Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jiří Horák

Statistické vlastnosti českého kapitálové trhu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Směr: Ekonometrie

2007

Autor by rád poděkoval vedoucímu práce RNDr. Martinu Šmídovi, Ph.D. za jeho vstřícnost a neocenitelné připomínky při vzniku textu, jakož i za celkové vedení práce. Dále patří velký dík mým kolegů Melindě Paugschové a Bc. Jakubu Pečánkovi, kteří pomáhali při závěrečné korekci. Nakonec bych chtěl poděkovat všem mým blízkým, kteří mě při tvorbě práce morálně podporovali.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 18. dubna 2007

Jiří Horák

Obsah

1 Úvodní slovo **5**

2 Značení a základní pojmy **7**

3 Náhodná procházka na Burze cenných papírů Praha **9**
3.1 Teoretický úvod 10
3.1.1 Portmanteauova statistika 10
3.1.2 Test podílem rozptylů 11
3.2 Výsledky dat z Burzy cenných papírů Praha 13
3.3 Závěr 17

4 Těžké chvosty Burzy cenných papírů Praha **20**
4.1 Teoretický úvod 21
4.1.1 Šikmost a špičatost 21
4.1.2 Odhad koeficientu těžkosti chvostu 22
4.2 Numerické metody odhadu koeficientu těžkosti chvostu výnosů Burzy cenných papírů Praha 24
4.3 Grafické metody odhadu těžkosti chvostu výnosů z Burzy cenných papírů Praha . 28
4.4 Závěr 28

5 Aplikace modelů odvozených z třídy ARCH na Burzu cenných papírů Praha **32**
5.1 Úvod 32
5.2 Popis jednotlivých modelů 35
5.2.1 Meanová rovnice 36
5.2.2 Variační rovnice 37
5.2.3 Rozdělení podmíněného rozptylu 39
5.2.4 Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) 41
5.3 Statistické testy zkoumající správnost volby modelu 42
5.3.1 Testy reziduí 43
5.3.2 Testy založené na Impact curve 43
5.3.3 Test dobré shody 44
5.3.4 Nyblomův test 45

5.4 Statistické testy zkoumající vhodnost odhadnutého modelu pro predikci value-at-risk . . . 45
5.4.1 Kupiec LR test . . . 46
5.4.2 Engle and Manganelli test . . . 46
5.5 Chování Burzy cenných papírů Praha z pohledu ARCH modelování . . . 47
5.5.1 Úvod . . . 47
5.5.2 Souhrnné vlastnosti ARCH modelů pro data Burzy cenných papírů Praha 48
5.5.3 Tabulky . . . 52
5.6 Konkrétní modely denních výnosů kotací Burzy cenných papírů Praha . . . 57
5.6.1 České Radiokomunikace . . . 58
5.6.2 Český Telekom . . . 60
5.6.3 ČEZ . . . 61
5.6.4 Komerční Banka . . . 62
5.6.5 Philip Morris . . . 63
5.6.6 Unipetrol . . . 64
5.6.7 Tabulka testů denních výnosů kotací . . . 66
5.7 Závěr . . . 67

6 Závěr a celkové shrnutí diplomové práce **68**

7 Apendix **70**

Název práce: Statistické vlastnosti českého kapitálového trhu
Autor: Jiří Horák
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D.
e-mail vedoucího: smid@utia.cas.cz
Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá popisem chování titulů obchodovaných na Burze cenných papírů Praha (BCPP) na základě rozdílných vlastností výnosů obchodů uzavřených na BCPP a výnosů kotací tvůrců trhu. Toto je provedeno studiem hypotézy náhodné procházky, chování chvostů a ARCH modelování výnosů obchodů a kotací jednotlivých akcií. Dosažené výsledky jsou pak konfrontovány s jevy pozorovanými na velkých finančních trzích jako jsou New York Stock Exchange (NYSE) a London Stock Exchange (LSE). Uvedenými postupy jsme mimo jiné dospěli k závěru, že chování tvůrců trhu BCPP je podstatnou měrou ovlivněno obchody na trhu provedenými a že reakční doba burzy jako celku na tyto změny je velmi malá, což vypovídá o značné efektivitě českého finančního trhu. Dále jsme pro tituly BCPP pozorovali, že obchody jsou prováděny za cenu, která je dosti stálá i v horizontu několika dní, a že vypisované kotace tvůrců trhu kolem této ceny oscilují, což nasvědčuje velké stabilitě a kompetitivnosti pražské burzy.
Klíčová slova: náhodná procházka, těžké chvosty, ARCH modelování, kapitálový trh

Title: Statistic's properties of czech stock exchange
Author: Jiří Horák
Department: Department of probability and mathematical statistics
Supervisor: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: smid@utia.cas.cz
Abstract: This diploma thesis tackles the behavioral description of stocks which are offered at Prague Stock Exchange (PSE). This is carried out by comparison of Statistical properties of returns of individual trades and market makers' quotes during the random walk, tail behavior and ARCH modeling studies. Achieved results are then confronted with the results observed at large financial markets such as New York Stock Exchange (NYSE) and London Stock Exchange (LSE). Based on approaches mentioned above we conclude, that market makers behavior at PSE is quite dependent on the individual trades which have been made on the market and that the reaction time of the whole market to these changes is nearly instantaneous, thus PSE could be regarded as a very effective market. Another property of PSE is, that the price of individual trades is considerably stable in a few days horizon and market makers' quotes are oscillating around this price, thus Czech market could be considered as substantially stable and competitive.
Keywords: random walk, heavy tails, ARCH modeling, stock exchange

Kapitola 1

Úvodní slovo

Již od založení první burzy cenných papírů v Amsterdamu v roce 1602 se člověk snažil porozumět jejímu chování a zákonitostem. Zásadní zlom v této oblasti lidského bádání nastal s příchodem výpočetní techniky před několika desítkami let. Tato nová technologie umožnila pozorování a kvantifikaci mnoha společných jevů napříč různými finančními trhy. Primárním objektem studia však nejsou samotné ceny akcií, ale jejich výnosy. Důvodem je, že výnosy mají z matematického a statistického pohledu mnohé výhody, například jsou bezrozměrné veličiny a tedy mohou být navzájem porovnávány pro jednotlivé akcie. Dalším mnohem podstatnější přínosem je jejich častá stacionarita a ergodicita. Nyní zmiňme alespoň některé vlastnosti výnosů pozorované na finančních trzích: nevýznamné autokorelace, naopak silná autokorelační struktura pro jejich nelineární funkce, těžké chvosty, podmíněné těžké chvosty, zřetězení volatility, leverage efekt a mnohé další, viz Cont [2001], Mandelbrot [1963], Black [1976] nebo Campbell et al. [1996].

V dnešní době existuje bezpočet publikací a článků pojednávající o této tématice, avšak drtivá většina z nich své závěry vyvozovala na základě chování velkých finančních trhů jako jsou LSE (London Stock Exchange - 1698), NYSE (New York Stock Exchange - 1792), TSE (Tokyo Stock Exchange - 1878). Cílem této práce bylo ověřit, do jaké míry tyto výsledky platí pro Burzu cenných papírů Praha, dále jen BCPP, založenou 24.11.1992.

Naše data sestávala z jednotlivých intradenních kotací tvůrců trhu a realizovaných obchodů na pražské burze v časovém rozpětí od 5.1.2000 až do 12.11.2004. Přišlo nám velmi zajímavé porovnat chování těchto dvou datových souborů, neboť většina studií se zabývá pouze cenami kotací jednotlivých titulů. Díky tomuto porovnání jsme dospěli k několika zajímavým závěrům o chování českého finančního trhu. Jako denní cenu akcie obchodů resp. kotací jsme brali cenu, za kterou byl proveden poslední obchod resp. na kterou byla vypsána poslední kotace v daný den. Poznamenejme, že výslednou cenu kotace v daný den jsme počítali jako aritmetický průměr cen kotací prodeje a nákupu. Podobně jsme postupovali pro týdenní a měsíční ceny.

Text je uspořádán do několika kapitol. V kapitole 2 zavedeme značení a některé zásadní statistické a pravděpodobnostní pojmy. V kapitole 3 se budeme zabývat modelem náhodné procházky výnosů a jeho modifikacemi. Kapitola 4 je věnována rozdělení výnosů jednotlivých akcií s důrazem na chování chvostů. Poslední kapitola 5 pak spojuje poznatky předešlých kapitol a využívá jich při ARCH modelování akcií BCPP. V posledních kapitolách je uvedeno shrnutí celé práce

a je popsán obsah CD s přiloženými daty a procedurami pro statistický program R, který byl s výjimkou kapitoly 5 při tvorbě této diplomové práce používán.

Kapitola 2

Značení a základní pojmy

Začněme definicí několika elementárních pojmů z teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů.

Definice 1 *Trojici* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *nazýváme pravděpodobnostním prostorem, jestliže* Ω *je neprázdná množina,* $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ *je* $\sigma - algebra$ *a* P *je míra na* $\mathcal{A}$ *taková, že* $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Definice 2 *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $(E, \mathcal{E})$ *je měřitelný prostor. Budeme říkat, že zobrazení* $X : \Omega \to E$ *je náhodná veličina s hodnotami v* $(E, \mathcal{E})$*, jestliže je měřitelná, tj.*

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Je-li v definici 2 $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$, kde $\mathbb{B}$ je borelovská $\sigma - algebra$ na $\mathbb{R}$, potom X nazýváme *reálnou náhodnou veličinou*. Pro reálné náhodné veličiny $X, X_1, \ldots, X_n$ budeme označovat

$\mathsf{E}X$	Střední hodnotu náhodné veličiny X.
$\mathsf{Var}X$	Rozptyl náhodné veličiny X.
$X \sim (\mu, \sigma^2)$	Náhodná veličina X má střední hodnotu rovnou μ a rozptyl rovný σ^2. Nic však neříkáme o konkrétním rozdělení náhodné veličiny.
$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$	Náhodná veličina X má normální rozdělení s střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.
$X_n \overset{a}{\sim} \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$	Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ konvergují v distribuci pro $n \to \infty$ k náhodné veličině mající normální rozdělení s střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

Definice 3 *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $T \subset \mathbb{R}$*. Rodina reálných náhodných veličin* $\{X_t, t \in T\}$ *definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *se nazývá reálný náhodný proces.*

Definice 4 *Nechť* $\{X_t, t \in T\}$ *je reálný náhodný proces s konečnými druhými momenty, tj.* $\mathsf{E}|X_t|^2 < \infty$ *pro všechna* $t \in T$*, potom funkce* $\gamma(s,t) : T \times T \to \mathbb{R}$ *definovaná předpisem*

$$\gamma(s,t) = \mathsf{E}(X_s - \mathsf{E}X_s)(X_t - \mathsf{E}X_t)$$

se nazývá autokovarianční funkce procesu $\{X_t, t \in T\}$. *Hodnota* $\gamma(t,t)$ *se nazývá rozptyl procesu v čase* $t \in T$. *Autokorelační funkcí procesu* $\{X_t, t \in T\}$ *nazýváme funkci* $\rho(s,t) : T \times T \to [-1,1]$ *definovanou předpisem*

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)}\sqrt{\gamma(t,t)}}$$

.

Definice 5 *Řekneme, že reálný náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *je slabě stacionární, jestliže má konečné druhé momenty, tj.* $\mathsf{E}|X_t|^2 < \infty$ *pro všechna* $t \in T$, $\mathsf{E}(X_t) = \mu$ *pro všechna* $t \in T$, $\mu \in \mathbb{R}$ *a jeho autokovarianční funkce je funkcí rozdílu* $s-t$. *Jestliže jsou splněny pouze podmínky na autokovarianční funkci a konečnost druhých momentů, mluvíme o kovarianční stacionaritě reálného procesu.*

Poznamenejme, že my se budeme zabývat výhradně procesy, pro něž je $T \in \mathbb{Z}$.

V rámci větší přehlednosti textu jsou místo celých názvů akcií používány jejich zkratky, které jsou uvedeny v tabulce 2.1. Navíc často potřebujeme rozlišit mezi obchody a kotacemi pro jednotlivé akcie, proto zaved'me značení O-*zkratka* pro obchody a K-*zkratka* pro kotace.

Zkratka	Celý název
RADKOM	České radiokomunikace
CS	Česká spořitelna
TEL	Český telecom
CEZ	Čez
IPB	IPB
SKAN	IPS Skanska
KB	Komerční Banka
PMOR	Philip Moriss ČR
RIF	RIF
UPETR	Unipetrol
ZEN	Zentiva

Tabulka 2.1: Zkratky názvů akcií BCPP.

Kapitola 3

Náhodná procházka na Burze cenných papírů Praha

Jádrem této kapitoly je otázka, na kolik je chování titulů BCPP konzistentní s modelem náhodné procházky a jeho různými modifikacemi. Podobná studie byla provedena pro NYSE (New York Stock Exchange) viz Campbell et al. [1996].

Po zbytek textu bude centrem zájmu chování výnosů jednotlivých akcií. Proto nyní zaveďme příslušnou terminologii spolu s některými triviálními výsledky. *Čistý výnos akcie* mezi obdobími $t-1$ a t je definovaný jako

$$R_t := \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \tag{3.1}$$

kde P_t je *cena akcie* v čase t, přičemž *hrubým výnosem akcie* rozumíme $1 + R_t$. Z (3.1) bezprostředně plyne, že hrubý výnos akcie mezi obdobími $t-k$ a t, označme jej $R_t(k)$, lze vyjádřit jako součin předešlých hrubých výnosů

$$R_t(k) = \prod_{i=1}^{k}(1 + R_{t-i+1}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{P_{t-i+1}}{P_{t-i}} = \frac{P_t}{P_{t-k}}.$$

Tedy lze na něj nahlížet jako na multiplikativní proces. Fakt, že je mnohem jednodušší odvodit vlastnosti aditivního procesu než-li multiplikativního, vedl k zavedení takzvaných *logaritmických výnosů akcií* r_t definovaných

$$r_t := \log(1 + R_t) = \log P_t - \log P_{t-1} = p_t - p_{t-1}, \tag{3.2}$$

kde $p_t = \log P_t$ se nazývá *logaritmickou cenou akcie*[1]. Z (3.2) je ihned patrné, že logaritmický výnos mezi obdobími $t-k$ a t, označme jej $r_t(k)$, lze modelovat jako aditivní proces, neboť

$$r_t(k) = \log(1 + R_t(k)) = \sum_{i=1}^{k} \log(1 + R_{t-i+1}) = \sum_{i=1}^{k} r_{t-i+1}.$$

[1] Výhodou logaritmických cen je, že P_t je stále větší něž nula.

Pokud se v statistické literatuře mluví o výnosech akcií, myslí se tím téměř výhradně logaritmické výnosy definované v (3.2), proto i my budeme označením výnosy myslet výhradně logaritmické výnosy definované v (3.2)!

Tato kapitola je uspořádána následovně. Nejprve v sekci 3.1 zavedeme pojem náhodné procházky pro výnosy na finančních trzích a jeho často používané modifikace. Poté popíšeme vlastnosti námi používaných testů. V sekci 3.2 shrneme výsledky uvedených testů pro data z BCPP a odvodíme některé zajímavé rysy českého finančního trhu.

3.1 Teoretický úvod

Nejzákladnější model náhodné procházky můžeme pro ceny akcie definovat předpisem

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ je trend ceny, který je nenáhodný, a $\epsilon_t \sim (0, \sigma^2)$ jsou i.i.d. náhodné veličiny. Tento model budeme označovat RW1. Předpokládáme-li v modelu RW1 normální rozdělení náhodných veličin ϵ_t dostáváme klasický Sumuelsonův model, jehož statistické vlastnosti jsou snadno odvoditelné, avšak ve vztahu k chování výnosů pozorovaném na finančních trzích trpí značnými nedostatky. Například uvážíme-li vliv změn, ať už technologických, hospodářských nebo sociálních na vývoj ceny dané akcie na trhu po dobu několika desítek let, pak předpoklad že by rozdělení cen zůstávalo stejné po celé období, se jeví jako dosti nevhodný. Proto byl model RW1 zobecněn tím, že náhodné veličiny ϵ_t jsou nezávislé, ale už ne stejně rozdělené. Označme tento model RW2. Model RW2 má oproti modelu RW1 například tu výhodu, že již umožňuje pracovat s heteroskedasticitou. V současné době se nejvíce pracuje s modelem, který z modelu RW2 získáme uvolněním předpokladu nezávislosti náhodných veličin ϵ_t na nekorelovanost. Tento model označíme RW3.

Nyní se konkrétněji podívejme na námi používané testové statistiky pro tuto kapitolu. Poznamenejme, že při konstrukci testů pro model RW1 předpokládáme slabou stacionaritu procesu výnosů r_t, $t \in \mathbb{Z}$.

3.1.1 Portmanteauova statistika

Nechť platí model RW1, pak z rovnice (3.3) můžeme proces výnosů r_t, $t \in \mathbb{Z}$ vyjádřit předpisem

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

přičemž pro $k > 0$ je $\rho(k) = 0$, kde $\rho(k)$ je k-tá autokorelace výnosů, neboť náhodné veličiny ϵ_t jsou i.i.d.. Odhad autokorelační funkce $\rho(k)$ je definován jako

$$\hat{\rho}(k) := \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)},$$

kde

$$\hat{\gamma}(k) := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \overline{r}_T)(r_{t+k} - \overline{r}_T), \tag{3.4}$$

$$\overline{r}_T := \sum_{t=1}^{T} r_t,$$

přičemž $T \in \mathbb{N}$ je počet pozorování. Poznamenejme, že $\hat{\gamma}(k)$ definované v (3.4) je odhad autokovariance procesu výnosů r_t. Za platnosti modelu RW1 se v monografii Campbell et al. [1996] uvádí, že jsou-li šesté momenty náhodných veličin r_t stejnoměrně omezeny, pak jsou výběrové autokorelační funkce $\hat{\rho}(k)$ asymptoticky nezávislé a normálně rozdělené s rozděleními

$$\sqrt{T}\hat{\rho}(k) \overset{a}{\sim} \mathbf{N}(0,1). \tag{3.5}$$

Z výše uvedeného je patrné, že testová statistika Q_m definovaná jako

$$Q_m := T\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}^2(k) \tag{3.6}$$

má za platnosti modelu RW1 asymptoticky rozdělení χ^2_m. Problém použití této statistiky spočívá ve vhodné volbě m.

3.1.2 Test podílem rozptylů

Základní myšlenkou následujícího statistického testu je, že za platnosti modelu RW1 je růst rozptylu sumy výnosů lineární, neboť

$$\mathsf{Var}\sum_{t=1}^{T} r_t = \mathsf{Var}\sum_{t=1}^{T}(\mu + \epsilon_t) = \sum_{t=1}^{T}\mathsf{Var}\,\epsilon_t = \sum_{t=1}^{T}\mathsf{Var}\,r_t = T\mathsf{Var}\,r_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Test podílem rozptylů je založen na porovnání levé a pravé strany výrazu (3.7). My zde popíšeme pouze nejdůležitější stavební kameny tohoto testu, podrobnosti jsou uvedeny v Campbell et al. [1996]. Definujme testovou statistiku

$$VR(q) := \frac{\mathsf{Var}\sum_{i=0}^{q-1} r_{t-i}}{q\mathsf{Var}\,r_t}. \tag{3.8}$$

Za platnosti modelu RW1 lze VR(q) rozepsat jako

$$VR(q) = 1 + 2\sum_{i=1}^{q-1}(1 - \frac{i}{q})\rho(i). \tag{3.9}$$

KNIHOVNA MATEMATICKÉ FAKULTY

Z (3.9) je vidět, že se nám ve skutečnosti jedná o to, jsou-li $\rho(k)$ nulové pro $k > 0$ podobně jako u testové statistiky Q_m. Platí-li model RW1, pak je $VR(q)$ zřejmě rovno jedné. Poznamenejme, že jsou-li rozptyly r_t konečné a $\frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T} \mathrm{Var} r_{t-i}$ konverguje ke kladnému konečnému číslu, je $VR(q)$ asymptoticky rovno jedné za platnosti modelu RW2 i RW3, viz Campbell et al. [1996].

Nyní popišme hlavní kroky konstrukce testu za platnosti modelu RW1. Mějme hypotézu

$$H_0: \quad r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2), \tag{3.10}$$

kde naše data sestávají z $1+nq$ cen příslušné akcie $\{p_0, \ldots, p_{nq}\}$ pro $q, n \in \mathbb{N}$. Zaveďme odhady

$$\overline{r} := \frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{nq}(p_k - p_{k-1}) = \frac{1}{nq}(p_{nq} - p_0) \tag{3.11}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 := \frac{q}{nq-1}\sum_{k=1}^{nq}(p_k - p_{k-1} - \overline{r})^2 \tag{3.12}$$

$$\hat{\sigma}_b^2 := \frac{1}{m}\sum_{k=q}^{nq}(p_k - p_{k-q} - q\overline{r})^2, \tag{3.13}$$

kde

$$m := (nq - q - 1)\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{3.14}$$

Poznamenejme, že $\hat{\sigma}_a^2$ je q-násobkem klasického odhadu rozptylu náhodné veličiny ${r_t}^2$ a $\hat{\sigma}_b^2$ je odhad rozptylu součtu q výnosů[3], neboť

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-q} &= p_k \pm p_{k-1} \pm \ldots \pm p_{k-q+1} - p_{k-q} \\ &= r_k + \ldots + r_{k-q+1}. \end{aligned}$$

Odhad $VR(q)$ lze potom přirozeně sestavit jako

$$\widehat{VR}(q) = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_a^2}. \tag{3.15}$$

Za platnosti hypotézy (3.10) lze ukázat, že

$$\sqrt{nq}(\widehat{VR}(q) - 1) \overset{a}{\sim} \mathbf{N}\left(0, \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right). \tag{3.16}$$

Nyní definujme finální testovou statistiku

$$\psi(q) := \sqrt{nq}(\widehat{VR}(q) - 1)\left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right)^{-1/2}, \tag{3.17}$$

[2]Použili jsme vztah $r_t = p_t - p_{t-1}$.

[3]V (3.14) je první závorka rovna počtu členů odhadu $\hat{\sigma}_b^2$, druhá je přidána pro lepší asymptotické vlastnosti odhadu.

která má z (3.16) za platnosti hypotézy (3.10) asymptoticky normální rozdělení $\mathbf{N}(0, 1)$.

Tento test lze zobecnit pro testování platnosti modelu RW3, přičemž základní myšlenkou je vyjít z rozpisu (3.9). Podrobnosti v Campbell et al. [1996]. Poznamenejme, že testy podílem rozptylů za předpokladu platnosti modelů RW1 a RW3 jsou odvozeny za podstatně slabších nároků na konečnost momentů náhodných veličin r_t než v případě Portmanteauovy statistiky, což je také jeden z důvodů pro větší používanost této třídy testů.

3.2 Výsledky dat z Burzy cenných papírů Praha

Nežli přistoupíme k jednotlivým testů, podívejme se ještě blíže na autokorelační strukturu našich dat. Vzhledem k tomu, že jsme uvažovali kromě denních i týdenní a měsíční odstupy, uvádíme pouze tituly s dostatečným počtem pozorování. Výsledky jsou shrnuty v tabulce 3.1, kde je zleva doprava postupně uveden název titulu, typ časového odstupu, počet pozorování, odhad prvních pěti autokorelací výnosů, počet statisticky významných $\hat{\rho}(i)$ ve smyslu (3.5) pro $i = 1, \ldots, 10$, $i = 11, \ldots, 20$, $i = 21, \ldots, 30$ a $i = 1, \ldots, 30$. Poznamenejme, že všechny testy jsou prováděny na 5% hladině spolehlivosti. Pro obchody byla $\hat{\rho}(1)$ významně nenulová v 5 z 18 případů a pro kotace byl poměr 2/18. První autokorelace pro příslušný časový odstup se dá také chápat jako odmocnina z koeficientu determinace při lineární regresi mezi výnosy a výnosy o krok (den, týden, měsíc) zpět. Tedy například u titulu RADKOM je pouze $(-0.08)^2 = 0.0064 \doteq 1\ \%$ variability denních výnosů obchodů předpověditelné na základě denních výnosů o krok zpět. U tohoto titulu si můžeme také povšimnout větší persistence významných autokorelací výnosů v různých časových odstupech a to zejména u obchodů.[4] Poznamenejme, že pro obchody titulu TEL či kotace titulu KB lze také uvažovat o persistenci významných autokorelací denních výnosů. Věnujme se jim proto podrobněji. U prvního titulu je z 30 případů 5 signifikantních, což zhruba odpovídá 17 %. V druhém je podíl signifikantních výskytů 4/30, tedy asi 14 %. Nicméně, jak je patrné z obrázku 3.1, denní autokorelace vyšších řádů byly pro oba tituly signifikantní jen velmi těsně. Navíc pro týdenní či měsíční[5] výnosy uvedených titulů již podobné chování nepozorujeme. Proto, s výjimkou titulu RADKOM, můžeme z výše uvedeného prohlásit, že autokorelace, zejména vyšších řádů, uvedených výnosů nejsou celkově nikterak významné, což koresponduje s výsledky pozorovanými na jiných finančních trzích, viz např. Cont [2001].

Velmi zajímavé je však to, že pro denní výnosy kotací jsou autokorelace prvního řádu kladné (i když pouze dvě statisticky signifikatní), ale pro denní výnosy obchodů platí trend naprosto obrácený. K tomuto jevu se ještě vrátíme v další části textu.

Nyní zpracujeme denní výnosy pomocí Portmanteauovy statistiky (3.6), přičemž jako v předchozím případě budeme výsledky opět interpretovat na 5% hladině spolehlivosti. Jak již bylo zmíněno v části 3.1.1, výsledky této statistiky závisejí na volbě m, tj. počtu zahrnutých autokorelací. Je-li m příliš malé, může se stát, že případné významné vyšší autokorelace nebudou do Q_m zahrnuty. Naopak pro m příliš velké je patrné, že statistika ztrácí na síle v tom případě, kdy jsou

[4] Uvedený jev jsme se snažili zohlednit při ARCH modelování v sekci 5.6.1.

[5] Je třeba poznamenat, že při měsíčních výnosech se již potýkáme s nedostatečným počtem pozorování pro autokorelace vyšších řádů. Proto je třeba na tyto výsledky pohlížet spíše orientačně.

Akcie	Typ	Počet	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(2)$	$\hat{\rho}(3)$	$\hat{\rho}(4)$	$\hat{\rho}(5)$	1:10	11:20	21:30	1:30
RADKOM	Den	1117	-0.08*	0.03	0.04	-0.01	0.04	2	1	2	5
	Týden	248	0.15*	-0.02	-0.04	-0.01	-0.03	2	0	1	3
	Měsíc	57	0.20	-0.06	-0.21	0.18	0.14	1	1	0	2
TEL	Den	1217	-0.09*	0.11*	-0.04	0.05	-0.01	3	0	2	5
	Týden	255	-0.10	0.15*	0.09	-0.03	0.00	1	0	0	1
	Měsíc	59	-0.17	-0.14	0.02	0.16	-0.06	0	0	0	0
CEZ	Den	1217	-0.12*	0.03	-0.05	0.01	-0.01	1	0	0	1
	Týden	255	0.03	0.05	0.03	0.09	0.01	0	1	0	1
	Měsíc	59	-0.03	-0.06	-0.05	-0.24	0.14	0	0	0	0
KB	Den	1219	-0.03	0.08*	-0.02	0.06*	-0.02	2	0	0	2
	Týden	255	0.02	-0.04	-0.04	-0.02	0.04	0	0	0	0
	Měsíc	59	-0.10	-0.16	-0.09	0.08	-0.01	0	0	0	0
PMOR	Den	972	-0.01	0.01	-0.03	-0.03	0.02	1	0	1	2
	Týden	215	0.01	-0.01	-0.03	-0.03	-0.04	0	1	0	1
	Měsíc	50	0.00	-0.03	-0.06	-0.31*	0.03	2	0	0	2
UPETR	Den	1180	0.01	-0.02	-0.01	-0.02	0.00	0	2	0	2
	Týden	255	0.04	0.11	-0.07	-0.10	0.01	1	1	0	2
	Měsíc	59	0.28*	0.03	0.00	0.16	0.07	1	0	0	1
RADKOM	Den	1180	0.08*	-0.04	0.01	0.02	0.01	3	3	0	6
	Týden	248	0.02	0.10	-0.08	0.12	0.02	0	0	1	1
	Měsíc	57	0.10	-0.13	-0.21	0.27*	0.15	1	1	0	2
TEL	Den	1217	0.03	-0.01	0.00	0.03	0.01	0	1	0	1
	Týden	255	0.00	0.13*	0.12	0.02	-0.01	1	1	0	2
	Měsíc	59	-0.15	-0.09	-0.05	0.07	-0.01	0	1	0	1
CEZ	Den	1217	0.03	-0.06*	-0.02	0.02	-0.05	1	0	1	2
	Týden	255	-0.02	0.11	-0.09	-0.03	-0.07	1	0	1	2
	Měsíc	59	0.03	-0.08	-0.11	-0.02	0.09	0	0	0	0
KB	Den	1217	0.08*	0.01	-0.04	0.11*	-0.04	2	1	1	4
	Týden	255	0.06	0.02	0.06	-0.13*	-0.09	1	0	0	1
	Měsíc	59	0.01	-0.20	-0.09	0.01	0.07	0	0	0	0
PMOR	Den	1025	0.05	0.01	-0.05	-0.03	0.01	0	1	0	1
	Týden	215	0.00	0.03	0.04	0.07	-0.06	0	0	0	0
	Měsíc	50	-0.19	0.06	0.07	-0.27	-0.08	0	0	0	0
UPETR	Den	1217	0.05	0.00	0.00	0.00	0.02	1	0	0	1
	Týden	255	0.10	0.03	-0.04	0.03	-0.05	2	1	0	3
	Měsíc	59	0.16	0.07	-0.23	-0.12	-0.08	1	0	0	1

Tabulka 3.1: Autokorelační struktura výnosů vybraných titulů BCPP. V horní části tabulky jsou uvedeny výsledky pro obchody, v dolní pro kotace. Zleva doprava je postupně uveden název titulu, typ časového odstupu, počet pozorování, odhad prvních pěti autokorelací, počet statisticky významných $\hat{\rho}(i)$ ve smyslu (3.5) pro $i = 1, \ldots, 10$, $i = 11, \ldots, 20$, $i = 21, \ldots, 30$ a $i = 1, \ldots, 30$. Všechny testy jsou prováděny na 5% hladině spolehlivosti, přičemž signifikantní výsledky jsou označeny hvězdičkou.

vyšší autokorelace nevýznamné, protože s rostoucím m roste počet stupňů volnosti asymptotického rozdělení testové statistiky a tím i velikost intervalu spolehlivosti. Proto zde uvedeme testy pro $m = 1, \ldots, 10$. Z tabulky 3.2 vidíme, že platnost modelu RW1 bychom u obchodů zamítli pro tituly RADKOM, TEL, CEZ a KB. V případě kotací pak zamítáme model RW1 na základě Portmanteauova testu u titulů RADKOM a KB.[6] Porovnáním výsledků testů v tabulce 3.2 a obrázku 3.1 je zřejmé, že k zamítnutí platnosti modelu RW1 pro každé m může stačit i jedna vý-

[6]U IPB nám test vyšel signifikantní pouze pro m=2. Což naznačuje významnost autokorelace druhého stupně. Z obrázku 3.1 je navíc patrné, že autokorelace druhého stupně je sice „těsně" významná, ale ostatní již jsou statisticky rovny 0 na 5% hladině spolehlivosti. Proto nezamítáme platnost modelu RW1 pro titul IPB na základě Portmanteauova testu.

