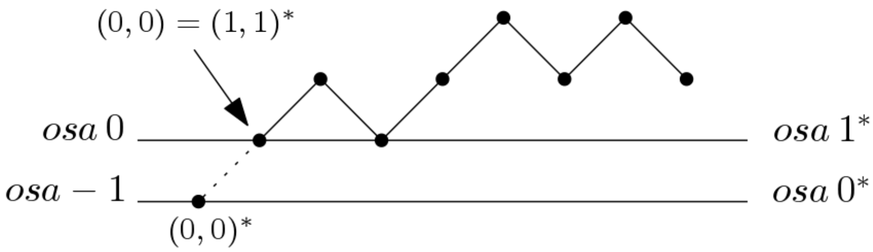
Protože množiny A a B jsou konečné a $f : A \to B$ je bijekce, mají množiny A a B stejný počet prvků. Navíc délka cest z množiny A je stejná jako délka cest z množiny B. Proto $P(S_1 \geq 0, ..., S_{2n} \geq 0) = P(S_{2n} = 0)$.

□

Problém 8. *Uvažujte cesty, které se nedotýkají osy -1, a pomocí toho dokažte, že platí*

$$P(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}P(S_1 \geq 0, ..., S_{2n-1} \geq 0). \tag{1.8}$$

Důkaz. V tomto důkazu budeme každou cestu chápat dvěma způsoby, a to podle dvou různých pojmenování os (viz Obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Různé pojmenování os.

Platí: $Z_{2n-1}(S_1 \geq 0, ..., S_{2n-1} \geq 0) = Z_{2n-1}(\text{nedotýká se osy -1})$. Nyní lze osy vnímat druhým způsobem (v obrázku označeno symbolem *) a rovnost doplnit takto:

$$\begin{aligned} Z_{2n-1}(\text{nedotýká se osy -1}) &= Z_{2n-1}(\text{začíná v bodě } (1,1)^* \text{ a nedotýká se osy } 0^*) \\ &= Z_{2n}(\text{prochází bodem } (1,1)^* \text{ a nevrací se do osy } 0^*) \\ &= Z_{2n}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0). \end{aligned}$$

Protože $Z_k = 2^k$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P(S_1 \geq 0, ..., S_{2n-1} \geq 0) &= \frac{1}{2} \cdot Z_{2n-1}(S_1 \geq 0, ..., S_{2n-1} \geq 0) \cdot 2^{-(2n-1)} \\ &= Z_{2n}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) \cdot 2^{-2n} = P(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0). \end{aligned}$$

□

Značení

Pravděpodobnost toho, že v čase $2n$ nastane r-tý návrat k nulové ose, budeme značit $\rho_{r,2n}$.

Pravděpodobnost toho, že do času $2n$ (včetně) nastane právě r návratů k nulové ose, budeme značit $z_{r,2n}$.

Problém 9. *Pravděpodobnost, že před časem $2n$ nastane právě r návratů k nule, je rovna pravděpodobnosti toho, že v čase $2n$ nastane návrat k nule a předchází mu alespoň r návratů.*

Důkaz. Jev A: *„do času $2n$ (včetně) nastane právě r návratů k nulové ose"* je sjednocením disjunktních jevů A_k: *„v čase $2k$ nastal r-tý návrat k nulové ose a pak až do času $2n$ (včetně) žádný nenastal"*. Proto platí:

$$
\begin{aligned}
&P(\textit{před časem } 2n \textit{ nastane právě } r \textit{ návratů k nulové ose})\\
=&P(\textit{do času } 2n \textit{ (včetně) nastane právě } r \textit{ návratů k nulové ose}) - \rho_{r,2n}\\
=&\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \rho_{r,2n}\\
=&\sum_{k=1}^{n} \rho_{r,2k} \cdot P(\textit{na cestě délky } 2n-2k \textit{ nenastane návrat k nulové ose}) - \rho_{r,2n}
\end{aligned}
$$

Nyní využijeme větu 2 a fakt, že u_0 se rovná 1, a rovnost pokračuje:

