Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Katarína Quittnerová

Funkce více proměnných s konečnou variací

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza
Studijní plán: Teorie funkcí, funkcionální analýza a teorie potenciálu

Poďakovanie:

Ďakujem môjmu vedúcemu diplomovej práce Prof. RNDr. Janovi Malému, DrSc. za návrh zaujímavej témy, mnoho podnetných nápadov veľmi podstatných pre dôkaz hlavných tvrdení tejto práce, pomoc pri odstraňovaní chýb, námety k zdokonaľovaniu práce a v neposlednom rade za trpezlivosť a čas, ktorý mi venoval.
Ďalej ďakujem RNDr. Stanislavovi Henclovi, Ph.D. a Petrovi Bellovi za cenné konzultácie.
Za podporu ďakujem aj Nečasovmu centru matematického modelovania ($LC06052$) financovaného MŠMT.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.

V Prahe dňa 18.4.2007 Katarína Quittnerová

Obsah

Názov práce: Funkce více proměnných s konečnou variací
Autor: Katarína Quittnerová
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
e-mail vedúceho: `maly@karlin.mff.cuni.cz`
Abstrakt: Nedávno bolo ukázané, že inverzia homeomorfizmu f s konečnou variáciou na oblasti v $\mathbb{R}^2$ je opäť funkcia s konečnou variáciou. Mieru Df^{-1} vyjadríme pomocou $\operatorname{adj} Df$. V dimenzii $n \geq 3$ je inverzia homeomorfizmu $f \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ v BV, opäť dokážeme vyjadrenie miery Df^{-1} pomocou $\operatorname{adj} Df$. Tieto vzťahy sú zobecnením vzťahov medzi $|Df^{-1}|$ a $|\operatorname{adj} Df|$ známych za silnejších predpokladov na homeomorfizmus f. Ďalej pre homeomorfizmy s konečnou distorziou zoslabíme predpoklady známeho tvrdenia, za ktorých je inverzia f^{-1} dokonca v priestore $W^{1,n}$.
Kľúčové slová: homeomorfizmus, funkcie s konečnou variáciou, Sobolevove priestory

Title: Functions of bounded variation of several variables
Author: Katarína Quittnerová
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
Supervisor's e-mail address: `maly@karlin.mff.cuni.cz`
Abstract: It was shown recently that the inverse of a homeomorphism f of bounded variation on a domain in $\mathbb{R}^2$ is also of bounded variation. We represent the measure Df^{-1} in terms of $\operatorname{adj} Df$. In dimension $n \geq 3$ the inverse of a homeomorphism $f \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ is in BV, we show a representation of Df^{-1} in terms of $\operatorname{adj} Df$ again. These relationships generalize results for $|Df^{-1}|$ and $|\operatorname{adj} Df|$ known under stronger assumptions on f. For homeomorphisms of finite distorsion we weaken the assumptions under which it is known that the inverse f^{-1} is even in $W^{1,n}$.
Keywords: homeomorphism, functions of bounded variation, Sobolev spaces

1 Úvod

Majme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú množinu, $n \geq 1$. Pripomeňme, že vektorová funkcia $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je *funkcia s konečnou variáciou*, značíme $f \in BV(\Omega, \mathbb{R}^n)$, ak jednotlivé zložky $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, patria do priestoru $BV(\Omega)$. To znamená, že distributívne parciálne derivácie každej zložky f_i sú miery s konečnou totálnou variáciou v Ω: existujú znamienkové Radonove miery $\mu_1^i, \ldots, \mu_n^i$ definované na Ω tak, že pre $j = 1, 2, \ldots, n$ máme $|\mu_j^i|(\Omega) < \infty$ a

$$\int_\Omega f_i D_j \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \, d\mu_j^i$$

pre každú $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, značíme $D_j f_i = \mu_j^i$. Distributívny gradient $Df = (D_j f_i)_{i,j=1}^n$ je potom matica znamienkových Radonových mier. Môžeme ju tiež brať ako $\mathbb{R}^{n\times n}$-rozmernú vektorovú Radonovu mieru.

Ďalej $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, ak $f \in BV(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ pre každú otvorenú $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$.

V dimenzii $n = 1$ patrí každá monotónna funkcia $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ do priestoru $BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$. Pre každý homeomorfizmus $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$ teda aj inverzia $f^{-1} \in BV_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R})$. Prednedávnom bolo v článku [16] ukázané, že toto platí aj v dimenzii $n = 2$:

Veta 1.1 ([16], Veta 1.1)**.** *Nech $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ sú otvorené a $f : \Omega \to G$ je homeomorfizmus. Potom $f \in BV_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ práve vtedy, keď $f^{-1} \in BV_{loc}(G, \mathbb{R}^2)$.*

Tento výsledok zobecníme tým, že dokázeme úzky vzťah medzi distributívnymi deriváciami Df a Df^{-1}:

Veta 1.2. *Majme oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a homeomorfizmus $f \in BV(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $G = f(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$. Predpokladajme, že f je kladne orientovaný, viď* Definíciu 3.3. *Potom $f^{-1} \in BV_{loc}(G, \mathbb{R}^2)$ a pre každú $E \subset \Omega$ borelovskú platí*

$$Df^{-1}(f(E)) = \operatorname{adj} Df((E)). \tag{1}$$

V dimenzii $n \geq 3$ už veta analogická k *Vete 1.1* neplatí. Pre každé $n \geq 3$ a $0 < \epsilon < 1$ totiž existuje homeomorfizmus $f \in W^{1,n-1-\epsilon}((-1,1)^n, \mathbb{R}^n)$, pre ktorý $f^{-1} \notin BV_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$, viď [16], *Príklad 3.1.* V článku [5] sa na druhú stranu podarilo ukázať, že $f \in W^{1,n-1}$ už stačí:

Veta 1.3 ([5], Veta 1.1)**.** *Majme $n \geq 3$. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a $f \in W^{1,n-1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je homeomorfizmus. Potom $f^{-1} \in BV_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$.*

Aj v tomto prípade dokážeme vzťah analogický k (1):

Veta 1.4. *Majme $n \geq 3$, oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfizmus $f \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $G = f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$. Predpokladajme, že f je kladne orientovaný, viď* Definíciu 4.2. *Potom pre každú $E \subset \Omega$ borelovskú platí*

$$Df^{-1}(f(E)) = \int_E \operatorname{adj} Df. \tag{2}$$

Vzťahy (1), (2) nie je ťažké odvodiť, ak sú obe funkcie f, f^{-1} hladké. Podobné vzťahy boli v literatúre dokázané aj pre slabo diferencovateľné f, f^{-1}, vždy však za silnejších predpokladov na regularitu homeomorfizmu f, ako máme vo *Vete 1.2* a *Vete 1.4*. Uveďme asi najzaujímavejšie z týchto známych výsledkov. Oba sa týkajú *zobrazení s konečnou distorziou*, viď *Definíciu 5.4*.

Veta 1.5 ([14], Veta 1.2). *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblasť a $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ je homeomorfizmus s konečnou distorziou. Potom $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^2)$, f^{-1} je s konečnou distorziou a platí*

$$\int_{f(\Omega)} |Df^{-1}(y)|\, dy = \int_{\Omega} |Df(x)|\, dx. \tag{3}$$

Veta 1.6 ([15], Veta 1.2). *Nech $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfizmus s konečnou distorziou taký, že $|Df| \in L^{n-1,1}(\Omega)$. Potom $f^{-1} \in W^{1,1}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$, f^{-1} je s konečnou distorziou a platí*

$$\int_{f(\Omega)} |Df^{-1}(y)|\, dy = \int_{\Omega} |\operatorname{adj} Df(x)|\, dx. \tag{4}$$

Priestor $L^{n-1,1}(\Omega)$ vo *Vete 1.6* je Lorentzov priestor, pre ktorý v prípade $n > 2$ platí $L^{n-1,1}(\Omega) \subsetneqq L^{n-1}(\Omega)$. Predpoklady *Vety 1.6* sú teda silnejšie, ako náš predpoklad $f \in W^{1,n-1}(\Omega)$ vo *Vete 1.4*.

Ďalšou výhodou našich vzťahov (1), (2) oproti vzťahom (3), (4) dokázaným vo *Vete 1.5* a *Vete 1.6* je absencia "absolútnej hodnoty", t. j. normy príslušných matíc resp. variácie príslušných mier. Za predpokladov *Vety 1.2* resp. *Vety 1.4* dostaneme vzťah (3) resp. (4) zo vzťahu (1) resp. (2) ľahko – ak sa totiž dve miery zhodujú, potom sa zhodujú aj ich variácie. Pritom uvažovaním rozkladu na jednotlivé komponenty si ľahko rozmyslíme, že vzťah (3) resp. (4) dostaneme v našom prípade aj bez predpokladu súvislosti množiny Ω a kladnej orientácie homeomorfizmu f.

V článkoch [14], [15] sa ďalej študuje otázka, či za istých predpokladov na integrabilitu *distorzie* (viď *Definíciu 5.4*) homeomorfizmu f (a samozrejme istých predpokladov na regularitu f) dostaneme pre inverziu f^{-1} lepšiu regularitu ako $W^{1,1}$. Tieto výsledky vylepšíme v kapitole 5.

Na záver ešte podotknime, že články [14], [15], [16], [5], z ktorých v tejto práci vychádzame, nie sú zďaleka jediné články súvisiace s problematikou, za akých predpokladov na homeomorfizmus $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vieme usúdiť $f^{-1} \in W^{1,1}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ resp. $f^{-1} \in W^{1,q}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ pre nejaké $q > 1$. V rovinnom prípade bolo napríklad už v článku [13] ukázané, že $f \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ a integrabilita distorzie f implikuje $f^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}$. Relatívne silný predpoklad $f \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ bol jemne zoslabený v [19]. Ďalej z výsledkov v [27] plynie, že ak homeomorfizmus $f \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ pre $p > n-1$ a f spĺňa Luzinove (N) a (N^{-1}) podmienky, potom $f^{-1} \in W^{1,1}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$. Problémy nášho typu vyvstávajú aj pri štúdiu nelineárnej elasticity, viď [3], [26], [23], [10] a Beltramiho rovnice, viď [7], [4], [25], [12], [17] a [18].

1.1 Základné značenie

Jednotkové vektory štandardnej kanonickej bázy v $\mathbb{R}^n$ budeme značiť $e_1, e_2, \dots, e_n$. Pre bod $x \in \mathbb{R}^n$ bude x_i vždy značiť jeho i-tu súradnicu, t. j. $x_i = x \cdot e_i$. Ďalej λ_n bude Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^{n-1}$ bude $(n-1)$-rozmerná Hausdorffova miera v $\mathbb{R}^n$.

Otvorenú guľu v $\mathbb{R}^n$ so stredom x a polomerom r značíme $B(x,r)$. Objem gule s polomerom 1 v $\mathbb{R}^n$ značíme α_n. Konštantu α_n vieme vyjadriť pomocou Γ-funkcie:

$$\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Pripomeňme, že pre každú merateľnú funkciu v na $(0,\infty)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(|x|)\,dx = n\alpha_n \int_0^\infty r^{n-1} v(r)\,dr,$$

ak niektorý z integrálov má zmysel, viď napr. [20], cvičenie 26.17(a) (s návodom) alebo [21], kapitola 1, cvičenie 10.

Majme množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Značením $A \subset\subset B$ budeme myslieť, že $\overline{A}$ je kompaktná a $\overline{A} \subset B$. Ďalej $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ je doplnok množiny A, $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$ je topologická hranica množiny A.

Charakteristickú funkciu merateľnej množiny A značíme χ_A, t. j. $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ďalej identické zobrazenie značíme id, t. j. $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $id(x) = x$.

Pre maticu $M \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ značíme $\operatorname{adj} M$ jej adjungovanú maticu. Pripomeňme, že $\operatorname{adj} M$ je až na znamienka tvojená všetkými $(n-1)\times(n-1)$-minormi (t.j. subdeterminantmi) matice M a pre regulárne matice M platí

$$\operatorname{adj} M = M^{-1} \det M.$$

Majme otvorenú podmnožinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazenie $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Pod *distributívnou divergenciou* $\operatorname{Div}\Phi$ budeme chápať súčet distributívnych derivácií $D_i\Phi_i$, t. j. prvok z $(\mathcal{C}_c^\infty)*$ definovaný ako

$$\langle \operatorname{Div}\Phi, \varphi\rangle = -\int_\Omega \Phi\cdot\nabla\varphi \qquad \text{pre } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Ak je $\Phi \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, potom $\operatorname{Div}\Phi$ vieme stotožniť s funkciou $\operatorname{div}\Phi$, ak je $\Phi \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, potom $\operatorname{Div}\Phi$ je miera.

2 Pomocné tvrdenia

2.1 Gauss – Greenova veta pre hladké funkcie a množiny s konečným perimetrom

V tejto podkapitole pripomenieme známu Gauss – Greenovu vetu pre množiny s konečným perimetrom. Uvedené tvrdenia je možné nájsť v [1] v kapitolách 3.3 a 3.5 alebo v [9]. Uvedieme ich najmä kvôli zjednoteniu značenia.

Definícia 2.1. Majme merateľnú množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ a bod $x \in \mathbb{R}^n$, definujme

$$\overline{d}(x, E) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|}.$$

Povieme, že bod $x \in \mathbb{R}^n$ je *bodom hustoty* množiny $E \subset \mathbb{R}^n$, ak $\overline{d}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) = 0$. Ďalej x má *nulovú hustotu* voči E, ak $\overline{d}(x, E) = 0$. Konečne definujme *esenciálnu hranicu* množiny E ako

$$\partial_* E := \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{d}(x, E) > 0, \overline{d}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 0\}.$$

Potom $\partial_* E \subset \partial E$ je borelovská množina.