Akcie	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10
RADKOM	0.005*	0.010*	0.014*	0.028*	0.025*	0.043*	0.008*	0.010*	0.012*	0.019*
CS	0.395	0.200	0.349	0.403	0.541	0.508	0.205	0.188	0.258	0.231
TEL	0.001*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
CEZ	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.001*	0.001*	0.002*	0.001*	0.002*	0.002*
IPB	0.085	0.175	0.322	0.474	0.525	0.613	0.713	0.802	0.861	0.899
SKAN	0.680	0.635	0.785	0.774	0.792	0.407	0.100	0.116	0.168	0.225
KB	0.300	0.014*	0.027*	0.008*	0.015*	0.024*	0.030*	0.035*	0.056	0.084
PMOR	0.677	0.887	0.741	0.663	0.708	0.324	0.233	0.315	0.407	0.345
RIF	0.894	0.982	0.706	0.821	0.735	0.078	0.123	0.131	0.178	0.167
UPETR	0.677	0.800	0.914	0.924	0.968	0.987	0.970	0.985	0.983	0.809
ZEN	0.898	0.569	0.398	0.562	0.395	0.470	0.461	0.547	0.646	0.656
RADKOM	0.004*	0.006*	0.015*	0.028*	0.051	0.088	0.004*	0.001*	0.001*	0.001*
CS	0.505	0.483	0.376	0.465	0.523	0.647	0.159	0.225	0.253	0.153
TEL	0.223	0.450	0.655	0.596	0.730	0.789	0.856	0.908	0.625	0.684
CEZ	0.222	0.060	0.105	0.156	0.076	0.120	0.092	0.064	0.082	0.056
IPB	0.101	0.031*	0.066	0.090	0.145	0.190	0.233	0.318	0.410	0.502
SKAN	0.516	0.809	0.776	0.850	0.878	0.876	0.930	0.779	0.186	0.170
KB	0.006*	0.019*	0.019*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.001*	0.001*
PMOR	0.127	0.288	0.194	0.247	0.360	0.460	0.571	0.659	0.707	0.526
RIF	0.917	0.607	0.593	0.303	0.363	0.482	0.573	0.614	0.592	0.243
UPETR	0.102	0.260	0.436	0.604	0.695	0.573	0.663	0.750	0.823	0.439
ZEN	0.461	0.609	0.174	0.185	0.135	0.199	0.230	0.311	0.402	0.428

Tabulka 3.2: Portmanteauovy testy denních výnosů BCPP pro různá m. V horní části jsou uvedeny p-hodnoty testů pro obchody, v dolní pro kotace. Hvězdička značí signifikantní test na 5% hladině spolehlivosti.

znamná autokorelace, což je případ obchodů titulu CEZ. Je jasné, že Portmanteauova statistika může sloužit jen orientačně. Hlavními nedostatky této testové statistiky jsou předpoklad stejnoměrné omezenosti šestých momentů náhodných veličin r_t, který často nemusí být splněn jak uvidíme v kapitole 4, a nemožnost zahrnutí heteroskedasticity.

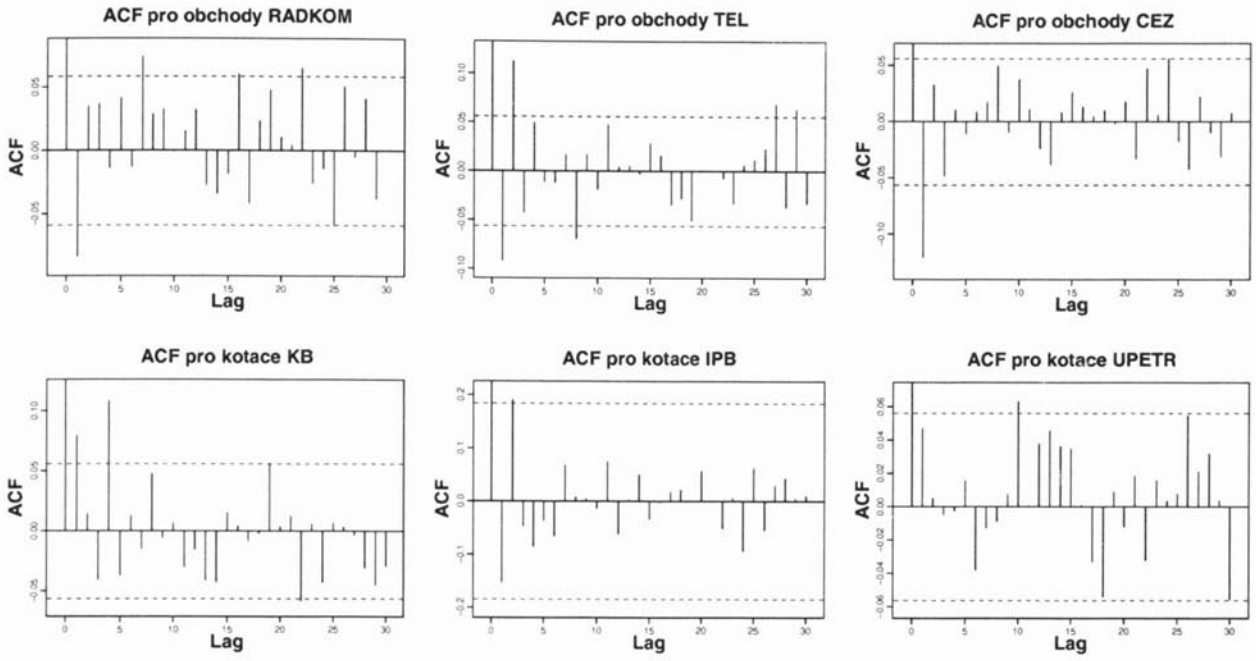
Přistupme proto teď k testování denních výnosů testy podílem rozptylů za platnosti modelu RW1 resp. RW3, viz tabulka 3.4. Výsledky našich testů jsou uvedeny nejen pro celý datový úsek příslušného titulu, ale i pro jeho první a duhou polovinu, přičemž hvězdičkou je označen signifikantní test na 5% hladině spolehlivosti. Shrňme nejprve výsledky pro obchody.

Pro $q = 2$ akcie RADKOM, TEL, CEZ a IPB neprošly testem podle statistiky (3.17), tj. bez uvážení heteroskedasticity. Jinými slovy jsme vlastně testovali, zda-li daný titul splňuje model RW1. Pokud použijeme test zkoumající platnost modelu RW3, vidíme, že pro tituly RADKOM a IPB hypotézu o jeho platnosti nezamítáme. Avšak pro tituly TEL a CEZ dochází k zamítnutí platnosti modelu RW3 pro celý i první úsek dat titulu TEL a druhý úsek dat v případě titulu CEZ.

Pro $q = 4$ již nezamítáme platnost modelu RW1 u titulů RADKOM a TEL pro všechny uvažované úseky. Dále u titulů CEZ a IPB zamítáme platnost modelu RW1. Navíc u druhé poloviny dat pro CEZ zamítáme dokonce platnost modelu RW3.

Nakonec pro $q = 6$ je u titulů CEZ a IPB opět zamítnuta platnost modelu RW1, naopak platnost modelu RW3 pro všechny uvedené datové úseky obou titulů nezamítáme.

Výše uvedené výsledky naznačují, že tituly CEZ a IPB mají více heteroskedastická data, protože dochází k zamítání platnosti modelu RW1 pro všechna q a většinu časových úseků. Pro akcie TEL sice došlo k zamítnutí platnosti modelu RW3 pro q=2, ale pro vyšší q již platnost



Obrázek 3.1: Vybrané autokorelace výnosů obchodů a kotací BCPP.

modelu RW1 i RW3 nezamítáme.

Nyní se podívejme na testy podílem rozptylu pro výnosy kotací. Začněme s tituly RADKOM a IPB, kde vidíme, že platí podobné chování jako u obchodů. Poněkud překvapující je pak chování titulů TEL, CEZ a KB, které se chovají jakoby zrcadlově[7] vzhledem k obchodům a kotacím. Otázkou je, co může způsobovat tyto rozdíly mezi kotacemi a obchody. Jedním z důvodů by mohl být fakt, že kotace mají obecně více pozorování než obchody, viz tabulka 3.3 (v některé dny na burze nebyly uskutečněny žádné obchody). Avšak provedením příslušných testů pro ta data, kde jsou k mání kotace i obchody, jsme dospěli k naprosto stejným závěrům. Tedy je zjevné, že chování obchodů a kotací se může pro jednotlivé tituly značně lišit. Poznamenejme však, že pro většinu titulů nezamítáme platnost modelu RW3, konkrétně pro obchody v 95 z 99 případů a pro kotace v 96 z 99. Navíc pro kotace v případě ZEN 2/2 pro $q = 2$ a RIF 1/2 pro $q = 6$ má test vzhledem k malému počtu pozorování jen malou výpovědní hodnotu. Tedy co se testování náhodné procházky modelem RW3 týče, můžeme říci, že tituly na českém finančním trhu nikterak závažně „nevybočují" z toho, co bylo pozorováno na zahraničních finančních trzích, viz podobná studie v monografii Campbell et al. [1996].

Vrat'me se však zpět k pozorování, které jsme učinili při studiu autokorelací, tj. že pro denní výnosy akcií jsou autokorelace prvního řádu záporné pro obchody a kladné pro kotace. Pro $q = 2$ je poměr rozptylů (3.9) roven $1 + \rho(1)$ za platnosti modelu RW1 (za platnosti modelu RW3 je

[7]Obchody titulů TEL a CEZ nesplňují pro $q = 2$ předpoklady modelu RW1 a pro některé úseky dat ani modelu RW3 (CEZ nesplňuje předpoklady modelu RW1 ani pro $q = 4, 6$). Naopak u kotací těchto titulů nedochází k zamítnutí platnosti modelu RW1 i RW3 pro všechna q. Obchody titulu KB nezamítají platnost modelu RW1 i RW3 pro libovolné q, naopak kotace KB zamítají platnost modelu RW1 pro každé q a většinu úsek dat.

Akcie	# Obchody	# Kotace
RADKOM	1117	1180
CS	594	604
TEL	1217	1217
CEZ	1217	1217
IPB	99	113
SKAN	153	202
KB	1219	1217
PMOR	972	1025
RIF	156	185
UPETR	1180	1217
ZEN	95	95

Tabulka 3.3: Počty denních výnosů obchodů a kotací BCPP.

tato rovnost asymptotická za určitých přirozených předpokladů, viz Campbell et al. [1996]). Srovnáním $\hat{\rho}(1)$ a $\widehat{VR}(2)$ v tabulkách 3.1 a 3.4 se můžeme snadno přesvědčit, že pro tituly s největším počtem pozorování tato vlastnost platí. Poznamenejme, že i pro tituly s menším počtem pozorování vztah $\hat{\rho}(1) \doteq 1 + \widehat{VR}(2)$ platil, proto zde nebudeme uvádět jednotlivé odhady $\rho(1)$ jejich výnosů. Z tabulky 3.4 je tedy patrné, že „znaménková odlišnost" prvních autokorelací výnosů obchodů a kotací platí téměř pro všechny akcie.[8] Jistý náhled na tento problém by mohla vnést následující úvaha.

Je celkem přirozené předpokládat, že každá obchodní transakce (obchod) na burze vyvolá v dnešní době v podstatě okamžitou odezvu na trhu burzy. Vzhledem k tomu, že kotace jsou nabídky tvůrců trhu na provedení transakce, na které můžou reagovat jak jiní tvůrci trhu tak nezávislí obchodníci, je také přirozené předpokládat, že i ty vyvolávají okamžitou odezvu. Předpokládejme dále, že obchod může být proveden pouze na základě kotace, tj. neuvažujeme transakce mezi nezávislými obchodníky. Na burze jsou tedy vypisovány neustále nové kotace tvůrci trhu a někdy se uskuteční obchod. Pak je přirozená reakce tvůrce trhu ptát se, proč byla daná transakce provedena, tedy proč si protistrana myslí, že může realizovat zisk na dané transakci. Jinými slovy, konkrétní provedené obchody mají na dění na burze větší dopad než kotace samotné. Proto mohou mít výnosy obchodů spíše záporné autokorelace prvního řádu, neboť ať se výnosy pohybují jakýmkoliv směrem, dá se očekávat, že se trh přizpůsobí rychleji než u kotací. Naopak u kotací se dá předpokládat, že cena akcie se bude pohybovat dále daným směrem, tedy i výnosy akcie, dokud nedojde k obchodu, což má za následek spíše kladné autokorelace výnosů.

3.3 Závěr

V této kapitole jsme se zabývali studiem hypotézy náhodné procházky výnosů jednotlivých titulů BCPP. V souladu s monografií Campbell et al. [1996], kde byla uvedena podobná studie pro NYSE, jsme dospěli k závěru, že klasický model náhodné procházky RW1 nedostatečně popisuje chování některých titulů na pražské burze. Připomeňme, že model RW1 uvažuje výnosy jako i.i.d. náhodné veličiny, což jak ukážeme v kapitole 5 jistě neplatí, neboť pro výnosy jed-

[8] Jedinou výjimkou z titulů s větším počtem dat je titul UPETR. Na druhou stranu jsou v tomto případě hodnoty $\widehat{VR}(2)$ pro výnosy obchodů velmi blízko jedné a menší než u kotací pro každé uvažované časové rozpětí.

notlivých akcií vykazují autokorelace jejich nelineárních funkcí značnou korelovanost. Proto je třeba při popisu chování jednotlivých titulů spíše uvažovat model RW3. Dále jsme se pokusili vyslovit hypotézu o efektivitě českého finančního trhu na základě jeho autokorelační struktury. Poznamenejme, že uvedené výsledky jsme hojně využili při konstrukci ARCH modelů v kapitole 5.

Akcie	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3
pro q =	2	2	2	4	4	4	6	6	6
RADKOM	0.92	0.006*	0.091	0.93	0.186	0.390	0.95	0.488	0.635
RADKOM 1/2	0.89	0.009*	0.090	0.93	0.392	0.552	0.97	0.777	0.835
RADKOM 2/2	0.99	0.753	0.800	0.90	0.220	0.311	0.88	0.261	0.361
CS	0.97	0.440	0.568	0.85	0.050*	0.117	0.86	0.158	0.245
CS 1/2	0.96	0.475	0.601	0.92	0.464	0.560	0.91	0.527	0.598
CS 2/2	0.99	0.890	0.905	0.83	0.118	0.170	0.77	0.112	0.149
TEL	0.91	0.002*	0.002*	0.96	0.447	0.475	0.99	0.907	0.914
TEL 1/2	0.91	0.019*	0.014*	0.98	0.773	0.771	1.03	0.800	0.802
TEL 2/2	0.92	0.048*	0.072	0.93	0.384	0.442	0.95	0.619	0.661
CEZ	0.88	0.000*	0.097	0.83	0.001*	0.132	0.80	0.004*	0.141
CEZ 1/2	0.90	0.015*	0.327	0.82	0.019*	0.270	0.80	0.042*	0.285
CEZ 2/2	0.81	0.000*	0.000*	0.82	0.018*	0.039*	0.79	0.035*	0.066
IPB	0.67	0.001*	0.085	0.45	0.004*	0.077	0.32	0.007*	0.066
IPB 1/2	0.57	0.003*	0.152	0.45	0.043*	0.288	0.31	0.053	0.271
IPB 2/2	0.78	0.125	0.356	0.51	0.067	0.186	0.42	0.104	0.176
SKAN	1.05	0.554	0.727	1.03	0.843	0.896	1.08	0.677	0.766
SKAN 1/2	1.01	0.935	0.956	0.99	0.963	0.972	1.02	0.950	0.958
SKAN 2/2	1.16	0.160	0.146	1.12	0.567	0.601	1.22	0.453	0.489
KB	0.97	0.322	0.385	1.02	0.759	0.796	1.07	0.358	0.447
KB 1/2	0.97	0.457	0.500	1.04	0.584	0.641	1.10	0.344	0.432
KB 2/2	0.98	0.590	0.631	1.00	0.974	0.977	1.02	0.874	0.884
PMOR	0.99	0.700	0.743	0.98	0.686	0.739	0.95	0.517	0.591
PMOR 1/2	0.98	0.620	0.698	1.00	0.986	0.990	0.98	0.867	0.901
PMOR 2/2	1.00	0.930	0.934	0.95	0.596	0.613	0.93	0.506	0.516
RIF	0.98	0.826	0.895	1.05	0.748	0.818	1.10	0.601	0.689
RIF 1/2	0.96	0.710	0.694	0.92	0.693	0.632	1.15	0.601	0.511
RIF 2/2	1.01	0.962	0.974	1.10	0.646	0.699	1.13	0.655	0.692
UPETR	1.01	0.683	0.769	1.00	0.986	0.989	0.97	0.713	0.775
UPETR 1/2	1.02	0.573	0.674	0.98	0.842	0.876	0.99	0.898	0.917
UPETR 2/2	1.00	0.979	0.984	1.04	0.589	0.675	0.98	0.862	0.892
ZEN	1.01	0.893	0.901	1.27	0.174	0.172	1.28	0.282	0.267
ZEN 1/2	1.02	0.908	0.910	1.33	0.244	0.201	1.35	0.356	0.288
ZEN 2/2	1.08	0.585	0.564	1.13	0.639	0.595	1.15	0.698	0.652

Akcie	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3	$\widehat{VR}(q)$	p-val RW1	p-val RW3
pro q =	2	2	2	4	4	4	6	6	6
RADKOM	1.09	0.004*	0.067	1.09	0.086	0.250	1.12	0.108	0.261
RADKOM 1/2	1.09	0.022*	0.116	1.12	0.126	0.258	1.14	0.163	0.280
RADKOM 2/2	1.06	0.160	0.341	1.03	0.697	0.787	1.05	0.611	0.720
CS	1.03	0.529	0.648	0.94	0.468	0.580	0.96	0.721	0.765
CS 1/2	1.01	0.898	0.927	0.98	0.864	0.895	1.02	0.882	0.904
CS 2/2	1.04	0.507	0.587	0.89	0.293	0.384	0.87	0.349	0.429
TEL	1.04	0.202	0.275	1.05	0.353	0.421	1.08	0.274	0.337
TEL 1/2	1.05	0.234	0.286	1.08	0.319	0.362	1.13	0.210	0.246
TEL 2/2	1.02	0.636	0.686	1.02	0.838	0.862	1.01	0.882	0.898
CEZ	1.03	0.231	0.503	0.98	0.708	0.818	0.95	0.526	0.677
CEZ 1/2	1.05	0.242	0.507	0.98	0.775	0.858	0.96	0.703	0.796
CEZ 2/2	0.99	0.755	0.805	0.95	0.538	0.615	0.93	0.493	0.567
IPB	0.70	0.002*	0.196	0.56	0.013*	0.258	0.39	0.011*	0.191
IPB 1/2	0.52	0.000*	0.148	0.51	0.048*	0.398	0.36	0.057	0.365
IPB 2/2	0.99	0.937	0.972	0.74	0.305	0.567	0.57	0.196	0.386
SKAN	1.05	0.442	0.708	1.12	0.380	0.629	1.18	0.316	0.541
SKAN 1/2	1.03	0.772	0.870	1.10	0.605	0.742	1.11	0.670	0.759
SKAN 2/2	1.15	0.131	0.202	1.21	0.269	0.406	1.31	0.227	0.362
KB	1.08	0.005*	0.039*	1.11	0.041*	0.117	1.17	0.018*	0.065
KB 1/2	1.09	0.022*	0.104	1.15	0.047*	0.146	1.23	0.022*	0.086
KB 2/2	1.07	0.107	0.144	1.07	0.363	0.395	1.08	0.415	0.448
PMOR	1.05	0.121	0.198	1.06	0.285	0.386	1.04	0.625	0.687
PMOR 1/2	1.08	0.058	0.169	1.16	0.059	0.180	1.15	0.177	0.331
PMOR 2/2	1.02	0.663	0.672	0.98	0.852	0.860	0.95	0.647	0.654
RIF	1.00	0.983	0.992	1.12	0.384	0.619	1.29	0.115	0.302
RIF 1/2	1.11	0.287	0.098	1.19	0.335	0.115	1.42	0.104	0.031*
RIF 2/2	0.97	0.788	0.880	1.11	0.587	0.717	1.28	0.282	0.405
UPETR	1.05	0.079	0.207	1.07	0.193	0.337	1.08	0.234	0.368
UPETR 1/2	1.05	0.223	0.377	1.03	0.681	0.758	1.08	0.428	0.534
UPETR 2/2	1.03	0.410	0.479	1.13	0.083	0.153	1.08	0.413	0.514
ZEN	1.08	0.447	0.444	1.21	0.275	0.245	1.14	0.604	0.583
ZEN 1/2	1.06	0.709	0.710	1.31	0.274	0.224	1.27	0.485	0.428
ZEN 2/2	1.20	0.182	0.038*	1.11	0.690	0.598	0.94	0.882	0.846

Tabulka 3.4: Testy podílem rozptylů denních výnosů za platnosti modelu RW1 a RW3 pro obchody a kotace. Pro každý titul je testován jak celý datový soubor tak i jeho první a druhá polovina. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace. Pro každé q uvádíme odhad podílu rozptylů definovaný v (3.15) a příslušné p-hodnoty hodnoty testů za platnosti modelu RW1 (p-val RW1) a modelu RW3 (p-val RW3). Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti.

Kapitola 4

Těžké chvosty Burzy cenných papírů Praha

V této kapitole se budeme zabývat chvosty rozdělení výnosů. Historie zkoumání chvostů sahá někam na počátek šedesátých let, viz například článek Mandelbrot [1963], kde je ukázána nevhodnost normálního rozdělení pro popis finančních dat a je představena alternativa pro jejich zkoumání a to v podobě stabilních rozdělení. V poslední době je toto téma ve středu zájmu například v oblasti řízení rizika, kde typicky zkoumáme extrémní hodnoty, kterých může dané aktivum nabývat. Jedním ze způsobů, jak tento problém matematicky uchopit, je „nafitovat" hustotu nějakého známého rozdělení na naše data a pomocí ní pak učinit závěry o chování chvostů. Hlavní problém tohoto postupu je, že nafitovaná hustota může být značně ovlivněna daty, která se nalézají v střední části hustoty, v důsledku čehož je pak chování chvostů do značné míry zkresleno, i když právě to je předmětem největšího zájmu v oblasti řízení rizika. Postup, který tento nedostatek do značné míry eliminuje, spočívá v „slepení" té části, která leží uprostřed hustoty a chvostů samotných. Tato metoda je výborně popsána například v článku McNeil [1996].

Jedním z nejčastěji v literatuře používaných je následující postup, který se soustředí na chování chvostů samotných. Předpokládejme, že zkoumaná náhodná veličina R má v oblasti chvostů Paretovo rozdělení, tedy se řídí předpisem[1]

$$\mathsf{P}(R > r) = kr^{-\alpha}, \quad r > 0, \quad k > 0, \quad \alpha > 0, \tag{4.1}$$

přičemž odhad parametru α je středem zájmu. Zjevně tento parametr charakterizuje rychlost, kterou se hustota v oblasti chvostů blíží k nule a tedy určuje mez, do níž má náhodná veličina R konečné momenty. Konkrétně z (4.1) plyne, že hustota náhodné veličiny R má předpis

$$f(r) = \alpha k r^{-\alpha-1}$$

a tedy

$$\mathsf{E}R^m < \infty, \quad 0 < m < \alpha, \quad r > 0, \quad k > 0, \quad \alpha > 0. \tag{4.2}$$

[1] Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme chvosty rozdělení výnosů, není předpoklad $r > 0$ nikterak svazující, protože o výnosech akcií je dobře známo, že jejich průměry se významně neliší od nuly, což byl i případ výnosů akcií BCPP, viz sekce 4.2 . Tedy při vyšetřování levé části chvostu uvažujeme hodnoty menší než 0 vynásobené -1. Pro vyšetřování obou chvostů zároveň pak uvažujeme výnosy v absolutní hodnotě.

Vztah (4.2) je jednou z důležitých vlastností parametru α, neboť právě stupeň, do kterého jsou momenty konečné, je často rozhodující pro asymptotické chování testových statistik, proto se často mluví o *koeficientu těžkosti chvostu* α. Dále se může tento parametr využít pro volbu rozdělení daného modelu. Například v Jensen and deVries [1991] a Hols and deVries [1991] je navrhována následující heuristika, je-li $\alpha < 2$, pak je doporučeno použít k modelování chování náhodné veličiny stabilní proces, pro $\alpha > 2$ Studentovo rozdělení.

Struktura této kapitoly je následující. Podobně jako v přecházející kapitole budeme porovnávat výsledky obchodů a kotací. Nejprve vyložíme ve stručnosti potřebnou teorii, poté odhadneme koeficienty těžkosti chvostů α pro vybrané akcie. Nakonec ještě konfrontujeme vypočtené výsledky s grafickou metodou a závěrem celou kapitolu shrneme.

4.1 Teoretický úvod

Nejprve vyložíme vlastnosti dvou statistik charakterizujících tvar rozdělení, a to šikmosti a špičatosti. V další části popíšeme postup při odhadu koeficientu těžkosti chvostů α.

4.1.1 Šikmost a špičatost

Pro náhodnou veličinu $R \sim (\mu, \sigma^2)$ definujme šikmost jako

$$\mathsf{S}R := \mathsf{E}\frac{(R-\mu)^3}{\sigma^3} \tag{4.3}$$

a špičatost jako

$$\mathsf{K}R := \mathsf{E}\frac{(R-\mu)^4}{\sigma^4}. \tag{4.4}$$

Empirické odhady (4.3) a (4.4) náhodné veličiny R pro realizaci náhodného výběru $\{r_1, \ldots, r_T\}$ jsou definovány následovně

$$\hat{S} := \frac{1}{T\hat{\sigma}^3}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu})^3$$

a

$$\hat{K} := \frac{1}{T\hat{\sigma}^4}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu})^4$$

kde

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu})^2.$$

Předpokládáme-li navíc, že náhodný výběr $\{r_1, \ldots, r_T\}$ je z normálního rozdělení, pak platí

$$\hat{S} \sim \mathbf{N}(0, \frac{6}{T}), \tag{4.5}$$

$$\hat{K} \sim \mathbf{N}(3, \frac{24}{T}), \tag{4.6}$$

viz Campbell et al. [1996].

4.1.2 Odhad koeficientu těžkosti chvostu

V této sekci se budeme zabývat jednou z metod určení míry těžkosti chvostu výnosů zmíněných v úvodu kapitoly. Konkrétně budeme předpokládat, že naše výnosy mají v oblasti chvostů Paretovo rozdělení definované v (4.1).

Nejprve alespoň ve stručnosti zmiňme základní myšlenku stojící za nejčastěji používanými odhady parametru α. Vyjděme z předpokladu (4.1), odkud logaritmováním dostáváme

$$\log \mathsf{P}(R > r) = \log k - \alpha \log(r),$$

což lze upravit na tvar

$$\log(r) = k' - \gamma \log \mathsf{P}(R > r), \tag{4.7}$$

kde $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ a $k' = \frac{\log k}{\alpha}$. Nyní uvažujme, že máme pozorování $r_1, \ldots, r_T$, které uspořádáme do pořádkové statistiky $r_{(1)} \geq, \ldots, \geq r_{(n)} \geq, \ldots, \geq r_{(T)}$, kde $n \in \{2, \ldots, T\}$ je největší takové, že $r_{(n)}$ patří ještě do oblasti chvostů, přičemž se často uvádí doporučení volit $n \leq \frac{T}{10}$. Pravděpodobnost $\mathsf{P}(R > r)$ lze pro pořádkovou statistiku odhadnout tzv. *empirickou funkcí přežití*, tj. položíme $\hat{\mathsf{P}}(R > r_{(i)}) = \frac{i}{T}$ pro $i = 1, \ldots, T$. Z rovnice (4.7) je vidět, že γ je směrnicí přímky v rovině $\log \hat{\mathsf{P}}(R > r_{(i)})$ a $\log r_{(i)}$ pro $i = 1, \ldots, T$. Odtud je zřejmé, že stačí libovolné dva body k určení směrnice přímky a tedy i odhadu γ. Problémem tohoto postupu je především již zmiňovaná volba n.

Jestliže však máme n určeno, pak můžeme odhadnout γ jako

$$\hat{\gamma} = \frac{\log r_{(1)} - \log r_{(n)}}{\log(n)}.$$

V článku Kearns and Pagan [1997] jsou porovnávány vlastnosti následujících tří odhadů γ

$$\hat{\gamma}_H = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\log r_{(i)} - \log r_{(n)}), \tag{4.8}$$

$$\hat{\gamma}_P = \frac{1}{\log 2} (\log(r_{(n)} - r_{(2n)}) - \log(r_{(2n)} - r_{(4n)})). \tag{4.9}$$

$$\hat{\gamma}_{HR} = \frac{1}{\log n} (\log r_{(1)} - \log r_{(n)}), \tag{4.10}$$

kde po řadě máme Hillův, Pickandův a Hann-Resnickův odhad, viz Hill [1975], Pickands [1975] a Haan and Resnick [1980]. V článku je na základě několika simulací vybrán jako nejlepší Hillův odhad (4.8). Zdůrazněme ještě, že tento odhad můžeme chápat jako funkci n, tj. počtu $n+1$ zahrnutých pozorování, o nichž se domníváme, že patří do oblasti chvostu.

Protože tento odhad je v současnosti v praxi nejpoužívanějším, uveďme zde ještě jeho modifikaci odvozenou v článku Huisman et al. [2001]. Tento odhad budeme označovat $\hat{\gamma}_M$. Popišme nejprve základní úvahu této modifikace a její výhody.