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{k=1}^{n} \rho_{r,2k} \cdot u_{2n-2k} - \rho_{r,2n} = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{r,2k} \cdot u_{2n-2k} + \rho_{r,2n} - \rho_{r,2n}\\
=&P(\textit{v čase } 2n \textit{ nastane návrat k nulové ose a předchází mu alespoň } r \textit{ návratů}).
\end{aligned}
$$

□

Problém 10. *Pomocí výsledků z problému 9 dokažte, že*

$$z_{r,2n} = \rho_{r,2n} + \rho_{r+1,2n} + \ldots + \rho_{n,2n} \tag{2.1}$$

Potom použijte větu 10 a dokažte, že

$$z_{r,2n} = \frac{1}{2^{2n-r}} \cdot \binom{2n-r}{n}. \tag{1.11}$$

Důkaz. Uvědomme si, že jev *„v čase $2n$ nastane návrat k nulové ose a předchází mu alespoň r návratů"* je sjednocením disjunktních jevů *„v čase $2n$ nastane k-tý návrat k nulové ose"* pro $k = r+1, r+2, \ldots, n-1$.

$z_{r,2n} = \rho_{r,2n} + P(\textit{před časem } 2n \textit{ nastane právě } r \textit{ návratů k nulové ose})$,
nyní použijeme výsledky z problému 9:

$$
\begin{aligned}
&= \rho_{r,2n} + P(\textit{v čase } 2n \textit{ nastane návrat k ose a předchází mu alespoň } r \textit{ návratů})\\
&= \rho_{r,2n} + \rho_{r+1,2n} + \ldots + \rho_{n,2n}.
\end{aligned}
$$

V důkazu další rovnosti použijeme větu 10 ($\rho_{r,n} = \varphi_{r,n-r}$) a větu 9, kterou lze upravit takto:

$$\varphi_{r,n} = \frac{1}{2}p_{n-1,r-1} - \frac{1}{2}p_{n-1,r+1} = \frac{1}{2}p_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}p_{n-1,r+1} - p_{n-1,r+1} = p_{n,r} - p_{n-1,r+1},$$

protože jev *„cesta prochází bodem (n,r)"* je sjednocením disjunktních jevů *„cesta prochází bodem $(n-1,r-1)$ a pak pokračuje do (n,r)"* a *„cesta prochází bodem*

$(n-1,r+1)$ a pak pokračuje do (n,r)“.
Pokud uvážíme tyto dvě věty a navážeme na vzorec (2.1), dostaneme:

$$\begin{aligned} z_{r,2n} =& \varphi_{r,2n-r} + \varphi_{r+1,2n-(r+1)} + \dots + \varphi_{n,n} \\ =& \frac{1}{2}(p_{2n-r-1,r-1} - p_{2n-r-1,r+1} + p_{2n-r-2,r} - p_{2n-r-2,r+2} + \\ & + p_{2n-r-3,r+1} - \dots + p_{n-1,n-1} - p_{n-1,n+1}) \\ =& p_{2n-r,r} - p_{2n-r-1,r+1} + p_{2n-r-1,r+1} - p_{2n-r-2,r+2} + p_{2n-r-2,r+2} - \\ & - p_{2n-r-3,r+3} + \dots + p_{n,n} - p_{n-1,n+1} \\ =& p_{2n-r,r} - p_{n-1,n+1} = p_{2n-r,r} - 0 = p_{2n-r,r}. \end{aligned}$$

Protože ze vzorce 1.5 již víme, že

$$p_{n,x} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n},$$

dostáváme pak požadovanou rovnost.