Ďalej povieme, že v bode $x \in \mathbb{R}^n$ existuje *(vonkajšia) Federerova normála*, značíme ν^E, ak pre polpriestor $H_{\nu^E} = \{h \in \mathbb{R}^n : h \cdot \nu^E < 0\}$ a funkciu

$$\chi_{\frac{E-x}{\delta}} : h \mapsto \chi_E(x + \delta h)$$

($\delta > 0$) platí

$$\chi_{\frac{E-x}{\delta}} \to \chi_{H_{\nu^E}} \qquad \text{v } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ pre } \delta \to 0_+.$$

Označme ešte

$$\mathcal{F}E := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{v } x \text{ existuje Federerova normála}\}.$$

Zrejme $\mathcal{F}E \subset \partial_* E$, platí navyše $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \mathcal{F}E) = 0$. Ďalej zrejme každý bod x, v ktorom existuje klasická normála, patrí do $\mathcal{F}E$ a ν^E sa zhoduje s klasickou normálou v x.

Definícia 2.2. Povieme, že $E \subset \mathbb{R}^n$ je *množina s konečným perimetrom*, ak $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$.

Veta 2.3. *Nech $E \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná, $|E| < \infty$. Potom*

$$E \text{ je množina s konečným perimetrom} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E) < \infty.$$

Špeciálne, ak $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < \infty$, potom E je množina s konečným perimetrom.

Veta 2.4 (Gauss – Greenova veta pre množiny s konečným perimetrom)**.** *Nech $E \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná množina konečnej miery s konečným perimetrom. Potom Pre každú funkciu $\Phi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ platí*

$$\int_E \operatorname{div} \Phi \, dx = \int_{\partial_* E} \Phi \cdot \nu^E \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

2.2 Zhladzovanie a Gauss – Greenova veta pre spojité BV-funkcie

Značenie 2.5. Dôležitou metódou, ako budeme niečo dokazovať pre nehladké funkcie, bude ich "zhladenie", teda konvolúcia s hladkými funkciami. Budeme používať štandardné zhladzovacie funkcie $\rho^k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definované ako

$$\rho^1(x) := \begin{cases} C_0 e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{ak } |x| < 1, \\ 0, & \text{ak } |x| \geq 1, \end{cases}$$
$$\rho^k(x) := k^n \rho^1(kx),$$

kde konštantu C_0 volíme tak, aby $\int_{\mathbb{R}^n} \rho^1 = 1$. Potom $\operatorname{supp} \rho^k = B(0, \frac{1}{k})$ a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\nabla \rho^k(x)| = k^{n+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\nabla \rho^1(x)| = C_1 k^{n+1},$$

kde $0 < C_1 < \infty$ je konštanta.

Nasledujúcu lemu využijeme nielen pri dôkaze *Tvrdenia 2.7*, ale aj neskôr pri dôkaze *Vety 1.4*.

Lema 2.6. *Majme V otvorenú podmnožinu $\mathbb{R}^n$, bod $x \in V$ a merateľnú funkciu $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$, ktorej distributívna divergencia* $\operatorname{Div} \Phi$ *je Radonova miera na V. Uvažujme štandardnú rodinu zhladzovacích funkcií ρ^k a zhladenia $\Phi^k = \Phi * \rho^k$ (mimo V dodefinujeme Φ nulou). Potom pre $k \in \mathbb{N}$ také, že $B(x, \frac{1}{k}) \subset V$, platí*

$$\operatorname{div} \Phi^k(x) = \int_V \rho^k(x-y)\, d \operatorname{Div} \Phi(y).$$

Dôkaz. Označme $\rho^{k,x} := \rho^k(x-y)$. Potom $\rho^{k,x} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho^{k,x} = B(x, \frac{1}{k}) \subset V$, a teda

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Phi^k(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \rho^k(x-y) \cdot \Phi(y)\, dy = - \int_V \nabla \rho^{k,x}(y) \cdot \Phi(y)\, dy = \\ &= \langle \operatorname{Div} \Phi, \rho^{k,x} \rangle = \int_V \rho^k(x-y)\, d \operatorname{Div} \Phi(y). \end{aligned}$$

□

Tvrdenie 2.7 (Gauss – Greenova veta pre spojité BV funkcie)**.** *Majme V, $\tilde{V}$ otvorené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ také, že $V \subset\subset \tilde{V}$ a Hausdorffova miera $\mathcal{H}^{n-1}(\partial V) < \infty$. Nech Φ je spojitá funkcia z $\tilde{V}$ do $\mathbb{R}^n$ a distributívna* $\operatorname{Div} \Phi$ *je Radonova miera na $\tilde{V}$, pričom* $\operatorname{Div} \Phi(\partial V) = 0$. *Potom platí*

$$\int_V d \operatorname{Div} \Phi = \int_{\partial_* V} \Phi \cdot \nu^V \, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{5}$$

kde ν^V je Federerova normála k množine V.

Poznámka 2.8. Ak je $\Phi \in BV(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$, potom predpoklad $\operatorname{Div}\Phi(\partial V) = 0$ v *Tvrdení 2.7* plynie z ostatných predpokladov. Keďže Φ je spojitá na $\tilde{V}$ a $\mathcal{H}^{n-1}(\partial V) < \infty$, máme totiž $D\Phi(\partial V) = 0$, viď *Definíciu 3.63* a *Lemu 3.76* v [1].

Dôkaz Tvrdenia 2.7. Uvažujme štandardnú rodinu zhladzovacích funkcií ρ^k. Potom zhladenia $\Phi^k = \Phi * \rho^k$ (berieme $\Phi = 0$ mimo $\tilde{V}$) sú $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a keďže Φ je spojitá na $\tilde{V}$, na kompakte $\overline{V} \subset \tilde{V}$ funkcie Φ^k rovnomerne konvergujú k Φ. Keďže $\mathcal{H}^{n-1}(\partial V) < \infty$, je V množina s konečným perimetrom a platí na nej Gauss - Greenova veta pre C^1 funkcie Φ^k (tie sa mimo kompaktu $\overline{V}$ dajú predefinovať tak, aby $\Phi^k \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$):

$$\int_V \operatorname{div}\Phi^k = \int_{\partial_* V} \Phi^k \cdot \nu^V \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{6}$$

Keďže Φ^k na $\partial V \supset \partial_* V$ rovnomerne konvergujú k Φ, $|\nu^V| = 1$ a $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* V) < \infty$, pravá strana (6) konverguje pre $k \to \infty$ k pravej strane (5). Aby sme teda dokázali (5), stačí dokázať konvergenciu ľavej strany (6) k ľavej strane (5):

$$\lim_{k\to\infty} \int_V \operatorname{div}\Phi^k \, d\lambda_n = \int_V d\operatorname{Div}\Phi,$$

teda $\lim_{k\to\infty}\operatorname{Div}\Phi^k(V) = \operatorname{Div}\Phi(V)$, kde $\operatorname{Div}\Phi^k = \operatorname{div}\Phi^k \lambda_n$. To bude platiť, ak

$$\operatorname{Div}\Phi(\partial V) = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{Div}\Phi^k \to \operatorname{Div}\Phi \text{ vágne na } V,$$

viď *Veta* 17.4.*(e)* v [20]. Prvú časť máme v predpokladoch vety, zostáva teda ukázať vágnu konvergenciu $\operatorname{Div}\Phi^k \to \operatorname{Div}\Phi$. Majme ľubovoľnú $\varphi \in C_c(V)$, dodefinujme ju nulou mimo V. Ukážeme $\int_V \varphi \, d\operatorname{Div}\Phi^k \to \int_V \varphi \, d\operatorname{Div}\Phi$. Pre dostatočne veľké k máme $\{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist }(y, \overline{V}) < \frac{1}{k}\} \subset \tilde{V}$. S využitím *Lemy 2.6*, Fubiniho vety (integrovateľnosť podľa súčinovej miery je v poriadku, lebo integrujeme spojitú funkciu s kompaktným nosičom v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) a toho, že $\rho^k(x) = \rho^k(-x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$, máme

$$\begin{aligned}
\int_V \varphi \, d\operatorname{Div}\Phi^k &= \int_V \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho^k(x-y) \, d\operatorname{Div}\Phi(y) \, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V \varphi(x)\rho^k(x-y) \, dx \, d\operatorname{Div}\Phi(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\rho^k(y-x) \, dx \right) d\operatorname{Div}\Phi(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \rho^k(y) \, d\operatorname{Div}\Phi(y).
\end{aligned}$$

Keďže $\varphi \in C_c(V)$, funkcie $\varphi * \rho^k$ rovnomerne konvergujú k φ. Ďalej $\operatorname{Div}\Phi$ je konečná miera, takže

$$\int_V \varphi \, d\operatorname{Div}\Phi^k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \rho^k(y) \, d\operatorname{Div}\Phi(y) \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \, d\operatorname{Div}\Phi(y) = \int_V \varphi \, d\operatorname{Div}\Phi,$$

čo sme chceli dokázať. $\square$

2.3 Aproximatívna derivácia a area formula

Definícia 2.9. Majme otvorenú množinu $V \subset \mathbb{R}^d$, bod $x \in V$ a funkciu $g : V \to \mathbb{R}^m$, $d, m \in \mathbb{N}$. Povieme, že matica $L \in \mathbb{R}^{m \times d}$ je *aproximatívnou deriváciou* g v bode x, ak platí

$$\text{ap-lim}_{y \to x} \frac{g(y) - g(x) - L(y - x)}{|y - x|} = 0,$$

pričom pre funkciu $F : V \to \mathbb{R}^m$ máme

$$\text{ap-lim}_{y \to x} F(y) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \;\; x \text{ je bodom hustoty množiny } F^{-1}(B(a, \epsilon)).$$

Poznámka 2.10. Ak existuje *aproximatívna limita* $\text{ap-lim}_{y \to x} F(y)$, potom je určená jednoznačne. Existuje teda nanajvýš jedna matica L, ktorá je aproximatívnou deriváciou g v bode x. Ak je g v bode x klasicky diferencovateľná, potom $L = g'(x)$.

Veta 2.11 (Calderón – Zygmund)**.** *Nech $V \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená a $g \in BV_{\text{loc}}(V)$. Potom g je aproximatívne diferencovateľná v skoro všetkých bodoch V. Navyše aproximatívny diferenciál ∇g je hustotou absolútne spojitej časti Dg vzhľadom k λ_n. Špeciálne, ak $g \in W^{1,1}_{\text{loc}}(V)$, potom slabá derivácia Dg je aproximatívnou deriváciou g v λ_d-skoro všetkých bodoch V.*

Dôkaz. Táto veta sa dá nájsť napr. v [1] ako *Veta 3.83.* $\square$

Tvrdenie 2.12. *Majme $V \subset \mathbb{R}^d$ otvorenú a $g \in BV_{\text{loc}}(V)$. Nech g je aproximatívne diferencovateľná na na množine $\tilde{V} \subset V$ (z* Vety 2.11 *$|V \setminus \tilde{V}| = 0$). Potom existuje rozklad $\tilde{V}$ na spočítateľne veľa disjunktných merateľných množín V_i ($\tilde{V} = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$) a existujú Lipschitzovské funkcie $G_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$g = G_i \qquad \textit{na množine } V_i.$$

Dôkaz. Z *Vety 3.1.8* v [11] dostávame, že existuje vyjadrenie $\tilde{V} = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ tak, že V_i sú λ_d-merateľné a $g\lfloor_{V_i}$ je Lipschitzovská, bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať disjunktnosť množín V_i (inak nie je problém systém $\{V_i\}$ zdisjunktniť). Podľa *Kirszbraunovej vety* (viď [11], *Veta 2.10.43*) vieme každé Lipschitzovské $g\lfloor_{V_i}$ Lipschitzovsky rozšíriť na celé $\mathbb{R}^d$, čím dostaneme hľadané G_i. $\square$

Definícia 2.13. Majme otvorenú $V \subset \mathbb{R}^d$, $g \in W^{1,1}(V, \mathbb{R}^m)$, $m \geq d$. Potom *vektorový Jakobián* J_g je vektor v $\mathbb{R}^{\binom{m}{d}}$ tvorený všetkými d-minormi matice Dg, t. j. determinantmi $(d \times d)$ matíc, ktoré vzniknú z $m \times d$ matice Dg vynechaním $(m - d)$ riadkov. *Jakobián* $|J_g|$ je Eukleidovskou normou vektoru J_g v $\mathbb{R}^{\binom{m}{d}}$.

Pre $g \in BV(V, \mathbb{R}^m)$ definujme J_g, $|J_g|$ analogicky, namiesto matice slabých derivácií (Dg) použijeme hustotu $D^a g$ absolútne spojitej časti miery Dg.

Pozorovanie 2.14. *Pre $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otvorenú, $g \in W^{1,n-1}(P, \mathbb{R}^n)$ máme*

$$|J_g| \in L^1(P, \mathbb{R}).$$

Dôkaz. Z definície sa i-ta zložka vektoru J_g rovná

$$\det \begin{pmatrix} D_1 g_1 & D_2 g_1 & \dots & D_{n-1} g_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 g_{i-1} & D_2 g_{i-1} & \dots & D_{n-1} g_{i-1} \\ D_1 g_{i+1} & D_2 g_{i+1} & \dots & D_{n-1} g_{i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 g_n & D_2 g_n & \dots & D_{n-1} g_n \end{pmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \prod_{j=1}^{i-1} D_{\pi(j)} g_j \prod_{j=i}^{n-1} D_{\pi(j)} g_{j+1},$$

kde sčítame cez všetky permutácie π množiny $\{1, 2, \dots n-1\}$. Pritom pre každú π máme $D_{\pi(j)} g_j, D_{\pi(j)} g_{j+1} \in L^{n-1}(P, \mathbb{R})$, a teda z Hölderovej nerovnosti

$$\prod_{j=1}^{i-1} D_{\pi(j)} g_j \prod_{j=i}^{n-1} D_{\pi(j)} g_{j+1} \in L^1(P, \mathbb{R}).$$

□

Definícia 2.15. Majme otvorenú množinu $V \subset \mathbb{R}^d$, funkciu $g \in BV_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$ a $E \subset V$ merateľnú. Označme $N(g, E, y)$ počet prvkov množiny $g^{-1}(y) \cap E$. Povieme, že pre g na E platí *area formula*, ak

$$\int_E v(g(x)) |J_g(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} v(y) N(g, E, y) \, d\mathcal{H}^d(y)$$

pre každú nezápornú borelovsky merateľnú funkciu v na $\mathbb{R}^m$. Ďalej povieme, že g na E spĺňa *Luzinovu* (N)*-podmienku*, ak pre každú merateľnú množinu $F \subset E$ platí

$$\lambda_d(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^d(g(F)) = 0.$$

Je známe, že area formula platí na každej množine, na ktorej g spĺňa Luzinovu (N)-podmienku. Plynie to napríklad z *Tvrdenia 2.12* a z toho, že pre Lipschitzovské funkcie area formula platí, viď [11], *Veta 3.2.5*. Opačná implikácia (teda pre g platí area formula $\Rightarrow$ g spĺňa (N)-podmienku) je triviálna.