Pro rozdělení náhodné veličiny R spadající do třídy[2]

$$\mathsf{P}(R < r) = 1 - ar^{-\alpha}(1 + br^{-\beta}), \quad r, \alpha, \beta > 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{4.11}$$

platí, že

$$\mathsf{E}\hat{\gamma}_H(n) \doteq \frac{1}{\alpha} - \frac{b\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} a^{-\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{n}{T}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{4.12}$$

a

$$\mathsf{Var}\,\hat{\gamma}_H(n) \doteq \frac{1}{n\alpha^2}. \tag{4.13}$$

Z rovnic (4.12) a (4.13) je ihned patrné jedno z úskalí odhadu a sice, že s rostoucím n sice náš odhad zpřesňujeme, ale roste jeho vychýlení, jehož rychlost je závislá na exponentu $\frac{\beta}{\alpha}$. Nyní ještě předpokládejme, že platí $\alpha = \beta$. Oprávněnost tohoto předpokladu je v článku hlouběji probrána. Pak z (4.12) vidíme, že vychýlení střední hodnoty je lineární funkce n a tedy tato rovnice může býti reparametrizována jako

$$\hat{\gamma}_H(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \epsilon_t, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.14}$$

což je úloha lineární regrese.

Situaci však zřejmě komplikují dva nezanedbatelné problémy. První z nich plyne z (4.13), tedy musíme k řešení úlohy (4.14) použít metodu WLS[3] místo OLS[4] s maticí vah ve tvaru

$$W = \mathrm{diag}\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Příslušný odhad koeficientů v úloze (4.14) metodou WLS je pak

$$\hat{\beta}^{WLS} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{WLS} \\ \hat{\beta}_1^{WLS} \end{pmatrix} = (Z'WZ)^{-1}Z'W\Gamma, \tag{4.15}$$

kde

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_H(1) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_H(n) \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

[2]Pro velká r, tj. r v oblasti chvostu je limitním rozdělením zřejmě Paretovo.

[3]Metoda vážených nejmenších čtverců (Weighted least squares method).

[4]Metoda nejmenších čtverců (Ordinary least squares method).

a tedy

$$\hat{\beta}_0^{WLS} = \hat{\gamma}_M = \frac{1}{\hat{\alpha}}. \tag{4.17}$$

Druhým, daleko závažnějším problémem je zřejmá korelovanost $\hat{\gamma}_H(k)$ pro $k = 1, \ldots, n$. My zde pouze poznamenejme, že tento nedostatek je ošetřen za pomoci vlastností pořádkové statistiky

$$\{\hat{\gamma}_H(n), \ldots, \hat{\gamma}_H(1)\}. \tag{4.18}$$

Podrobnosti lze nalézt opět v článku Huisman et al. [2001].

Nyní shrňme výhody modifikovaného Hillova odhadu. Pro klasický Hillův odhad (4.8) se musíme zabývat vhodnou volbou n, na kterou je celkem citlivý[5], dále se ukazuje, že odhad má sklony k přeceňování těžkosti chvostů. Modifikovaný odhad má tu výhodu, že je dosti robustní vůči volbě n, přičemž je doporučováno volit $n = T/2$, kde z jistotou můžeme tvrdit, že všechna pozorování z oblasti chvostů jsou v odhadu zahrnuta. Dále se uvádí, že tento odhad může být používán již pro $T > 100$. To umožňuje jeho použití i při velmi skromném počtu dat, což bude náš případ zejména pro týdenní výnosy. Všechny tyto vlastnosti byly odvozeny metodou Monte Carlo pro různá rozdělení či stochastické procesy, viz opět Huisman et al. [2001].

4.2 Numerické metody odhadu koeficientu těžkosti chvostu výnosů Burzy cenných papírů Praha

Dříve než přistoupíme k hodnocení samotných koeficientů těžkosti chvostu, spočteme ještě dvě statistiky, šikmost a špičatost, které nám poskytnou první informace o rozdělení našich dat, viz tabulka 4.1. Vzhledem k větším nárokům na rozsah dat při výpočtu statistik pro větší časové odstupy jsme se omezili pouze na akcie s nejdelší historií.

V tabulce 4.1 neuvádíme průměry uvažovaných výnosů akcií BCPP, neboť jejich hodnoty byly velmi blízké nule a statisticky nevýznamné za předpokladu normálního rozdělení výnosů.

Šikmosti jednotlivých titulů jsou pro obchody statisticky významné, ve smyslu (4.5), v 10 z 18 případů. Zejména si však povšimněme toho, že případy, kdy šikmost není statisticky významná, nastávájí výhradně pro týdenní a měsíční odstupy. Toto pozorování je v souladu s tím, že s rostoucím odstupem jsou výnosy blíže normálnímu rozdělení, tj. mají šikmost 0 a špičatost 3, viz například Cont [2001]. Podobné závěry lze učinit také pro kotace, kde je poměr statisticky významných šikmostí jednotlivých titulů 11/18. Zajímavostí je fakt, že u šikmostí obchodů i kotací převládá záporné znaménko. Například pro NYSE (New York Stock Exchange) byl pozorován spíše opačný trend, viz Campbell et al. [1996] (kap 1.4).

Nyní se zaměřme na špičatosti jednotlivých titulů. V drtivé většině případů je špičatost statisticky různá od tří ve smyslu (4.6) a značně větší, což naznačuje přítomnost těžkých chvostů. Dále můžeme pozorovat, podobně jako u šikmostí, že s rostoucím odstupem se rozdělení výnosů blíží normálnímu, a to zejména pro měsíční odstup. Pro týdenní odstup tento rys až tak patrný

[5] V (4.8) hraje klíčovou roli právě $r_{(n)}$. Proto zvolíme-li n příliš velké (malé), tj. už nejsme v oblasti chvostů (v důsledku malého počtu pozorování), pak je celý odhad dosti zkreslený.

Akcie	Druh	Počet	Šikmost	Špičatost	Akcie	Druh	Počet	Šikmost	Špičatost
	Den	1117	-0.77*	11.24*		Den	1180	-0.68*	7.51*
RADKOM	Týden	248	-2.30*	16.89*	RADKOM	Týden	248	-1.38*	8.31*
	Měsíc	57	-1.15*	6.00*		Měsíc	57	-0.32	3.11
	Den	1217	-0.25*	7.09*		Den	1217	-0.17*	5.72*
TEL	Týden	255	-0.04	5.07*	TEL	Týden	255	0.45*	5.20*
	Měsíc	59	-0.48	3.42		Měsíc	59	-0.22	3.53
	Den	1217	-0.83*	18.07*		Den	1217	-1.01*	16.19*
CEZ	Týden	255	-0.11	5.25*	CEZ	Týden	255	-0.08	5.53*
	Měsíc	59	0.08	4.66*		Měsíc	59	0.50	4.99*
	Den	1219	0.12	5.80*		Den	1217	0.09	5.39*
KB	Týden	255	-0.01	5.81*	KB	Týden	255	-0.35*	7.04*
	Měsíc	59	0.80*	6.28*		Měsíc	59	0.06	5.60*
	Den	972	-0.59*	9.86*		Den	1025	-1.16*	14.20*
PMOR	Týden	215	0.27	10.95*	PMOR	Týden	215	-0.52*	16.52*
	Měsíc	50	0.80*	4.56*		Měsíc	50	-2.37*	15.58*
	Den	1180	-0.28*	8.64*		Den	1217	-0.26*	8.08*
UPETR	Týden	255	-0.34*	7.61*	UPETR	Týden	255	-0.38*	8.99*
	Měsíc	59	0.02	3.26		Měsíc	59	-0.19	3.81

Tabulka 4.1: Empirické šikmosti a spičatosti výnosů vybraných akcií BCPP pro různé časové odstupy s příslušnými počty pozorování. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace. Všechny testy jsou prováděny na 5% hladině spolehlivosti, přičemž signifikantní výsledky jsou označeny hvězdičkou.

není. Toto chování je podobné u kotací i obchodů. Tedy opět pozorujeme chování velmi podobné tomu na zahraničních finančních trzích, viz Cont [2001].

Pro výnosy akcií BCPP nyní uveďme výsledky odhadu α modifikovaným Hillovým odhadem definovaným v odstavci 4.1.2. V tabulce 4.2 začneme zkoumáním koeficientů pro dny. V Cont [2001] se uvádí, že pro denní výnosy na zahraničních burzách byly pozorovány odhady v rozmezí $2 \leq \hat{\alpha} \leq 5$. V Huisman et al. [2001] je provedena studie za použití Hillova modifikovaného odhadu na kurzovní indexy několika zahraničních měn, kde se výsledné odhady koeficientu levého, pravého a obou chvostů výnosů pohybovaly v rozmezí $4 \leq \hat{\alpha} \leq 7$. Naše odhady se pohybují v rozmezích $2.697 \leq \hat{\alpha} \leq 6.662$ pro obchody a $3.231 \leq \hat{\alpha} \leq 6.929$ pro kotace, což je celkem v souladu s výše uvedenými výsledky pro zahraniční trhy. Vzhledem k tomu, že všechny odhady pro denní výnosy jsou větší než 2, mají uvedené výnosy BCPP chvosty lehčí než Lévyho rozdělení, které bylo navrhováno k zkoumání výnosů v Mandelbrot [1963]. Tento výsledek také nasvědčuje tomu, že naše akcie mají alespoň druhý moment výnosů konečný.

Velmi zajímavým je fakt, že pro všechny tituly se opakuje následující schéma v chování chvostů levý$\leq$oba$\leq$pravý. Tedy chvosty záporných výnosů jsou těžší než-li chvosty výnosů kladných. Lepší náhled na tento jev poskytuje obr. 4.1. Odtud je vidět rozdíl mezi chvosty, zejména pak pro akcie RADKOM, TEL a PMOR tyto rozdíly naznačují dokonce různě konečné momenty pro levou a pravou část u obchodů i kotací. Takovéto chování chvostů vlastně říká, že na českém finančním trhu jsou velké výchylky záporných výnosů pravděpodobnější než u výnosů kladných. Jinými slovy, trh je náchylnější k větším poklesům ceny akcie než k jejímu růstu. Tento výsledek by se mohl například použít ke spekulacím na růst resp. pokles ceny, protože víme, že volatilita poklesu ceny je větší než jejího růstu.

Pro denní výnosy pak není vidět nějaký systematický rozdíl mezi chováním chvostů u ob-

Akcie	Typ chvostu	Den	# pozorování	Týden	# pozorování	Akcie	Typ chvostu	Den	# pozorování	Týden	# pozorování
	Oba	3.274	1117	2.490	248		Oba	4.647	1180	4.229	248
RADKOM	Levý	2.697	542	1.718	115	RADKOM	Levý	3.634	580	2.297	124
	Pravý	4.421	484	5.875	111		Pravý	5.999	572	79.892	120
	Oba	5.834	1217	5.047	255		Oba	5.027	1217	5.010	255
TEL	Levý	5.356	570	4.655	115	TEL	Levý	4.013	611	3.595	116
	Pravý	6.662	584	5.948	130		Pravý	6.929	599	8.911	136
	Oba	4.176	1217	6.049	255		Oba	4.036	1217	3.952	255
CEZ	Levý	3.726	544	6.261	120	CEZ	Levý	3.751	573	3.156	129
	Pravý	4.504	600	5.794	116		Pravý	4.413	634	5.619	123
	Oba	5.647	1219	4.620	255		Oba	4.761	1217	2.862	255
KB	Levý	5.215	547	3.423	115	KB	Levý	4.475	573	2.504	120
	Pravý	5.599	602	8.393	124		Pravý	4.840	633	3.229	133
	Oba	4.006	972	2.513	215		Oba	3.967	1025	3.171	215
PMOR	Levý	3.426	414	2.394	92	PMOR	Levý	3.231	464	2.581	99
	Pravý	5.056	467	3.195	104		Pravý	4.642	544	3.186	112
	Oba	4.155	1180	3.818	255		Oba	4.162	1217	2.831	255
UPETR	Levý	3.870	514	4.281	95	UPETR	Levý	3.841	573	2.202	113
	Pravý	4.296	572	3.271	139		Pravý	4.402	625	3.127	139

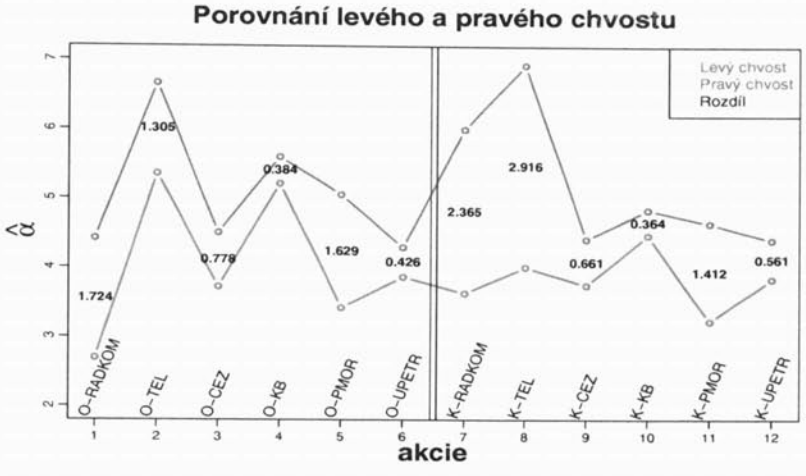
Tabulka 4.2: Koeficienty těžkosti chvostů počítané modifikovaným Hillovým odhadem pro výnosy vybraných akcií BCPP. V levé části jsou uvedeny koeficienty denních výnosy obchodů s příslušnými počty pozorování a poté koeficienty těžkosti chvostů a počty pozorování pro týdenní výnosy obchodů. V pravé části jsou výsledky shrnuty stejným způsobem pro kotace. Do počtů pozorování pro levý a pravý chvost nejsou zahrnuty nulové hodnoty.

chodů a kotací. Je to vlastně potvrzení našeho předpokladu z kapitoly 3.2 o tom, že v dnešní době je reakce trhu téměř okamžitá, neboť kdyby byly například chvosty výnosů obchodů výrazně těžší než kotací, pak je pro obchodníka možné opakovaně realizovat obchod s extrémním kladným (resp. záporným) výnosem, spekuluje-li na růst (resp. pokles) ceny aktiva. To by nasvědčovalo tomu, že tvůrci trhu nedostatečně pružně reagují na vývoj trhu.

Nyní přistupme k interpretaci výsledků pro týdenní výnosy. Na základě tabulky 4.1 bychom neočekávali nějaké výrazné rozdíly mezi denními a týdenními odhady koeficientu α obou chvostů, neboť mezi jejich špičatostmi nebyly většinou velké rozdíly. Trend s klesající špičatostí byl charakteristický až pro měsíční výnosy. Nicméně je patrné, že týdenní chvosty jsou většinou těžší než denní, konkrétně v 27 z 36 případů. Avšak zvláště pro odhady levých či pravých chvostů se potýkáme se značně malým počtem pozorování, zde již narážíme na samou hranici použitelnosti odhadu.[6] Protože však podobný charakter vykazují i výsledky odhadů obou chvostů, může z toho usuzovat, že na českém finančním trhu je možné realizovat větší zisk nebo ztrátu držíme-li naši pozici v horizontu týdne oproti intradenním transakcím, což je celkem přirozený jev. Poznamenejme, že i pro týdenní výnosy jsou levé chvosty těžší než chvosty pravé, konkrétně v 10 z 12 případů.

Jak bylo zmíněno v odstavci 4.1.2, v současné době je stále v praxi nejčastěji používán kla-

[6]Toto se zřejmě projevilo při výpočtu odhadu α u kotací akcie Radkom pro pravý chvost.



Obrázek 4.1: Porovnání indexů chvostů z tabulky 4.2. V levé části jsou porovnány odhady α pro obchody, v pravé pro kotace.

sický Hillův odhad zavedený v (4.8), který má však sklon přisuzovat zkoumaným datům těžší chvosty než je skutečnost. Nicméně pro srovnání s modifikovaným Hillovým odhadem uvádíme jeho výsledky v tabulce 4.3. Než-li přistoupíme k srovnání obou odhadů shrneme uvedené výsledky pro klasický Hillův odhad.

Pro denní výnosy je vidět, že při použití jedné setiny dostupných pozorování při konstrukci klasického Hillova odhadu ($n = \frac{T}{100}$) vykazují výsledky dosti nestálé chování, naopak pro tří a pěti procentní práh jsou odhady velmi podobné. U zahrnutí desetiny dostupných pozorování je patrné, že již pravděpodobně dochází ke zkreslení odhadu, neboť $\hat{\gamma}_H$ je nepřiměřeně velké v důsledku zahrnutí dat z centrální části. Z toho plynou nepřiměřeně malé hodnoty $\hat{\alpha}_H$. Navíc je patrné, že od tří procentního prahu odhady α většinou klesají jako funkce prahu, konkrétně v 24 z 36 případů v přechodu mezi tří a pěti procentním prahem a v 33 z 36 případů mezi pěti a deseti procentním prahem, což je v rozporu s (4.12). Proto se přikláníme k volbě tří procentního prahu pro denní výnosy. Opět je patrné schéma chování chvostů levý $\leq$ pravý, které nastává v 10 z 12 případů pro tříprocentní práh. Mezi obchody a kotacemi není opět velký rozdíl.

Pro týdenní odhady se nejprve vraťme k počtům pozorovaní uvedených v tabulce 4.2, jež jsou k dispozici pro výpočet odhadu, odkud je patrné, že trpíme jejich velkým nedostatkem. Například u obchodů titulu Radkom pro levou část je k dispozici 115 pozorování, tedy pro volby prahu 3 %, 5 %, 8 % a 10 % odhadujeme na základě 3, 6, 9 a 11 pozorování. Jako přípustný se nám jeví pěti procentní práh, protože osmi a deseti procentní práh již nabízí odhady, které by signalizovaly velmi těžké chvosty, čemuž, jak uvidíme v příští části 4.3, nic nenasvědčuje. Navíc odhad α klesá s rostoucím n, což je opět v rozporu s (4.12).

Nakonec srovnejme odhady z tabulek 4.2 a 4.3. Na první pohled je patrné, že pro denní výnosy by klasický Hillův odhad naznačoval těžší chvosty výnosů než odhad modifikovaný. Vezmeme-li pro denní výnosy tří procentní práh, pak v 30 z 36 případů je klasický odhad menší než modifikovaný. Pro týdenní výnosy při pěti procentním prahu je tento poměr 19 z 36.

4.3 Grafické metody odhadu těžkosti chvostu výnosů z Burzy cenných papírů Praha

Jednou z často v praxi užívaných metod, pro rychlé získání náhledu na chování chvostů, je Q-Q plot, kde jsou proti sobě vynášeny kvantily zkoumaných rozdělení. Na x-ovou osu se obvykle vynáší empirické kvantily zkoumaného rozdělení, na y-ovou osu se pak vynáší kvantily rozdělení, se kterým chceme naše data srovnávat. Má-li výsledná křivka spíše konvexní charakter, pak jsou chvosty testovacího rozdělení těžší než našich dat, neboť na y-ové ose jsou právě v důsledku těžších chvostů odpovídající kvantily blíže k počátku než na ose x-ové. Je-li průběh naopak konkávní jsou chvosty dat těžší než u testovacího rozdělení.

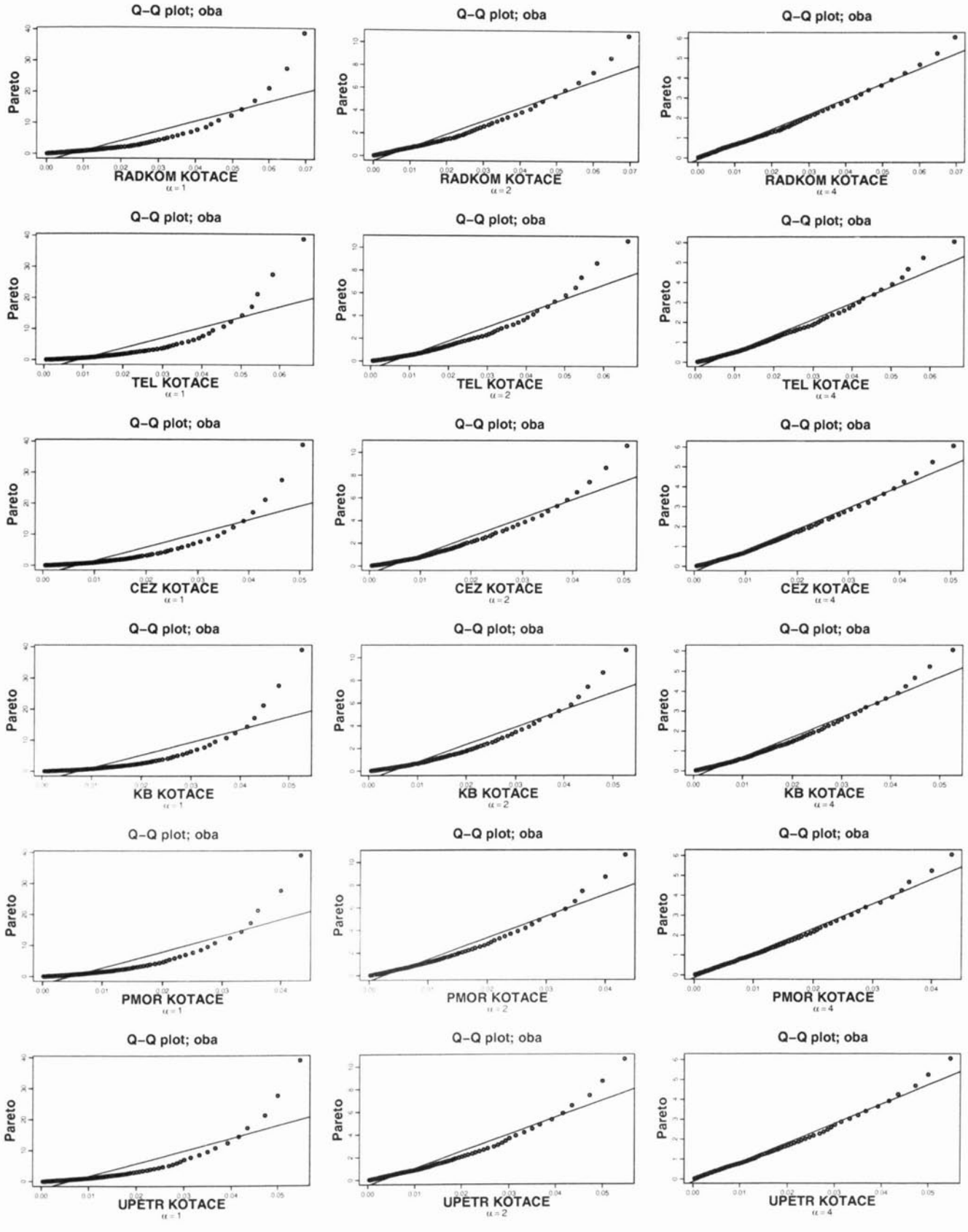
Na obrázku 4.2 jsou uvedeny Q-Q ploty pro denní výnosy kotací. Je patrné, že Paretovo rozdělení s parametrem $\alpha = 1,2$ má chvosty příliš těžké, což koresponduje s výsledky uvedenými v tabulkách 4.2 a 4.3. Pro $\alpha = 4$ je již shoda pro všechny akcie uspokojivá.

4.4 Závěr

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, zkoumání chování chvostů je v dnešní době nedílnou součástí řízení rizika. Jak jsme také naznačovali, existuje celá řada způsobů jak k tomuto problému přistupovat. My jsme se koncentrovali pouze na odhad samotného koeficientu těžkosti chvostů, tedy na rychlost, s jakou jdou chvosty rozdělení k nule za předpokladu, že distribuční funkce je polynomiální. Zaměřili jsme se na jeden z nejpoužívanějších odhadů a tím je Hillův odhad. Navíc jsme uvedli jeho modifikaci, jejíž hlavní výhodou byla možnost použití tohoto odhadu již při velmi malém počtu pozorování. Vzhledem k tomu, že existuje hned několik odhadů, jejichž výsledky se mohou do značné míry lišit, si myslíme, že je na místě vyvozovat závěry pro chování daného portfolia akcií v rámci jednoho odhadu a poté zkoumat, do jaké míry se uvedené chování opakuje pro odhad jiný, což bylo provedeno v předešlé části. Tím získáváme náhled na to, jaké vlastnosti jsou pro jednotlivé akcie společné či odlišné, a podobně pak můžeme učinit závěry pro obecnější rysy trhu jako je například chování obchodů a kotací. Tento přístup se zdá vhodným i z několika čistě matematických důvodů.

Uvedené metody nám dovolují charakterizovat chování chvostů v podstatě jedním číslem. Jsou sice známé asymptotické vlastnosti některých odhadů α, zejména pro Hillův dohad. Avšak ty předpokládají, že podkladová data jsou i.i.d., tedy se chovají jako model RW1, což, jak bylo ukázáno v předešlé kapitole, často neplatí. Tento problém je popsán v článku Kearns and Pagan [1997], kde je podán empirický důkaz, že pro data z finančních trhů předpokládáme-li i.i.d. rozdělení výnosů jsou teoretické intervalové odhady parametru α užší než by měly. Proto jsme se jimi zde nezabývali.

Pro odhad parametru α jsme vycházeli z předpokladu, že naše data mají distribuční funkci rozdělení spadajícího do třídy (4.11). K podobným závěrům se dá dojít předpokládáme-li v ob-



Obrázek 4.2: Q-Q ploty denních výnosů kotací proti Paretovu rozdělení pro $\alpha = 1, 2, 4$.

lasti chvostů rozdělení, které se dá popsat tzv. Cramer-von Misesovou parametrizací

$$H_\gamma(x) = \exp\Big(-(1+\gamma_c x)^{-\frac{1}{\gamma_c}}\Big),$$

kde pro $\gamma_c < 0$ mluvíme o Weibullově, pro $\gamma_c = 0$ o Gumbelově a pro $\gamma_c > 0$ o Frechetově rozdělení. Pričemž pro $0 < \gamma_c$ je chování chvostů srovnatelné právě s Paretovým rozdělením s koeficientem α takovým, že $\alpha = \alpha_c = \frac{1}{\gamma_c}$, v tom smyslu, že distribuční funkce zkoumané náhodné veličiny splňuje

$$F(x) \doteq \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad x \to \infty,$$

kde $L(\cdot)$ je taková, že

$$\forall y > 0 \quad \text{je} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{L(yx)}{L(x)} = 1. \tag{4.19}$$

To znamená, že α určuje chování distribuční funkce až na nějakou neznámou funkci $L(\cdot)$ splňující (4.19), přičemž výsledná distribuční funkce může být do značné míry ovlivněna výběrem funkce $L(\cdot)$.[7] Podrobnosti v Cont [2001], Bouchaud [2001].

[7] Příkladem funkce splňující (4.19) je například logaritmus.

Akcie	Typ chvostu	1% den	3% den	5% den	10% den	3% týden	5% týden	8% týden	10% týden	Akcie	Typ chvostu	1% den	3% den	5% den	10% den	3% týden	5% týden	8% týden	10% týden
	Oba	3.608	3.777	3.308	2.740	3.321	3.935	2.216	2.323		Oba	4.386	3.682	3.479	2.860	2.482	2.895	2.305	2.091
RADKOM	Levý	3.166	3.259	3.278	2.334	2.272	3.685	3.065	2.150	RADKOM	Levý	4.816	3.157	3.000	2.439	4.499	4.938	2.347	1.699
	Pravý	3.073	4.930	3.943	3.348	6.561	4.419	4.611	4.758		Pravý	4.529	5.303	4.920	3.465	5.366	6.124	3.822	2.917
	Oba	3.545	4.107	3.625	3.106	4.687	4.642	2.905	2.992		Oba	4.882	4.221	4.149	3.302	4.817	3.858	3.638	3.416
TEL	Levý	3.674	3.185	3.678	3.255	4.444	4.735	4.263	3.119	TEL	Levý	3.243	3.872	3.842	3.192	3.322	3.990	4.540	3.583
	Pravý	5.350	5.315	4.122	2.936	3.568	4.404	2.234	2.727		Pravý	8.333	4.906	4.329	3.372	3.687	3.110	2.992	3.283
	Oba	3.280	3.631	3.065	2.836	11.526	3.063	3.089	2.974		Oba	4.543	4.368	3.834	3.306	10.776	2.936	3.258	2.639
CEZ	Levý	2.554	3.841	2.743	2.598	9.531	3.290	2.649	2.719	CEZ	Levý	3.225	4.145	3.596	2.995	10.003	2.887	2.335	2.377
	Pravý	2.824	3.843	3.345	3.168	11.406	3.328	3.434	3.820		Pravý	5.924	4.171	3.912	3.453	3.124	2.935	4.001	2.682
	Oba	8.826	3.901	3.430	2.956	4.556	4.738	3.447	2.633		Oba	3.901	4.114	3.676	3.083	3.888	2.926	2.544	2.318
KB	Levý	4.270	4.228	3.323	3.086	7.511	3.665	2.114	2.050	KB	Levý	3.629	3.584	4.181	3.317	2.924	2.992	1.980	2.221
	Pravý	17.339	3.318	3.499	3.080	4.833	5.757	5.472	4.130		Pravý	6.370	4.076	3.361	3.034	7.434	3.507	2.885	2.392
	Oba	3.491	3.100	3.144	3.045	2.684	2.502	2.937	2.706		Oba	2.932	2.959	3.023	2.728	2.210	2.629	2.555	2.278
PMOR	Levý	2.074	2.219	2.447	2.494	1.983	2.726	2.465	2.220	PMOR	Levý	2.011	2.060	2.187	2.423	1.615	2.371	2.838	2.029
	Pravý	8.086	4.539	3.559	4.198	5.174	3.494	2.651	2.797		Pravý	4.570	4.456	4.427	3.044	2.580	2.571	3.269	3.151
	Oba	4.333	3.229	3.274	2.675	5.319	4.110	3.752	2.475		Oba	4.128	3.474	3.423	2.814	3.263	4.076	3.421	2.929
UPETR	Levý	4.294	2.870	3.449	2.634	2.988	4.149	6.084	6.047	UPETR	Levý	2.737	3.375	3.723	2.741	2.672	3.225	3.000	3.114
	Pravý	4.264	3.649	3.062	2.892	6.948	4.561	2.615	2.004		Pravý	5.893	3.228	3.671	3.014	5.037	3.864	3.282	2.679

Tabulka 4.3: Odhady koeficientu těžkosti chvostu výnosů vybraných akcií BCPP počítané klasickým Hillovým odhadem pro různě velké prahy. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace.