□

Problém 11: Alternativní odvození vzorce pro pravděpodobnosti počtu změn znaménka. *Pomocí indukce dokažte, že pravděpodobnost $\xi_{r,2n-1}$, že do času $2n-1$ nastane právě r-krát změna znaménka, je rovna $2P(S_{2n-1} = 2r+1)$. Jinými slovy:*

$$\xi_{r,2n-1} = 2p_{2n-1,2r+1}, \qquad r = 0, 1, \dots \tag{1.12}$$

Přitom použijte a dokažte pomocný vzorec

$$\xi_{r,2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot [\xi_{r,2n-1-2k} + \xi_{r-1,2n-1-2k}]. \tag{2.2}$$

Důkaz. Nechť $r = 0$. Z problému 8 a vzorce (1.7) plyne:

$$\begin{aligned} \xi_{0,2n-1} &= P(S_1 \leq 0,\dots,S_{2n-1} \leq 0) + P(S_1 \geq 0,\dots,S_{2n-1} \geq 0) = \\ &= 2 \cdot P(S_1 \geq 0,\dots,S_{2n-1} \geq 0) = 2 \cdot 2 \cdot P(S_1 > 0,\dots, S_{2n} > 0) = \\ &= 2 \cdot u_{2n} = 2 \cdot p_{2n,0}. \end{aligned}$$

Jev A: *„cesta prochází bodem (2n,0)“* je sjednocením dvou disjunktních jevů A_1: *„cesta prochází bodem (2n-1,1) a pak pokračuje do (2n,0)“* a A_2: *„cesta prochází bodem (2n-1,-1) a pak pokračuje do (2n,0)“*. Proto

$$2 \cdot p_{2n,0} = 2 \cdot P(A) = 2 \cdot (P(A_1) + P(A_2)) = 2 \cdot \Big(p_{2n-1,1} \cdot \frac{1}{2} + p_{2n-1,-1} \cdot \frac{1}{2}\Big).$$

A protože ze symetrie cest je $p_{2n-1,1}$ rovno $p_{2n-1,-1}$, platí

$$\xi_{0,2n-1} = 2 \cdot p_{2n-1,1}.$$

Nyní buď $r \in \mathbb{N}$. Označme si následující jevy:
B: *„do času 2n-1 nastala právě r-krát změna znaménka“*,
F_k: *„první návštěva nulové osy nastala v čase 2k“*,

F_k^+: *„první návštěva nulové osy nastala v čase 2k a $sgn(S_{2k-1}) = sgn(S_{2k+1})$“*,
F_k^-: *„první návštěva nulové osy nastala v čase 2k a $sgn(S_{2k-1}) = -sgn(S_{2k+1})$“*,
$k = 1,...,n-1$.
Je vidět, že jev B je sjednocením disjunktních jevů $(B \cap F_1), (B \cap F_2),...,(B \cap F_{n-1})$ a že každý jev F_k, $k = 1,...,n-1$, je sjednocením disjunktních jevů F_k^+ a F_k^-. Podmínky $sgn(S_{2k-1}) = sgn(S_{2k+1})$ a $sgn(S_{2k-1}) = -sgn(S_{2k+1})$ rozlišují případy, kdy po návštěvě nulové osy nedošlo nebo došlo k jejímu protnutí (tedy změně znaménka). Uvědomme si, že pokud v čase $2k$ dojde k prvnímu návratu k nulové ose, ale nenastane změna znaménka, je pro naplnění jevu B třeba, aby ve zbylém čase nastala změna znaménka ještě r-krát. Pokud ale při první návštěvě nulové osy dojde i ke změně znaménka, je pro naplnění jevu B třeba, aby k ní ve zbylém čase došlo ještě $(r-1)$-krát. Proto platí, že

$$P(B \cap F_k^+) = f_{2k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_{r,2n-1-2k} \text{ a } P(B \cap F_k^-) = f_{2k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_{r-1,2n-1-2k},$$

kde $\frac{1}{2}$ představuje pravděpodobnost, že po navštívení nulové osy bude cesta pokračovat změnou (nebo zachováním) směru. Nyní tedy máme:

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(F_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n-1} P((F_k^+ \cup F_k^-) \cap B) = \sum_{k=1}^{n-1} P((F_k^+ \cap B) \cup (F_k^- \cap B)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (P(F_k^+ \cap B) + P(F_k^- \cap B)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (f_{2k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_{r,2n-1-2k} + f_{2k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_{r-1,2n-1-2k}).
\end{aligned}$$