Z *Tvrdenia 2.12* a *Vety 3.2.5* v [11] tiež plynie, že pre každú $g \in BV_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$ existuje množina $N \subset V$ miery 0 tak, že pre g platí area formula na množine $V \setminus N$.

Ak nešpecifikujeme monožinu, na ktorej tvrdíme, že g spĺňa area formulu, myslíme tým, že g spĺňa area formulu na (celej) množine V, a teda aj na každej merateľnej podmnožine $E \subset V$.

3 Homeomorfizmy s konečnou variáciou v rovine

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dôkazom *Vety 1.2.*

Zafixujme si teda oblasti $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ a BV-homeomorfizmus f zobrazujúci Ω na G. Inverzné zobrazenie k f budeme značiť u. Z *Vety 1.1* vieme, že $u \in BV_{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^2)$.

3.1 Orientácia zobrazenia f

Pripomeňme, že *Jordanova krivka* je spojité zobrazenie $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ také, že $\gamma(a) = \gamma(b)$ a γ je prostá na $[a, b)$. Takáto krivka rozdeľuje rovinu na dva komponenty $\operatorname{Int}\gamma$, $\operatorname{Ext}\gamma$. Ak stotožníme $\mathbb{R}^2$ s komplexnou rovinou, potom pre každé $z \in \operatorname{Ext}\gamma$ je index $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ a pre každé $z \in \operatorname{Int}\gamma$ je buď $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ alebo $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = -1$, nezávisle na z. Ak platí prvá možnosť (teda $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ pre každé $z \in \operatorname{Int}\gamma$), potom je γ *kladne orientovaná*, v opačnom prípade je *záporne orientovaná.*

Ďalej pripomeňme, že krivky krivky $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ sú $\tilde{\Omega}$-*homotopické*, ak existuje spojité zobrazenie H jednotkového štvorca $[0, 1] \times [0, 1]$ do $\tilde{\Omega}$ také, že pre všetky $s, t \in [0, 1]$ platí

$$H(s, 0) = \gamma_0(s), \qquad H(s, 1) = \gamma_1(s), \qquad H(0, t) = H(1, t).$$

V nasledujúcej leme využijeme nasledovné známe tvrdenie (viď napr. [24], *Veta 10.40* a poznámku za touto vetou, alebo tiež [6], *Veta 123*):

Tvrdenie 3.1. *Nech γ_0, γ_1 sú $\tilde{\Omega}$-homotopické uzavreté krivky v oblasti $\tilde{\Omega}$. Ak platí $\alpha \notin \tilde{\Omega}$, potom*

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha).$$

Lema 3.2. *Majme dva obdĺžniky $O_1, O_2 \subset\subset \Omega$. Ich hranice majme parametrizované kladne orientovanými Jordanovými krivkami $\gamma_1 : [0, 1] \to \partial O_1$, $\gamma_2 : [0, 1] \to \partial O_2$. Potom Jordanove krivky $f \circ \gamma_i : [0, 1] \to \partial f(O_i)$, ktoré parametrizujú $\partial f(O_i)$, $i = 1, 2$, sú rovnako orientované.*

Dôkaz. Označme x resp. y stred obdĺžnika O_1 resp. O_2. Zo súvislosti množiny Ω existuje krivka φ a $\epsilon > 0$ tak, že

$$\varphi(0) = x,\ \varphi(1) = y,\ B(\varphi(0), 2\epsilon) \subset O_1,\ B(\varphi(1), 2\epsilon) \subset O_2$$
$$\text{a } B(\varphi(t), 2\epsilon) \subset\subset \Omega \text{ pre každé } t \in [0, 1].$$

Zvolíme postupnosť bodov $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tak, aby $|\varphi(t_{j-1}) - \varphi(t_j)| < \epsilon$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$. Označme $B_j := B(\varphi(t_j), \epsilon)$ a nech $\tilde{\gamma}_j$ je kladne orientovaná krivka parametrizujúca ∂B_j, $j = 0, 1, \ldots, k$. Pre zjednodušenie značenia ďalej označme $\tilde{\gamma}_{-1} := \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_{k+1} := \gamma_2$, $z_j := \varphi(t_j)$ pre $j = 0, 1, \ldots, k$, $z_{k+1} := y (= z_k)$.

Pre $k = 0, 1, \ldots, k + 1$ je vďaka rovnakej orientácii krivka $\tilde{\gamma}_{j-1}$ homotopická s $\tilde{\gamma}_j$ v $\Omega \setminus \{z_j\}$. Pre $j = 0$ ide totiž o rovnako orientovaný obvod obdĺžnika O_1 a kružnicu γ_0 vo vnútri O_1, oboje so stredom z_0, ktoré sú zrejme homotopické. Podobne pre $j = k + 1$. Pre $1 \le j \le k$ stačí kružnicu $\tilde{\gamma}_{j-1}$ posunúť o vektor $z_j - z_{j-1}$ a správne otočiť; v množine Ω zostaneme vďaka tomu, že $B(z_{j-1}, 2\epsilon) \subset\subset \Omega$. Ak označíme H_j homotópiu kriviek γ_{j-1} a γ_j, $j = 0, 1, \dots, k+1$, potom $f \circ H_j$ je homotópia Jordanových kriviek $f \circ \tilde{\gamma}_{j-1}$, $f \circ \tilde{\gamma}_j$ v $f(\Omega) \setminus \{f(z_j)\}$. Z *Tvrdenia 3.1* teda dostávame

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\tilde{\gamma}_{j-1}}(f(z_j)) = \operatorname{Ind}_{f\circ\tilde{\gamma}_j}(f(z_j))$$

a keďže zrejme $f(z_j) \in \operatorname{Int}(f \circ \tilde{\gamma}_{j-1}) \cap \operatorname{Int}(f \circ \tilde{\gamma}_j)$, sú krivky $f \circ \tilde{\gamma}_{j-1}$ a $f \circ \tilde{\gamma}_j$ rovnako orientované, $j = 0, 1, \dots, k+1$. Aj $f \circ \tilde{\gamma}_{-1} = f \circ \gamma_1$ a $f \circ \tilde{\gamma}_{k+1} = f \circ \gamma_2$ sú teda rovnako orientované, čo sme chceli dokázať. $\square$

Definícia 3.3. Povieme, že náš homeomorfizmus f je *kladne* (resp. *záporne*) *orientovaný*, ak pre každý obdĺžnik $O \subset\subset \Omega$ parametrizovaný kladne orientovanou Jordanovou krivkou γ je krivka $f \circ \gamma$ kladne (resp. záporne) orientovaná.

Poznámka 3.4. Z *Lemy 3.2* dostávame, že každý homeomorfizmus f na oblasti Ω je buď kladne alebo záporne orientovaný. Predpoklad vo *Vete 1.2*, že f je kladne orientovaný, teda nie je nijako obmedzujúci. Ak máme záporne orientovaný homeomorfizmus f, môžeme totiž výsledky pre kladne orientované homeomorfizmy aplikovať na kladne orientovaný homeomorfizmus

$$(x_1, x_2) \mapsto f(-x_1, x_2),$$

čím pre záporne orientovaný f dokážeme vzťah (1) so znamienkom mínus na pravej strane.

Tvrdenie 3.5. *Majme ohraničenú oblasť $U \subset \mathbb{R}^2$ a kladne orientovanú Jordanovu krivku $\gamma : [0,1] \to \partial U$ parametrizujúcu ∂U. Nech γ je diferencovateľná v bode $t_0 \in (0,1)$ a $\gamma'(t_0) \neq (0,0)$. Potom vektorový súčin k $\gamma'(t_0)$, t. j. vektor $(\gamma_2'(t_0), -\gamma_1'(t_0))$, má smer vonkajšej normály k U v bode $\gamma(t_0)$.*

Dôkaz. Rovinu $\mathbb{R}^2$ máme stotožnenú s komplexnou rovinou $\mathbb{C}$. Z kladnej orientácie γ vieme, že $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ pre každé $z \in U = \operatorname{Int}\gamma$ a $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U} = \operatorname{Ext}\gamma$.

Bez ujmy na obecnosti možeme predpokladať $\gamma(t_0) = 0$, $\gamma'(t_0) = ae_2$, kde $a > 0$. Chceme dokázať, že e_1 je vonkajšia normála k U v bode 0.

Majme $0 < \epsilon < a$. Z derivácie γ v bode 0 existuje $\delta > 0$ tak, že $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (0,1)$ a pre $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ platí

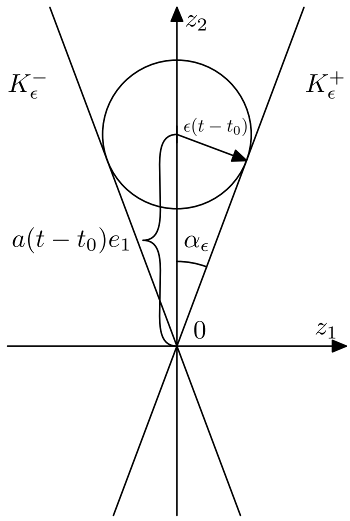
$$|\gamma(t) - (t - t_0)ae_2| \leq \epsilon|t - t_0|,$$

a teda bod $\gamma(t)$ leží medzi priamkami prechádzajúcimi počiatkom a zvierajúcimi s osou y uhol $\pm\alpha$, pre ktorý platí $\sin\alpha = \frac{\epsilon}{a}$. Presnejšie po označení $\alpha_\epsilon := \arcsin\frac{\epsilon}{a}$,

$$\begin{aligned}
K_\epsilon^+ &: = \{z \in \mathbb{R}^2 : \, z_1 > 0, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| > \tan\alpha_\epsilon\}, \\
K_\epsilon^- &: = \{z \in \mathbb{R}^2 : \, z_1 < 0, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| > \tan\alpha_\epsilon\}, \\
K_\epsilon &: = K_\epsilon^+ \cup K_\epsilon^-
\end{aligned}$$

máme

$$
\begin{aligned}
t \in (t_0, t_0+\delta] &\quad\Rightarrow\quad \gamma(t) \in (K_\epsilon)^c \cap \{z \in \mathbb{R}^2 :\, z_2 > 0\},\\
t \in [t_0-\delta, t_0) &\quad\Rightarrow\quad \gamma(t) \in (K_\epsilon)^c \cap \{z \in \mathbb{R}^2 :\, z_2 < 0\}.
\end{aligned}
$$



Všimnime si, že pre $\epsilon \to 0$ aj $\alpha_\epsilon \to 0$, a teda prienikom $\cap_{0<\epsilon<a}(K_\epsilon)^c$ je os z_2.

Označme $t_+ := t_0+\delta$, $t_- := t_0-\delta$. Keďže γ je spojitá a prostá (až na bod $\gamma(0)=\gamma(1)$) a $[0,1]\setminus(t_-,t_+)$ je kompaktná, máme

$$\operatorname{dist}\big(\gamma(t_0), \gamma([0,1]\setminus(t_-,t_+))\big) = d > 0,$$

a teda

$$B(0,d)\cap\gamma([0,1]) \subset \gamma((t_-,t_+)) \subset (K_\epsilon)^c. \tag{7}$$

Majme body $z^+ \in B(0,d)\cap K_\epsilon^+$, $z^- \in B(0,d)\cap K_\epsilon^-$. Z (7) vieme $z^+, z^- \notin \gamma([0,1])$. Ukážeme

$$\operatorname{Ind}_\gamma z^+ = 0, \quad \operatorname{Ind}_\gamma z^- = 1, \tag{8}$$

a teda

$$
\begin{aligned}
B(0,d)\cap K_\epsilon^+ \cap U &= \emptyset,\\
B(0,d)\cap K_\epsilon^- &\subset U.
\end{aligned}
$$

Keďže ϵ môžeme voliť ľubovoľne malé, bude odtiaľ plynúť, že e_1 je vonkajšia normála k U v bode 0, čo chceme.

Keďže index je konštantný na všetkých komponentách $\mathbb{R}^2\setminus\gamma([0,1])$, vďaka (7) stačí (8) dokázať pre $z^+ = \frac{d}{2}e_1$, $z^- = -\frac{d}{2}e_1$. Ďalej z kladnej orientácie γ vieme $\operatorname{Ind}_\gamma z^+, \operatorname{Ind}_\gamma z^- \in \{0,1\}$, a teda stačí dokázať $\operatorname{Ind}_\gamma z^- - \operatorname{Ind}_\gamma z^+ = 1$. To plynie z *Maříkovej vety* (viď [6], *Veta 126*). Krivka γ totiž pretína úsečku $\overline{z^-, z^+}$ v jedinom bode 0, v ktorom je funkcia $\operatorname{Im}\gamma = \gamma_2$ rýdzo rastúca. $\square$

Dôsledok 3.6. *Majme ohraničenú oblasť $U \subset \mathbb{R}^2$ a lipschitzovskú kladne orientovanú Jordanovu krivku $\gamma : [0,1] \to \partial U$ parametrizujúcu ∂U. Potom pre $\mathcal{H}^1$-skoro všetky $x \in \partial U$, $x = \gamma(t)$, je $(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ vonkajšou normálou k U v bode x.*

Dôkaz. Lipschitzovská funkcia γ je skoro všade diferencovateľná a spĺňa Luzinovu (N)-podmienku, a teda obraz λ_1-nulovej podmnožiny $(0,1)$, kde γ nie je diferencovateľná, je $\mathcal{H}^1$-nulový. Ďalej zo Sardovej vety pre lipschitzovské funkcie (viď napr. [20], *Veta* 34.17) je obraz množiny $\{t \in (0,1) : \gamma'(t) = 0\}$ tiež H^1-nulový. H^1-skoro všetky body ∂U teda spĺňajú predpoklady *Tvrdenia 3.5.* □

3.2 f-regulárne množiny

Značenie 3.7. Majme reálne čísla $\alpha < \beta$ a $k \in \mathbb{N}$. Povieme, že $(\xi_i)_{i=0}^k$ je *delenie* intervalu $[\alpha, \beta]$, značíme $(\xi_i)_{i=0}^k \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, ak

$$\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{k-1} < \xi_k = \beta.$$

Ďalej variáciu funkcie $h \in BV([\alpha, \beta])$ budeme značiť

$$V(h; \alpha, \beta) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} |h(\xi_i) - h(\xi_{i-1})| : \ (\xi_i)_{i=0}^k \in \mathcal{D}(\alpha, \beta) \right\}.$$

Pre $\alpha = \beta$ ešte z formálnych dôvodov položme $V(h; \alpha, \alpha) = 0$.