Kapitola 5

Aplikace modelů odvozených z třídy ARCH na Burzu cenných papírů Praha

5.1 Úvod

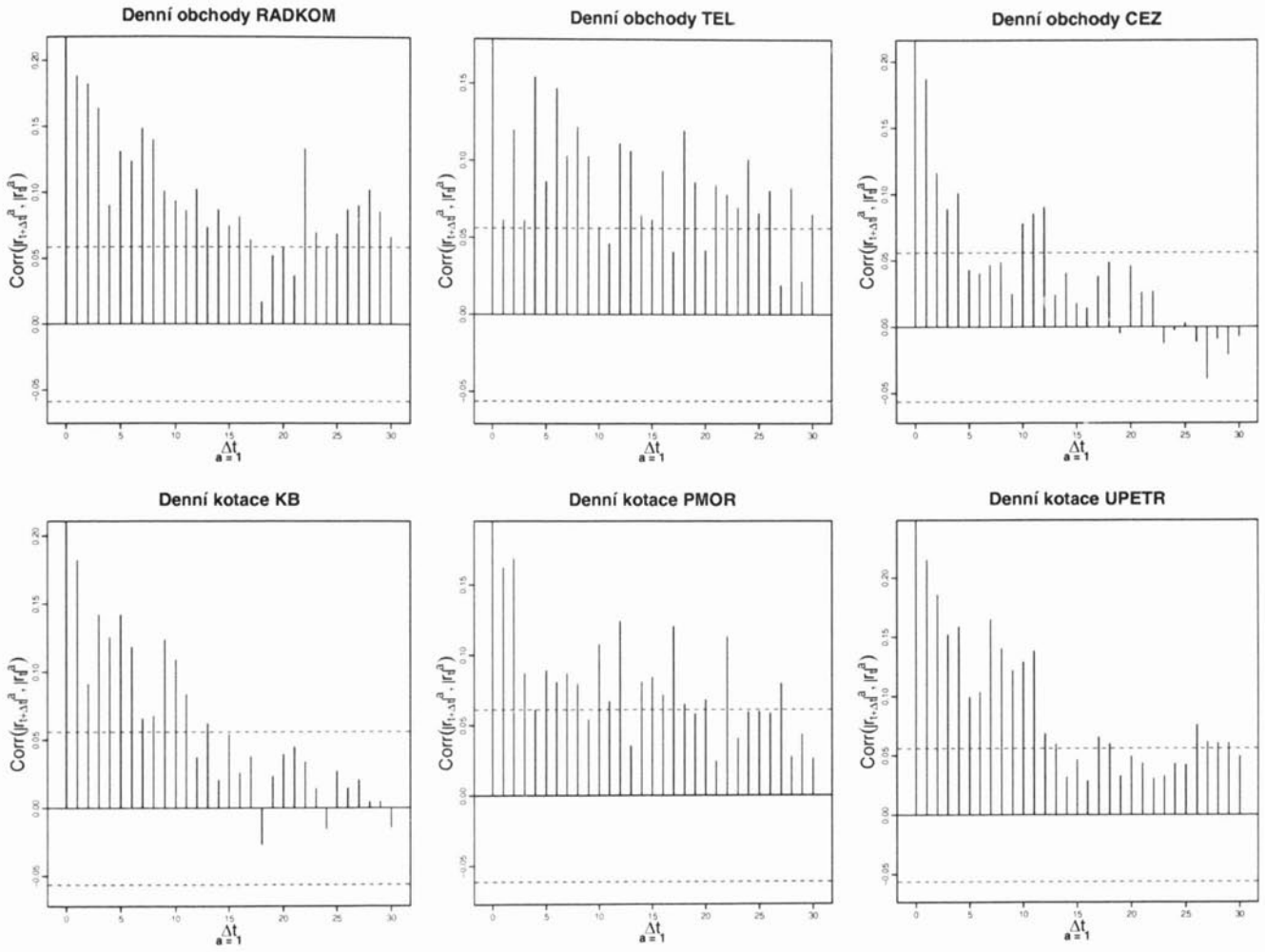
V předcházejících částech textu jsme zkoumali některé z obecných vlastností BCPP. V kapitole 3 jsme prokázali, že klasický model náhodné procházky definovaný v (3.3), který předpokládá, že výnosy jsou i.i.d. náhodné veličiny, je až příliš restriktivní. Proto je třeba pracovat s modelem RW3, kde předpokládáme pouze nekorelovanost výnosů a navíc jejich rozdělení není v čase invariatní. Dále jsme ukázali, že rozdělení našich dat má svojí povahou velmi daleko k rozdělení normálnímu, konkrétněji je podstatně špičatější a má těžší chvosty, viz kapitola 4 a tabulky 4.1, 4.2 a 4.3. Jak bylo poznamenáno, tyto rysy byly pozorovány pro mnoho jednotlivých akcií, akciových indexů a měnových kurzů napříč různými finančními trhy po celém světě. Proto již od počátku šedesátých let je v literatuře zřetelná snaha, např. v Mandelbrot [1963], toto chování vhodně popsat a modelovat, což vzhledem k výše uvedenému vylučuje použití normálního rozdělení a asymptotické teorie předpokládající i.i.d. náhodné veličiny.

V poslední době se staly velmi populárními takzvané ARCH modely, viz Engle [1982]. Ty se snaží popsat další z typických vlastností výnosů akcií, kterou je korelovanost některých jejich nelineárních funkcí jako jsou absolutní hodnota nebo čtverec, viz Cont [2001]. Tento jev je běžně nazýván *zřetězením volatility* (*volatility clustering*), což v praxi znamená, že větší výkyvy ve vývoji cen budou následovány dalšími velkými výkyvy. Jednou z přirozených metod, jak toto prokázat, je vykreslení korelogramů absolutních hodnot nebo čtverců výnosů. Z obrázku 5.1 je persistence lineární závislosti absolutních hodnot výnosů jasně patrná a to až do řádů několika desítek.[1] ARCH a z nich vycházející GARCH modely, které byly poprvé zavedeny v článku Bollerslev [1986], se právě tuto vlastnost pokoušejí modelovat, viz sekce 5.2.

Další z klasických jevů na finančních trzích je tzv. *leverage effect*[2], o němž je první zmínka v Black [1976]. Podstatou tohoto problému je přirozená úvaha: „špatná zpráva", tj. pokles ceny, má na volatilitu aktiva mnohem větší vliv než „zpráva dobrá", tj. růst ceny. Kvantifikací tohoto

[1] Intervalové odhady jsou uvedeny za předpokladu normality výnosů akcií, viz dále.

[2] V textu budeme používat tohoto anglického termínu, neboť překlad pákový efekt by mohl být zavádějící.



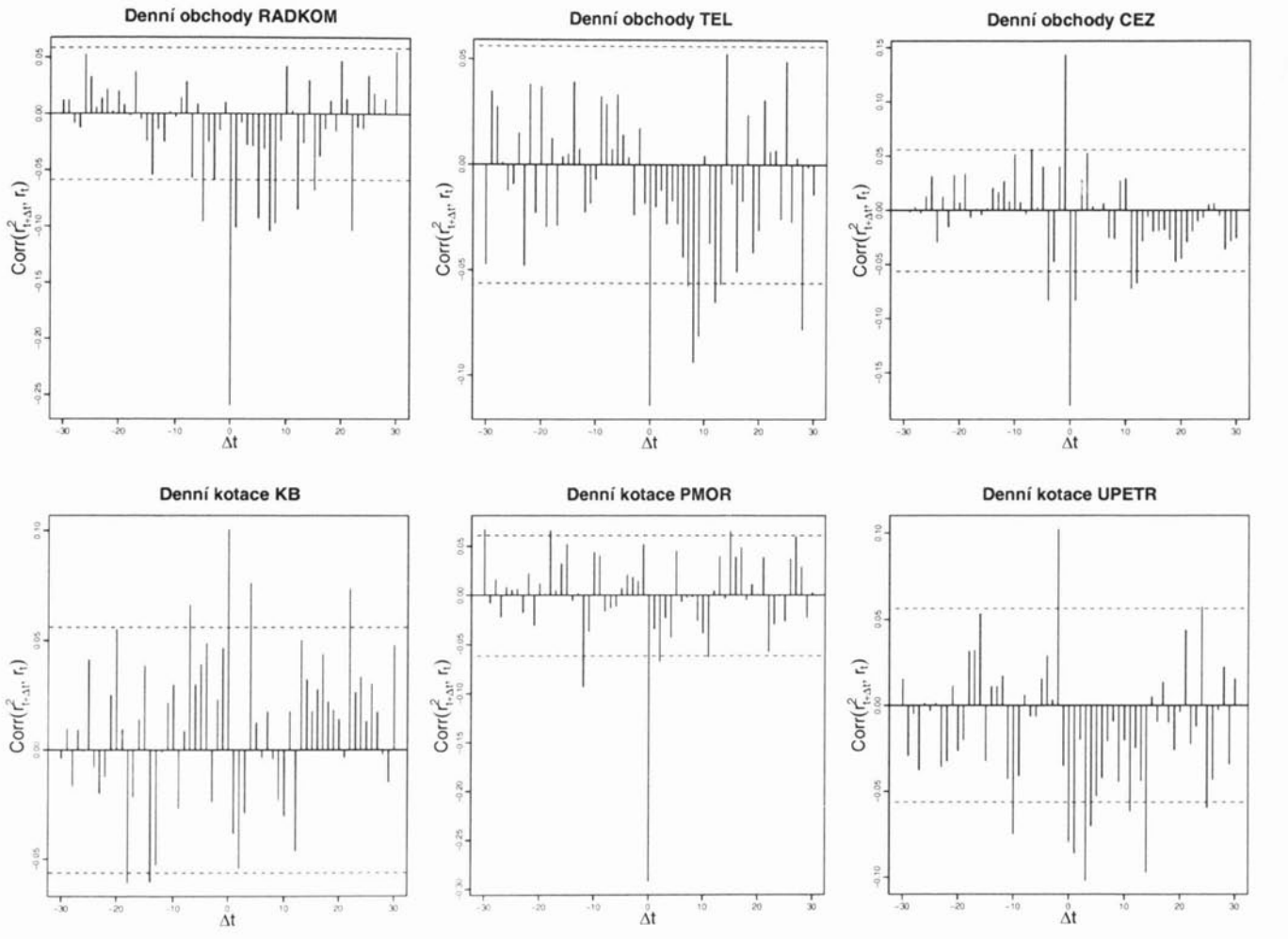
Obrázek 5.1: Autokorelace absolutních hodnot výnosů pro vybrané obchody a kotace BCPP. Interval spolehlivosti je dán hodnotami $\pm q_{0.975}\frac{1}{\sqrt{T}}$, kde T je počet pozorování a $q_{0.975}$ je příslušný kvantil normálního rozdělení $\mathbf{N}(0,1)$.

jevu se zabývá například článek Engle and Ng [1993], kde je popsán zejména EGARCH model. Dalším modelem zahrnujícím tuto tématiku je APARCH model popsaný například v Luksan et al. [2006]. Bližší specifikaci uvedených modelů vyložíme v sekci 5.2. Jedním z jednoduchých nástrojů jak detekovat leverage efekt u výnosů jednotlivých titulů je spočítat

$$L(\tau) := \mathrm{corr}(r^2_{(t+\tau)}, r_t). \tag{5.1}$$

Jinými slovy je třeba zkoumat, jak reaguje volatilita výnosů reprezentovaná jejich čtverci na znaménko výnosu. Obecně pro $L(\tau)$ definované v (5.1) bylo pozorováno následující chování: pro $\tau \geq 0$ jsou $L(\tau)$ záporné, tedy záporné výnosy vedou k růstu volatility. Pro $\tau < 0$ jsou obecně $L(\tau)$ statisticky nevýznamné od nuly, tedy volatilita nemá na znaménko výnosu vliv, viz Cont [2001]. V tomto článku se pak zmiňuje jeden závažný problém související s interpretací uvedených výsledků. Vzhledem k tomu, že autokorelace byly sestrojeny jako prostředek pro zkoumání lineární závislosti gausovských náhodných veličin, jimiž bezpochyby námi zkoumané

výnosy a ani jejich transformace nejsou, je důležité při interpretaci těchto výsledku býti poněkud obezřetní. Konkrétně v Davis and Mikosch [1999] je ukázáno, že pro náhodné veličiny s těžkými chvosty je sice empirická autokorelační funkce konzistentním odhadem skutečné autokorelační funkce, ale rychlost konvergence je menší než $\sqrt{n}$, což má za následek širší intervalové odhady. Z obrázku 5.2 je patrné, že až na titul KB můžeme pozorovat chování shodné s výše popsaným,



Obrázek 5.2: Leverage efekt výnosů pro vybrané obchody a kotace BCPP. Interval spolehlivosti je dán hodnotami $\pm q_{0.975}\frac{1}{\sqrt{T}}$, kde T je počet pozorování a $q_{0.975}$ je příslušný kvantil normálního rozdělení $\mathbf{N}(0,1)$.

avšak dané intervalové odhady jsou klasické a tedy předpokládající normalitu! Proto je třeba při interpretaci přihlížet k tomu, že skutečné intervaly spolehlivosti mohou být širší, a tím statistická prokazatelnost leverage efektu slabší.

Jedním v současnosti nejdynamičtěji se rozvíjejícím odvětvím je řízení rizika, kde jedny z nejčastějších úloh jsou například zajištění dostatečně velkých rezerv pro krytí určitého portfolia, odhad celkové volatility portfolia nebo nás může zajímat, jakou největší ztrátu může jednotlivý titul zaznamenat v daném časovém intervalu. Pro poslední případ je jeden z nejklasičtějších nástrojů *Value-at-Risk* - VaR. Formální definice VaR na pravděpodobnostní hladině α pro výnos

r_t určitého aktiva je

$$\mathsf{P}(r_t \leq VaR) = \alpha, \tag{5.2}$$

kde předpokládáme spojitost rozdělení výnosů r_t daného aktiva, tedy že ztráta aktiva nebude větší než VaR s pravděpodobností $1 - \alpha$. Jinými slovy: ze 100 realizací výnosů jich 95 nezaznamená ztrátu větší než VaR pro $\alpha = 0.05$. Zjevně hodnota VaR závisí na α, budeme proto po zbytek textu psát VaR_α. Při určování value-at-risk je důležité rozlišovat následující dva případy. Jsme-li v tzv. *dlouhé pozici* (*Long position*), tedy disponujeme podkladovým aktivem, pak nás v risk managementu přirozeně nejvíc zajímá, jakou největší ztrátu můžeme s pravděpodobností α zaznamenat, tj. VaR_α. Naopak tzv. *krátká pozice* (*short position*) znamená, že jsme si aktivum vypůjčili a prodali (na konci půjčky jej budeme muset koupit a vrátit zpět). V tomto případě je pro nás ohrožující růst ceny aktiva, proto je value-at-risk v krátké pozice na hladině α rovna $VaR_{1-\alpha}$. Je také zvykem VaR_α resp. $VaR_{1-\alpha}$ vztahovat k určitému časovému horizontu jako den, týden nebo měsíc. Zajímavá studie, jak modelovat VaR_α resp. $VaR_{1-\alpha}$ pro jednotlivé tituly pomocí ARCH modelů, byla uvedena v článku Giot and Laurent [2003]. Blíže se tomuto tématu budeme věnovat v části 5.4.

Tato kapitola je uspořádána následovně. Nejprve popíšeme často používané modely a jejich teoretické vlastnosti ukážeme na konkrétním příkladu, viz 5.2. Dále v sekcích 5.3 a 5.4 ve stručnosti vyložíme námi používané testy. Poté se budeme zabývat vlastnostmi BCPP jako celku z pohledu ARCH modelování, viz sekce 5.5, a na závěr v sekci 5.6 uvedeme konkrétní modely pro vybrané tituly.

5.2 Popis jednotlivých modelů

Než-li vyložíme parametrizace konkrétních modelů a jejich důležité vlastnosti v sekcích 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 a 5.2.4, zavedeme obecný aparát a terminologii používanou v ARCH modelování. Poznamenejme, že přehled všech námi uváděných modelů lze také nalézt v Laurent and Peters [2002].

Tzv. *meanová rovnice* (*mean equation*) je rovnice tvaru

$$r_t = f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1}) + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

kde r_t je výnos v čase t, $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ je funkce vektoru $\mathbf{p}$ neznámých reálných[3] parametrů a je Ω_{t-1} měřitelná, kde Ω_{t-1} je informační $\sigma - algebra$ do času $t-1$ včetně. Konkrétní specifikace $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ popíšeme v sekci 5.2.1; ϵ_t je chyba předpovědi výnosu r_t na základě $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$, přičemž v ARCH modelování je ϵ_t definováno jako *autoregresivní podmíněný heteroskedastický* (*AutoRegresive Conditional Heteroscedastic* - ARCH Engle [1982]) proces, kde podmiňujeme informační $\sigma - algebrou$ Ω_{t-1}. Proces ϵ_t dále splňuje

$$\epsilon_t = z_t\sigma_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.4}$$

$$z_t \sim \Psi(0,1), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.5}$$

$$\sigma_t = h(\pi|\Omega_{t-1}), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.6}$$

[3]Pro některé specifikace $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ mohou být na parametry vektoru $\mathbf{p}$ uvaleny další podmínky, viz sekce 5.2.1.

kde z_t jsou i.i.d. náhodné veličiny s rozdělením Ψ s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Námi používané volby Ψ jsou uvedeny v sekci 5.2.3; $h(\pi|\Omega_{t-1})$ je funkce vektoru neznámých reálných[4] parametrů π a je Ω_{t-1} měřitelná, kde Ω_{t-1} je informační $\sigma - algebra$ do času $t-1$ včetně. Různé specifikace $h(\pi|\Omega_{t-1})$ jsou probrány v části 5.2.2. V dalším budeme předpis (5.6) nazývat variační rovnicí (*variance equation*).

Z požadavků (5.4), (5.5) a (5.6) uvalených na proces ϵ_t bezprostředně plyne, že $\mathsf{E}\epsilon_t = 0$, $\mathsf{E}\epsilon_t\epsilon_{t+\tau} = 0$ pro $\forall\tau \neq 0$, $\mathsf{E}(\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}) = \sigma_t^2$ tedy podmíněný rozptyl chybového členu se v čase mění, ale rozptyl $\sigma^2 := \mathsf{E}\epsilon_t^2$ je v čase invariantní.

5.2.1 Meanová rovnice

Nejdéle používanou specifikací $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ je klasický ARMA(m,n) model, kdy v (5.3) je

$$f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1}) = \mu + \sum_{i=1}^{m} a_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \epsilon_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{p} = (\mu, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)' \in \mathbb{R}^{1+m+n}$. Poznamenejme, že použití ARMA modelu v meanové rovnici je korektní vůči vlastnostem chybového členu ϵ_t plynoucím z (5.4), (5.5) a (5.6). Celou rovnici (5.3) lze pohodlněji zapsat pomocí lag operátoru L jako

ARMA(m,n)

$$r_t = \mu + a(L)r_t + (1 + b(L))\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

nebo jako

$$(1 - a(L))r_t = \mu + (1 + b(L))\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.7}$$

kde

$$\begin{aligned} Lr_t &= r_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ L\epsilon_t &= \epsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ a(x) &= a_1 x + \ldots + a_m x^m, \quad m > 0, \\ b(x) &= b_1 x + \ldots + b_n x^n, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Jsou-li všechny kořeny polynomu $1 - a(x)$ vně jednotkového kruhu, pak říkáme že je proces r_t *kauzální* a z rovnice (5.7) plyne, že $\mathsf{E}r_t = (1 - a(L))^{-1}\mu$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Jsou-li všechny kořeny polynomu $1 + b(x)$ vně jednotkového kruhu, pak říkáme že je proces r_t *invertibilní*.

Rovnici (5.7) lze dále rozšířit přidáním $s \in \mathbb{N}$ vysvětlujících proměnných $x_{i,t}$ pro $i = 1, \ldots, s$, $t \in \mathbb{Z}$, což vede na model

ARMAX(m,n,s)

$$\begin{aligned} (1 - a(L))(r_t - \mu_t) &= (1 + b(L))\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ \mu_t &= \mu + \sum_{i=1}^{s} c_i x_{i,t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

[4] Pro některé specifikace $h(\pi|\Omega_{t-1})$ mohou být na parametry vektoru π uvaleny další podmínky například nezápornost, viz sekce 5.2.2.

kde $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, s$; pro $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ je $\mathbf{p} = (\mu, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s)' \in \mathbb{R}^{1+m+n+s}$. Jsou-li všechny kořeny polynomu $1 - a(x)$ vně jednotkového kruhu, pak je $\mathsf{E}r_t = \hat{\mu} + \sum_{i=1}^{s} \hat{c}_i x_{i,t}$, tedy střední hodnota procesu výnosů r_t se mění v čase v závislosti na vysvětlujících proměnných.

V případě přítomnosti dlouhodobé závislosti, například jsou-li v autokorelační struktuře rozprostřeny statisticky významné autokorelace s velkými odstupy, je třeba tento jev v modelu zohlednit, což můžeme provést upravením specifikace (5.7) na model
ARFIMA(m,ζ,n,s)

$$(1 - L)^{\zeta}(1 - a(L))r_t = \mu + (1 + b(L))\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.9}$$

kde pro $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ je $\mathbf{p} = (\mu, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, \zeta)' \in \mathbb{R}^{2+m+n}$. Podrobnější popis a vlastnosti tohoto modelu lze nalézt v Campbell et al. [1996]. Podobně z (5.8) lze dlouhodobou závislost modelovat specifikací
ARFIMAX(m,ζ,n)

$$\begin{aligned}(1 - L)^{\zeta}(1 - a(L))(r_t - \mu_t) &= (1 + b(L))\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ \mu_t &= \mu + \sum_{i=1}^{s} c_i x_{i,t}, \quad t \in \mathbb{Z},\end{aligned} \tag{5.10}$$

kde v $f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1})$ je $\mathbf{p} = (\mu, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s, \zeta)' \in \mathbb{R}^{2+m+n+s}$. Souhrnné pojednání o modelech ARFIMA a ARFIMAX leze nalézt v článku Baillie [1996].

5.2.2 Variační rovnice

Jak již bylo řečeno výše, konkrétní podobu modelu spoluurčuje předpis pro $h(\pi|\Omega_{t-1})$ z (5.6). Jeho nejzákladnější specifikací jest model poprvé uvedený v Engle [1982]
ARCH(q)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.11}$$

kde $q \in \mathbb{N}$ a $\pi = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)' \in \mathbb{R}^{1+q}$. Tento model umožňuje popisovat zřetězení volatility zmíněné v úvodu kapitoly. Skutečně, rostou-li v absolutní hodnotě minulé chyby odhadu, tj. docházelo k neočekávaným pohybům modelovaného aktiva, pak z předpisu (5.11) plyne, že se bude zvětšovat i podmíněný rozptyl σ_t^2. Přirozeně požadujeme aby $\sigma_t^2 > 0$ pro všechna $t \in T$, pro což je zřejmě postačující podmínkou $\omega > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q > 0$. Další důležitou vlastností modelu je, že ačkoliv platí

$$\mathsf{E}(\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}) = \sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z},$$

tak

$$\mathsf{E}\epsilon_t^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i} = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z},$$

pro $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$ a $\omega > 0$. Je-li $\mathsf{E}r_t$ konstantní pro všechna $t \in \mathbb{Z}$, což závisí na specifikaci modelu v meanové rovnici, pak podmínky $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$ a $\omega > 0$ nám zaručují slabou stacionaritu procesu výnosů r_t, neboť při jejich splnění jsou druhé momenty procesu r_t dobře definované a konečné a z podmínek (5.4), (5.5) a (5.6) pro náhodnou veličinu ϵ_t plyne, že autokorelační funkce výnosů r_t je pouze funkcí rozdílu. V případě, že $\mathsf{E}r_t$ není v čase konstantní, pak podmínky $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$ a $\omega > 0$ nám zaručují pouze kovarianční stacionaritu procesu r_t. Tato vlastnost je podrobněji ukázána jako speciální případ v sekci 5.2.4. Je jasné, že tento model zohledňuje minulá pozorování pouze o q kroků zpět. Toto vylepšuje model popsaný v Bollerslev [1986]

GARCH(p,q)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.12}$$

odkud je patrné, že postačující podmínkou kladnosti podmíněného rozptylu σ_t^2 je $\omega, \beta_1, \ldots, \beta_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q > 0$. Ekvivalentně může být tento model zapsán jako

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta(L)\sigma_t^2 + \alpha(L)\epsilon_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.13}$$

kde $p, q \in \mathbb{N}$, $\pi = (\omega, \alpha_1 \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p)' \in \mathbb{R}^{1+q+p}$ a

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_1 x + \ldots + \alpha_q x^q, \quad q > 0, \\ \beta(x) &= \beta_1 x + \ldots + \beta_p x^p, \quad p > 0. \end{aligned}$$

Leží-li všechny kořeny polynomu $1 - \beta(x)$ mimo jednotkový kruh, lze výraz (5.13) přepsat na

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta(L))^{-1}\omega + (1 - \beta(L))^{-1}\alpha(L)\epsilon_t^2, \quad t \in \mathbb{Z},$$

což lze pak chápat jako model ARCH(∞), protože podmíněný rozptyl je pak lineární funkcí všech čtverců chyb. Podobně jako u ARCH modelu platí, že

$$\mathsf{E}\epsilon_t^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i} = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}$$

pro $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$ a $\omega > 0$. Tyto podmínky zaručují analogicky jako v případě ARCH modelu buď slabou, nebo alespoň kovarianční stacionaritu procesu výnosů r_t.

V úvodu této kapitoly jsme také zmiňovali tzv. leverage efekt a je jasné vzhledem k čtvercům chyb v (5.11) i (5.12), že modely ARCH ani GARCH neumí zmiňovaný jev popsat. Proto byly zavedeny modely EGARCH a APARCH, které již tento nedostatek řeší. První z nich má předpis

EGARCH(p,q)

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L))^{-1}(1 + \alpha(L))g(z_{t-1}), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.14}$$

kde

$$g(z_t) = \gamma_1 z_t + \gamma_2(|z_t| - \mathsf{E}|z_t|), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{5.15}$$

a $\pi = (\omega, \alpha_1 \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2)' \in \mathbb{R}^{3+q+p}$.

Tento model byl zaveden v článku Nelson [1991], kde autor tvar $g(z_t)$ zdůvodnil slovy:

„... k zavedení asymetrického vztahu mezi výnosem akcie a změnou volatility (...) musí být hodnota $g(z_t)$ jak funkcí velikosti, tak i znaménka z_t"

První člen v (5.15) zřejmě představuje znaménkový efekt a druhý člen pak efekt velikosti pohybu. Poznamenejme, že v EGARCH specifikaci variační rovnice je podmíněný rozptyl stále kladný.

Druhý jmenovaný model se řídí rovnicí

APARCH(p,q)

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^\delta, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.16}$$

kde $\pi = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_q, \delta, \beta_1, \ldots, \beta_p)' \in \mathbb{R}^{2+2q+p}$, přičemž $\delta > 0$ a $\gamma_i \in (-1, 1)$ pro $\forall i$. Podobně jako u modelů ARCH a GARCH je

$$\mathsf{E}\sigma_t^\delta = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{i=1}^{p} \beta_i}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

pro $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$ a $\omega > 0$. Tyto podmínky zajišťují slabou nebo kovarianční stacionaritu procesu výnosů r_t, viz diskuse stacionarity při zavedení ARCH modelu. Rozeberme chování modelu APARCH specifikovaného v (5.16) poněkud blíže. Modelování leverage efektu je zajišťováno výrazem $(|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})$. Parametr δ slouží k transformaci procesu podmíněného rozptylu podobně jako Box-Coxova transformace v lineární regreresi. Povšimněme si, že APARCH model pro $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, q$ přechází na GARCH model. Ve skutečnosti je parametrizace APARCH(p,q) schopna pokrýt další používané specifikace variační rovnice. Toto je podrobněji vyloženo v Luksan et al. [2006].

Podobně jako v odstavci 5.2.1 lze do variační rovnice zahrnout vysvětlující proměnné. Případně modelovat dlouhodobý vliv pozorovaní, čímž bychom dostali modely FIARCH, FIGARCH, FIEGARCH, FIAPARCH. Podrobnosti jsou uvedeny v článku Laurent and Peters [2002].

5.2.3 Rozdělení podmíněného rozptylu

Nyní stručně uvedeme nejpoužívanější volby rozdělení Ψ zavedeného v (5.5). V dnešní době se nejčastěji používá normální, Studentovo a *zobecněné chybové rozdělení* (*Generalized Error Distribution* - GED), viz Luksan et al. [2006]. V předpisu (5.5) pro chování chybového procesu ϵ_t se požaduje, aby rozdělení náhodných veličin z_t mělo nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Pro volbu normálního rozdělení je hustota z_t dána předpisem

Normální(0,1)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big), \quad z \in \mathbb{R}.$$

V odstavci 5.2.4 ukážeme, že normální rozdělení náhodných veličiny z_t přisuzuje výnosům r_t rozdělení se špičatostí větší než tři, což je špičatost normálního rozdělení. Tento fakt částečně odpovídá na otázku, proč se toto rozdělení v ARCH modelování stále používá. Jak se ale v mnoha studiích ukázalo, pro drtivou většinu titulů na finančních trzích nejsou chvosty výnosů za požití normálního rozdělení dostatečně těžké, což bylo motivací pro použití Studentova nebo GED rozdělení[5] s parametrem špičatosti ν.

Problémem však je, že klasické Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti má sice nulovou střední hodnotu, ale jeho rozptyl je pro $\nu > 2$ roven $\frac{\nu}{\nu-2}$, avšak pro náhodné veličiny z_t jsme v podmínce (5.5) požadovali nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl, proto bylo potřeba zavést takzvané standardizované Studentovo rozdělení. Dále budeme Studentovým rozdělením rozumět právě standardizované Studentovo rozdělení, jehož hustota je dána vztahem

Studentovo(0,1,ν)

$$f(z;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\pi(\nu-2))}\Gamma(\frac{\nu}{2})\left(1+\frac{z^2}{\nu-2}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu}}}, \quad z \in \mathbb{R}, \nu > 0,$$

kde $\Gamma(\cdot)$ označuje gamma funkci. Provedeme-li transformaci $z \mapsto \frac{z}{\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}}$, dostáváme hustotu klasického Studentova rozdělení o ν stupních volnosti. Pro Studentovo rozdělení lze špičatost vyjádřit jako čtvrtý necentrální moment, neboť střední hodnota tohoto rozdělení je nulová a rozptyl roven jedné, přičemž

$$\mathsf{E}z^4 = \frac{6}{\nu-4} + 3, \quad \nu > 4.$$

Tedy Studentovo rozdělení má konečný čtvrtý moment pro $\nu > 4$, podobně jako klasické Studentovo rozdělení. Odtud je zřejmé, že ν se může pokládat za parametr špičatosti. Dodejme, že šikmost Studentova rozdělení je rovná nule, což je důsledkem jeho symetričnosti okolo nuly.