To nám dává vzorec (2.2):

$$\xi_{r,2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot [\xi_{r,2n-1-2k} + \xi_{r-1,2n-1-2k}].$$

Nyní rovnost (1.12) $\xi_{r,2i-1} = 2p_{2i-1,2r+1}$ dokážeme indukcí.
Nejprve buď $i = 1$. Pak $\xi_{r,1} = 0 = 2p_{1,2r+1}$. Dále nechť daná rovnost platí pro všechna přirozená $i < n$. Platí tedy pro všechna $i = n-k$, $k = 1, ..., n-1$. Ze vzorce (2.2) takto dostáváme

$$\begin{aligned}
\xi_{r,2n-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot [2p_{2n-1-2k,2r-1} + 2p_{2n-1-2k,2r+1}] \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot [\frac{1}{2} \cdot p_{2n-1-2k,2r-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{2n-1-2k,2r+1}] =: (*).
\end{aligned}$$

Podle stejného principu jako v části důkazu pro $r = 0$ je
$\frac{1}{2} \cdot p_{2n-1-2k,2r-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{2n-1-2k,2r+1}$ rovno $p_{2n-2k,2r}$, a proto

$$(*) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot p_{2n-2k,2r}.$$

Každý sčítanec této sumy představuje pravděpodobnost jevu, že se cesta v čase $2k$ poprvé dotkne nulové osy a za dalších $2n-2k$ časových jednotek se ocitne na ose $2r$. Tyto jevy jsou nezávislé a celá suma je pravděpodobností jevu, že se cesta alespoň jednou dotkne nulové osy a pak se dostane do bodu $(2n,2r)$. Tento poslední zmíněný jev si označme C. Platí:

$$P(C) = Z_{2n,2r}(\text{alespoň jednou se dotkne nulové osy}) \cdot 2^{-2n}$$

a také

$$\begin{aligned}
&Z_{2n,2r}(\text{alespoň jednou se dotkne nulové osy}) =: (\bigcirc) \\
=&Z(\text{začíná v (1,1), končí v } (2n,2r) \text{ a alespoň jednou se dotkne nulové osy})+ \\
+&Z(\text{začíná v } (1,-1)\text{, končí v } (2n,2r) \text{ a alespoň jednou se dotkne nulové osy}).
\end{aligned}$$

Pokud na první ze sčítanců uplatníme princip zrcadlení a u druhého si uvědomíme, že každá cesta z bodu $(1,-1)$ do bodu $(2n,2r)$ protíná nulovou osu, dostaneme:

$$(\bigcirc) = 2 \cdot Z(\text{z bodu } \mathit{(1,\text{-}1)} \text{ do bodu } \mathit{(2n,2r)}).$$

To je rovno $2{\cdot}Z(\text{z bodu } \mathit{(0,0)} \text{ do bodu } \mathit{(2n\text{-}1,2r\text{+}1)}) = 2{\cdot}Z_{2n-1,2r+1}$, což vyplývá z podobné úvahy jako v důkazu problému 8 — stačí za nový počátek $(0,0)^*$ brát původní bod $(1,-1)$. Nyní tento výsledek shrneme s předchozími a dostáváme:

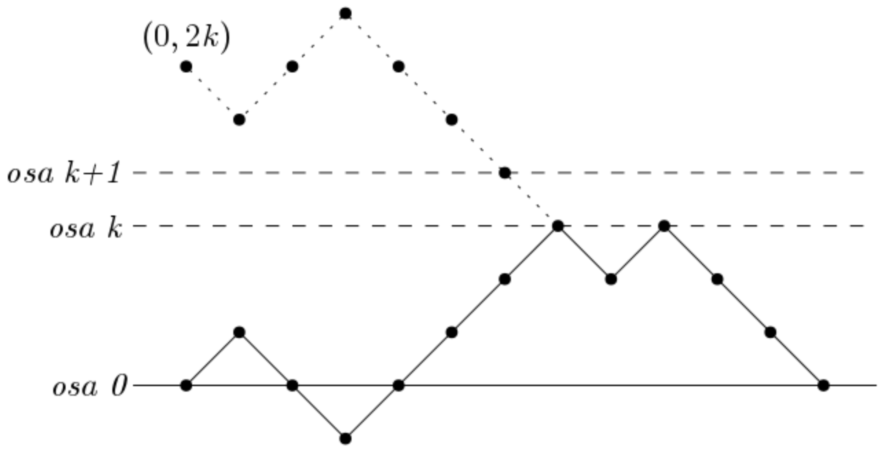
$$\begin{aligned}
\xi_{r,2n-1} &= 2\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} \cdot p_{2n-2k,2r} = 2 \cdot Z_{2n,2r}(\text{alespoň jednou se dotkne nulové osy}) \cdot 2^{-2n} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot Z_{2n-1,2r+1} \cdot 2^{-2n} = 2 \cdot (Z_{2n-1,2r+1} \cdot 2^{-(2n-1)}) = 2p_{2n-1,2r+1}.
\end{aligned}$$

□

Problém 12. *Pravděpodobnost, že* $S_{2n} = 0$ *a maximum z* $S_1,\ldots,S_{2n-1}$ *je rovno* k, $k = 0,1,2,\ldots$, *je rovna* $p_{2n,2k} - p_{2n,2k+2}$. *Dokažte pomocí principu zrcadlení.*

Důkaz. Je vidět, že

$$\begin{aligned}
&Z_{2n,0}(max\{s_1,\ldots,s_{2n-1}\} = k) = \\
=&Z_{2n,0}(\text{nedotýká se osy } k+1) - Z_{2n,0}(\text{nedotýká se osy } k) \qquad (2.3)\\
=&Z_{2n,0} - Z_{2n,0}(\text{dotýká se osy } k+1) - (Z_{2n,0} - Z_{2n,0}(\text{dotýká se osy } k)).
\end{aligned}$$



Obrázek 2.4: Cesta se dotýká osy k; princip zrcadlení.

Členy $Z_{2n,0}$ se odečtou a na zbylé dva použijeme princip zrcadlení, rovnost (2.3) tedy pokračuje:

$$Z_{2n,0}(max\{s_1,...,s_{2n-1}\} = k) = Z_{2n,0}(s_0 = 2k) - Z_{2n,0}(s_0 = 2k + 2),$$

což je ze symetrie rovno $Z_{2n,2k} - Z_{2n,2k+2}$. Konečně dostáváme:

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0, max\{S_1,...,S_{2n-1}\} = k) &= 2^{-2n} \cdot Z_{2n,0}(max\{s_1,...,s_{2n-1}\} = k) \\ &= 2^{-2n} \cdot (Z_{2n,2k} - Z_{2n,2k+2}) = p_{2n,2k} - p_{2n,2k+2}. \end{aligned}$$

□

Závěr

V této práci jsme se zabývali symetrickými náhodnými náhodnými procházkami.

V první kapitole jsme za pomoci knihy Williama Fellera: An Introduction to Probability Theory and Its Applications - Volume I (John Wiley & Sons, 1968) zpracovali teorii týkající se náhodných procházek. Především jsme zkoumali jevy návratu k počátku, změny znaménka nebo vstupu do určitého bodu a u toho jsme podrobněji rozepsali některé důkazy nebo uvedli navíc některé vlastnosti těchto jevů a pravděpodobností.

V druhé kapitole jsme vyřešili několik problémů navržených v uvedené knize. Například jsme pomocí zobrazení (a jeho geometrické interpretace) dokázali, že pravděpodobnost, že procházka se až do času $2n$ nedostane pod nulovou osu, je rovna pravděpodobnosti, že v čase $2n$ nastane návrat k nulové ose. Dále jsme dokázali vzorce pro pravděpodobnost toho, že do času $2n$ resp. $2n + 1$ nastane právě r návratů k nulové ose resp. r změn znaménka.

Použitá literatura

FELLER, WILLIAM (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, volume I.* John Wiley & Sons