Podobne pre otvorenú množinu $P \subset \mathbb{R}$ povieme, že $(\xi_i)_{i=0}^k \in \mathcal{D}(P)$ je *delenie*, ak $\xi_i \in P$ a $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{k-1} < \xi_k$. Pre body $a, b \in P$, $a < b$ a funkciu $h \in BV(P)$ potom definujeme variáciu

$$V_P(h; a, b) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} |h(\xi_i) - h(\xi_{i-1})| : \ (\xi_i)_{i=0}^k \in \mathcal{D}(P), \xi_0 = a, \xi_1 = b \right\}.$$

Definícia 3.8. Uvažujme množinu $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrizovateľnú Jordanovou krivkou konečnej dĺžky a nejakú takúto jej parametrizáciu $\varphi : [a,b] \to \Gamma$. Povieme, že zobrazenie $g : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ je BV, ak zloženie $g \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ má konečnú variáciu.

Ukážeme, že táto definícia nezávisí na zvolenej parametrizácii množiny Γ. Uvažujme dve Jordanove krivky konečnej dĺžky $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ parametrizujúce Γ a nech $g \circ \varphi$ je BV, t.j. variácia $V(g \circ \varphi; a, b)$ je konečná. Ukážeme, že potom aj $g \circ \psi$ je BV. Zrejme stačí ukázať, že pre každé delenie $(\zeta_i)_{i=0}^k \in \mathcal{D}(c,d)$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} |g \circ \psi(\zeta_i) - g \circ \psi(\zeta_{i-1})| \le V(g \circ \varphi; a, b), \tag{9}$$

potom už totiž nutne $V(g \circ \psi; c, d) \le V(g \circ \varphi; a, b)$. Uvažujme teda delenie ζ intervalu $[c,d]$. Bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať $\varphi(a) = \psi(\zeta_j)$ pre nejaké $j \in$

$\{0, 1, \ldots, k-1\}$ – inak bod $\psi^{-1}(\varphi(a))$ do delenia (ζ_i) pridáme a ľavú stranu (9) tým nezmenšíme. Potom

$$\sum_{i=1}^{k} |g \circ \psi(\zeta_i) - g \circ \psi(\zeta_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} |g \circ \psi(\zeta_i) - g \circ \psi(\zeta_{i-1})| + \sum_{i=j+1}^{k} |g \circ \psi(\zeta_i) - g \circ \psi(\zeta_{i-1})| \leq$$
$$\leq V(g \circ \varphi; \varphi^{-1}(\psi(c)), b) + V(g \circ \varphi; a, \varphi^{-1}(\psi(c))) = V(g \circ \varphi; a, b),$$

kde v prípade $\psi(c) = \varphi(a) = \varphi(b)$ berieme $\varphi^{-1}(\psi(c)) = a$.

Definícia 3.9. Povieme, že množina $U \subset\subset \Omega$ je *f-regulárna*, ak je otvorená, hranicu množiny U tvorí Jordanova krivka konečnej dĺžky a reštrikcia $f|\partial U$ je BV. Analogicky *u-regulárnosť.*

Lema 3.10. *Ak je U f-regulárna, potom $f(U)$ je u-regulárna. Navyše existuje parametrizácia γ množiny ∂U tak, že γ aj $f \circ \gamma$ sú lipschitzovské.*

Dôkaz. Uvažujme najprv ľubovoľnú parametrizáciu $\varphi : [0, 1] \to \Omega$ množiny ∂U. Keďže f je na Ω spojité a prosté, je $f \circ \varphi : [0, 1] \to G$ parametrizáciou množiny $\partial f(U) = f(\partial U)$ a zároveň je to Jordanova krivka. Keďže $f|\partial U$ je BV, tak naša parametrizácia $f \circ \varphi$ má konečnú variáciu, t. j. je konečnej dĺžky. Reštrikcia $u|\partial f(U)$ je BV, pretože zloženie s parametrizáciou $u \circ (f \circ \varphi) = \varphi : [0, 1] \to \Omega$ má konečnú variáciu (z predpokladov má krivka ∂U parametrizovaná φ konečnú dĺžku).

Lipschitzovské parametrizácie ∂U, $\partial f(U)$ dostaneme, ak tieto krivky parametrizujeme súčtom ich dĺžok. Uvažujme prostú spojitú funkciu

$$v : [0, 1] \to [0, V(\varphi; 0, 1) + V(f \circ \varphi; 0, 1)],$$
$$v(t) = V(\varphi; 0, t) + V(f \circ \varphi; 0, t).$$

Potom stačí zobrať $\gamma := \varphi \circ v^{-1}$; obe parametrizácie γ, $f \circ \gamma$ množín ∂U, $\partial f(U)$ budú 1-lipschitzovské. $\square$

Značenie 3.11. Pre $i = 1, 2$ a $t \in \mathbb{R}$ označme

$$\Omega_t^i := \{x \in \Omega : x_i = t\}.$$

Množina Ω_t^i leží na priamke $\{x_i = t\} \subset \mathbb{R}^2$. Túto priamku stotožníme s reálnou osou $\mathbb{R}$ a priestorom $BV(\Omega_t^i)$ budeme chápať klasický priestor funkcií s konečnou variáciou jednej premennej, teda

$$f \in BV(\Omega_t^i) \Leftrightarrow f \circ \varphi_t^i \in BV(P_t^i),$$

kde

$$P_t^1 := \{s \in \mathbb{R} : (t, s) \in \Omega\} \quad \text{a} \quad \varphi_t^1(s) = (t, s),$$

podobne P_t^2, φ_t^2 (P_t^i je teda otvorená podmnožina $\mathbb{R}$). Ďalej pre body $A, B \in \Omega_t^1$, $A_2 < B_2$, označme variáciu

$$V(f\lfloor_{\Omega_t^1}; A, B) := V_{P_t^1}(f \circ \varphi_t^1; A_2, B_2),$$

podobne $V(f\lfloor_{\Omega_t^2}; A, B)$ pre $A, B \in \Omega_t^2$, $A_1 < B_1$.

Lema 3.12. *Pre λ_1-skoro všetky $t \in \mathbb{R}$ platí $f\lfloor_{\Omega_t^i} \in BV(\Omega_t^i)$ $(i = 1, 2)$.*

Dôkaz. Toto známe tvrdenie plynie napr. z úvodu kapitoly 3.11 (strany 193-196) v [1]. □

Označme $R := \{t \in \mathbb{R} : f\lfloor_{\Omega_t^i} \in BV(\Omega_t^i), \, i = 1, 2\}$. Z *Lemy 3.12*

$$\lambda_1(\mathbb{R} \setminus R) = 0, \tag{10}$$

a teda "skoro každý" otvorený obdĺžnik $O \subset\subset \Omega$ so stranami rovnobežnými s osami x, y je f-regulárna množina. Skutočne, nech A, B, C, D sú vrcholy obdĺžnika O (začíname v ľavom dolnom rohu a pokračujeme v kladnom smere) a ich súradnice $A_1 = D_1$, $A_2 = B_2$, $B_1 = C_1$, $C_2 = D_2$ padnú do množiny R. Jednoduchá parametrizácia $\varphi : [0, 4] \to \mathbb{R}^2$ krivky ∂O

$$\varphi(t) = \begin{cases} A + t(B - A), & t \in [0, 1] \\ B + (t - 1)(C - B), & t \in (1, 2] \\ C + (t - 2)(D - C), & t \in (2, 3] \\ D + (t - 3)(A - D), & t \in (3, 4] \end{cases}$$

zaručuje f-regularitu obdĺžnika O: variácia

$$V(f \circ \varphi; 0, 4) = V(f\lfloor_{\Omega_{A_2}^2}; A, B) + V(f\lfloor_{\Omega_{B_1}^1}; B, C) + V(f\lfloor_{\Omega_{C_2}^2}; D, C) + V(f\lfloor_{\Omega_{A_1}^1}; A, D)$$

je totiž konečná.

Lema 3.13. *Majme otvorenú množinu $O \subset \Omega$ a konečnú Radonovu mieru μ na O. Potom pre každé $\epsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ a disjunktný systém f-regulárnych obdĺžnikov $\{O_j\}_{j=1}^k$ takých, že $O_j \subset\subset O$ a*

$$\mu(O \setminus \cup_{j=1}^k O_j) < \epsilon.$$

Dôkaz. Pre $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$ označme

$$O_t^i := \{x \in O : x_i = t\}.$$

Množiny O_t^i sú borelovské, teda μ-merateľné. Keby nespočítateľne veľa z nich (napr. spomedzi O_t^1) malo kladnú mieru μ, potom pre nejaké $l \in \mathbb{N}$ by nekonečne veľa množín O_t^1 malo mieru väčšiu ako $\frac{1}{l}$, a teda ich (disjunktné) zjednotenie by malo nekonečnú mieru, čo je spor (μ je konečná). Pre λ_1-skoro všetky $t \in \mathbb{R}$ teda platí

$\mu(O_t^i) = 0$ $(i = 1, 2)$, označme $\tilde{R} := \{t \in \mathbb{R} : \mu(O_t^i) = 0,\ i = 1, 2\}$. Spolu s (10) teda máme $\lambda_1(\mathbb{R} \setminus (\tilde{R} \cap R)) = 0$.

Uvažujme všetky otvorené obdĺžniky $U \subset\subset O$ s hranami vodorovnými s osami x, y a s vrcholmi s racionálnymi súradnicami. Tieto obdĺžniky tvoria spočítateľnú bázu otvorených podmnožín O, takže množina O sa dá napísať ako ich zjednotenie $O = \cup_{j=1}^{\infty} U_j$ (U_j sú bázové obdĺžniky). Existuje teda $k_1 \in \mathbb{N}$ také, že

$$\mu(O \setminus \cup_{j=1}^{k_1} U_j) < \epsilon.$$

Keďže $\lambda_1(\mathbb{R} \setminus (\tilde{R} \cap R)) = 0$, každý obdĺžnik U_j vieme mierne zväčšiť na obdĺžnik $\tilde{U}_j$ tak, že stále $\tilde{U}_j \subset\subset O$, $\tilde{U}_j$ má hrany rovnobežné s osami x, y, $U_j \subset \tilde{U}_j$ a súradnice vrcholov obdĺžnika $\tilde{U}_j$ padnú do množiny $R \cap \tilde{R}$. Samozrejme stále platí

$$\mu(O \setminus \cup_{j=1}^{k_1} \tilde{U}_j) < \epsilon.$$

Na záver ešte tieto obdĺžniky zdisjunktníme. Označme U^1 resp. U^2 projekciu všetkých vrcholov obdĺžnikov $\tilde{U}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k_1$, na osi y resp. x. Do roviny si zakreslíme všetky priamky prechádzajúce bodmi z U^1 resp. U^2 kolmé na os y resp. x. Tieto priamky nám rozdelia systém obdĺžnikov $\tilde{U}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k_1$, na disjunktný systém obdĺžnikov O_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Keďže súradnice vrcholov obdĺžnikov $\tilde{U}_j$ ležali v $\tilde{R}$, prienik našich deliacich priamok s množinou Ω má nulovú mieru μ. Ich vynechaním zo systému (uvažujeme totiž vždy otvorené obdĺžniky) teda nič nestratíme: $\mu(\cup_{j=1}^{k_1} \tilde{U}_j \setminus \cup_{j=1}^{k} O_j) = 0$, a teda stale

$$\mu(O \setminus \cup_{j=1}^{k} O_j) < \epsilon.$$

Keďže súradnice vrcholov obdĺžnikov O_j ležia rovnako ako súradnice vrcholov $\tilde{U}_j$ v R, sú obdĺžniky O_j f-regulárne. $\square$

Lema 3.14. *Nech $U \subset \Omega$ je f-regulárna množina. Potom pre $i, j \in \{1, 2\}$ platí*

$$\int_U dD_j f_i = \int_{\partial U} f_i \nu_j^U \, d\mathcal{H}^1.$$

Dôkaz. V *Tvrdení 2.7* stačí zvoliť $n = 2$, $\tilde{V} = \Omega$, $V = U$ a $\Phi = (f_i, 0)$ resp. $\Phi = (0, f_i)$. Predpoklad $\mathcal{H}^1(\partial U) < \infty$ je splnený vďaka f-regularite množiny U, predpoklad $\operatorname{div} \Phi(\partial U) = 0$ vďaka tomu, že $f \in BV$ (viď *Poznámka 2.8*). Pritom vďaka *Dôsledku 3.6* a *Leme 3.10* vieme, že H^1-skoro všade na ∂U existuje klasická normála ν^U, a teda $\partial_* U = \partial U$. $\square$

Definícia 3.15. Nech $U \subset \Omega$ je f-regulárna množina a $\gamma : [a, b] \to \partial U$ je parametrizácia ∂U. Definujme *vynesenú krivku* $\varphi : [a, b] \to \Omega \times G$ ako

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= x_1 = \gamma_1(t),\\
\varphi_2(t) &= x_2 = \gamma_2(t),\\
\varphi_3(t) &= y_1 = f_1(\gamma(t)),\\
\varphi_4(t) &= y_2 = f_2(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