Nakonec uveďme formuli pro standardizované GED rozdělení

GED(0,1,ν)

$$f(z) = \frac{\nu}{\lambda_\nu 2^{1+\frac{1}{\nu}}\Gamma(\frac{1}{\nu})} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{|z|}{|\lambda_\nu|}\right)^\nu\right), \quad z \in \mathbb{R}, \nu > 0,$$

kde

$$\lambda_\nu = \left(\frac{2^{-\frac{2}{\nu}}\Gamma(\frac{1}{\nu})}{\Gamma(\frac{3}{\nu})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nadále budeme o standardizovaném GED rozdělení mluvit pouze jako o GED rozdělení. Vzhledem k tomu, že i toto rozdělení je symetrické okolo nuly, je jeho šikmost nulová, přičemž jeho špičatost závisí podobně jako v minulém případě pouze na parametru ν a lze ji tedy vyjádřit vztahem

$$\mathsf{E}z^4 = \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})\Gamma(\frac{5}{\nu})}{\Gamma(\frac{3}{\nu})^2}. \tag{5.17}$$

[5]Oproti normálnímu má standardizované Studentovo rozdělení těžší chvosty pro $\forall\nu > 1$ a standardizované GED rozdělení pro $\nu < 2$. Viz dále.

Poznamenejme, že pro $\nu = 1$ se GED rozdělení redukuje na Laplaceho rozdělení jehož hustota je rovna $f(z) = \frac{\exp(-\sqrt{2}|z|)}{\sqrt{2}}$, přičemž špičatost je z (5.17) rovna šesti. Pro $\nu = 2$ splývá GED rozdělení s normálním.

U Studentova a GED rozdělení se často zavádí ještě parametr šikmosti rozdělení, označme ho ξ. Podle Fernández and Steel [1998] je pro hustotu $f(\cdot)$ každého spojitého symetrického unimodálního[6] rozdělení parametr šikmosti možno zavést předpisem

$$f(z;\xi) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left(f(\xi z) H(-z) + f\left(\frac{z}{\xi}\right) H(z) \right),$$

kde $0 < \xi < \infty$ a $H(z) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{sign}(z))$. Aby takto vytvořené rozdělení mělo opět nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl je nutné provést jeho standardizaci podobně jako u Studentova rozdělení výše. Podrobnosti v uvedeném článku nebo v Luksan et al. [2006].

5.2.4 Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1)

Předtím, než se podíváme na konkrétní výsledky pro naše data, dlužíme některá odvození z předcházejících odstavců, navíc může být užitečné si výše uvedené vyložit na konkrétním modelu. Jedním z nejčastěji používaných modelů je model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1), kde C(·,·) značí přítomnost (1) či nepřítomnost (0) parametru μ resp. ω v meanové resp. variační rovnici. Tento model našel koneckonců hojné uplatnění i na datech BCPP. Prozatím ponechme stranou typ podmíněného rozdělení. Pro tuto specifikaci má meanová rovnice tvar

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{5.18}$$

a pro podmíněný rozptyl σ_t^2 máme ve variační rovnici zápis

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.19}$$

Dosazením předpisu pro ϵ_t v (5.4) do (5.19) dostáváme

$$\sigma_t^2 = \omega + (\beta + \alpha z_{t-1}^2)\sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.20}$$

Z předpisu (5.20) plyne, že σ_t^2 je funkcí náhodných veličin z_{t-i} pro $i = 1, \ldots, \infty$ a proto díky nezávislosti náhodných veličin z_t můžeme psát

$$\mathsf{E}(z_t^2\sigma_t^2) = \mathsf{E}z_t^2\mathsf{E}\sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.21}$$

Nyní za použití (5.20) a (5.21) počítejme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\sigma_t^2 &= \omega + (\beta + \alpha\mathsf{E}z_{t-1}^2)\mathsf{E}\sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + (\beta + \alpha)\mathsf{E}\sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

[6] viz Anděl [2005] str. 157

Nyní spočítejme momenty výnosů r_t. Dosazením (5.4) do (5.18) dostáváme

$$\mathsf{E}r_t = \mu + \mathsf{E}\sigma_t z_t = \mu + \mathsf{E}\sigma_t \mathsf{E}z_t = \mu, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.23}$$

Za použití (5.22) máme

$$\sigma^2 = \mathsf{Var}r_t = \mathsf{E}\sigma_t^2 z_t^2 = \mathsf{E}\sigma_t^2 \mathsf{E}z_t^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{5.24}$$

pro $\alpha + \beta < 1, \omega > 0$. Pro tyto podmínky je proces výnosů r_t slabě stacionární, neboť $\mathsf{E}r_t = \mu$, druhé momenty r_t jsou konečné a dobře definované a předpoklady na autokorelační funkci r_t jsou splněny z podmínek (5.4), (5.5) a (5.6) na náhodné veličiny ϵ_t. Pro výpočet špičatosti výnosů užitím (5.22) a (5.24) nejprve spočtěme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\sigma_t^4 &= \omega^2 + 2\omega\mathsf{E}(\alpha z_{t-1}^2 + \beta)\sigma_{t-1}^2 + \mathsf{E}(\alpha z_{t-1}^2 + \beta)^2\sigma_{t-1}^4 \\
&= 2\omega\Big(-\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\Big) + \Big(\alpha^2\mathsf{E}z_{t-1}^4 + 2\alpha\beta + \beta^2\Big)\mathsf{E}\sigma_{t-1}^4 \\
&= \omega^2\frac{1+\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} + \Big(\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4 - 1) + (\alpha+\beta)^2\Big)\mathsf{E}\sigma_{t-1}^4 \\
&= \frac{\omega^2\frac{1+\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}{1-\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4 - 1) - (\alpha+\beta)^2}, \quad t \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

pro $\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4 - 1) + (\alpha+\beta)^2 < 1$. Celková špičatost procesu výnosů r_t je užitím (5.25) rovna

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\frac{(r_t-\mu)^4}{\sigma^4} &= \frac{\mathsf{E}z_t^4\mathsf{E}\sigma_t^4}{\sigma^4} \\
&= \mathsf{E}z_t^4\frac{\frac{\omega^2\frac{1+\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}{1-\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4-1)-(\alpha+\beta)^2}}{\frac{\omega^2}{(1-\alpha-\beta)^2}} \\
&= \mathsf{E}z_t^4\frac{1-(\alpha+\beta)^2}{1-\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4-1)-(\alpha+\beta)^2}, \quad t \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

kde $\alpha^2(\mathsf{E}z_{t-1}^4 - 1) + (\alpha+\beta)^2 < 1$. Tato podmínka zaručuje konečnost a existenci čtvrtých momentů procesu výnosů. Je-li špičatost r_t dobře definována, pak je zlomek v poslední rovnosti v (5.26) vždy větší než jedna a tedy špičatost výnosů r_t bude vždy větší než u z_t pro každé $t \in \mathbb{Z}$. Pro ilustraci uveďme příklad pro $\alpha = 0.1$ a $\beta = 0.8$.[7] Z tabulky 5.1 je jasně patrné, že výsledná špičatost u r_t je znatelně vyšší než ta u z_t.

5.3 Statistické testy zkoumající správnost volby modelu

V tomto odstavci se seznámíme s testy zkoumajícími vhodnost odhadnutého modelu. Účelem tohoto odstavce však není podat vyčerpávající popis jednotlivých testů, ale spíše naznačit nejdůležitější kroky při konstrukci testu a pro jaký konkrétní problém se daná testová statistika v

[7] Tyto hodnoty parametrů jsou v softwarech R i Ox implicitně použity k nastartování výpočetních algoritmů.

	Normální	Studentovo	Studentovo	GED	GED
ν	0	5	6	1	1.5
Špičatost z_t	3	9	6	6	3.76
Špičatost r_t	3.35	15.54	8.14	8.14	4.40

Tabulka 5.1: Porovnání šikmostí náhodných veličin z_t a r_t v modelu C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro $\alpha = 0.1$ a $\beta = 0.8$.

ARCH modelování používá. Poznamenejme ještě, že všechny uvedené testy jsou zahrnuty v balíku G@RCH 4.2 pro Ox, přičemž balík fSeries pro R má zabudovány pouze testy uvedené v části 5.3.1.

5.3.1 Testy reziduí

V odstavci 3.1.1 jsme zavedli Portmanteauovu statistiku Q_m, která se používala k testování nulovosti autokorelací řady y_t, konkrétněji jsme na hladině α uvažovali hypotézu $\mathbf{H_0} : \rho(k) = 0$ pro $k > 0$ s alternativou $\mathbf{H_1} : \rho(k) \neq 0$, kde $\rho(k)$ je k-tá autokorelace řady y_t. Z rovnice (5.4) pro chyby ϵ_t plyne, že standardizované chyby $v_t := \frac{\epsilon_t}{\sigma_t}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny s rozdělením $\Psi(0,1)$, a proto by jejich autokorelace, dokonce i autokorelace jejich libovolných mocnin v_t^i, kde $i \in \mathbb{N}$, měly být statisticky nulové. Pro zvýšení síly testu se často používá následující transformace standardizovaných chyb v_t

$$v_t^N := \Phi^{-1}(F(v_t)),$$

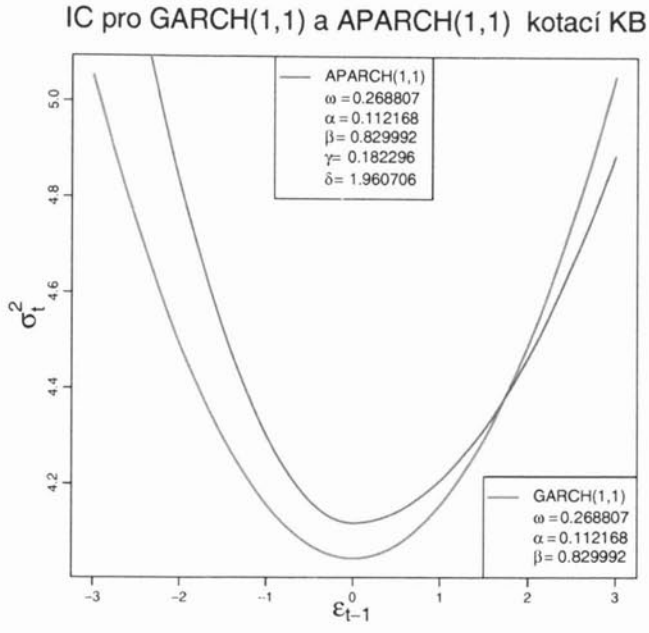
kde Φ^{-1} je kvantilová funkce normálního rozdělení $\mathbf{N}(0,1)$ a F je distribuční funkce rozdělení $\Psi(0,1)$. Test za použití statistiky Q_m na znormalizovaná standardizovaná rezidua v_t^N pak slouží k detekci špatné specifikace modelu v meanové rovnici, viz Palm and Vlaar [1997]. Aplikace statistiky Q_m na čtverce v_t^N vede na test pomáhající odhalit problém při specifikaci variační rovnice, viz Laurent and Peters [2002].

5.3.2 Testy založené na Impact curve

Tyto testy se snaží detekovat jestli je v modelu dobře zahrnut leverage efekt. Myšlenka této třídy testů vychází z tzv. *Impact curve - IC* viz Engle and Ng [1993]. IC je křivka zkoumající závislost podmíněného rozptylu v čase t na chybě předpovědi o krok zpět. Na obr. 5.3 je jasně patrné, že GARCH model má tuto křivku symetrickou, tedy „špatná zpráva" (pokles ceny aktiva) má na podmíněný rozptyl stejný vliv jako „zpráva dobrá" (růst ceny aktiva), přičemž podmíněný rozptyl σ_t^2 roste kvadraticky jako funkce chyb ϵ_{t-1}. Na druhé straně pro APARCH model vidíme, že „špatná zpráva" má na podmíněný rozptyl větší vliv než „dobrá zpráva", což je způsobeno kladnou hodnotou odhadu parametru γ. Není-li znaménko odhadu parametru γ kladné, pak nastává zřejmě opačný efekt. Konkrétní předpisy pro impact curve jsou

$$IC_{GARCH(1,1)}(\epsilon_{t-1}) = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma^2. \quad (5.27)$$

$$IC_{APARCH(1,1)}(\epsilon_{t-1}) = (\omega + \alpha(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1})^\delta + \beta\sigma^\delta)^{\frac{2}{\delta}}. \quad (5.28)$$



Obrázek 5.3: IC pro denní kotace výnosů Komerční banky, které jsou dány vztahy (5.27) a (5.28).

Na základě těchto vlastností IC byly odvozeny následující diagnostické testy. *Test vychýlení znaménka (Sign Bias test)* zkoumá vliv znaménka chyby na variační rovnici konstruovaného modelu. *Testy negativního* resp. *pozitivního vychýlení ve velikosti* (*Negative* resp. *Positive Size Bias Test*) zkoumají vliv záporných resp. kladných chyb na variační rovnici. A nakonec test zkoumající všechny tři uvedené vlivy zároveň (*Joint Test*). Podrobnosti o konstrukci těchto testů a jejich modifikace jsou uvedeny v Engle and Ng [1993].

5.3.3 Test dobré shody

Testy dobré shody porovnávají empirické rozdělení standardizovaných chyb $v_t := \frac{\epsilon_t}{\sigma_t}$ s teoretickým rozdělením $\Psi(0,1)$, což je provedeno rozdělením odhadů standardizovaných chyb $\hat{v}_t$ pro $t = 1, \ldots, T$, kde T je celkový počet pozorování, do q skupin a následným porovnáváním jejich četností v jednotlivých skupinách s četnostmi teoretickými. K tomuto účelu se používá Pearsonova statistika

$$P(q) = \sum_{i=1}^{q} \frac{(n_i - \mathsf{E}n_i)^2}{\mathsf{E}n_i},$$

kde n_i je pozorovaný počet odhadů standardizovaných chyb $\hat{v}_t$ v i-té skupině a $\mathsf{E}n_i$ je jejich teoretická střední četnost pro $i = 1, \ldots, q$. V našem případě jsou n_i konstruována následovně

$$n_i = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{I}\left\{ \frac{i-1}{q} < F(v_t; \hat{\theta}) \leq \frac{i}{q} \right\}, \quad 1 \leq i \leq q, \tag{5.29}$$

kde $\mathbf{I}\{\cdot\}$ je nula-jedničkový indikátor a F je distribuční funkce rozdělení $\Psi(0,1)$. Pro empirické četnosti n_i definované v (5.29) jsou teoretické četnosti $\mathsf{E}n_i = \frac{T}{q}$. Rozdělení testové statistiky $P(q)$ závisí na tom, zda-li pokládáme naše odhady parametrů modelu za jejich skutečné hodnoty - v takovém případě má testová statistika $P(q) \overset{a}{\sim} \chi^2(q-1)$. Pokud výše uvedené nepředpokládáme, pak má testová statistika $P(q) \overset{a}{\sim} \chi^2(q-1-k)$, kde k je počet odhadovaných parametrů v modelu, viz Anděl [2005]. V článku Palm and Vlaar [1997] se uvádí zpřesnění, že distribuční funkce asymptotického rozdělení testové statistiky $P(Q)$ je sevřena mezi distribučními funkcemi rozdělení $\chi^2(q-1-k)$ a $\chi^2(q-1)$. My proto uvádíme p-hodnoty testu pro $\chi^2(q-1-k)$ i $\chi^2(q-1)$.

5.3.4 Nyblomův test

Nyblomův test zkoumá stálost odhadnutých parametrů v modelu vzhledem k celému datovém souboru. To je prováděno porovnáním sdružených hustot časově uspořádaných pozorovaní $x_1, \ldots, x_T$ závisejících na vektoru parametrů θ, kde T je celkový počet pozorování, přičemž předpokládáme pro jednu hustotu konstantní chování vektoru θ odhadovaných parametrů a pro druhou předpokládáme, že se vektor parametrů θ chová jako martingal. Vzhledem k složitosti konstrukce celého testu odkazujeme na článek Nyblom [1989] s konstatováním, že asymptotické kritické hodnoty testové statistiky Nyblomova testu, zkoumáme-li stálost pouze jednoho parametru, jsou na 5% resp. 1% hladině spolehlivosti rovny 0.45 resp. 0.75.

5.4 Statistické testy zkoumající vhodnost odhadnutého modelu pro predikci value-at-risk

Zde, jak jsme již předeslali v úvodu celé kapitoly, vyložíme použití ARCH modelů pro modelování value-at-risk. Pro dané aktivum mějme proces výnosů r_t a pro něj některý z modelů třídy ARCH. Nás bude zajímat value-at-risk pro jeden krok dopředu, označme tuto náhodnou veličinu jako $VaR_{\alpha;t}$ pro dlouhou pozici a $VaR_{1-\alpha;t}$ pro krátkou pozici. Náhodná veličina $VaR_{\alpha;t}$ je definována jako

Dlouhá pozice

$$VaR_{\alpha;t} = f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1}) + \sigma_t q_{\alpha,\hat{\xi},\hat{\nu}}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.30}$$

Podobně je definována i náhodná veličina $VaR_{1-\alpha;t}$

Krátká pozice

$$VaR_{1-\alpha;t} = f(\mathbf{p}|\Omega_{t-1}) + \sigma_t q_{1-\alpha,\hat{\xi},\hat{\nu}}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.31}$$

kde $q_{\alpha,\hat{\xi},\hat{\nu}}$ je α kvantil rozdělení $\Psi(0,1;\hat{\xi},\hat{\nu})$, přičemž $\hat{\xi}$ a $\hat{\nu}$ jsou odhadnuté parametry šikmosti a špičatosti rozdělení Ψ. Pochopitelně nás zajímá, do jaké míry jsou náhodné veličiny definované v (5.30) a (5.31) určující, tj. má-li smysl daný model pro modelování value-at-risk vůbec používat. K tomuto účelu použijeme dva následující testy.

5.4.1 Kupiec LR test

Jsou-li náhodné veličiny $VaR_{\alpha;t}$ a $VaR_{1-\alpha;t}$ určené našim modelem relevantní, pak počet výnosů r_t menších než $VaR_{\alpha;t}$ by měl odpovídat hodnotě $T\alpha$, kde T je celkový počet pozorování. Analogicky počet výnosů r_t větších než $VaR_{1-\alpha;t}$ by měl také odpovídat hodnotě $T\alpha$. Proto definujme tzv. *míru překročení v dlouhé pozici* na hladině α jako

$$p_{\alpha;l} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{I}\{r_t < VaR_{\alpha;t}\}.$$

Podobně *míru překročení v krátké pozici* na hladině α definujme jako

$$p_{\alpha;s} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{I}\{r_t > VaR_{1-\alpha;t}\}.$$

Dále bude předpokládat hypotézu

$$H_0 : p_{\alpha;l} = \alpha \text{ proti } \quad H_1 : p_{\alpha;l} \neq \alpha \tag{5.32}$$

resp.

$$H_0 : p_{\alpha;s} = \alpha \text{ proti } \quad H_1 : p_{\alpha;s} \neq \alpha. \tag{5.33}$$

V Kupiec [1995] je uvedeno, že testová statistika toho testu, označme ji LR, má za platnosti hypotézy (5.32) resp. (5.33) asymptoticky rozdělení $\chi^2(1)$, přičemž LR je definováno jako

$$LR = -2\ln\left(\alpha^N(1-\alpha)^{T-N}\right) + 2\ln\left(\hat{\alpha}^N(1-\hat{\alpha})^{T-N}\right), \tag{5.34}$$

kde $\hat{\alpha} = p_{\alpha;l}$ resp. $\hat{\alpha} = p_{\alpha;s}$, T je počet pozorování a N je počet překročení value-at-risk, tedy je rovno $Tp_{\alpha;l}$ resp. $Tp_{\alpha;s}$.

5.4.2 Engle and Manganelli test

V článku Giot and Laurent [2003] se uvádí, že v dobrém modelu value-at-risk by měly být náhodné veličiny definované pro dlouhou pozici předpisem

$$\mathrm{Hit}_{\alpha;t} = \mathbf{I}\{r_t < VaR_{\alpha;t}\} - \alpha, \quad t \in \mathbb{Z}$$

a pro krátkou pozici předpisem

$$\mathrm{Hit}_{1-\alpha;t} = \mathbf{I}\{r_t > VaR_{1-\alpha}\} - \alpha, \quad t \in \mathbb{Z}$$

sériově nekorelované. V článku Engle and Manganelli [1999] je pro tento účel navržena složená testová hypotéza

$$\begin{aligned} &A1 : \mathrm{EHit}_{\alpha;t} = 0, \\ &A2 : \mathrm{Hit}_{\alpha;t} \quad \text{jsou sériově nekorelované} \\ &\qquad \text{s veličinami pro čas } t-1 \text{ a menší} \end{aligned} \tag{5.35}$$

jejíž testování je provedeno za použití regresního modelu

$$\mathrm{Hit}(\alpha) = X\lambda + e_t, \tag{5.36}$$

kde $\mathrm{Hit}(\alpha) = (\mathrm{Hit}_{\alpha;1}, \ldots, \mathrm{Hit}_{\alpha;T})'$ a T je celkový počet pozorování; X je matice rozměrů $T \times K$ s jedničkovým prvním sloupcem, přičemž dalších q sloupců je tvořeno veličinami $\mathrm{Hit}_{\alpha;t-1}, \ldots, \mathrm{Hit}_{\alpha;t-q}$ a ve zbývajících $K - q - 1$ sloupcích mohou být další vhodné vysvětlující proměnné. Za platnosti složené hypotézy (5.35) platí

$$\frac{\hat{\lambda}' X X' \hat{\lambda}}{\alpha(1-\alpha)} \overset{a}{\sim} \chi^2(K), \tag{5.37}$$

kde $\hat{\lambda}$ je odhad metodou nejmenších čtverců v modelu lineární regrese (5.36). Obdobně postupujeme při testu v krátké pozici.

5.5 Chování Burzy cenných papírů Praha z pohledu ARCH modelování

5.5.1 Úvod

Pro naše modely jsme se, vzhledem k nedostatečnému počtu pozorování pro jiné časové odstupy a tituly, rozhodli brát v potaz pouze denní výnosy Českých Radiokomunikací, Českého Telekomu, ČEZu, Komerční Banky, společnosti Philip Morris a Unipetrolu. Podobně jako v předešlých kapitolách se budeme zabývat rozdílem mezi výnosy obchodů a kotací.

Výpočty byly prováděny pomocí dvou statistických programů Ox a R. Důvod, který nás vedl k použití více programů, vyplýval z toho, že v současné době není pro program R k dispozici softwarový balík, který by umožňoval výpočet všech modelů[8] popsaných v sekci 5.2. V R jsme používali balík fSeries od Rmetrics[9] a v Ox jsme se rozhodli použít softwarový balík G@RCH 4.2, jehož konzolová verze je volně stáhnutelná na

```
http://www.core.ucl.ac.be/~laurent/G@RCH/site
/index.html?content=/~laurent/G@RCH/site/garchintro.html
```

Přišlo nám také zajímavé porovnat výsledné modely odhadnuté oběma statistickými programy. Výsledky obou programů jsme uvedli pouze pro konečné modely v části 5.6.

Vzhledem k malým hodnotám jednotlivých výnosů se pro lepší konvergenci výpočetních algoritmů doporučuje data přenásobit 100, viz Luksan et al. [2006]. Takto modifikovaným výnosům se někdy říká procentuální výnosy. Například pro APARCH model pak je $\mu_{\mathrm{puv}} = \mu_{\mathrm{uprav}} 0.01$,

[8] Pouze modely GARCH a APARCH.

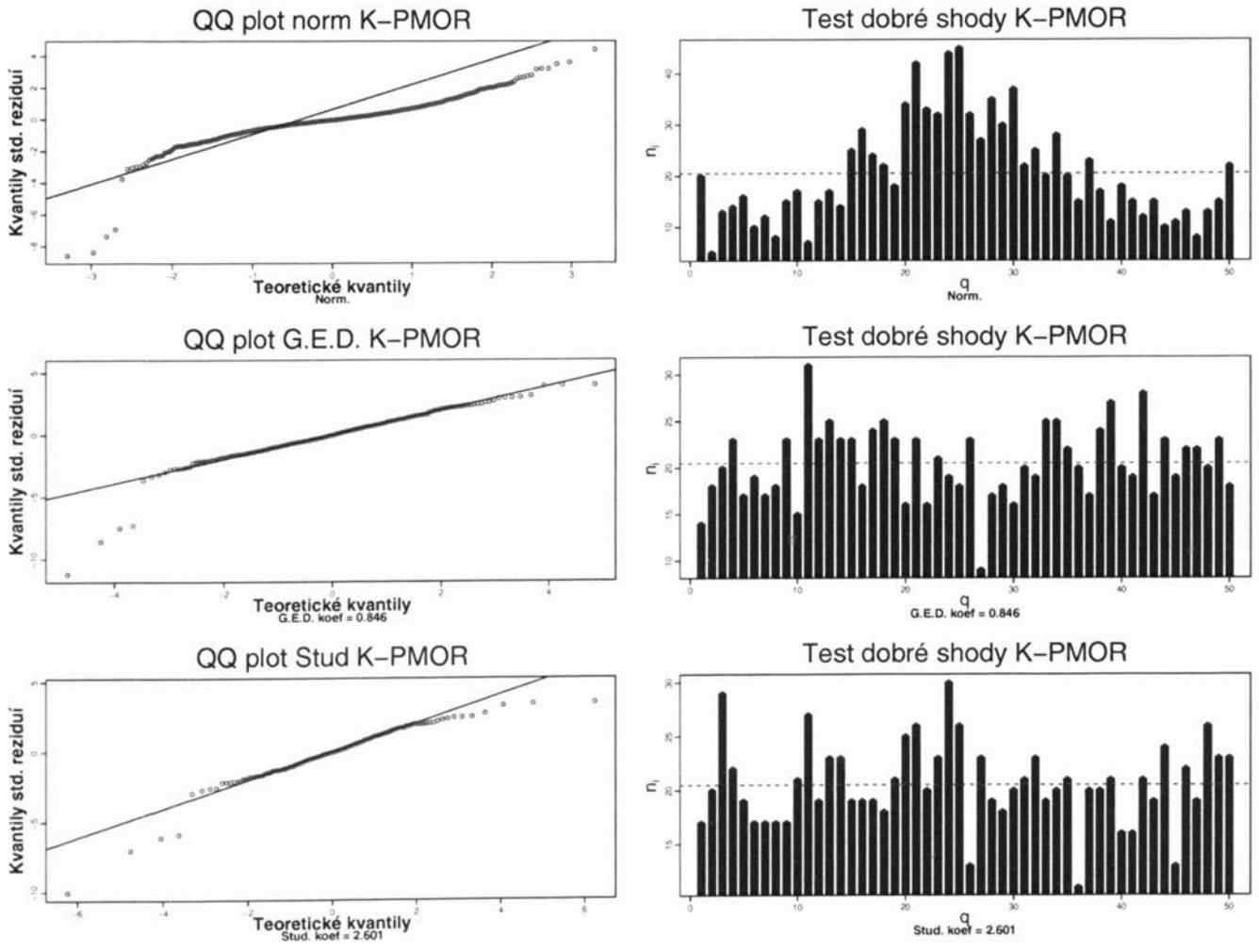
[9] Bohužel současná verze balíku při použití algoritmu *sqp* pro výpočet (sequential quadratic programming algorithm) způsobila zhroucení R. Autoři tohoto balíku na svých stránkách uvádějí, že o problému vědí a v nejbližší době by měla být k dispozici nová verze. Volbou jiných algoritmů pro výpočet se dá tento problém odstranit, avšak tyto algoritmy jsou výpočetně náročnější.

$\omega_{\text{puv}} = \omega_{\text{uprav}} 0.01^{\frac{2}{\delta}}$, přičemž všechny ostatní parametry této specifikace variační rovnice jsou vůči změně měřítka invariantní.

V tabulkách uvádějících statistické testy jednotlivých modelů jsou hvězdičkou vyznačeny ty, které byly signifikantní na hladině spolehlivosti 5 %.

5.5.2 Souhrnné vlastnosti ARCH modelů pro data Burzy cenných papírů Praha

Nyní shrneme některé charakteristické znaky společné pro naše data z BCPP. V odstavci 5.2.4 a konkrétněji v (5.26) a tabulce 5.1 jsme ukázali, že při užití normálního rozdělení pro nahodné veličiny z_t má výsledné rozdělení výnosů r_t větší špičatost než rozdělení normální. Otázkou bylo, zda-li při volbě normálního rozdělení budou těžké chvosty našich dat, viz kapitola 4, dostatečně dobře popsány. Odpověď byla jednoznačně záporná, což demonstrujeme na ilustračním obrázku 5.4 pro denní kotace výnosů akcií Philip Morris. Z rovnice (5.4) plyne, že je-li model dobře



Obrázek 5.4: Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) s volbou normálního (první řádek), GED (druhý řádek) a Studentova (třetí řádek) rozdělení.

specifikován, jsou standardizované chyby i.i.d. náhodné veličiny s rozdělením $\Psi(0,1)$, a proto by kvantily jejich odhadů $\hat{v}_t := \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$ měly ležet na přímce s kvantily rozdělení $\Psi(0,1)$, což zjevně neplatí při volbě rozdělení $\Psi(0,1) = \mathbf{N}(0,1)$. Naopak pro GED a Studentovo rozdělení je již situace mnohem lepší. Dále v odstavci 5.3.3 jsme popsali test dobré shody pro modely třídy ARCH. V případě normálního rozdělení byla hypotéza o vhodnosti modelu zamítnuta pro volby $q = 40, 50, 60$, přičemž p-hodnoty všech testů byly menší než 0.001. Naopak při volbě GED nebo Studentova rozdělení jsme nezamítali hypotézu testu dobré shody ani jednou na 5% hladině spolehlivosti. Z grafické podoby tohoto testu v obrázku 5.4 je vidět, že normální rozdělení není schopné adekvátně modelovat značnou špičatost titulu rovnou 14.20 a tím i chování chvostů, čehož důsledkem je nahromadění velkých hodnot v centrální části a naopak rozprostření malých hodnot v částech krajních. Poznamenejme, že i jiné modely (např. EGARCH nebo APARCH) trpěly stejnými nedostatky při použití normálního rozdělení. Protože stejných výsledků jsme dosáhli i pro jiné tituly, budeme v dalším uvažovat pouze GED nebo Studentovo rozdělení.