Tvrdenie 3.16. *Nech U je f-regulárny obdĺžnik, f je kladne orientovaná. Potom platí*

$$\begin{aligned} D_2u_2(f(U)) &= D_1f_1(U),\\ D_1u_2(f(U)) &= -D_1f_2(U),\\ D_2u_1(f(U)) &= -D_2f_1(U),\\ D_1u_1(f(U)) &= D_2f_2(U). \end{aligned}$$

Dôkaz. Z *Lemy 3.10* existuje $\gamma : [a,b] \to \partial U$ kladná lipschitzovská parametrizácia ∂U taká, že $f \circ \gamma$ je lipschitzovská parametrizácia $\partial f(U)$. Potom z *Dôsledku 3.6* dostávame, že pre skoro všetky $x \in \partial U$, $x = \gamma(t)$ platí

$$\nu^U(x)|\gamma'(t)| = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)).$$

Nech $\varphi : [a,b] \to \Omega \times G$ je príslušná vynesená krivka. Potom φ je skoro všade diferencovateľná a s využitím *Lemy 3.14* máme

$$\begin{aligned} D_1f_1(U) &= \int_{\partial U} f_1\nu_1^U \, d\mathcal{H}^1 = \int_\gamma f_1\nu_1^U \, ds = \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)\, dt = \\ &= \int_a^b \varphi_3(t)\varphi_2'(t)\, dt = \int_\varphi y_1 \, dx_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Pre u-regulárnu množinu $f(U)$ a jej kladnú (vďaka kladnej orientácii f) lipschitzovskú parametrizáciu $\tilde\gamma : [a,b] \to \partial f(U)$, $\tilde\gamma(t) = f(\gamma(t))$ platí analogicky

$$\begin{aligned} D_2u_2(f(U)) &= \int_{\partial f(U)} u_2\nu_2^{f(U)} \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\tilde\gamma} u_2\nu_2^{f(U)} \, ds = -\int_a^b u_2(\tilde\gamma(t))\tilde\gamma_1'(t)\, dt = \\ &= -\int_a^b \varphi_2(t)\varphi_3'(t)\, dt = -\int_\varphi x_2 \, dy_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Pritom

$$\int_\varphi y_1\, dx_2 + \int_\varphi x_2\, dy_1 = \int_a^b \varphi_3(t)\varphi_2'(t) + \varphi_2(t)\varphi_3'(t)\, dt = \int_a^b (\varphi_3\varphi_2)'\, dt = 0,$$

takže z (11) a (12) dostávame

$$D_1f_1(U) = \int_\varphi y_1\, dx_2 = -\int_\varphi x_2\, dx_1 = D_2u_2(f(U)),$$

čo sme chceli. Pre ostatné kombinácie indexov dostávame analogicky

$$\begin{aligned} D_1f_2(U) &= \int_\gamma f_2\, dx_2 = \int_\varphi y_2\, dx_2 = -\int_\varphi x_2\, dy_2 = -\int_{\tilde\gamma} u_2\, dy_2 = -\int_{f(U)} D_1u_2,\\ D_2f_1(U) &= -\int_\gamma f_1\, dx_1 = -\int_\varphi y_1\, dx_1 = \int_\varphi x_1\, dy_1 = \int_{\tilde\gamma} u_1\, dy_1 = -\int_{f(U)} D_2u_1,\\ D_2f_2(U) &= -\int_\gamma f_2\, dx_1 = -\int_\varphi y_2\, dx_1 = \int_\varphi x_1\, dy_2 = \int_{\tilde\gamma} u_1\, dy_2 = \int_{f(U)} D_1u_1, \end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{pmatrix} D_1u_1(f(U)) & D_2u_1(f(U)) \\ D_1u_2(f(U)) & D_2u_2(f(U)) \end{pmatrix} = \operatorname{adj} \begin{pmatrix} D_1f_1(U) & D_2f_1(U) \\ D_1f_2(U) & D_2f_2(U) \end{pmatrix}.$$

□

Dôkaz Vety 1.2. Dokazujme $D_1f_1(E) = D_2u_2(f(E))$, pre ostatné kombinácie indexov je dôkaz analogický.

Pre každú $A \subset \Omega$ borelovskú je jej homeomorfný obraz $f(A)$ borelovská podmnožina G, položme $\tilde{\mu}(A) := D_2u_2(f(A))$. Potom $\tilde{\mu}$ je znamienková miera na borelovských podmnožinách Ω, pričom z regularity D_2u_2 a spojitosti f, u dostávame regularitu $\tilde{\mu}$, teda $\tilde{\mu}$ je Radonova miera.

Dokazujeme teda

$$D_1f_1(E) = \tilde{\mu}(E) \qquad \text{pre každú } E \subset \Omega \text{ borelovskú.} \tag{13}$$

Z regularity Radonových mier Df, $\tilde{\mu}$ stačí dokázať vzťah (13) pre každú $E = K \subset \Omega$ kompaktnú. Keďže pre každú Radonovu mieru m na Ω platí navyše

$$m(K) = \inf\{m(V) : \; K \subset V \subset\subset \Omega\},$$

vzťah (13) stačí dokázať pre každú $E = \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ otvorenú.

Ďalej $\mu := |D_1f_1| + |\tilde{\mu}|$ je konečná Radonova miera na $\tilde{\Omega}$ a z *Lemy 3.13* pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ dostávame disjunktný systém f-regulárnych obdĺžnikov $\{O_j\}_{j=1}^k$ takých, že $O_j \subset\subset \tilde{\Omega}$ a $\mu(\tilde{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^k O_j) < \epsilon$. Z f-regularity obdĺžnikov O_j a z *Tvrdenia 3.16* máme $D_1f_1(O_j) = D_2u_2(O_j)$, a teda

$$\begin{aligned} |D_1f_1(\tilde{\Omega}) - D_2u_2(f(\tilde{\Omega}))| \leq & \sum_{j=1}^k |D_1f_1(O_j) - D_2u_2(f(O_j))| + \\ & + |D_1f_1(\tilde{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^k O_j)| + |D_2u_2(f(\tilde{\Omega})) \setminus \cup_{j=1}^k f(O_j))| \leq \\ \leq & 0 + \mu(\tilde{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^k O_j) + \mu(\tilde{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^k O_j) < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Keďže ϵ môžeme voliť ľubovoľné, dostávame $D_1f_1(\tilde{\Omega}) = D_2u_2(f(\tilde{\Omega})) = \tilde{\mu}(\tilde{\Omega})$, čo sme chceli. □

4 Homeomorfizmy v priestore $W^{1,n-1}$

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dôkazom *Vety 1.4*.

Majme teda $n \geq 3$, zafixujme si oblasti $\Omega, G \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfizmus $f \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ zobrazujúci Ω na G. Inverzné zobrazenie k f budeme značiť u. Z *Vety 1.1* vieme, že $u \in BV_{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^2)$.

4.1 Orientácia zobrazenia f

Orientáciu homeomorfizmu $f : \Omega \to G$ určíme pomocou topologického stupňa. Pripomeňme, že stupeň $\deg(g, V, y)$ je definovaný pre $V \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú ohraničenú, $g : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ spojitú a $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(\partial V)$. Ak teda o Ω nechceme predpokladať, že je ohraničená, no najmä že f je spojitá až do hranice Ω, budeme stupeň uvažovať na súvislých otvorených podmnožinách $V \subset\subset \Omega$. Základné vlastnosti stupňa $(d1) - (d7)$ pre takéto množiny V nájdeme napr. v [8], *Veta* 3.1. Vypíšeme tie, na ktoré sa budeme v ďalšom odvolávať:

(d1) $\deg(id, V, y) = 1$ pre $y \in V$.

(d4) $\deg(f, V, y) \neq 0$ implikuje $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(d5) $\deg(., V, y)$ a $\deg(f, V, .)$ sú konštantné na $\{g \in \mathcal{C}(\overline{V}) : |g - f|_\infty < r\}$ resp. $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$, kde $r = \mathrm{dist}\,(y, f(\partial V))$. Navyše $\deg(f, V, .)$ je konštantný na každom komponente $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial V)$.

(d7) $\deg(f, V, y) = \deg(f, V_1, y)$ pre každú otvorenú $V_1 \subset V$ takú, že $y \notin f(\overline{V} \setminus V_1)$.

Majme súvislú otvorenú $V \subset\subset \Omega$. Potom $f : \overline{V} \to f(\overline{V})$ je homeomorfizmus, $f(V)$ je súvislá a z vlastnosti $(d5)$ je $\deg(f, V, .)$ konštantný na $f(V)$, túto konštantu budeme značiť $\deg(f, V, f(V))$ (zhoduje sa so značením v [8]). Z $(d4)$ je $\deg(f, V, y) = 0$ pre $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{V})$.

Pre $x \in V$ dostávame z vlastnosti $(d1)$ a z *Vety* 5.1 *(Retiazkové pravidlo)* v [8] (inverzné zobrazenie $u = f^{-1}\lfloor_{f(\overline{V})}$ sa dá z kompaktnej množiny $f(\overline{V})$ spojito rozšíriť na celé $\mathbb{R}^n$)

$$1 = \deg(id, V, x) = \deg(u \circ f, V, x) = \deg(f, V, f(V)) \deg(u, f(V), x).$$

Keďže $\deg(f, V, f(V))$, $\deg(u, f(V), x)$ sú celé čísla, nutne

$$\deg(f, V, f(V)) = \pm 1. \tag{14}$$

Lema 4.1. *Pre každé dve súvislé otvorené množiny $V_1, V_2 \subset\subset \Omega$ platí*

$$\deg(f, V_1, f(V_1)) = \deg(f, V_2, f(V_2)).$$

Dôkaz. Zvoľme $x \in V_1$, $y \in V_2$. Zo súvislosti Ω existuje krivka $\gamma : [0,1] \to \Omega$ a $\epsilon > 0$ tak, že

$$\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y,\ B(\gamma(0), \epsilon) \subset V_1,\ B(\gamma(1), \epsilon) \subset V_2$$
$$\text{a } B(\gamma(t), \epsilon) \subset\subset \Omega \text{ pre každé } t \in [0,1].$$

Zvolíme postupnosť bodov $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tak, aby $B(\gamma(t_j), \epsilon) \cap B(\gamma(t_j), \epsilon) \neq \emptyset$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$. Označme $B_j := B(\gamma(t_j), \epsilon)$. Potom z vlastnosti ($d7$) a s využitím konštantnosti stupňa na súvislých množinách (značenie ako vyššie) máme pre $j = 1, 2, \ldots, k$

$$\deg(f, B_j, f(B_j)) = \deg(f, B_j \cap B_{j+1}, f(B_j \cap B_{j+1})) = \deg(f, B_{j+1}, f(B_{j+1})),$$

a teda (opäť z ($d7$) a konštantnosti stupňa na súvislých množinách)

$$\deg(f, V_1, f(V_1)) = \deg(f, B_0, f(B_0)) = \deg(f, B_k, f(B_k)) = \deg(f, V_2, f(V_2)).$$

□

Definícia 4.2. Majme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblasť. Povieme, že homeomorfizmus $f : \Omega \to G$ je *kladne orientovaný*, ak pre každú oblasť $V \subset\subset \Omega$ platí

$$\deg(f, V, f(V)) = 1.$$

Povieme, že f je *záporne orientovaný*, ak pre každú oblasť $V \subset\subset \Omega$ platí

$$\deg(f, V, f(V)) = -1.$$

Poznámka 4.3. Zo vzťahu (14) a *Lemy 4.1* dostávame, že každý homeomorfizmus na oblasti Ω je buď kladne alebo záporne orientovaný. Predpoklad vo *Vete 1.4*, že f je kladne orientovaný, teda nie je nijako obmedzujúci. Ak máme záporne orientovaný homeomorfizmus f, môžeme totiž výsledky pre kladne orientované homeomorfizmy aplikovať na kladne orientovaný homeomorfizmus

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mapsto f(-x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

a pre záporne orientovaný f dostaneme vzťah (2) so znamienkom mínus na pravej strane.

4.2 Priestor $W^{1,n-1}$ a rezy množiny Ω

Značenie 4.4. Podobne ako v dimenzii 2, pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $t \in \mathbb{R}$ označme

$$\Omega_t^i := \{x \in \Omega :\ x_i = t\}.$$

Množina Ω_t^i leží v nadrovine $\mathbb{R}^n$, mieru $\mathcal{H}^{n-1}$ na nej budeme stotožňovať s λ_{n-1}.

Slabé derivácie $D_j f_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ sú definované λ_n-skoro všade na Ω. Zafixujme si reprezentanta týchto funkcií, ktorý bude definovaný všade na Ω. Ďalej kvôli tomu, aby sme mali definovanú konvolúciu funkcií f, $D_j f$ so zhladzovacími funkciami ρ^k, mimo Ω dodefinujme $f = 0$, $D_j f = 0$. Máme potom $f, D_j f \in L^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Uvedomme si však, že takto definovaná $D_j f$ nie je slabá derivácia f na celom $\mathbb{R}^n$. Stále je to však slabá derivácia f na Ω, t. j. pre všetky $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ s kompaktným nosičom v Ω platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_j f \varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi.$$

Lema 4.5. *Majme všade definovaného reprezentanta $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ a uvažujme štandardné zhladenia $g^k = g * \rho^k$. Potom existuje postupnosť vybraná z $\{\rho^k\}$ (značíme opať $\{\rho^k\}$, $\{g^k\}$) tak, že pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a skoro všetky $t \in \mathbb{R}$*

$$g^k\lfloor_{\Omega_t^i} \to g\lfloor_{\Omega_t^i} \text{ v priestore } L^p(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n).$$

Špeciálne $g\lfloor_{\Omega_t^i} \in L^p(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$.