Za účelem získání ucelenějšího přehledu o našich datech jsme pro jednotlivé akcie spočítali model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) se Studentovým šikmým a symetrickým GED rozdělením. Výsledky testů těchto modelů jsou shrnuty v tabulkách 5.3 a 5.4, kde jsou uvedeny p-hodnoty jednotlivých testů s výjimkou Nyblomova testu, pro který jsou uvedeny testové statistiky jednotlivých parametrů. Z výsledků testů modelů je ihned patrný rozdíl v chování denních výnosů obchodů a kotací, na který upozorňuje test dobré shody. Otázkou je, co mohlo způsobit tak diametrálně odlišné výsledky. Odpověď můžeme vyčíst z obrázků 5.5 a 5.6. Z obrázku 5.5 je zjevné, že standardizované chyby jsou pro obchody značně koncentrované kolem nuly, jak vyplývá z konstrukce n_i v (5.29). Toto vede k značně špičatému rozdělení, což ukazují odhadnuté hodnoty parametru ν, které jsou u obchodů vždy menší než u kotací pro příslušný titul. Závislost tvaru hustoty a tím i špičatosti GED rozdělení na parametru ν ilustruje obrázek 5.7. Z obrázku 5.6 je patrné, že chování denních výnosů obchodů a kotací z hlediska výkyvů je velmi podobné (třetí řádek obrázku). Proto jsme v kapitole 4 nepozorovali větší rozdíl v koeficientech těžkosti chvostu mezi obchody a kotacemi, neboť příslušné odhady jsou založeny na odlehlejších hodnotách výnosů. Avšak co se týče hodnot, kdy je výnos roven nule, je jejich chování naprosto odlišné[10] (první a druhý řádek obrázku). Poznamenejme, že je-li denní výnos roven nule, pak je cena, za kterou byl proveden poslední obchod resp. na kterou byla vypsána poslední kotace v daný den, stejná jako v předchozí den. Procentuální vyjádření nulových denních výnosů vzhledem k rozsahu dat pro daný titul je uvedeno v tabulce 5.2. U obchodů je tedy podíl nulových

	RADKOM	TEL	CEZ	KB	PMOR	UPETR
Obchody	8.15	5.18	6.00	5.74	9.36	7.97
Kotace	2.37	0.58	0.82	0.90	1.66	1.56

Tabulka 5.2: Procentuální vyjádření nulových výnosů pro obchody a kotace

denních výnosů větší než 5 % pro každý titul, což má za následek koncentraci standardizova-

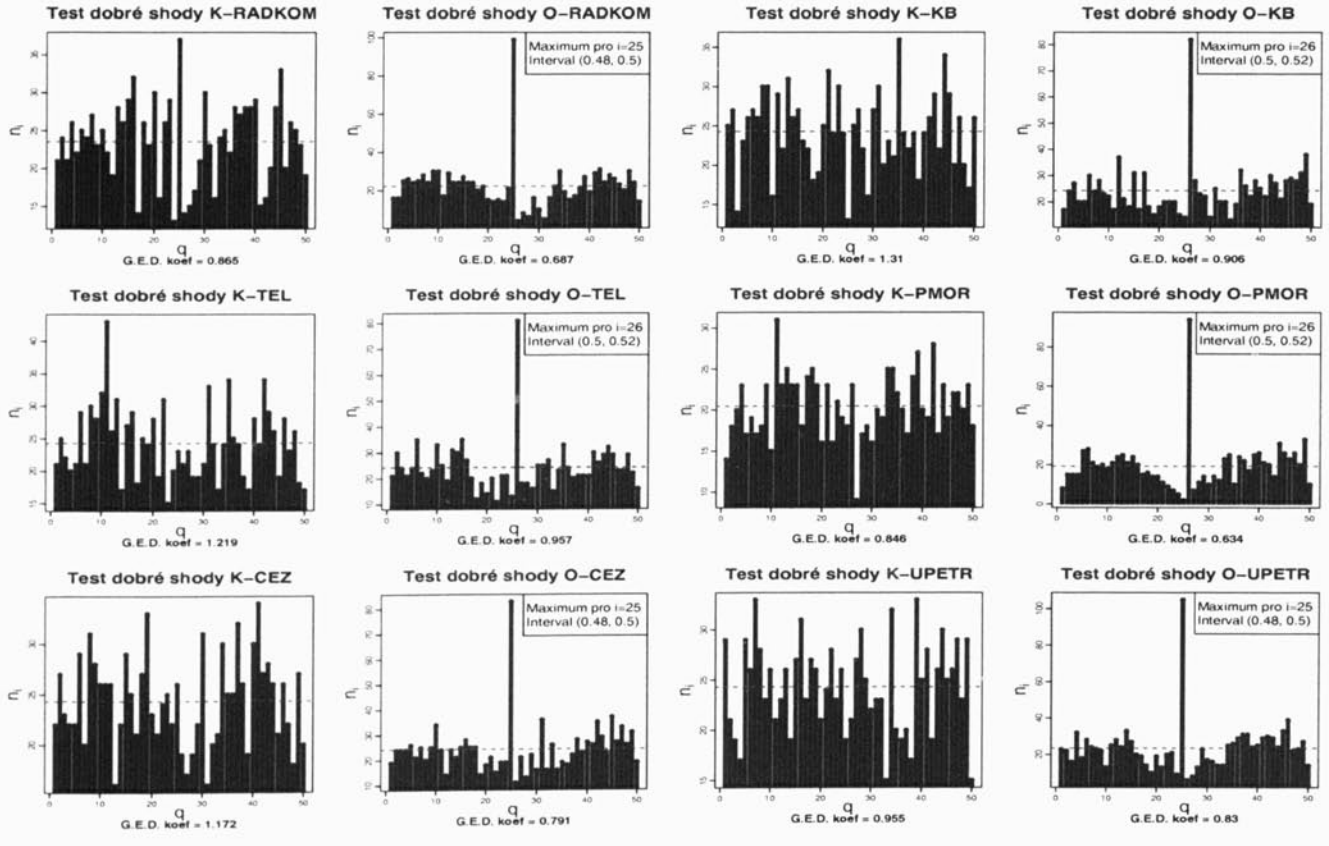
[10]Připomeňme, že naše data se skládala z nabízených kotací a skutečně provedených obchodů, tedy pokud je u obchodů denní výnos roven nule, pak byl poslední obchod daného dne proveden za stejnou cenu jako poslední obchod v den předešlý.

ných reziduí kolem nuly, jak jsme viděli z obrázku 5.5. Jinými slovy cena je stálejší u obchodů než kotací. To, že podobný jev můžeme pozorovat i u zbylých titulů nás vedlo k následujícímu závěru:

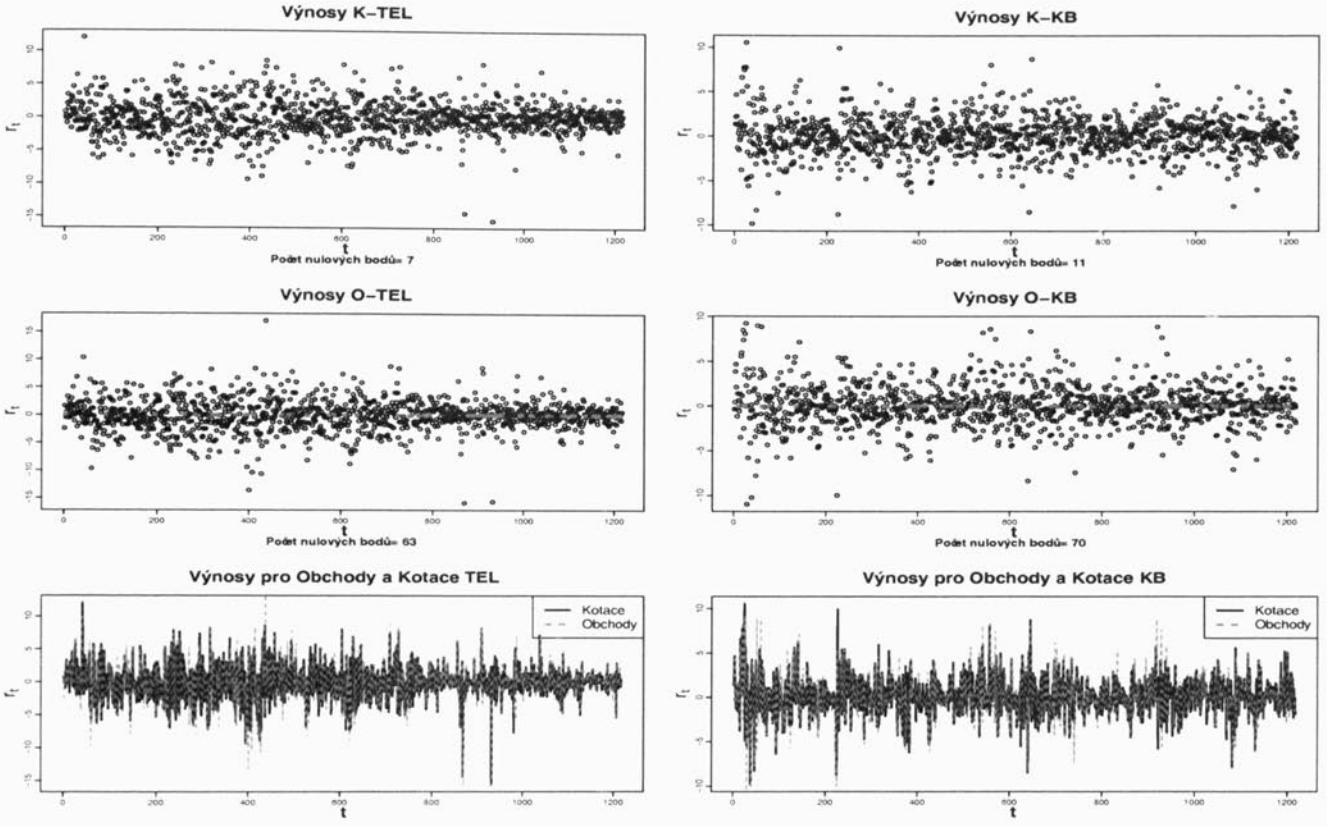
Na českém finančním trhu má cena, za kterou se uzavírají obchody, tendenci být konstantní v rozmezí několika dní a ceny kotací kolem této hodnoty oscilují.

Pokud by tento závěr skutečně platil, mohlo by to ukazovat na menší pružnost BCPP. Avšak není nám známo, jaké jsou vlastnosti obchodů na jiných finančních trzích, neboť veškeré nám známe studie uvažují cenu akcie jako cenu kotace. Na druhé straně toto může být pouhým důsledkem toho, jak se na burze obchoduje. Brokeři mají od svých klientů určenou cenu, za kterou mají danou transakci provést, a ta je zdá se pro český trh neměnná v rozsahu i několika dní. Přitom nabídky tvůrců trhu kolem této ceny fluktuují ve snaze „vyprovokovat" obchod, neboť pouze nejlepší kotace na prodej či obchod je na burze uveřejněna, což nasvědčuje značné kompetitivnosti mezi jednotlivými tvůrci trhu.

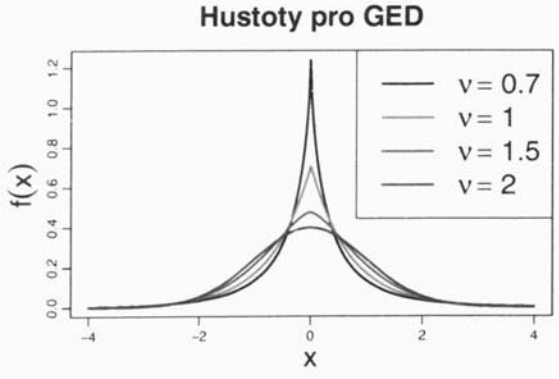
Jakmile nám bylo jasné, kde je jádro problému pro obchody, snažili jsme se měnit modely tak, abychom dosáhli nějakého rozumného výsledku pro test dobré shody. Pohledem na tabulku 5.5 pro model C(1,1)+ARMA(1,0)+APARCH(1,1) s GED rozdělením je jasné, že přidání autoregresního členu v meanové rovnici ani transformace variační rovnice parametrem δ ani zahrnutí



Obrázek 5.5: Porovnání testů dobré shody pro model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) GED.



Obrázek 5.6: Porovnání datové struktury výnosů BCPP mezi obchody a kotacemi pro tituly TEL a KB. V prvním řádku jsou výnosy kotací, v druhém výnosy obchodů. V obou případech jsou nulové výnosy vyznačeny červeně. V posledním třetím řádku jsou porovnány výnosy obchodů a kotací společně.



Obrázek 5.7: Závislost tvaru hustoty GED rozdělení na parametru ν.

leverage efektu kýžený výsledek, s výjimkou titulu TEL, nepřineslo. Ovšem v případě tohoto titulu bylo procentuální zastoupení nulových výnosů nejmenší, viz tabulka 5.2. Navíc je z tabulky patrné, že leverage efekt není pro český finanční trh příliš typický (viz parametr γ_1). Dalším krokem bylo pokusit se modelovat obchody jako procesy s dlouhou pamětí, tj. použít v meanové rovnici specifikaci ARFIMA resp. specifikace FIGARCH, FIAPARCH a FIEGARCH ve variační rovnici. Nicméně výsledek byl naprosto stejný, takže se nelze domnívat, že by dané chování bylo výsledkem nějaké dlouhodobé závislosti. Což jen potvrzuje naši hypotézu o stálosti denních cen obchodů. V některých studiích se uvažovaly dodatečné vysvětlující proměnné ve variační rovnici, které představovaly jednotlivé dny obchodovacího týdne, avšak ani toto k žádnému zlepšení nepřispělo. Vzhledem k tomu, že se nám obecně pro většinu denních výnosů obchodů nepodařilo dosáhnout uspokojivých výsledků pro test dobré shody, by použitelnost těchto modelů byla přinejmenším rozporuplná. V dalším se proto budeme soustředit na zpřesnění modelů pro denní výnosy kotací, i když testování vhodnosti modelů obchodů pro předpovědi value-at-risk dopadlo více než uspokojivě, viz tabulky 5.3, 5.4 a 5.5.

5.5.3 Tabulky

	O-RADKOM	O-TEL	O-CEZ	O-KB	O-PMOR	O-UPETR	K-RADKOM	K-TEL	K-CEZ	K-KB	K-PMOR	K-UPETR
Std. res Q(10)	0.482	0.004*	0.113	0.212	0.570	0.999	0.057	0.639	0.167	0.002*	0.801	0.222
Std. res Q(15)	0.744	0.013*	0.276	0.308	0.701	0.984	0.040*	0.164	0.242	0.015*	0.936	0.301
Std. res Q(20)	0.590	0.016*	0.443	0.271	0.571	0.979	0.012*	0.269	0.225	0.044*	0.687	0.407
Std. res^2 Q(10)	0.846	0.275	0.999	0.372	0.984	0.994	0.000*	0.828	0.990	0.873	0.993	0.797
Std. res^2 Q(15)	0.953	0.087	0.940	0.454	0.984	0.999	0.000*	0.848	0.987	0.867	0.999	0.920
Std. res^2 Q(20)	0.990	0.137	0.993	0.707	0.995	1.000	0.000*	0.931	0.999	0.933	1.000	0.960
IC Sign	0.451	0.865	0.341	0.277	0.041*	0.302	0.080	0.989	0.183	0.356	0.437	0.027*
IC Negative	0.355	0.238	0.874	0.158	0.285	0.744	0.573	0.809	0.596	0.144	0.419	0.837
IC Positive	0.218	0.170	0.596	0.268	0.902	0.852	0.024*	0.861	0.499	0.166	0.835	0.026*
IC Joint	0.197	0.315	0.809	0.139	0.132	0.727	0.083	0.993	0.617	0.194	0.736	0.055
Chi-sq Gfit 40	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.045*	0.936	0.997	0.831	0.897	0.111
Chi-sq Gfit 50	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.147	0.876	0.515	0.778	0.952	0.285
Chi-sq Gfit 60	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.466	0.967	0.795	0.700	0.755	0.402
Chi-sq Gfit 40 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.009*	0.779	0.976	0.589	0.700	0.029*
Chi-sq Gfit 50 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.049*	0.694	0.279	0.549	0.842	0.119
Chi-sq Gfit 60 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.258	0.891	0.596	0.480	0.545	0.209
Cst(M)	0.609	0.586	0.046*	0.017*	0.024*	0.013*	0.086	0.409	0.037*	0.030*	0.007*	0.022*
Cst(V)	0.668	0.630	0.111	0.010*	0.546	0.707	0.850	0.385	0.130	0.003*	0.371	0.054
ARCH(Alpha1)	0.008*	0.193	0.010*	0.000*	0.397	0.007*	0.000*	0.041*	0.012*	0.000*	0.159	0.000*
GARCH(Beta1)	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
Asymmetry	0.169	0.893	0.383	0.069	0.054	0.791	0.421	0.423	0.369	0.728	0.386	0.565
Tail	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
Nyb:Cst(M)	0.130	0.203	0.582	0.168	0.051	0.115	0.060	0.413	0.755	0.148	0.026	0.447
Nyb:Cst(V)	0.189	0.808	0.464	0.256	0.131	0.798	0.003	1.024	0.617	0.135	0.621	1.947
Nyb:ARCH(Alpha1)	0.341	1.391	0.150	0.525	0.149	1.008	0.953	1.712	0.315	0.282	0.529	0.807
Nyb:GARCH(Beta1)	0.546	1.201	0.262	0.359	0.171	0.989	0.984	1.815	0.420	0.153	0.817	1.506
Nyb:Asymmetry	0.046	0.253	0.075	0.081	0.138	0.080	0.036	0.558	0.122	0.135	0.047	0.294
Nyb:Tail	0.515	1.866	0.173	0.511	0.170	1.483	1.747	3.072	0.103	0.127	0.686	1.639
Nyb:Joint	1.510	2.429	2.023	1.048	0.838	2.308	3.713	4.182	2.156	1.023	1.377	3.391
Def. σ^2	×	×	✓	✓	×	×	×	×	✓	✓	×	×
Def. $\frac{(r_t-\mu)^4}{\sigma^4}$	×	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓
E&M:S 0.95	0.000*	0.118	0.007*	0.708	0.074	0.538	0.003*	0.468	0.080	0.893	0.478	0.443
E&M:S 0.975	0.077	0.264	0.260	0.873	0.420	0.032*	0.000*	0.220	0.020*	0.812	0.106	0.243
E&M:S 0.99	0.454	0.941	0.024*	0.870	0.335	0.009*	0.509	0.555	0.075	0.410	0.758	0.047*
E&M:S 0.995	0.819	0.973	0.526	0.889	0.674	0.836	0.682	0.556	0.000*	0.982	0.952	0.966
E&M:S 0.9975	0.959	0.954	0.880	0.982	0.932	0.970	0.600	0.084	0.880	0.978	0.989	0.997
E&M:L 0.05	0.217	0.093	0.139	0.003*	0.993	0.031*	0.158	0.061	0.202	0.025*	0.482	0.435
E&M:L 0.025	0.214	0.016*	0.008*	0.141	0.572	0.014*	0.040*	0.382	0.006*	0.060	0.869	0.115
E&M:L 0.01	0.563	0.209	0.994	0.989	0.987	0.304	0.853	0.876	0.984	0.989	0.986	0.550
E&M:L 0.005	0.739	0.994	0.987	0.992	0.993	1.000	0.793	0.565	0.992	1.000	0.998	0.999
E&M:L 0.0025	0.976	0.999	0.996	0.975	0.890	1.000	0.684	0.835	0.999	1.000	0.970	0.992
Kup:S 0.95	0.137	0.880	0.239	0.158	0.179	0.790	0.790	0.233	0.779	0.984	0.502	0.779
Kup:S 0.975	0.709	0.304	0.405	0.300	0.488	0.781	0.926	0.067	0.641	0.412	0.640	0.024*
Kup:S 0.99	0.720	0.338	0.106	0.104	0.000*	0.129	0.129	0.338	0.338	0.961	0.067	0.200
Kup:S 0.995	0.080	0.972	1.000	0.053	1.000	0.405	0.405	0.649	0.366	0.366	0.308	0.164
Kup:S 0.9975	0.216	0.523	1.000	0.172	1.000	0.556	0.977	0.304	1.000	0.172	0.264	0.523
Kup:L 0.05	0.336	0.193	0.121	0.097	0.592	0.358	0.510	0.681	0.504	0.880	0.278	0.294
Kup:L 0.025	0.838	0.774	0.131	0.417	0.788	0.063	0.505	0.916	0.916	0.412	0.785	0.180
Kup:L 0.01	0.413	0.732	0.519	0.515	0.356	0.953	0.393	0.813	0.732	0.607	0.463	0.293
Kup:L 0.005	0.336	0.972	0.366	0.646	0.687	0.703	0.967	0.717	0.972	0.717	0.604	0.649
Kup:L 0.0025	0.902	0.523	0.523	0.172	0.357	0.556	0.562	0.600	0.980	0.980	0.406	0.600

Tabulka 5.3: Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro šikmé Studentovo rozdělení výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl či špičatost v modelu dobře definována. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti.

	O-RADKOM	O-TEL	O-CEZ	O-KB	O-PMOR	O-UPETR	K-RADKOM	K-TEL	K-CEZ	K-KB	K-PMOR	K-UPETR
Std. res Q(10)	0.459	0.003*	0.108	0.201	0.595	0.997	0.035*	0.608	0.144	0.002*	0.810	0.243
Std. res Q(15)	0.725	0.010*	0.265	0.297	0.723	0.971	0.015*	0.167	0.213	0.014*	0.942	0.305
Std. res Q(20)	0.562	0.014*	0.428	0.256	0.618	0.967	0.003*	0.266	0.213	0.043*	0.672	0.406
Std. res^2 Q(10)	0.874	0.264	0.999	0.498	0.982	0.991	0.400	0.855	0.980	0.875	0.987	0.813
Std. res^2 Q(15)	0.964	0.108	0.923	0.563	0.986	0.999	0.749	0.921	0.962	0.868	0.998	0.936
Std. res^2 Q(20)	0.993	0.167	0.990	0.778	0.995	1.000	0.919	0.973	0.995	0.938	1.000	0.972
IC Sign	0.423	0.437	0.277	0.477	0.048*	0.355	0.263	0.855	0.175	0.336	0.315	0.044*
IC Negative	0.359	0.642	0.732	0.770	0.491	0.628	0.562	0.967	0.444	0.102	0.385	0.986
IC Positive	0.227	0.074	0.575	0.035*	0.040*	0.982	0.082	0.870	0.587	0.203	0.918	0.052
IC Joint	0.186	0.321	0.754	0.208	0.125	0.758	0.287	0.998	0.592	0.176	0.651	0.119
Chi-sq Gfit 40	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.008*	0.256	0.471	0.583	0.627	0.483
Chi-sq Gfit 50	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.128	0.075	0.832	0.433	0.894	0.766
Chi-sq Gfit 60	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.005*	0.372	0.655	0.601	0.578	0.727
Chi-sq Gfit 40 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.002*	0.110	0.256	0.351	0.394	0.265
Chi-sq Gfit 50 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.051	0.027*	0.665	0.247	0.760	0.577
Chi-sq Gfit 60 pen.	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.001*	0.214	0.469	0.414	0.391	0.549
Cst(M)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.444	0.120	0.037*	0.000*	0.000*
Cst(V)	0.783	0.630	0.036*	0.010*	0.458	0.775	0.559	0.481	0.032*	0.004*	0.128	0.018*
ARCH(Alpha1)	0.014*	0.221	0.001*	0.000*	0.134	0.031*	0.000*	0.175	0.000*	0.000*	0.010*	0.000*
GARCH(Beta1)	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
G.E.D.(DF)	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
Nyb:Cst(M)	1.131	0.158	0.451	0.340	2.070	0.510	0.063	0.546	0.537	0.132	0.079	0.268
Nyb:Cst(V)	0.170	0.715	0.414	0.233	0.156	0.850	0.014	0.910	0.663	0.200	0.536	1.664
Nyb:ARCH(Alpha1)	0.288	1.015	0.143	0.599	0.149	0.830	0.242	1.129	0.295	0.363	0.353	0.612
Nyb:GARCH(Beta1)	0.524	0.851	0.230	0.339	0.190	0.851	0.395	1.251	0.390	0.209	0.661	1.317
Nyb:G.E.D.(DF)	1.655	1.893	0.269	0.903	0.780	1.759	2.741	2.561	0.191	0.162	0.649	1.369
Nyb:Joint	3.748	2.522	1.966	1.713	3.352	2.888	3.624	5.534	1.737	0.975	1.720	3.359
Def. σ^2	×	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓
Def. $\frac{(r_t-\mu)^4}{\sigma^4}$	×	×	✓	✓	×	×	×	✓	✓	✓	✓	×
E&M:S 0.95	0.019*	0.273	0.032*	0.718	0.167	0.507	0.008*	0.641	0.063	0.861	0.528	0.455
E&M:S 0.975	0.293	0.415	0.122	0.874	0.235	0.152	0.050*	0.382	0.004*	0.796	0.104	0.157
E&M:S 0.99	0.457	0.946	0.024*	0.881	0.478	0.004*	0.021*	0.566	0.030*	0.410	0.908	0.001*
E&M:S 0.995	0.819	0.955	0.719	0.994	0.674	0.948	0.679	0.249	0.000*	1.000	0.966	0.976
E&M:S 0.9975	0.894	0.881	0.880	0.999	0.932	0.970	0.266	0.097	0.965	0.975	0.990	0.997
E&M:L 0.05	0.354	0.118	0.229	0.088	0.476	0.091	0.285	0.005*	0.535	0.073	0.825	0.444
E&M:L 0.025	0.039*	0.057	0.489	0.669	0.259	0.412	0.004*	0.546	0.092	0.173	0.703	0.167
E&M:L 0.01	0.954	0.202	0.921	0.813	0.787	0.107	0.853	0.953	0.992	0.989	0.986	0.759
E&M:L 0.005	0.929	0.991	0.984	0.970	0.990	0.987	0.803	0.920	0.995	0.993	1.000	0.987
E&M:L 0.0025	0.975	0.999	0.996	0.972	0.870	1.000	0.601	0.535	0.655	0.923	0.970	0.949
Kup:S 0.95	0.270	0.233	0.681	0.158	0.228	0.340	0.218	0.183	0.434	0.359	0.745	0.518
Kup:S 0.975	0.165	0.067	0.221	0.300	0.258	0.095	0.389	0.104	0.522	0.938	0.785	0.007*
Kup:S 0.99	0.720	0.338	0.106	0.104	0.002*	0.061	0.589	0.338	0.200	0.961	0.689	0.338
Kup:S 0.995	0.080	0.717	0.010*	0.646	1.000	0.186	0.405	0.717	0.366	0.649	0.604	0.649
Kup:S 0.9975	0.617	0.304	1.000	0.521	1.000	0.556	0.562	0.304	0.172	0.523	0.264	0.523
Kup:L 0.05	0.092	0.984	0.609	0.228	0.036*	0.274	0.498	0.609	0.880	0.807	0.129	0.984
Kup:L 0.025	0.042*	0.304	0.304	0.066	0.022*	0.926	0.095	0.304	0.652	0.938	0.039*	0.519
Kup:L 0.01	0.720	0.732	0.200	0.104	0.037*	0.393	0.393	0.961	0.961	0.607	0.463	0.431
Kup:L 0.005	0.564	0.972	0.366	0.364	0.687	0.405	0.967	0.717	0.717	0.458	0.956	0.717
Kup:L 0.0025	0.902	0.523	0.523	0.172	0.357	0.556	0.277	0.304	0.134	0.304	0.406	0.304

Tabulka 5.4: Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro GED rozdělení výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl či špičatost v modelu dobře definována. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti.

	O-RADKOM	O-TEL	O-CEZ	O-KB	O-PMOR	O-UPETR	K-RADKOM	K-TEL	K-CEZ	K-KB	K-PMOR	K-UPETR
Std. res Q(10)	0.393	0.045*	0.217	0.161	0.422	0.956	0.151	0.507	0.326	0.008*	0.420	0.056
Std. res Q(15)	0.689	0.049*	0.459	0.256	0.443	0.933	0.089	0.100	0.368	0.040*	0.562	0.101
Std. res Q(20)	0.549	0.030*	0.630	0.218	0.359	0.902	0.025*	0.149	0.369	0.097	0.305	0.216
Std. res^2 Q(10)	0.864	0.599	0.998	0.347	0.908	0.844	0.564	0.534	0.979	0.841	0.403	0.916
Std. res^2 Q(15)	0.951	0.342	0.925	0.452	0.637	0.976	0.862	0.633	0.990	0.777	0.636	0.921
Std. res^2 Q(20)	0.988	0.318	0.990	0.678	0.807	0.991	0.965	0.796	0.999	0.908	0.817	0.943
IC Sign	0.118	0.414	0.396	0.907	0.023*	0.253	0.298	0.583	0.240	0.400	0.228	0.027*
IC Negative	0.261	0.198	0.837	0.283	0.092	0.834	0.550	0.629	0.577	0.282	0.308	0.986
IC Positive	0.480	0.031*	0.841	0.094	0.888	0.873	0.112	0.740	0.913	0.399	0.901	0.190
IC Joint	0.144	0.086	0.838	0.257	0.043*	0.511	0.338	0.500	0.618	0.588	0.508	0.103
Chi-sq Gfit 40	0.000*	0.355	0.034*	0.000*	0.000*	0.000*	0.235	0.377	0.918	0.149	0.353	0.669
Chi-sq Gfit 50	0.000*	0.327	0.025*	0.000*	0.000*	0.000*	0.494	0.220	0.593	0.669	0.434	0.892
Chi-sq Gfit 60	0.000*	0.858	0.104	0.000*	0.000*	0.000*	0.474	0.697	0.641	0.608	0.076	0.723
Chi-sq Gfit 40 pen.	0.000*	0.096	0.003*	0.000*	0.000*	0.000*	0.050*	0.105	0.652	0.025*	0.094	0.298
Chi-sq Gfit 50 pen.	0.000*	0.101	0.003*	0.000*	0.000*	0.000*	0.197	0.056	0.271	0.339	0.159	0.641
Chi-sq Gfit 60 pen.	0.000*	0.612	0.023*	0.000*	0.000*	0.000*	0.205	0.398	0.342	0.312	0.015*	0.428
Cst(M)	1.000	0.000*	0.000*	1.000	1.000	1.000	1.000	0.802	0.222	0.056	0.000*	0.000*
AR(1)	1.000	0.000*	0.000*	1.000	1.000	1.000	0.000*	0.099	0.371	0.006*	0.005*	0.000*
Cst(V)	0.541	0.063	0.085	0.083	0.025*	0.362	0.706	0.070	0.129	0.077	0.028*	0.112
ARCH(Alpha1)	0.009*	0.000*	0.001*	0.001*	0.002*	0.013*	0.000*	0.545	0.000*	0.025*	0.000*	0.002*
GARCH(Beta1)	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
APARCH(Gamma1)	0.620	0.017*	0.525	0.105	0.727	0.006*	0.975	0.507	0.390	0.054	0.711	0.009*
APARCH(Delta)	0.116	0.001*	0.000*	0.000*	0.003*	0.000*	0.030*	0.878	0.005*	0.000*	0.252	0.000*
G.E.D.(DF)	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*	0.000*
Nyb:Cst(M)	1.162	0.085	0.725	0.247	0.196	0.498	0.046	0.820	0.383	0.091	4.283	0.153
Nyb:AR(1)	1.189	0.267	0.905	0.768	0.040	0.721	0.137	1.158	0.119	0.128	0.720	0.022
Nyb:Cst(V)	0.505	1.074	0.417	0.196	0.098	0.433	0.060	0.791	0.532	0.153	0.274	1.044
Nyb:ARCH(Alpha1)	0.274	0.766	0.173	0.609	0.100	0.239	0.164	0.704	0.262	0.381	0.219	0.395
Nyb:GARCH(Beta1)	0.453	0.901	0.255	0.363	0.100	0.292	0.303	0.785	0.359	0.213	0.269	0.642
Nyb:APARCH(Gamma1)	0.113	0.692	0.087	0.133	0.025	0.844	0.048	0.871	0.066	0.132	0.082	0.288
Nyb:APARCH(Delta)	0.120	0.736	0.724	0.212	0.081	0.047	0.108	0.757	0.462	0.182	0.227	0.108
Nyb:G.E.D.(DF)	1.559	1.602	0.257	0.866	0.658	1.013	2.398	2.267	0.196	0.160	0.472	0.941
Nyb:Joint	5.377	4.136	3.695	2.586	4.511	3.724	3.688	6.051	2.002	1.256	8.929	3.623
Def. σ^2	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓
E&M:S 0.95	0.046*	0.644	0.004*	0.639	0.044*	0.029*	0.002*	0.001*	0.026*	0.275	0.670	0.001*
E&M:S 0.975	0.072	0.150	0.065	0.691	0.854	0.118	0.007*	0.057	0.000*	0.283	0.383	0.041*
E&M:S 0.99	0.512	0.120	0.063	0.954	0.334	0.010*	0.014*	0.066	0.001*	0.087	0.861	0.001*
E&M:S 0.995	0.784	0.578	0.000*	0.985	0.863	0.000*	0.656	0.454	0.000*	0.919	0.945	0.000*
E&M:S 0.9975	0.953	0.611	0.982	0.997	0.932	0.968	0.239	0.166	0.000*	0.979	0.984	0.000*
E&M:L 0.05	0.683	0.836	0.234	0.181	0.644	0.402	0.446	0.794	0.939	0.285	0.607	0.618
E&M:L 0.025	0.311	0.714	0.754	0.652	0.644	0.904	0.009*	0.438	0.042*	0.458	0.807	0.369
E&M:L 0.01	0.981	0.214	0.990	0.883	0.929	0.968	0.109	0.980	0.998	0.996	0.990	0.346
E&M:L 0.005	0.995	0.928	0.989	0.963	1.000	1.000	0.834	0.983	0.998	0.964	1.000	1.000
E&M:L 0.0025	0.974	0.798	0.997	0.978	0.981	1.000	0.662	0.997	0.736	0.999	0.995	1.000
Kup:S 0.95	0.414	0.183	0.426	0.198	0.726	0.051	0.129	0.359	0.233	0.359	0.537	0.984
Kup:S 0.975	0.239	0.024*	0.221	0.516	0.258	0.095	0.505	0.652	0.522	0.641	0.940	0.067
Kup:S 0.99	0.178	0.961	0.200	0.198	0.000*	0.129	0.393	0.431	0.338	0.813	0.689	0.961
Kup:S 0.995	0.229	0.717	0.053	0.646	0.032*	0.703	0.405	0.458	0.366	0.717	0.604	0.972
Kup:S 0.9975	0.216	0.304	0.172	0.521	1.000	0.977	0.562	0.134	0.523	0.172	0.714	0.600
Kup:L 0.05	0.593	0.984	0.609	0.179	0.036*	0.169	0.589	0.359	0.911	0.609	0.047*	0.706
Kup:L 0.025	0.013*	0.652	0.652	0.041*	0.022*	0.389	0.143	0.007*	0.304	0.938	0.743	0.938
Kup:L 0.01	0.720	0.519	0.338	0.198	0.093	0.238	0.589	0.519	0.732	0.813	0.279	0.607
Kup:L 0.005	0.862	0.366	0.366	0.163	0.687	0.967	0.659	0.972	0.972	0.269	0.706	0.972
Kup:L 0.0025	0.902	0.600	0.523	0.172	0.357	0.562	0.277	0.600	0.134	0.600	0.406	0.600

Tabulka 5.5: Model C(1,1)+ARMA(1, 0)+APARCH(1,1) s GED rozdělením výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl v modelu dobře definován. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti.

	Parametr	O-RADKOM	O-TEL	O-CEZ	O-KB	O-PMOR	O-UPETR	K-RADKOM	K-TEL	K-CEZ	K-KB	K-PMOR	K-UPETR
1	Cst(M)	0.030	0.037	0.109	0.141	0.137	0.117	0.021	0.050	0.103	0.119	0.115	0.106
2	Cst(V)	0.010	0.036	0.488	0.249	0.166	-0.008	0.000	0.072	0.308	0.266	0.061	0.233
3	ARCH(Alpha1)	0.273	0.060	0.134	0.149	0.095	0.062	0.353	0.097	0.128	0.123	0.148	0.280
4	GARCH(Beta1)	0.863	0.945	0.810	0.837	0.937	0.952	0.820	0.904	0.802	0.825	0.900	0.756
5	Asymmetry	0.038	-0.004	0.023	0.053	0.065	-0.008	0.020	0.035	-0.033	-0.013	0.030	0.018
6	Tail	2.599	3.555	3.004	3.566	2.371	3.187	2.727	4.680	4.830	5.647	2.601	3.222
7	Cst(M)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.019	0.108	0.129	0.081	0.075
8	Cst(V)	0.010	0.039	0.410	0.212	0.073	0.010	0.002	0.136	0.230	0.272	0.079	0.256
9	ARCH(Alpha1)	0.210	0.048	0.112	0.127	0.053	0.057	0.220	0.087	0.102	0.113	0.112	0.222
10	GARCH(Beta1)	0.863	0.951	0.818	0.849	0.945	0.948	0.841	0.898	0.843	0.829	0.876	0.752
11	G.E.D.(DF)	0.687	0.957	0.791	0.906	0.634	0.830	0.865	1.219	1.172	1.310	0.846	0.955
12	Cst(M)	0.000	0.039	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.106	0.105	0.073	0.062
13	AR(1)	0.000	-0.107	-0.042	0.000	0.000	0.000	0.051	0.034	0.051	0.078	-0.001	-0.007
14	Cst(V)	0.036	0.047	0.320	0.308	0.062	0.019	0.006	0.097	0.175	0.405	0.058	0.099
15	ARCH(Alpha1)	0.182	0.066	0.106	0.120	0.076	0.078	0.214	0.098	0.104	0.085	0.112	0.170
16	GARCH(Beta1)	0.881	0.932	0.833	0.835	0.911	0.939	0.857	0.834	0.854	0.827	0.873	0.835
17	APARCH(Gamma1)	0.050	0.485	0.088	0.122	0.121	0.413	0.002	0.564	0.174	0.149	0.086	0.309
18	APARCH(Delta)	1.177	0.772	1.833	2.516	0.578	0.896	1.498	0.193	1.630	2.695	0.467	1.081
19	G.E.D.(DF)	0.700	0.970	0.831	0.907	0.657	0.857	0.869	1.300	1.173	1.322	0.868	0.969

Tabulka 5.6: Odhady parametrů pro modely uvedené v tabulkách 5.3, 5.4, 5.5.

5.6 Konkrétní modely denních výnosů kotací Burzy cenných papírů Praha

V tomto odstavci představíme naše modely denních výnosů kotací a pro každý uvedeme krátké odůvodnění pro jeho výběr. Při určování konkrétních modelů jsme samozřejmě brali na zřetel výsledky uvedené v předešlých kapitolách, zejména nás zajímala autokorelační struktura daného titulu a těžkost jeho chvostů. Dále jsme ctili „zásadu jednoduššího modelu", tj. pokud složitější model nemá lepší vlastnosti než model jednodušší, spokojíme se s jednodušším modelem. Také v rámci plynulejšího toku textu se u každého titulu zaměříme pouze na aspekty, které byly zajímavé nebo vyžadovaly zlepšení. Pro konečné modely denních výnosů kotací jsou výsledky statistických testů popsaných v sekcích 5.3 a 5.4 uvedeny tabulce 5.13. Z důvodu odlišnosti názvů a počtu odhadovaných parametrů pro různé tituly uvádíme Nyblomovu statistiku[11] v tabulkách jednotlivých modelů, neboť souhrnné uvedení v jedné tabulce by působilo značné problémy ve značení a přehlednosti. Pro každý model jsou pak předvedeny jeho vlastnosti v sérii obrázků, kde v prvním řádku jsou zleva doprava uvedeny:

- Průběh podmíněné směrodatné odchylky σ_t, kde je vidět jak se podmíněná volatilita aktiva v čase značně mění.
- Průběh denních výnosů r_t dané akcie s $VaR_{\alpha;t}$ a $VaR_{1-\alpha;t}$ na hladině spolehlivosti 1 %, což je grafická interpretace Kupiecova testu.
- Znázornění leverage efektu pro denní výnosy r_t příslušného titulu, kde interval spolehlivosti předpokládá normalitu a tedy skutečné intervaly spolehlivosti by měly být ještě širší, viz diskuse na začátku této kapitoly. To, že jsou skutečné intervaly spolehlivosti širší, naznačuje statistická nevýznamnost leverage efektu pro všechny tituly s výjimkou Unipetrolu.

V druhém řádku jsou zleva doprava uvedeny:

- QQ-plot standardizovaných chybových členů.
- Grafické znázornění testu dobré shody.
- Posledních 100 denních výnosů daného aktiva s konfidenčními intervaly spolehlivosti počítanými o krok zpět. Dále je vykreslena bodová předpověď vývoje akcie s příslušnými konfidenčními intervaly. Konfidenční intervaly jsou uvedeny pro 5% hladinu spolehlivosti.

Vlastnost, která byla všem denním výnosů kotací společná, je nevýznamnost parametru šikmosti ξ v rozdělení náhodných veličin z_t pro různé specifikace podmíněného rozptylu σ_t^2 ve variační rovnici. Jako ilustraci uveďme tabulku 5.3 pro GARCH model se šikmým Studentovým rozdělením. Dalším společným znakem modelů výnosů je fakt, že použití Studentova rozdělení přisuzuje zkoumanému datovému souboru příliš těžké chvosty. Konkrétněji v tabulce 5.6 jsou

[11] Při některých specifikacích nebyla Nyblomova statistika pro každý parametr softwarem poskytnuta.

pro denní výnosy kotací odhady parametru ν v rozmezí $2.601 - 5.647$, přičemž jsou tři hodnoty tohoto parametru menší než 4 (K-RADKOM, K-PMOR, K-UPETR). Tento fakt implikuje neexistenci čtvrtého momentu náhodných veličin z_t a tedy i r_t, což je v rozporu s výsledky jak pro modifikovaný Hillův, tak i pro klasický Hillův odhad těžkosti chvostu, uvážíme-li, že hodnoty v tabulkách 4.2 a 4.3 platí pro výnosy samotné, které při použití Studentova rozdělení mají vždy ještě těžší chvosty něž náhodné veličiny z_t. Navíc pro Studentovo rozdělení není často ani rozptyl dobře definován.

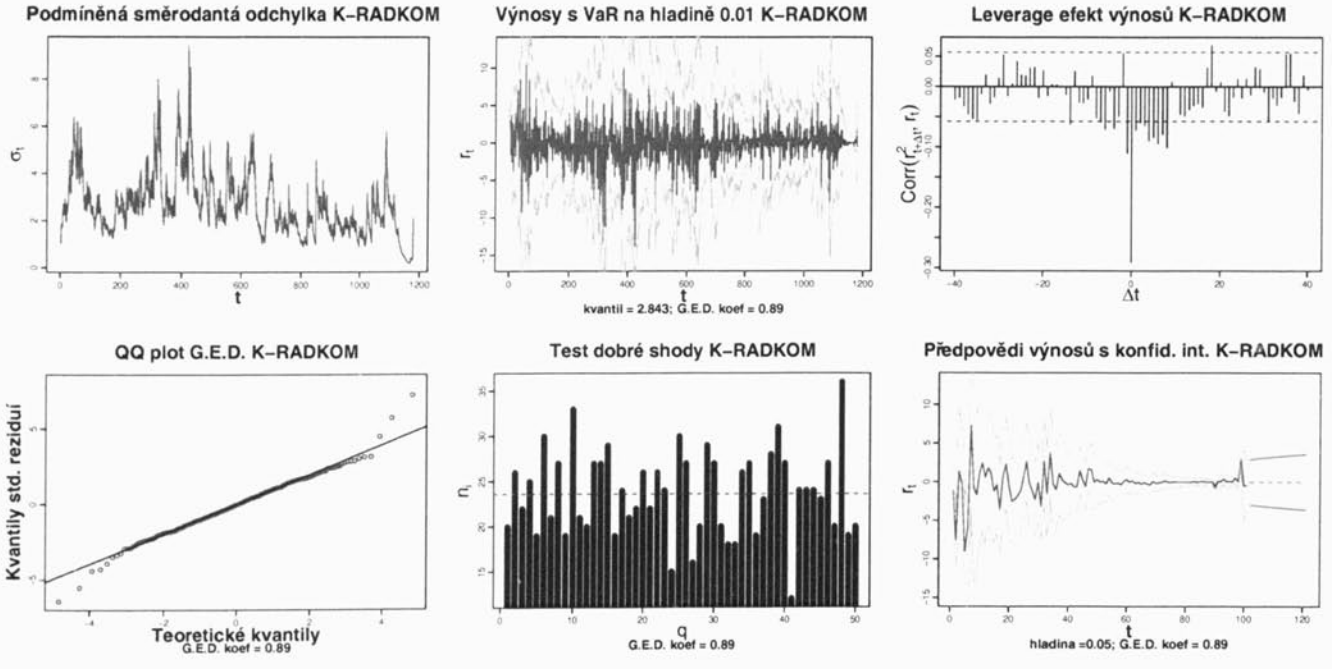
5.6.1 České Radiokomunikace

Výsledný model: (0,1)+ARMA(1,0)+EGARCH(1,1) GED.
Z tabulek 5.3 a 5.4 plyne, že pro GARCH specifikaci podmíněného rozptylu σ_t^2 jsou standardizované chyby korelované pro Studentovo rozdělení a jejich čtverce pro GED rozdělení, viz testy reziduí v příslušných tabulkách. Navíc ani pro jednu volbu rozdělení náhodných veličin z_t nebyl rozptyl dobře definován, tj. bylo $\hat{\alpha} + \hat{\beta} > 1$. Formálně tento problém lze vždy odstranit přidáním mezí pro příslušné parametry, v našem případě $\alpha + \beta \leq K < 1$, kde volba K je blízká jedné. Je celkem přirozené, že tímto omezením nedochází k výrazné změně odhadu parametru ω a pro odhady α a β často platí $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = K$. Potom je ale $\hat{\sigma^2} = \frac{\hat{\omega}}{1-K}$ a může tedy nabývat v podstatě libovolné hodnoty v závislosti na tom, jak zvolíme omezení K. V takovýchto případech se často užívají modely FIGARCH, FIAPARCH, FIEGARCH, protože uvedené chování naznačuje dlouhodobou závislost. Pro denní výnosy kotací tohoto titulu byl však parametr dlouhodobé závislosti statisticky nevýznamný pro všechny tři výše zmíněné varianty, přičemž tyto modely nepřinesly žádné podstatné zlepšení v jiných ohledech, spíše naopak. V tabulce 5.5 je vidět, že APARCH specifikace variační rovnice odstraňuje problém se standardizovanými chybami. Z tabulek 5.5 a 5.6 je patrné, že zlepšení testů dobré shody je důsledkem vlivu pouze parametru δ v APARCH specifikaci, neboť pro odhad parametru γ_1 nezamítáme hypotézu o jeho nulovosti na jakékoliv rozumné hladině spolehlivosti. Bohužel ani v tomto modelu nebyl rozptyl dobře definován. Proto jsme zvolili EGARCH model, ve kterém je rozptyl z definice modelu vždy kladný, viz předpis (5.14). Podobně jako u APARCH specifikace variační rovnice ani EGARCH model nenaznačoval přítomnost leverage efektu, a proto jsme z výsledného modelu vypustili parametr γ_1 zohledňující znaménko chyby předpovědi v meanové rovnici, viz (5.15). Podobně není zahrnut do výsledného modelu ani parametr μ, jehož odhad byl téměř identická nula. Odhady parametrů výsledného modelu jsou uvedeny v tabulce[12] 5.7. Výsledky statistických testů jsou uvedeny v tabulce 5.13, odkud nejsou patrné žádné větší problémy tohoto modelu. Na závěr shrňme ještě jeho vlastnosti graficky v obrázku 5.8. I zde je z QQ-plotu a „grafického testu dobré shody" patrná vhodnost výsledného modelu pro naše data.

[12]Jak bylo zmíněno výše, není zatím v balíku fSeries pro R model EGARCH k dispozici.

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
AR(1)	0.0506	0.0006	85.9100	0.0000	0.1835	NEOBSAHUJE
Cst(V)	1.7019	0.4200	4.0520	0.0001	0.6273	NEOBSAHUJE
ARCH(Alpha1)	−0.1777	0.1304	−1.3630	0.1731	0.6208	NEOBSAHUJE
GARCH(Beta1)	0.9763	0.0152	64.1200	0.0000	0.1572	NEOBSAHUJE
EGARCH(Theta2)	0.4556	0.0680	6.7010	0.0000	2.0629	NEOBSAHUJE
G.E.D.(DF)	0.8902	0.0542	16.4400	0.0000	NA	NEOBSAHUJE

Tabulka 5.7: Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-RADKOM.



Obrázek 5.8: Vlastnosti modelu Českých Telekomunikací.

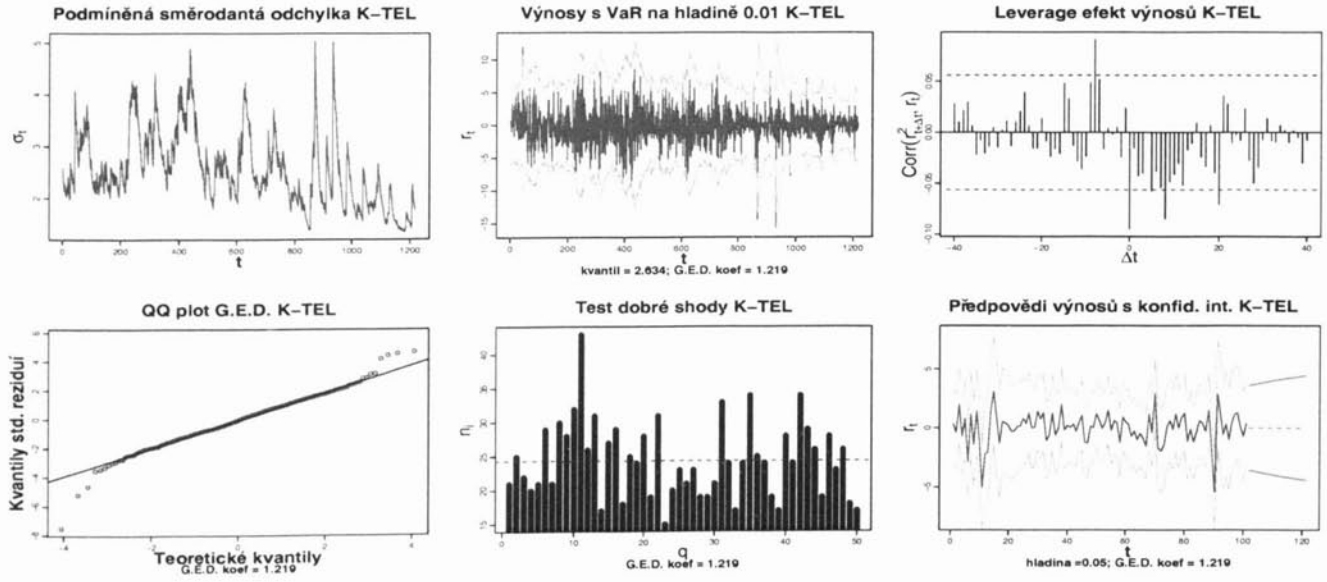
5.6.2 Český Telekom

Výsledný model: (1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) GED.
Tento titul neměl statisticky významné autokorelace, viz tabulka 3.1, a jeho chvosty byly vůbec nejlehčí mezi kotacemi, viz tabulky 4.1, 4.2 resp. 4.3. Navíc bylo patrné z tabulek 5.3, 5.4 a 5.5, že transformace ani zahrnutí leverage efektu do variační rovnice výsledného modelu nebyla nutná. S ohledem na lehčí chvosty denních výnosů kotací této akcie jsme se rozhodli pro volbu GED rozdělení[13] náhodných veličin z_t definovaných v (5.5). Výsledné odhady parametrů jsou uvedeny v tabulce 5.8. Ačkoliv jsou odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\omega}$ statisticky nevýznamně odlišné od nuly, po-

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
Cst(M)	0.0192	0.0251	0.7654	0.4442	0.5457	0.0192
Cst(V)	0.1361	0.1932	0.7045	0.4813	0.9101	0.1356
ARCH(Alpha1)	0.0875	0.0644	1.3580	0.1747	1.1287	0.0872
GARCH(Beta1)	0.8975	0.0842	10.6600	0.0000	1.2507	0.8978
G.E.D.(DF)	1.2187	0.0797	15.2900	0.0000	2.5613	1.2189

Tabulka 5.8: Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-TEL.

necháváme je v modelu kvůli lepší interpretaci. Jediným problémem výsledného modelu jsou vysoké hodnoty statistiky Nyblomova testu u některých parametrů modelu, což naznačuje jejich nestálost vzhledem k celému datovému souboru. Poznamenejme, že tento problém přetrvával i pro jiné specifikace variační rovnice a nepodařilo se nám jej odstranit. Výsledky testů konečného modelu jsou uvedeny v tabulce 5.13 a jeho grafické shrnutí lze nalézt v obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: Vlastnosti modelu Českého Telekomu.

[13] Poznamenejme jen, že chvosty byli stále moc těžké pro použití normálního rozdělení.

5.6.3 ČEZ

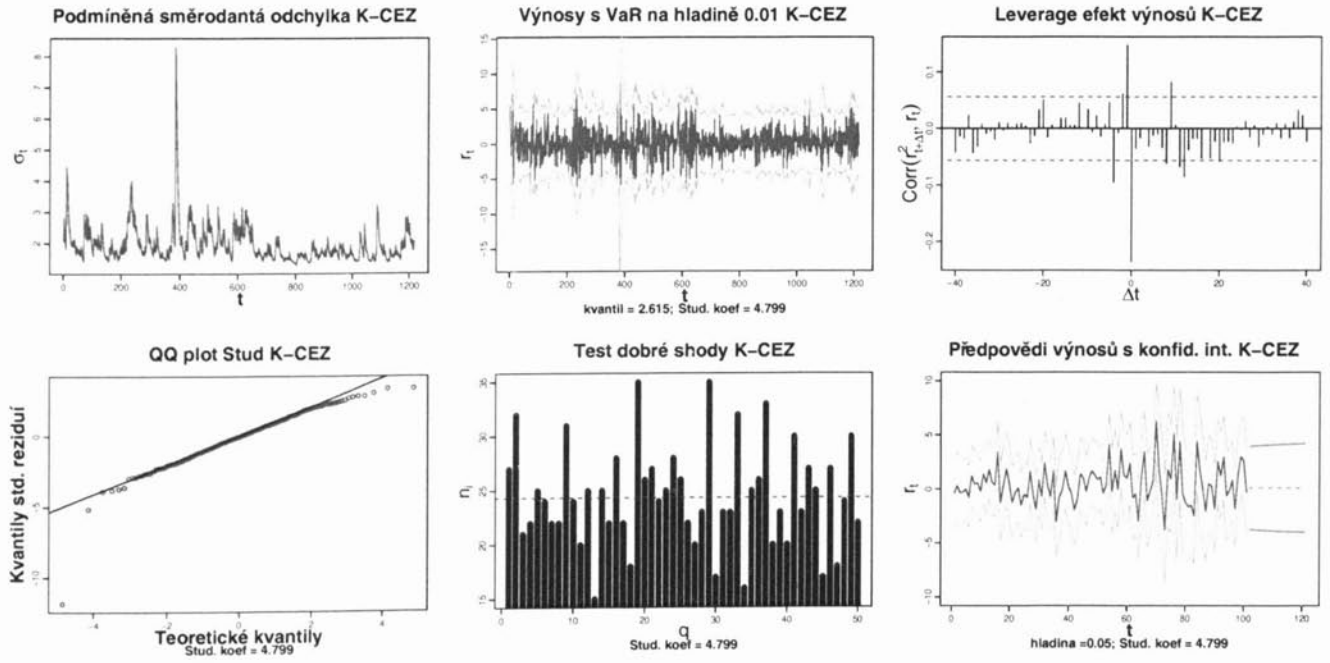
Výsledný model: (1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) Stud.

Jako u předešlého titulu ani zde nebyly autokorelace statisticky významné. Naopak z tabulky 4.1 je patrná extrémní špičatost tohoto titulu rovna 16.19, proto jsme se rozhodli pro Studentovo rozdělení náhodných veličin z_t ve variační rovnici. Odhadnuté parametry výsledného modelu jsou uvedeny v tabulce 5.8. Opět v modelu ponecháváme parametr ω kvůli lepší interpretaci

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
Cst(M)	0.1209	0.0451	2.6790	0.0075	0.7481	0.1209
Cst(V)	0.3104	0.2065	1.5030	0.1330	0.6859	0.3108
ARCH(Alpha1)	0.1277	0.0509	2.5070	0.0123	0.3514	0.1282
GARCH(Beta1)	0.8017	0.0931	8.6130	0.0000	0.4702	0.8016
Student(DF)	4.7992	0.7498	6.4000	0.0000	0.1091	4.7890

Tabulka 5.9: Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-CEZ.

variační rovnice. Statistické testy modelu lze nalézt v tabulce 5.13, kde je jediným zádrhelem zamítnutí složené hypotézy Engle-Manganelliho testu na 5% hladině spolehlivosti u náhodných veličin $\mathrm{Hit}_{1-\alpha;t}$ pro $\alpha = 0.025, 0.010, 0.005$. Vzhledem k tomu, že Kupiecův test v krátké pozici je pro uvedené hodnoty α v pořádku, domníváme se, že je porušen předpoklad $A2$ v složené hypotéze (5.35) tohoto testu. Tento jev přetrvával i pro jiné specifikace podmíněného rozptylu σ_t^2 a nepodařilo se nám jej eliminovat. Grafické shrnutí výsledného modelu je uvedeno v obrázku 5.10.



Obrázek 5.10: Vlastnosti modelu ČEZu.

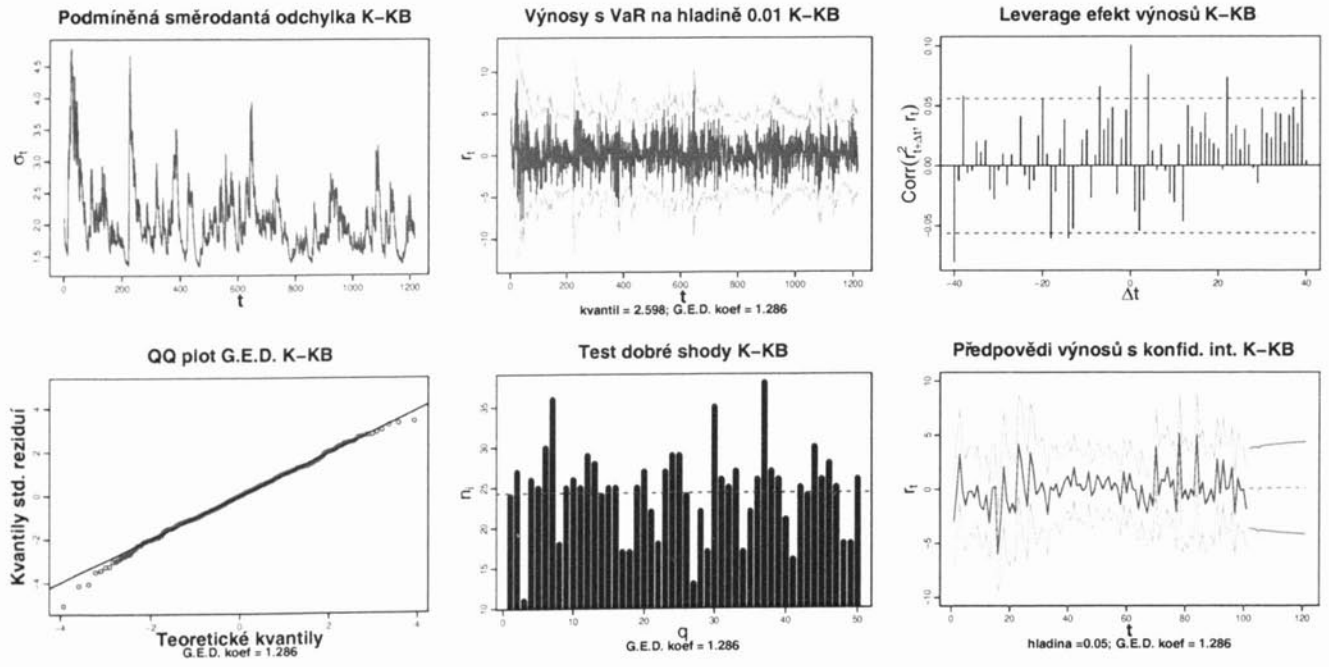
5.6.4 Komerční Banka

Výsledný model:(1,1)+ARMA(1,0,0,1;0)+GARCH(1,1) GED.
Jak je patrné z tabulek 5.3, 5.4 a 5.5 měly uvedené modely pro tento titul problémy ve specifikaci meanové rovnice, což jak se ukázalo, bylo vlivem statisticky významné autokorelace čtvrtého řádu, viz tabulka 3.1. Špičatost titulu ani jeho chvosty nebyly z nejtěžších, viz tabulky 4.1, 4.2 resp. 4.3. Z toho důvodu jsme zvolili GED rozdělení náhodných veličin z_t při specifikaci chybového procesu ϵ_t. Odhadnuté parametry modelu jsou uvedeny v tabulce 5.10. Odtud je patrné, že čtvrtý autokorelační koeficient je statisticky významný a výrazně přispívá k snížení chyby v meanové rovnici, porovnej tabulky 5.3, 5.4 a 5.5 s 5.13 pro testy reziduí. Grafické shrnutí

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
Cst(M)	0.1160	0.0674	1.7220	0.0854	0.1251	0.1214
AR(1)	0.0739	0.0282	2.6260	0.0088	0.1079	0.0776
AR(4)	0.0880	0.0372	2.3660	0.0181	0.4176	0.0878
Cst(V)	0.2843	0.0983	2.8930	0.0039	0.2018	0.2933
ARCH(Alpha1)	0.1162	0.0258	4.5000	0.0000	0.1407	0.1162
GARCH(Beta1)	0.8231	0.0360	22.8900	0.0000	NA	0.8203
G.E.D.(DF)	1.2864	0.0745	17.2700	0.0000	NA	1.2874

Tabulka 5.10: Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-KB.

výsledného modelu poskytuje obrázek 5.11.