Dôkaz. Vieme, že $g^k \to g$ v $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, t. j.

$$\int_\Omega |g - g^k|^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Omega_t^i} |g - g^k|^p \, d\lambda_{n-1} \right) d\lambda_1 \to 0.$$

Funkcie $G_k(t) = \int_{\Omega_t^i} |g - g^k|^p \, d\lambda_{n-1}$ teda konvergujú k 0 v L^1. Existuje teda vybraná postupnosť z $\{G_k\}$, ktorá konverguje k 0 skoro všade. Príslušná vybraná postupnosť z $\{g^k\lfloor_{\Omega_t^i}\}$ teda konverguje ku $g\lfloor_{\Omega_t^i}$ v $L^p(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Dôsledok 4.6. *Existuje (pod)postupnosť $\{\rho^k\}$ štandardných zhladzovacích funkcií tak, že pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ a skoro všetky $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} f * \rho^k &\to f\lfloor_{\Omega_t^i} && v\ L^{n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n), \\ D_j f * \rho^k &\to D_j f\lfloor_{\Omega_t^i} && v\ L^{n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{15}$$

Pre takéto t sú pritom $(D_j f)\lfloor_{\Omega_t^i}$ zároveň slabými deriváciami funkcie $f\lfloor_{\Omega_t^i}$, špeciálne $f\lfloor_{\Omega_t^i} \in W^{1,n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$.

Dôkaz. Prvá časť plynie z *Lemy 4.5* použitej n-krát za sebou na funkcie $g = f$, $g = D_j f$, $j = 1, 2 \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ (pri $(l+1)$-vom použití *Lemy 4.5* vyberáme podpostupnosť z postupnosti vybranej pri l-tom použití *Lemy 4.5*).

Majme ďalej také t, pre ktoré platí (15), $j \neq i$ a $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_t^i)$. Potom pre $\frac{1}{k} <$ dist $(\operatorname{supp} \varphi, \Omega^c)$ a $x \in \operatorname{supp} \varphi$ máme $D_j * \rho^k(x) = D_j(f * \rho^k)$, a teda

$$\int_{\Omega_t^i} D_j f \varphi = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_t^i} D_j f^k \varphi = -\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_t^i} f^k D_j \varphi = -\int_{\Omega_t^i} f D_j \varphi,$$

takže $(D_j f)\lfloor_{\Omega_t^i}$ je slabá derivácia $f\lfloor_{\Omega_t^i}$. Pritom $f\lfloor_{\Omega_t^i}, (D_j f)\lfloor_{\Omega_t^i} \in L^{n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$ máme z (15). $\square$

Značenie 4.7. Funkciami $\{\rho^k\}$ budeme odteraz vždy myslieť (pod)postupnosť štandardných zhladzovacích funkcií, pre ktorú platí tvrdenie v *Dôsledku 4.6*. Ďalej budeme značiť $f^k := f * \rho^k$.

Veta 4.8. *Pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a skoro všetky $t \in \mathbb{R}$ platí pre $f\lfloor_{\Omega_t^i}$ area formula (nadrovinu $\mathbb{R}^n$, v ktorej leží Ω_t^i, stotožňujeme s $\mathbb{R}^{n-1}$ a Hausdorffovu mieru $\mathcal{H}^{n-1}$ na nej s Lebesgueovou mieru λ_{n-1}).*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $i = n$ (inak iba zameníme súradnice). *Veta* 1.3 v článku [5] hovorí, že pre homeomorfizmus

$$g \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}((-1,1)^n, \mathbb{R}^n)$$

toto platí: pre skoro všetky $y \in (-1,1)$ zobrazenie $g\lfloor_{(-1,1)^{n-1}\times\{y\}}$ spĺňa Luzinovu (N)-podmienku. Majme ďalej obecnú otvorenú kocku $Q \subset \Omega$ so stenami rovnobežnými s nadrovinami $\{x_i = 0\}$. Zložením s lineárnym zobrazením, ktoré zobrazuje Q na $(-1,1)^n$ a zobrazuje $\mathcal{H}^{n-1}$-nulové množiny na $\mathcal{H}^{n-1}$-nulové, dostaneme, že naše tvrdenie platí pre každé $h \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(Q, \mathbb{R}^n)$. Našu otvorenú množinu Ω si môžeme napísať ako spočítateľné zjednotenie kociek $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$. Označme Z_j množinu tých $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f\lfloor_{Q_j \cap \{x_n = t\}}$ nespĺňa (N)-podmienku, $Z := \cup_{j=1}^{\infty} Z_j$. Potom $\lambda_1(Z_j) = 0$, $\lambda_1(Z) = 0$ a pre $t \notin Z$ (t. j. pre skoro všetky $t \in \mathbb{R}$) $f\lfloor_{\Omega_t^n}$ spĺňa (N)-podmienku. □

Dôsledok 4.9. *Pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a skoro všetky $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\mathcal{H}^{n-1}(f(\Omega_t^i)) < \infty.$$

Dôkaz. Z *Dôsledku 4.6* a *Vety 4.8* pre každé i a skoro všetky t je funkcia $f\lfloor_{\Omega_t^i} \in W^{1,n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$ a platí pre ňu area formula. Pre takéto i, t máme s využitím *Pozorovania 2.14*

$$\mathcal{H}^{n-1}(f(\Omega_t^i)) = \int_{f(\Omega_t^i)} 1 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega_t^i} |J_{f\lfloor_{\Omega_t^i}}| < \infty.$$

□

Poznámka 4.10. Analogické tvrdenie platí aj po zámene funkcie f za u za predpokladu, že $f \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (to v našom prípade $f \in W^{1,n-1}$ platí, ak je Ω množina konečnej miery). Ak pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a $t \in \mathbb{R}$ označíme $G_t^i := \{y \in G; y_i = t\}$, potom pre každé i a skoro všetky t platí

$$\mathcal{H}^{n-1}(u(G_t^i)) < \infty.$$

Dôkaz. Pre skalárne funkcie $f_i \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R})$ platí coarea formula

$$\int_\Omega |J_{f_i}| = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}((f_i)^{-1}(t)) \, dt, \tag{16}$$

viď [11] (*Veta 4.5.9, (14)*) alebo [22]. Pritom pre $f_i \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R})$, $u = f^{-1}$ máme

$$\int_\Omega |J_{f_i}| = \int_\Omega \sqrt{(D_1 f_i)^2 + (D_2 f_i)^2 + \cdots + (D_n f_i)^2} < \infty,$$
$$(f_i)^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = t\} = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^n : y_i = t\}) = u(G_t^i),$$

takže z (16) máme $\mathcal{H}^{n-1}(u(G_t^i)) < \infty$ pre skoro všetky $t \in \mathbb{R}$. □

4.3 Vzťah na f-regulárnych kvádroch

Definícia 4.11. Povieme, že $U \subset\subset \Omega$ je *f-regulárny kváder*, ak $U = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a steny kvádru U ležia v rezoch Ω_t^i, pre ktoré platí:

- $f\lfloor_{\Omega_t^i} \in W^{1,n-1}(\Omega_{t_i}^i, \mathbb{R}^n)$,
- $D_j(f\lfloor_{\Omega_t^i}) = (D_j f)\lfloor_{\Omega_t^i} \quad \lambda_{n-1}$-skoro všade pre všetky $j \neq i$,
- $(f * \rho^k)\lfloor_{\Omega_t^i} \to f\lfloor_{\Omega_t^i} \quad$ v $L^{n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$,
- $(D_j f * \rho^k)\lfloor_{\Omega_t^i} \to (D_j f)\lfloor_{\Omega_t^i} \quad$ v $L^{n-1}(\Omega_t^i, \mathbb{R}^n)$ pre všetky $j \neq i$,
- pre $f\lfloor_{\Omega t^i}$ platí area formula
- $\mathcal{H}^{n-1}(f(\Omega_t^i)) < \infty$.

Poznámka 4.12. Prvý a druhý bod plynú z tretieho a štvrtého (viď *Dôsledok 4.6*), posledný bod vyplýva z prvého a piateho (viď *Dôsledok 4.9*).

Lema 4.13. *Majme otvorenú množinu $O \subset \Omega$ a konečnú Radonovu mieru μ. Potom pre každé $\epsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ a disjunktný systém f-regulárnych kvádrov $\{O_j\}_{j=1}^k$ takých, že $O_j \subset\subset O$ a*

$$\mu(O \setminus \cup_{j=1}^k O_j) < \epsilon.$$

Dôkaz. Analogicky ako *dôkaz Lemy 3.13*. Namiesto *Lemy 3.12* využijeme *Dôsledok 4.6*, *Vetu 4.8* a *Dôsledok 4.9*, ktoré hovoria, že "skoro každý" kváder je f-regulárny. □

Značenie 4.14. Majme f-regulárny kváder O a jeho obraz $U = f(O)$. Jeho otvorené steny ($(n-1)$-rozmerné kvádre) označme S_j^+, S_j^- tak, že vonkajšia normála je rovná

$$\nu^O(x) = \begin{cases} e_j, & x \in S_j^+, \\ -e_j, & x \in S_j^-. \end{cases}$$

Ak niečo budeme tvrdiť pre S_j^+ aj S_j^-, budeme písať $S_j^\pm$. Z regularity O vieme, že slabé derivácie

$$D_1 f, \ldots, D_{j-1} f, D_{j+1} f, \ldots, D_n f$$

sú zároveň slabými deriváciami funkcie $f\lfloor_{S_j^\pm} \in W^{1,n-1}(S_j^\pm, \mathbb{R}^n)$, ak $S_j^\pm$ berieme ako podmnožinu $\mathbb{R}^{n-1}$. Označme J_f^j Jakobián takto branej funkcie $f\lfloor_{S_j^\pm}$, máme

$$|J_f^j| = |D_1 f \times \cdots \times D_{j-1} f \times D_{j+1} f \times \cdots \times D_n f|.$$

Z *Pozorovania 2.14* vieme $|J_f^j| \in L^1(S_j^\pm)$.

Keďže O je f-regulárny, je obraz H^{n-1}-nulovej množiny

$$\partial O \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} S_j^+ \cup \bigcup_{j=1}^{n} S_j^- \right)$$

opäť H^{n-1}-nulová. Ďalej pre množinu $N_j^{\pm} := \{x \in S_j^{\pm} : |J_f^j| = 0\}$ platí "Sardova veta": z area formule totiž dostávame

$$\mathcal{H}^{n-1}(f(N_j^{\pm})) = \int_{N_j^{\pm}} |J_f^j| \, d\lambda_{n-1} = 0.$$

Pre H^{n-1}-skoro všetky $y \in \partial U$ teda máme $y = f(x)$, kde x leží v niektorej S_j^+ alebo S_j^-, a $|J_f^j(x)| \neq 0$. Pre takéko $y = f(x)$ položme

$$\tilde{\nu^U}(f(x)) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j+1}}{|J_f^j(x)|} D_1 f \times \cdots \times D_{j-1} f \times D_{j+1} f \times \cdots \times D_n f \, (x), & \text{ak } x \in S_j^+, \\ \dfrac{(-1)^{j}}{|J_f^j(x)|} D_1 f \times \cdots \times D_{j-1} f \times D_{j+1} f \times \cdots \times D_n f \, (x), & \text{ak } x \in S_j^-. \end{cases}$$

Všimnime si, že $|\tilde{\nu^U}(y)| = 1$ vo všetkých bodoch y, kde je $\tilde{\nu}^U$ definovaná.

Tvrdenie 4.15. *Majme $O \subset\subset \Omega$ f-regulárny kváder, $U = f(O)$. Potom*

$$\tilde{\nu}^U = \nu^U \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-skoro všade na } \partial U.$$

Špeciálne Federerova normála ν^U existuje skoro všade na ∂U.

Dôkazu *Tvrdenia 4.15* je venovaná kapitola 4.4. Keď budeme toto tvrdenie využívať predtým, ako ho dokážeme, explicitne to napíšeme.

Značenie 4.16. Označme

$$(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} := \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_{j-1} f_1 & D_{j+1} f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_{l-1} & \dots & D_{j-1} f_{l-1} & D_{j+1} f_{l-1} & \dots & D_n f_{l-1} \\ D_1 f_{l+1} & \dots & D_{j-1} f_{l+1} & D_{j+1} f_{l+1} & \dots & D_n f_{l+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \dots & D_{j-1} f_n & D_{j+1} f_n & \dots & D_n f_n \end{pmatrix},$$

podobne nech $(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}$ je $(n-1) \times (n-1)$ matica, ktorá vznikne z matice derivácií (a zároveň slabých derivácií) (Df^k) vynechaním l-tého riadku a j-teho stĺpca.

Ďalej uvažujme f-regulárny kváder O, funkciu $\Psi \in \mathcal{C}(\partial O)$ a $1 \le l \le n$. Budeme značiť

$$\int_{\partial O} \Psi \, df_1 \wedge \ldots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n :=$$

$$\int_{\partial O} \Psi \sum_{j=1}^{n} \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

$$\int_{\partial O} \Psi \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, \nu_j^O \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Lema 4.17. *Pre f-regulárny kváder $O \subset \Omega$ so stenami $S_j^{\pm}$, jeho obraz $U = f(O)$, $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $\Phi \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí*

$$(-1)^{l+1} \int_{\partial O} \Phi \circ f \, df_1 \wedge \cdots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n = \int_{\partial U} \Phi \, \tilde{\nu_l^U} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dôkaz. Keďže O je f-regulárny kváder, pre $f\lfloor_{S_j^{\pm}}$ platí area formula. Máme teda

$$\int_{f(S_j^+)} \Phi \, \tilde{\nu_l^U} \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{S_j^+} (\Phi \circ f)(\tilde{\nu_l^U} \circ f) |J_f^j| \, d\mathcal{H}^{n-1} =$$

$$= \int_{S_j^+} (-1)^{j+1} (\Phi \circ f)(D_1 f \times \cdots \times D_{j-1} f \times D_{j+1} f \times \cdots \times D_n f)_l \, d\mathcal{H}^{n-1} =$$

$$= \int_{S_j^+} (-1)^{j+l} (\Phi \circ f) \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Analogický vzťah dostávame pre integráciu cez S_j^- (resp. $f(S_j^-)$), takže

$$\int_{\partial U} \Phi \tilde{\nu_l^U} \, d\mathcal{H}^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \int_{f(S_j^+)} \Phi \tilde{\nu_l^U} \, d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} \int_{f(S_j^-)} \Phi \tilde{\nu_l^U} \, d\mathcal{H}^{n-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{S_j^+} (-1)^{j+l} (\Phi \circ f) \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{S_j^-} (-1)^{j+l+1} (\Phi \circ f) \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, d\mathcal{H}^{n-1} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial O} (-1)^{j+l} (\Phi \circ f) \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \nu_j^O \, d\mathcal{H}^{n-1} =$$

$$= (-1)^{l+1} \int_{\partial O} \Phi \circ f \, df_1 \wedge \cdots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n.$$

□

Lema 4.18. *Majme $d, m \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$ a $V \subset \mathbb{R}^d$ merateľnú ohraničenú. Nech $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a nech existuje konštanta $C > 0$ tak, že*

$$|F(\xi)| \le C \left(1 + |\xi|^p\right).$$

Potom operátor $g \mapsto F(g)$ je spojitý operátor z $L^p(V,\mathbb{R}^m)$ do $L^1(V,\mathbb{R})$, t. j. pre každú postupnosť $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset L^p(V,\mathbb{R}^m)$ konvergujúcu ku $g \in L^p(V,\mathbb{R}^m)$ v $L^p(V,\mathbb{R}^m)$ platí

$$F(g_k) \to F(g) \qquad v\ L^1(V,\mathbb{R}).$$

Toto je známe tvrdenie. Pre $m = 1$ ide o špeciálny prípad *Nemytského operátoru*, ktorého spojitosť je ukázaná napr. v [2], *Veta 3.1* a *Veta 3.7*. Pre úplnosť uvedieme dôkaz pre obecné m.

Dokaz Lemy 4.18. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že existuje postupnosť funkcií $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset L^p(V,\mathbb{R}^m)$, funkcia $g \in L^p(V,\mathbb{R}^m)$ a $\epsilon > 0$ tak, že

$$g_k \to g \qquad \text{v } L^p(V,\mathbb{R}^m), \tag{17}$$
$$\limsup_{k\to\infty} \int_V |F(g_k) - F(g)| \geq \epsilon.$$

Bez ujmy na obecnosti (inak vyberieme podopostupnosť z g_k) teda môžeme predpokladať

$$\int_V |F(g_k) - F(g)| \geq \epsilon \qquad \text{pre všetky } k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Označme

$$E_k := \{x \in V : |g_k(x)| \leq 2 + 3|g(x)|\},$$

máme

$$\int_V |F(g_k) - F(g)| = \int_V |F(g_k) - F(g)|\chi_{E_k} + \int_V |F(g_k) - F(g)|\chi_{E_k^c}. \tag{19}$$

Pre $x \in V \setminus E_k$ pritom platí

$$2|g_k - g| \geq 2|g_k| - 2|g| \geq |g_k| + |g| + 2,$$

a teda s využitím $p \geq 1$ a konvexity funkcie $t \mapsto t^p$

$$\int_V |F(g_k)-F(g)|\chi_{E_k^c} \leq C\int_V (2+|g_k|^p+|g|^p) \leq C\int_V (2+|g_k|+|g|)^p \leq 2^pC\int_V |g_k-g|^p.$$

Z (17) teda dostávame

$$\lim_{k\to\infty} \int_V |F(g_k) - F(g)|\chi_{E_k^c} = 0. \tag{20}$$

Ďalej z (17) existuje vybraná postupnosť $\{g_{k_j}\}$ z $\{g_k\}$, ktorá konverguje ku g skoro všade na V. Keďže na množine E_{k_j} máme integrovateľnú majorantu

$$|F(g_{k_j}) - F(g)| \leq C(2 + |g_{k_j}|^p + |g|^p) \leq C(2 + (2 + 3|g|)^p + |g|^p),$$

dostávame s využitím spojitosti F

$$\lim_{j\to\infty} \int_V |F(g_{k_j}) - F(g)|\chi_{E_{k_j}} = \int_V \lim_{j\to\infty} |F(g_{k_j}) - F(g)|\chi_{E_{k_j}} = 0.$$

Spolu s (20) a (19) tak dostávame spor s (18). □

Lema 4.19. *Uvažujme f-regulárny kváder $O \subset \Omega$ so stenami $S_j^{\pm}$. Potom pre každé $j, l \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\begin{aligned} \det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} &\to \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \qquad v\ L^1(S_j^{\pm}), \\ \det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} &\to \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \qquad v\ L^1(O). \end{aligned}$$

Dôkaz. Ak matice $(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}$, $(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}}$ berieme ako zobrazenia z $S_j^{\pm}$ do $\mathbb{R}^{(n-1)^2}$, potom z f-regularity O máme

$$(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \to (Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \qquad \text{v } L^{n-1}(S_j^{\pm}, \mathbb{R}^{(n-1)^2}).$$

Ďalej pre spojitú funkciu $\det : \mathbb{R}^{(n-1)^2} \to \mathbb{R}$ dostávame z Hadamardovej nerovnosti

$$|\det(\xi)| \le |\xi|^{n-1} \qquad \text{pre všetky } \xi \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}.$$

Z *Lemy 4.18* teda máme

$$\det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \to \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \qquad \text{v } L^1(S_j^{\pm}).$$

Dôkaz konvergencie v $L^1(O)$ je analogický,

$$(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \to (Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \qquad \text{v } L^{n-1}(O, \mathbb{R}^{(n-1)^2}).$$

máme z toho, že $f \in W^{1,n-1}(\Omega)$. □

Lema 4.20. *Pre $O \subset\subset \Omega$ f-regulárny kváder a $m, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \int_{\partial O} x_m \, df_1 \wedge \dots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \dots \wedge df_n = \\ = \int_O (-1)^{m+l} \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{m}}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Z *Lemy 4.19* vieme $(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \to (Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}}$ v $L^1(S_j^{\pm})$, a teda

$$\begin{aligned} &\int_{\partial O} x_m \, df_1 \wedge \dots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \dots \wedge df_n = \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \int_{S_j^+ \cup S_j^-} x_m \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, \nu_j^O \, d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &\quad = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \int_{S_j^+ \cup S_j^-} x_m \det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}} \, \nu_j^O \, d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &\quad = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial O} x_m \, df_1^k \wedge \dots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \dots \wedge df_n^k. \end{aligned} \tag{21}$$

Zo Stokesovej vety pre hladkú diferenciálnu formu $x_m\, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k$ dostávame

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial O} x_m\, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\
&\quad = \int_O dx_m \wedge df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\
&\quad = \int_O \det \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ D_1 f_1^k & \ldots & D_{m-1} f_1^k & D_m f_1^k & D_{m+1} f_1^k & \ldots & D_n f_1^k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_{l-1^k} & \ldots & D_{m-1} f_{l-1}^k & D_m f_1^k & D_{m+1} f_{l-1}^k & \ldots & D_n f_{l-1}^k \\ D_1 f_{l+1}^k & \ldots & D_{m-1} f_{l+1^k} & D_m f_1^k & D_{m+1} f_{l+1}^k & \ldots & D_n f_{l+1}^k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n^k & \ldots & D_{m-1} f_n^k & D_m f_1^k & D_{m+1} f_n^k & \ldots & D_n f_n^k \end{pmatrix} dx \\
&\quad = (-1)^{m+1} \int_O \det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{m}} dx.
\end{aligned}$$

Spolu s (21) a *Lemou 4.19* teda dostávame

$$\begin{aligned}
(-1)^{l+1} &\int_{\partial O} x_m\, df_1 \wedge \cdots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n = \\
&= (-1)^{l+1} \lim_{k\to\infty} \int_{\partial O} x_m\, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\
&= (-1)^{m+l} \lim_{k\to\infty} \int_O \det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{m}}\, dx = \\
&= (-1)^{m+l} \int_O \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{m}}\, dx.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.21. *Nech $U \subset\subset G$ je otvorená množina a $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U) < \infty$. Potom pre $m, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí*

$$\int_U dD_l u_m = \int_{\partial_* U} u_m \nu_m^U\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{22}$$

kde ν^U je Federerova normála.

Dôkaz. Rovnako ako v dimenzii 2 (*Lema 3.14) plynie z* Tvrdenia 2.7. □

Tvrdenie 4.22. *Nech $O \subset \Omega$ je f-regulárny kváder. Potom platí*

$$Du(f(O)) = \int_O \operatorname{adj} Df.$$

Dôkaz. Označme $U := f(O)$. Použitím *Lemy 4.21* (predpoklady na U sú splnené vďaka f-regularite O) a *Tvrdenia 4.15* (využívame kapitolu 4.4) dostávame

$$D_l u_m(U) = \int_{\partial U} u_m \nu_l^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U} u_m \tilde{\nu}_l^U \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{23}$$

Ďalej použijeme *Lemu 4.17* pre $\Phi = u_m$ a *Lemu 4.20*:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} u_m \tilde{\nu}_l^U \, d\mathcal{H}^{n-1} &= (-1)^{l+1} \int_{\partial O} x_m \, df_1 \wedge \cdots \wedge df_{l-1} \wedge df_{l+1} \wedge \cdots \wedge df_n = \\ &= \int_O (-1)^{m+l} \det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{m}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Z (23) a (24) plynie dokazované tvrdenie (po zložkách). □

Dôkaz vety 1.4. Dôkaz je rovnaký ako v dimenzii 2 (*Dôkaz Vety 1.2*). Jednotlivé zložky $(\operatorname{adj} Df)_{i,j}$ totiž môžeme stotožniť so znamienkovými Radonovými mierami $(\operatorname{adj} Df)_{i,j}\lambda_n$. Namiesto *Lemy 3.13* potom použijeme jej n-rozmernú analógiu, *Lemu 4.13*, a namiesto *Tvrdenia 3.16* pre f-regulárne obdĺžniky použijeme *Tvrdenie 4.22* pre f-regulárne kvádre (využívame teda kapitolu 4.4). □

4.4 Stotožnenie normál ν^U a $\tilde{\nu}^U$ – dôkaz Tvrdenia 4.15

V tejto kapitole sa budeme venovať dôkazu *Tvrdenia 4.15*. Budeme mať teda zafixovaný f-regulárny kváder $O \subset\subset \Omega$ a jeho obraz $U = f(O)$. Chceme dokázať, že pre $\mathcal{H}^{n-1}$-skoro všetky body $y \in \partial U$ existuje Federerova normála $\nu^U(y)$ a platí

$$\nu^U(y) = \tilde{\nu}^U(y). \tag{25}$$

Značenie 4.23. Označme $S := \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\partial U}$. Potom S je Radonova miera v $\mathbb{R}^n$ s nosičom ∂U.

Tvrdenie 4.24. *Pre $\mathcal{H}^{n-1}$-skoro všetky $y \in \partial U$ platí:*

(i) $y = f(x)$, $x \in P$, *kde* $P = S_j^+$ *alebo* $P = S_j^-$ *pre nejaké* j. *Množinu* P *budeme ďalej chápať ako podmnožinu* $\mathbb{R}^{n-1}$, *bod* x *ako bod z* $\mathbb{R}^{n-1}$;

(ii) $|J_f^j(x)| \neq 0$ *pre to* j, *pre ktoré* $x \in S_j^+ \cup S_j^-$. *Označme* $J_f^P := J_f^j$;

(iii) $\tilde{\nu}^U(y)$ *je definovaná;*

(iv) x *je Lebesgueov bod zobrazenia* $|J_f^P| \in L^1(P)$;

(v) y *je* S*-Lebesgueov bod zobrazenia* $\tilde{\nu}^U : \partial U \to \mathbb{R}^n$, *t. j.*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\int_{B(y,r)} |\tilde{\nu}^U(z) - \tilde{\nu}^U(y)| \, dS(z)}{S(B(y,r))} = 0; \tag{26}$$

(*vi*) *slabá derivácia* $Df\lfloor_P$ *je zároveň aproximatívnou deriváciou* $f\lfloor_P$ *v bode* x*;*

(*vii*) *Existuje množina* $Z \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *hustoty* 0 *v* x *a Lipschitzovské zobrazenie* $F : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *tak, že* $f\lfloor_P = F$ *na množine* $P \setminus Z$*,* $F(x) = f(x)$ *a* F *je v bode* x *diferencovateľné. Navyše*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(y,r) \cap F(P \setminus Z))}{\alpha_{n-1} r^{n-1}} = 1;$$

(*viii*)

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{S(B(y,r))}{\alpha_{n-1} r^{n-1}} = 1. \tag{27}$$

Dôkaz. To, že pre H^{n-1}-skoro všetky $y \in \partial U$ platí $(i) - (iii)$, je dokázané v závere *Značenia 4.14* pri definícii $\tilde{\nu}^U$.

Dôkaz ďalších bodov budeme robiť zvlášť pre každú "stenu" ∂U - dokážeme, že tvrdenia platia pre skoro všetky $y \in \partial U$ také, že $y = f(x)$, $x \in P$, kde P je ako v znení (i). Keďže pre $f\lfloor_P$ platí area formula, stačí, keď tvrdenia dokážeme pre λ_{n-1}-skoro všetky $x \in P$ (a príslušné $y = f(x)$). Obraz λ_{n-1}-nulovej množiny, kde tvrdenie neplatí, totiž bude $\mathcal{H}^{n-1}$-nulový.

Bod (iv) plynie zo známeho tvrdenia, že pre každú integrovateľnú funkciu je skoro každý bod jej Lebesgueovým bodom. Toto platí nielen pre Lebesgueovu mieru, ale aj pre každú Radonovu mieru, viď *Dôsledok 1* v kapitole 1.7.1 v [9]. Odtiaľ teda plynie aj bod (v): funkcia $\tilde{\nu}^U$ je definovaná S-skoro všade na $\mathbb{R}^n$, je S-merateľná a $\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}^U| \, dS = \mathcal{H}^{n-1}(\partial U) < \infty$.