Obrázek 5.11: Vlastnosti modelu Komerční Banky.

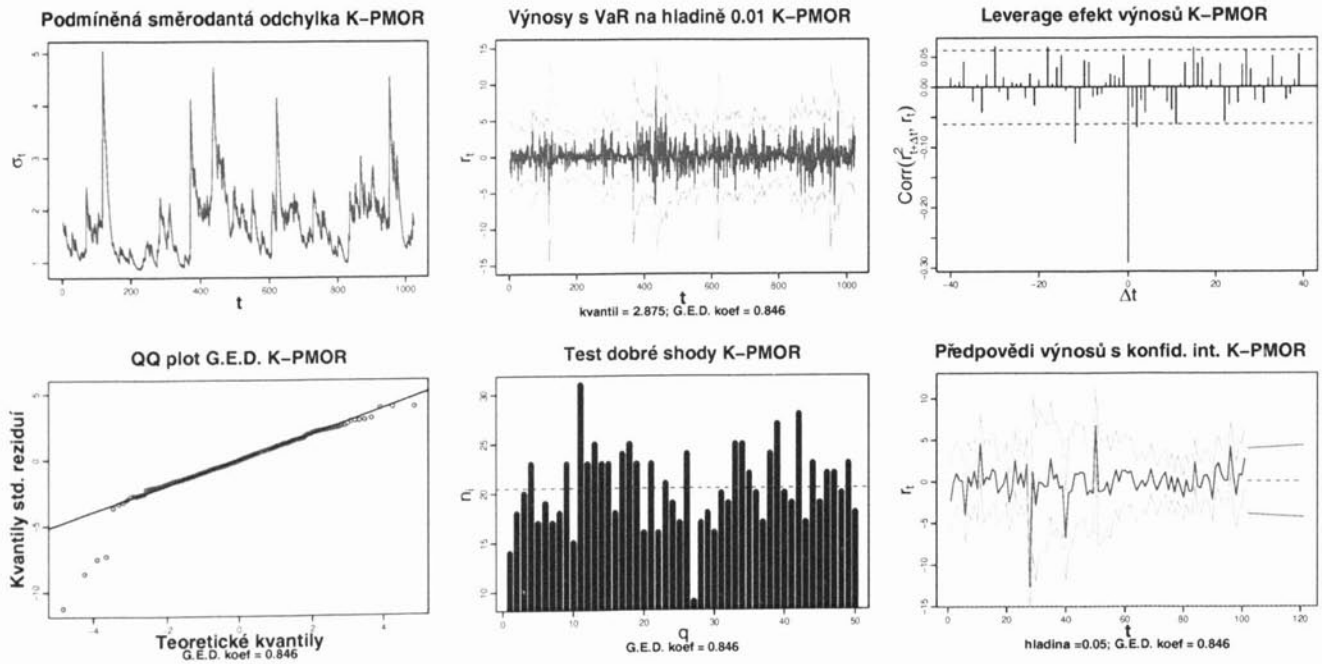
5.6.5 Philip Morris

Výsledný model:(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) GED.
Uvedený titul nevykazoval významnější autokorelační strukturu, proto nejsou v meanové rovnici výsledného modelu žádné autoregresní koeficienty denních výnosů. Tento titul měl, jak plyne z tabulek 4.1, 4.2 resp. 4.3, vůbec nejtěžší chvosty mezi denními výnosy kotací. Bohužel při použití Studentova rozdělení nebyl rozptyl σ^2 náhodných veličin ϵ_t dobře definován. Proto jsme nakonec zvolili GED rozdělení s vědomím, že může docházet k podcenění těžkosti chvostů tohoto titulu. Výsledné odhady parametrů modelu jsou uvedeny v tabulce 5.11. Z tabulky 5.13 je zřejmé, že

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
Cst(M)	0.0809	0.0008	106.0000	0.0000	0.0796	0.0809
Cst(V)	0.0792	0.0519	1.5250	0.1276	0.5361	0.0792
ARCH(Alpha1)	0.1122	0.0436	2.5740	0.0102	0.3529	0.1121
GARCH(Beta1)	0.8763	0.0422	20.7600	0.0000	0.6612	0.8763
G.E.D.(DF)	0.8461	0.0590	14.3500	0.0000	0.6495	0.8462

Tabulka 5.11: Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-PMOR.

i přes volbu rozdělení s lehčími chvosty nedochází k potížím. Grafické zhodnocení výsledného modelu je popsáno v obrázku 5.12.



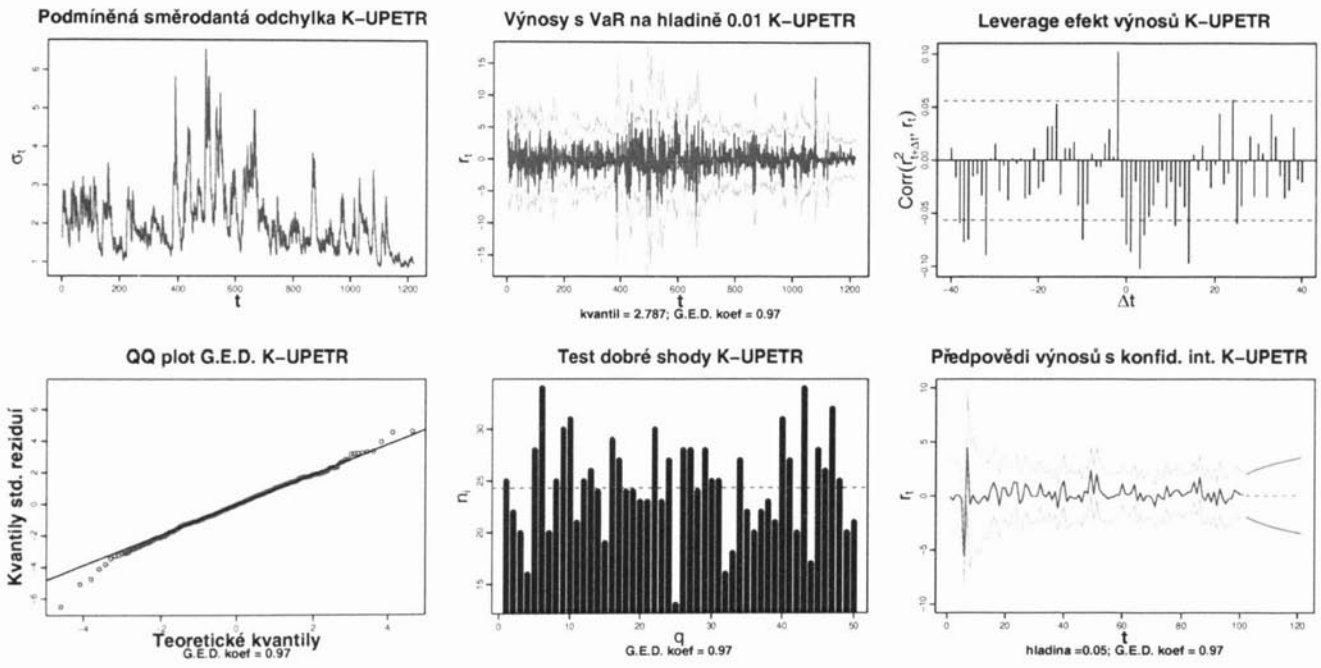
Obrázek 5.12: Vlastnosti modelu akcií Philip Morris.

5.6.6 Unipetrol

Výsledný model: (1,1)+ARMA(0,0)+APARCH(1,1) GED.
Tento titul měl jako jediný z denních výnosů kotací významný parametr leverage efektu γ_1 v APARCH specifikaci variační rovnice, viz tabulka 5.5. Z tabulek 5.3 a 5.4 jsou patrné problémy GARCH specifikace v testech založených na informační křivce popsaných v odstavci 5.3.2, konkrétně pro Studentovo rozdělení se jedná o testy vychýlení znaménka a pozitivního vychýlení ve velikosti. Pro GED rozdělení jde o test vychýlení znaménka. Nicméně problém s testem vychýlení znaménka přetrvává i v APARCH specifikaci, kde zamítáme hypotézu testu na 5% hladině spolehlivosti, avšak na 1% již hypotézu nezamítáme. Poznamenejme, že ani jinou volbou specifikace variační rovnice, či počtem parametrů v modelu zahrnutých se nám uvedený nedostatek nepodařilo odstranit. Dalším problémem APARCH specifikace naznačuje Engle-Manganelliho test v krátké pozici, kde je složená hypotéza tohoto testu zamítnuta na 5% hladině spolehlivosti pro $\alpha = 0.05, 0.01, 0.005, 0.0025$, viz tabulky 5.5 nebo 5.13. Nicméně Kupiecův test v krátké pozici na 5% hladině spolehlivosti nezamítáme ani jednou. I přesto, že GARCH specifikace variační rovnice tento problém nevykazovala, jsme se rozhodli použít APARCH model, který bere na zřetel leverage efekt. Tuto volbu modelu navíc podporovaly výsledky Nyblomova testu, které ukazovaly na větší nestabilitu parametrů v GARCH modelu než při APARCH specifikaci variační rovnice. Výsledné odhady parametrů modelu jsou uvedeny v tabulce 5.12. Poznamenejme, že v porovnání z předcházejícími modely se pro tuto specifikaci variační rovnice odhady parametrů v programech Ox a R značně lišili. Grafické zhodnocení výsledného modelu lze nalézt v obrázku 5.13.

	Odhad Ox	Std.Error	t.value	t.prob	Nyblom	Odhad R
Cst(M)	0.0726	0.0022	33.5900	0.0000	0.1094	0.0625
Cst(V)	0.1095	0.0729	1.5030	0.1332	1.0936	0.0907
ARCH(Alpha1)	0.1784	0.0563	3.1680	0.0016	0.3958	0.1614
GARCH(Beta1)	0.8263	0.0628	13.1600	0.0000	0.6663	0.8408
APARCH(Gamma1)	0.2798	0.1089	2.5700	0.0103	0.2961	0.3374
APARCH(Delta)	1.2257	0.2963	4.1360	0.0000	0.2027	0.9615
G.E.D.(DF)	0.9699	0.0566	17.1500	0.0000	0.9821	0.9781

Tabulka 5.12: Odhady Parametrů výsledného modelu pro titul K-UPETR.



Obrázek 5.13: Vlastnosti modelu Unipetrolu.

5.6.7 Tabulka testů denních výnosů kotací

	K-RADKOM	K-TEL	K-CEZ	K-KB	K-PMOR	K-UPETR
Std. res Q(10)	0.149	0.608	0.167	0.145	0.810	0.090
Std. res Q(15)	0.066	0.167	0.244	0.385	0.942	0.150
Std. res Q(20)	0.020*	0.266	0.228	0.572	0.672	0.286
Std. res^2 Q(10)	0.554	0.855	0.990	0.813	0.987	0.948
Std. res^2 Q(15)	0.830	0.921	0.987	0.812	0.998	0.950
Std. res^2 Q(20)	0.950	0.973	0.999	0.914	1.000	0.957
IC Sign	0.387	0.855	0.174	0.314	0.313	0.020*
IC Negative	0.451	0.967	0.589	0.068	0.383	0.944
IC Positive	0.090	0.870	0.490	0.245	0.917	0.142
IC Joint	0.297	0.998	0.600	0.150	0.649	0.069
Nyblom Joint 7	4.400	5.534	1.839	1.293	1.730	3.838
Chi-sq Gfit 40	0.917	0.256	1.000	0.510	0.613	0.796
Chi-sq Gfit 50	0.626	0.075	0.672	0.167	0.880	0.685
Chi-sq Gfit 60	0.609	0.372	0.867	0.213	0.535	0.865
Chi-sq Gfit 40 pen.	0.739	0.110	0.998	0.211	0.380	0.489
Chi-sq Gfit 50 pen.	0.378	0.027*	0.468	0.047*	0.738	0.396
Chi-sq Gfit 60 pen.	0.385	0.214	0.734	0.075	0.350	0.661
E&M:S 0.95	0.001*	0.641	0.187	0.727	0.528	0.004*
E&M:S 0.975	0.004*	0.382	0.010*	0.756	0.104	0.056
E&M:S 0.99	0.790	0.566	0.029*	0.998	0.908	0.001*
E&M:S 0.995	0.624	0.249	0.000*	1.000	0.966	0.000*
E&M:S 0.9975	0.206	0.097	0.880	0.972	0.990	0.000*
E&M:L 0.05	0.428	0.005*	0.110	0.146	0.825	0.615
E&M:L 0.025	0.100	0.546	0.009*	0.382	0.703	0.332
E&M:L 0.01	0.222	0.953	0.992	0.905	0.986	0.976
E&M:L 0.005	0.974	0.920	0.992	0.962	1.000	1.000
E&M:L 0.0025	0.991	0.535	0.991	0.958	0.970	0.999
Kup:S 0.95	0.894	0.183	0.911	0.183	0.745	0.984
Kup:S 0.975	0.389	0.104	0.916	0.792	0.785	0.104
Kup:S 0.99	0.589	0.338	0.200	0.961	0.689	0.961
Kup:S 0.995	0.405	0.717	0.164	0.649	0.604	0.972
Kup:S 0.9975	0.562	0.304	1.000	0.523	0.264	0.600
Kup:L 0.05	0.589	0.609	0.239	0.434	0.129	0.807
Kup:L 0.025	0.505	0.304	0.641	0.792	0.039*	0.938
Kup:L 0.01	0.813	0.961	0.961	0.293	0.463	0.607
Kup:L 0.005	0.967	0.717	0.972	0.269	0.956	0.972
Kup:L 0.0025	0.562	0.304	0.600	0.304	0.406	0.600

Tabulka 5.13: Testy pro výsledné modely výnosů akcií BCPP pro kotace. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti.

5.7 Závěr

V této kapitole práce jsme se pokusili podat ucelený přehled o nejčastěji používaných modelech v ARCH modelování, který jsme doplnili o konkrétní příklad, na němž jsme vyložili hlavní teoretické vlastnosti procesů třídy ARCH. Poté jsme uvedli statistické testy, které nám pomáhaly k diagnostice modelu pro jednotlivé akcie. Ukázali jsme také jedno z přímých použití ARCH modelování v oblasti řízení rizika, konkrétně při odhadech value-at-risk. Uvedené postupy jsme aplikovali na data z BCPP, kde jsme pozorovali značné odlišnosti mezi obchody a kotacemi jednotlivých titulů a poodhalili jsme tak zajímavý rys trhu. Nakonec jsme navrhli několik modelů třídy ARCH pro modelování denních výnosů kotací BCPP, které jsme doprovodili grafickou dokumentací a tabulkami odhadů parametrů v jednotlivých modelech.

Kapitola 6

Závěr a celkové shrnutí diplomové práce

V textu jsme se snažili na základě tří hlavních částí, kterými byly studium hypotézy náhodné procházky, těžkosti chvostů a ARCH modelování výnosů jednotlivých titulů, podat ucelený náhled na chování titulů BCPP. Nejdůležitější námi dosažené výsledky zde nyní shrneme.

V kapitole 3 jsme se zabývali hypotézou náhodné procházky výnosů jednotlivých titulů BCPP. Na základě testů podílem rozptylů jsme zde ukázali, že model předpokládající, že výnosy jsou i.i.d. náhodné veličiny, je pro popis chování výnosů jednotlivých titulů neadekvátní. Dále jsme představili často používaný alternativní model předpokládající pouze nakorelovanost výnosů, který již popisoval chování daných titulů BCPP mnohem lépe. V této kapitole jsme také na základě autokorelační struktury výnosů akcií BCPP formulovali hypotézu o efektivnosti českého finančního trhu.

V kapitole 4 jsme zmínili užitečnou modifikaci často používaného Hillova odhadu těžkosti chvostu. Dále jsme při studiu chování chvostu rozdělení výnosů nepozorovali rozdíl mezi výnosy obchodů a kotací, což podporovalo naši hypotézu o efektivitě českého finančního trhu z předešlé kapitoly. Přitom pro chovaní obchodů i kotací bylo společné, že levé chvosty výnosů jsou těžší než chvosty pravé, což nasvědčovalo tomu, že pro větší změny ceny aktiva je častější pokles ceny než-li její růst. V kapitole zabývající se ARCH modelováním jsme se ale přesvědčili, že směr změny ceny aktiva nemá na volatilitu daného aktiva vliv.

Třetím hlavním tématem této diplomové práce bylo ARCH modelování, kde jsme se snažili využít výsledky dosažené v předešlých kapitolách. Pokusili jsme se vyložit ucelené spektrum nejpoužívanějších modelů a navrhnout některé konkrétní modely pro tituly obchodované na BCPP, přičemž jsme porovnali odhady parametrů modelů poskytované statistickými programy R a Ox. Navíc jsme poukázali na další zajímavý rys pražské burzy, konkrétně jsme vyslovili hypotézu o chování cen obchodů v několika denním horizontu a o vzájemné kompetitivnosti jednotlivých tvůrců trhu.

Na základě uvedených výsledků můžeme říci, že chovaní a dynamika BCPP je srovnatelná s největšími světovými finančními trhy a proto je BCPP právem od června 2001 přidruženým členem Federace evropských burz (FESE) (od 1. května 2004 se v návaznosti na vstup České republiky do Evropské unie stala řádným členem této federace) a od května 2004 má statut definované zahraniční burzy udělovaný americkou Komisí pro cenné papíry a burzy (US SEC), který zařazuje BCPP do prestižního seznamu neamerických burz bezpečných pro investory.

V celém textu byl hlavní důraz kladen na interpretaci jednotlivých dílčích výsledků, přičemž potřebnou teorii jsme se snažili vyložit v míře, která by čtenáři umožnila získat náhled na studovaný aspekt trhu bez jeho dřívější hlubší znalosti. Text byl doplněn značným množstvím tabulek, které mohou posloužit pro další studium chování českého finančního trhu. K práci je také přiloženo CD s pracovním prostředím programu R, kde jsou k dispozici námi používaná data BCPP a procedury, které nejsou v R standardně naprogramovány, viz apendix v kapitole 7.

Kapitola 7

Apendix

Přehled datových struktur a naprogramovaných procedur pro statistický program R. Uvedené objekty jsou k dispozici na přiloženém CD ve formě pracovního prostředí (`workspace`) programu R.

Data

`cK.dtm` Ceny kotací jednotlivých titulů BCPP, které byly získány jako aritmetický průměr cen kotace na prodej a nákup daného aktiva. Objekt je dvojrozměrný list, kde první souřadnice určuje denní, týdenní resp. měsíční cenu akcie a druhá souřadnice určuje příslušnou akcii.

`cO.dtm` Ceny provedených obchodů jednotlivých titulů BCPP. Objekt je dvojrozměrný list, kde první souřadnice určuje denní, týdenní resp. měsíční cenu akcie a druhá souřadnice určuje příslušnou akcii.

`vK.dtm` Výnosy kotací jednotlivých titulů BCPP. Objekt je dvojrozměrný list, kde první souřadnice určuje denní, týdenní resp. měsíční výnos akcie a druhá souřadnice určuje příslušnou akcii.

`vO.dtm` Výnosy obchodů jednotlivých titulů BCPP. Objekt je dvojrozměrný list, kde první souřadnice určuje denní, týdenní resp. měsíční výnos akcie a druhá souřadnice určuje příslušnou akcii.

Procedury

`hill` Pro sestupně seřazený vektor výnosů dané akcie spočte klasický Hillův odhad těžkosti chvostu definovaný v (4.8).

`hillmod` Pro vektor výnosů dané akcie spočte modifikovaný Hillův odhad těžkosti obou, levého a pravého chvostu definovaný v (4.17). Procedura umožňuje volbou parametru `trash` nastavit minimální délku vektoru výnosů, pro kterou bude zahájen výpočet odhadu.

`ratio.RW1` Pro vektor cen dané akcie a dané q spočte p-hodnotu, testovou statistiku a $\widehat{VR}(q)$ pro test platnosti modelu RW1, viz sekce 3.1.2.

`ratio.RW3` Pro vektor cen dané akcie a dané q spočte p-hodnotu, testovou statistiku a $\widehat{VR}(q)$ pro test platnosti modelu RW3, viz sekce 3.1.2.

Seznam obrázků

3.1 Vybrané autokorelace výnosů obchodů a kotací BCPP. 16

4.1 Porovnání indexů chvostů z tabulky 4.2. V levé části jsou porovnány odhady α pro obchody, v pravé pro kotace. 27
4.2 Q-Q ploty denních výnosů kotací proti Paretovu rozdělení pro $\alpha = 1, 2, 4$. 29

5.1 Autokorelace absolutních hodnot výnosů pro vybrané obchody a kotace BCPP. Interval spolehlivosti je dán hodnotami $\pm q_{0.975}\frac{1}{\sqrt{T}}$, kde T je počet pozorování a $q_{0.975}$ je příslušný kvantil normálního rozdělení $\mathbf{N}(0,1)$. 33
5.2 Leverage efekt výnosů pro vybrané obchody a kotace BCPP. Interval spolehlivosti je dán hodnotami $\pm q_{0.975}\frac{1}{\sqrt{T}}$, kde T je počet pozorování a $q_{0.975}$ je příslušný kvantil normálního rozdělení $\mathbf{N}(0,1)$. 34
5.3 IC pro denní kotace výnosů Komerční banky, které jsou dány vztahy (5.27) a (5.28). . . 44
5.4 Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) s volbou normálního (první řádek), GED (druhý řádek) a Studentova (třetí řádek) rozdělení. 48
5.5 Porovnání testů dobré shody pro model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) GED. . . . 50
5.6 Porovnání datové struktury výnosů BCPP mezi obchody a kotacemi pro tituly TEL a KB. V prvním řádku jsou výnosy kotací, v druhém výnosy obchodů. V obou případech jsou nulové výnosy vyznačeny červeně. V posledním třetím řádku jsou porovnány výnosy obchodů a kotací společně. 51
5.7 Závislost tvaru hustoty GED rozdělení na parametru ν. 51
5.8 Vlastnosti modelu Českých Telekomunikací. 59
5.9 Vlastnosti modelu Českého Telekomu. 60
5.10 Vlastnosti modelu ČEZu. 61
5.11 Vlastnosti modelu Komerční Banky. 62
5.12 Vlastnosti modelu akcií Philip Morris. 63
5.13 Vlastnosti modelu Unipetrolu. 65

Seznam tabulek

2.1 Zkratky názvů akcií BCPP. 8

3.1 Autokorelační struktura výnosů vybraných titulů BCPP. V horní části tabulky jsou uvedeny výsledky pro obchody, v dolní pro kotace. Zleva doprava je postupně uveden název titulu, typ časového odstupu, počet pozorování, odhad prvních pěti autokorelací, počet statisticky významných $\hat{\rho}(i)$ ve smyslu (3.5) pro $i = 1, \ldots, 10$, $i = 11, \ldots, 20$, $i = 21, \ldots, 30$ a $i = 1, \ldots, 30$. Všechny testy jsou prováděny na 5% hladině spolehlivosti, přičemž signifikantní výsledky jsou označeny hvězdičkou. 14

3.2 Portmanteauovy testy denních výnosů BCPP pro různá m. V horní části jsou uvedeny p-hodnoty testů pro obchody, v dolní pro kotace. Hvězdička značí signifikantní test na 5% hladině spolehlivosti. 15

3.3 Počty denních výnosů obchodů a kotací BCPP. 17

3.4 Testy podílem rozptylů denních výnosů za platnosti modelu RW1 a RW3 pro obchody a kotace. Pro každý titul je testován jak celý datový soubor tak i jeho první a druhá polovina. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace. Pro každé q uvádíme odhad podílu rozptylů definovaný v (3.15) a příslušné p-hodnoty hodnoty testů za platnosti modelu RW1 (p-val RW1) a modelu RW3 (p-val RW3). Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti. 19

4.1 Empirické šikmosti a spičatosti výnosů vybraných akcií BCPP pro různé časové odstupy s příslušnými počty pozorování. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace. Všechny testy jsou prováděny na 5% hladině spolehlivosti, přičemž signifikantní výsledky jsou označeny hvězdičkou. 25

4.2 Koeficienty těžkosti chvostů počítané modifikovaným Hillovým odhadem pro výnosy vybraných akcií BCPP. V levé části jsou uvedeny koeficienty denních výnosy obchodů s příslušnými počty pozorování a poté koeficienty těžkosti chvostů a počty pozorování pro týdenní výnosy obchodů. V pravé části jsou výsledky shrnuty stejným způsobem pro kotace. Do počtů pozorování pro levý a pravý chvost nejsou zahrnuty nulové hodnoty. . . 26

4.3 Odhady koeficientu těžkosti chvostu výnosů vybraných akcií BCPP počítané klasickým Hillovým odhadem pro různě velké prahy. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody, v pravé pro kotace. 31

5.1 Porovnání šikmostí náhodných veličin z_t a r_t v modelu C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro $\alpha = 0.1$ a $\beta = 0.8$. 43

5.2 Procentuální vyjádření nulových výnosů pro obchody a kotace 49
5.3 Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro šikmé Studentovo rozdělení výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl či špičatost v modelu dobře definována. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti. . . 53
5.4 Model C(1,1)+ARMA(0,0)+GARCH(1,1) pro GED rozdělení výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl či špičatost v modelu dobře definována. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti. 54
5.5 Model C(1,1)+ARMA(1, 0)+APARCH(1,1) s GED rozdělením výnosů akcií BCPP. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 (Pro Nyblomův test jsou uvedeny pouze hodnoty testové statistiky). Prostřední část říká, je-li rozptyl v modelu dobře definován. V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. V levé části jsou uvedeny výsledky pro obchody v pravé pro kotace. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti. 55
5.6 Odhady parametrů pro modely uvedené v tabulkách 5.3, 5.4, 5.5. 56
5.7 Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-RADKOM. 59
5.8 Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-TEL. 60
5.9 Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-CEZ. 61
5.10 Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-KB. 62
5.11 Odhady parametrů výsledného modelu pro titul K-PMOR. 63
5.12 Odhady Parametrů výsledného modelu pro titul K-UPETR. 64
5.13 Testy pro výsledné modely výnosů akcií BCPP pro kotace. V horní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.3 V dolní části jsou postupně uvedeny p-hodnoty testů z odstavce 5.4. Hvězdičkou jsou označeny testy signifikantní na 5% hladině spolehlivosti. 66

Literatura

J. Anděl. *Základy matematické statistiky*. matfyzpress, 2005.

R. Baillie. Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, 73:5–59, 1996.

F. Black. Studies of stock market volatility changes. *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pages 177–181, 1976.

T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307—327, 1986.

J. P. Bouchaud. Power laws in economics and finance. *Quantitative Finance*, 1(1), 2001.

J. Y. Campbell, A. W. Lo, A. C. MacKinlay, A. Y. Lo, and A. C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, December 1996.

R. Cont. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *QUANTITATIVE FINANCE*, 1:223–236, 2001. available at http://www.cmap.polytechnique.fr/ rama/papers/empirical.pdf.

R. A. Davis and T. Mikosch. The sample autocorrelations of financial time series models. *EURANDOM Working Paper*, 1999.

R. Engle and S. Manganelli. Caviar: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Working Paper, San Diego, Department of Economics.*, 1999.

R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, Jul 1982.

R. F. Engle and V. K. Ng. Measuring and testing the impact of news on volatility. *The Journal of Finance*, 48(5):1749–1778, Dec 1993.

C. Fernández and M. Steel. On bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441):359–371, 1998.

P. Giot and S. Laurent. Modelling daily value-at-risk using realized volatility and arch type models. *Journal of Empirical Finance*, 2003.

L. De Haan and S. I. Resnick. A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution. *Journal of the Royal Statistical Society*, 42(1):83–87, 1980. Series B.

B. M. Hill. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The Annals of Statistics*, 3(5):1163–1174, September 1975.

M. C. A. B. Hols and C. G. deVries. The limiting distribution of extremal exchange rate returns. *Journal of Applied Econometrics*, 6(3):287–302, July-Sept 1991.

R. Huisman, K. G. Koedijk, C. J. Kool, and F. Palm. Tail-index estimates in small samples. *Journal of Business & Economic Statistics*, 19(2):208–216, April 2001. available at http://ideas.repec.org/a/bes/jnlbes/v19y2001i2p208-16.html.

D. W. Jensen and C. G. deVries. On the frequency of large stock returns: Putting booms and busts into perspective. *The Review of Economics and Statistics*, 73, 1991.

P. Kearns and A. Pagan. Estimating the density tail index for financial time series. *The Review of Economics and Statistics*, 79(2):171–175, May 1997. available at http://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v79y1997i2p171-175.html.

P. Kupiec. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3:73–84, 1995.

S. Laurent and J. P. Peters. *A Tutorial for G@RCH 2.3, a Complete Ox Package for Estimating and Forecasting ARCH Models*, April 2002.

L. Luksan, D. Würtz, and Y. Chalabi. *Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors An R and SPlus Software Implementation*, 2006.

B. Mandelbrot. The variaton of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419, October 1963.

A. J. McNeil. Estimating the tails of loss severenity distribution using extreme value theory. December 1996.

D. Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59 (2):349–370, 1991.

J. Nyblom. Testing for the constancy of parameters over time. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405):223–230, Mar 1989.

F. C. Palm and P. J. G. Vlaar. Simple diagnostics procedures for modelling financial time series. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 81:85–101, 1997.

J. Pickands. Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3(1): 199–131, January 1975.

FACULTY
oddělení
Vítovská 83
Praha 8

ERRATA

Oprava vzorců

Vzorec (3.8) strana 11

$$VR(q) := \frac{\mathsf{Var} \sum_{i=0}^{q-1} r_{t-i}}{q \mathsf{Var}\, r_t}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Vzorce (4.1) a (4.2) strana 20

$$\mathsf{P}(R > r) = kr^{-\alpha}, \quad r \geq k^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k > 0, \quad \alpha > 0.$$

$$\mathsf{E}R^m < \infty, \quad 0 < m < \alpha, \quad r \geq k^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k > 0, \quad \alpha > 0.$$

Vzorec (4.11) strana 23

$$\mathsf{P}(R < r) = 1 - ar^{-\alpha}(1 + br^{-\beta}), \quad \alpha, \beta > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Doplnění zdrojů literatury

Článek McNeil [1996] je dostupný na adrese

`http://www.ma.hw.ac.uk/%7Emcneil/ftp/astin.pdf`