Z *Vety 2.11* vieme, že $f\lfloor_P$ je aproximatívne diferencovateľná na množine $R \subset P$, pričom $\lambda_{n-1}(P \setminus R) = 0$. Odtiaľ dostávame bod (vi). Ďalej z *Tvrdenia 2.12* dostávame, že existujú Lipschitzovské funkcie $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a vyjadrenie $R = \cup_{i=1}^{\infty} R_i$ tak, že R_i sú λ_{n-1}-merateľné a $f = F^i$ na R_i. Skoro každý bod R_i je bodom hustoty R_i a v skoro všetkých bodoch $\mathbb{R}^{n-1}$ je F^i diferencovateľná. Označme Z_i množinu tých $x \in R_i$, ktoré nie sú bodom hustoty R_i alebo v nich neexistuje derivácia F^i. Potom

$$\lambda_{n-1}((P \setminus R) \cup_{i=1}^{\infty} Z_i) = 0,$$

a teda skoro každý bod $x \in P$ leží v niektorej R_i, je bodom hustoty R_i a F^i je v ňom diferencovateľná, túto "dobrú" množinu označme $\tilde{P}$. Z area formule

$$\mathcal{H}^{n-1}(f(P) \setminus f(\tilde{P})) = 0.$$

Ďalej máme $\mathcal{H}^{n-1}(F^i(R_i)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial U) < \infty$, a teda množina $F^i(R_i) \subset \mathbb{R}^n$ je $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-rektifikovateľná, viď *Definíciu 3.2.14* v [11]. Z *Vety 3.2.19* v [11] potom plynie

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(y,r) \cap F_i(R_i))}{\alpha_{n-1} r^{n-1}} = 1 \tag{28}$$

pre H^{n-1}-skoro všetky $y \in F^i(R_i)$. Bod (vii) teda platí pre všetky $y \in f(\tilde{P})$ také, že $y \in F^i(R_i)$ pre nejaké i (plynie z $y \in f(\tilde{P})$) a pre toto i platí (28) - stačí potom zvoliť $F = F^i$ a $Z := P \setminus R_i$. Tieto podmienky spĺňajú skoro všetky $y \in P$.

Z toho, že reštrikcie $f\lfloor_{R_i}$ sú Lipschitzovské, $\mathcal{H}^{n-1}(P\setminus\cup_{i=1}^{\infty}R_i)=0$ a $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)<\infty$ dostávame, že ∂U je $(\mathcal{H}^{n-1},n-1)$-rektifikovateľná, viď definíciu 3.2.14 v [11]. Bod $(viii)$ potom plynie z *Vety 3.2.19* v [11].

□

Vzťah (25) teda stačí dokázať pre tie body $y\in\partial U$, ktoré spĺňajú body (i) – $(viii)$ v *Tvrdení 4.24*. Zafixujme si takýto $y_0\in\partial U$. Bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať

$$y_0=0=f(x_0),\qquad \tilde{\nu}^U(y_0)=e_1.$$

Značenie 4.25. Majme $0<\delta<1$, $r>0$. Označme

$$H:=\{y\in\mathbb{R}^n:\ y_1=0\},$$
$$H^+:=\{y\in\mathbb{R}^n:\ y_1>0\},\qquad H^-:=\{y\in\mathbb{R}^n:\ y_1<0\},$$
$$D^+_{r,\delta}:=\{y\in B(0,r):\ y_1>\delta r\},\qquad D^-_{r,\delta}:=\{y\in B(0,r):\ y_1<-\delta r\}.$$

Lema 4.26. *Ak pre každé $0<\delta<1$ platí*

$$\lim_{r\to0_+}\frac{1}{r^n}\left(|D^-_{r,\delta}\cap U|-|D^+_{r,\delta}\cap U|\right)=|D^-_{1,\delta}|,\tag{29}$$

potom $e_1=\nu^U(0)$ (čo chceme v tejto kapitole dokázať).

Dôkaz. Podľa definície Federerovej normály chceme ukázať

$$\chi_{\frac{U}{r}}\to\chi_{H^-}\qquad \text{v } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

čo je ekvivalentné s

$$\lim_{r\to0_+}\frac{|B(0,r)\cap H^-\cap U|}{|B(0,r)\cap H^-|}=1,\qquad \lim_{r\to0_+}\frac{|B(0,r)\cap H^+\cap U|}{|B(0,r)\cap H^+|}=0.\tag{30}$$

Keďže

$$\limsup_{r\to0_+}\frac{1}{r^n}|D^-_{r,\delta}\cap U|\le\lim_{r\to0_+}\frac{1}{r^n}|D^-_{r,\delta}|=|D^-_{1,\delta}|,$$

z (29) dostávame

$$\lim_{r\to0_+}\frac{1}{r^n}|D^-_{r,\delta}\cap U|=|D^-_{1,\delta}|,\qquad \lim_{r\to0_+}\frac{1}{r^n}|D^+_{r,\delta}\cap U|=0.$$

Pre každé $0<\delta<1$ teda máme

$$\liminf_{r\to0_+}\frac{|B(0,r)\cap H^-\cap U|}{|B(0,r)\cap H^-|}\ge\lim_{r\to0_+}\frac{|D^-_{r,\delta}\cap U|}{|B(0,r)\cap H^-|}=\frac{2}{\alpha_n}\lim_{r\to0_+}\frac{|D^-_{r,\delta}\cap U|}{r^n}=\frac{2}{\alpha_n}|D^-_{1,\delta}|.$$

Keďže $\lim_{\delta\to0_+}\frac{2}{\alpha_n}|D^-_{1,\delta}|=1$, dostávame tak prvú časť (30). Podobne

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to0_+}\frac{|B(0,r)\cap H^+\cap U|}{|B(0,r)\cap H^+|}&\le\lim_{r\to0_+}\left(\frac{|\{z\in B(0,r):\ 0<z_1<\delta r\}|}{|B(0,r)\cap H^+|}+\frac{2|D^+_{r,\delta}\cap U|}{\alpha_n r^n}\right)\\&=\left(1-\frac{|D^+_{1,\delta}|}{|B(0,1)\cap H^+|}\right)+0,\end{aligned}$$

pričom $\lim_{\delta\to0_+}\frac{|D^+_{1,\delta}|}{|B(0,1)\cap H^+|}=1$, odkiaľ plynie druhá časť (30). □

Do konca kapitoly si zafixujme $0 < \delta < 1$, chceme dokázať vzťah (29).

Lema 4.27. *Pre funkciu* $\eta(y) := \frac{y}{|y|^n}$ *platí*

$$\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \qquad \operatorname{div} \eta(y) = 0 \quad \textit{pre } y \neq 0. \tag{31}$$

Ďalej

$$\eta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \qquad \int_{B(0,R)} |\eta| = n\alpha_n R$$
$$a \qquad \operatorname{Div} \eta = n\alpha_n \delta_0 \quad \textit{v distribúciách.} \tag{32}$$

Dôkaz. Zrejme $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, pre $y \neq 0$ máme

$$\frac{\partial \eta_i(y)}{\partial y_i} = \frac{1}{|y|^n} - n\frac{y_i^2}{|y|^{n+2}},$$

sčítaním cez $i = 1, 2, \ldots, n$ dostávame (31). Ďalej z rotačnej symetrie funkcie $|\eta(y)|$

$$\int_{B(0,R)} |\eta| = \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y|^{n-1}} = n\alpha_n \int_0^R r^{n-1}\frac{1}{r^{n-1}} = n\alpha_n R.$$

Distributívna derivácia funkcie η je spočítaná v [20], príklad 32.5.10. □

Lema 4.28. *Majme otvorenú ohraničenú množinu* $D \subset \mathbb{R}^n$, $|\partial D| = 0$ *a funkciu*

$$\Phi(y) = \int_D \frac{y-z}{|y-z|^n}\, dz.$$

Potom Φ *je spojitá na* $\mathbb{R}^n$ *a*

$$\operatorname{Div} \Phi = n\alpha_n\, \chi_D \qquad \textit{v distributívnom zmysle.}$$

Dôkaz. Nájdime $r > 0$ tak, že $D \subset B(0,r)$. Pre $R > 0$ a $y \in B(0,R)$ máme

$$\Phi(y) = \int_D \frac{y-z}{|y-z|^n}\, dz = (-1)^n \int_{B(0,R+r)} \frac{w}{|w|^n}\chi_{\{w\in\mathbb{R}^n:\ y-w\in D\}}\, dw,$$

takže spojitosť Φ dostávame z Lebesgueovej vety (majoranta $\frac{1}{|w|^{n-1}}$, bodová konvergencia skoro všade vďaka $|\partial D| = 0$). Máme teda aj $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Pre funkciu $\eta^z(y) := \frac{y-z}{|y-z|^n}$ dostávame z *Lemy 4.27* $\operatorname{Div} \eta^z = n\alpha_n\, \delta_z$ v distributívnom zmysle, a teda pre distribúciu $\operatorname{Div} \Phi$ a testovaciu $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ máme

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Div} \Phi, \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \cdot \nabla\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_D \frac{y-z}{|y-z|^n}\nabla\varphi(y)\, dz\right) dy = \\ &= -\int_D \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y-z}{|y-z|^n}\nabla\varphi(y)\, dy\right) dz = \int_D \langle \operatorname{Div} \eta^z, \varphi\rangle = n\alpha_n \int_D \varphi(z)\, dz,\end{aligned}$$

čo sme chceli. Fubiniho vetu sme mohli použiť vďaka integrovateľnosti funkcie

$$\frac{|\nabla\varphi(y)|}{|y-z|^{n-1}}$$

podľa súčinovej miery (vďaka kompaktnému nosiču φ totiž integrujeme cez kompaktnú množinu). □

Značenie 4.29. Pre $r>0$ a $y\in\mathbb{R}^n$ označme

$$\Phi^r(y) := \frac{1}{r^n}\left(\int_{D^-_{r,\delta}} \frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz - \int_{D^+_{r,\delta}} \frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz\right).$$

Lema 4.30.

$$\int_{\partial U_*} \Phi^r \nu^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{n\alpha_n}{r^n}\left(|D^-_{r,\delta}\cap U| - |D^+_{r,\delta}\cap U|\right).$$

Dôkaz. Z *Lemy 4.28* a definície Φ^r dostávame $\Phi^r\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$,

$$\operatorname{Div}\Phi^r = \frac{n\alpha_n}{r^n}\left(\chi_{D^-_{r,\delta}} - \chi_{D^+_{r,\delta}}\right) \quad \text{v distributívnom zmysle.}$$

Ak teda $\operatorname{Div}\Phi^r$ berieme ako Radonovu mieru, máme $\operatorname{Div}\Phi^r << \lambda_n$, a teda

$$\operatorname{Div}\Phi^r(\partial U) = 0.$$

Ďalej $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)<\infty$ z f-regularity O a z *Tvrdenia 2.7* dostávame

$$\int_{\partial U_*} \Phi^r \nu^U d\mathcal{H}^{n-1} = \int_U d\operatorname{Div}\Phi^r = \frac{n\alpha_n}{r^n}\left(\left|D^-_{r,\delta}\cap U\right| - \left|D^+_{r,\delta}\cap U\right|\right). \tag{33}$$

□

Dôsledok 4.31. *Ak platí*

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\partial_* U} \Phi^r \nu^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = n\alpha_n|D^-_{1,\delta}|, \tag{34}$$

potom $e_1=\nu^U(0)$ *(čo chceme v tejto kapitole dokázať).*

Dôkaz. Plynie ihneď z *Lemy 4.26* a *Lemy 4.30.* □

Keďže o Federerovej normále ν^U toho zatiaľ veľa nevieme, chceli by sme ju vo vzťahu (34) nahradiť našou "normálou" (zatiaľ nevieme, že to je normála) $\tilde{\nu}^U$ definovanou v *Značení 4.14*. To sa nám podarí, ak pre ν^U a Φ^r dokážeme vzťah analogický k vzťahu v *Leme 4.17* pre $\tilde{\nu}^U$ a obecné Φ.

Lema 4.32. *Uvažujme* $\Phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *takú, že* $\operatorname{div}\Phi=0$ *na okolí* ∂U. *Potom platí*

$$\sum_{l=1}^n (-1)^{l+1}\int_{\partial O} \Phi_l\circ f\, df_1\wedge\cdots\wedge df_{l-1}\wedge df_{l+1}\wedge\cdots\wedge df_n = \int_{\partial_* U}\Phi\cdot\nu^U\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dôkaz. Keďže $\Phi \in \mathcal{C}^1$, $f^k \in \mathcal{C}^2$ na okolí U,

$$\omega := \Phi_l \circ f^k \, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k$$

je $\mathcal{C}^1$-hladká diferenciálna forma na okolí U. Máme

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial y_j} \circ f^k \right) \frac{\partial f_j^k}{\partial x_i} \right) dx_i \right) \wedge df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial y_j} \circ f^k \right) df_j^k \wedge df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\ &= (-1)^{l+1} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial y_l} \circ f^k \right) df_1^k \wedge \cdots \wedge df_n^k. \end{aligned}$$

Zo Stokesovej vety teda dostávame

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \int_{\partial O} \Phi_l \circ f^k \, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_{l-1}^k \wedge df_{l+1}^k \wedge \cdots \wedge df_n^k = \\ &= \int_O \left(\operatorname{div} \Phi \circ f^k \right) \, df_1^k \wedge \cdots \wedge df_n^k = \int_O \left(\operatorname{div} \Phi \circ f^k \right) J_{f^k} \, dx, \end{aligned} \tag{35}$$

kde J_{f^k} je Jakobián f^k, t. j. determinant matice ∇f^k.

Nájdime $\epsilon > 0$ tak, aby

$$\operatorname{dist}\,(y, \partial U) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \Phi(y) = 0. \tag{36}$$

Zhladenia f^k konvergujú na kompakte $\overline{O}$ rovnomerne k spojitej funkcii f, takže existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre $k \geq k_0$ a $x \in \overline{O}$ platí $|f(x) - f^k(x)| < \epsilon$. Zo základných vlastností stupňa (viď napr. ($d5$) v podkapitole 4.1) teda

$$k \geq k_0, \operatorname{dist}\,(y, \partial U) \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \deg(f^k, O, y) = \deg(f, O, y).$$

Keďže predpokladáme, že f je kladne orientovaný (viď *Definíciu 4.2*), dostávame

$$k \geq k_0, \operatorname{dist}\,(y, \partial U) \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \deg(f^k, O, y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } y \in U, \\ 0 & \text{pre } y \notin \overline{U}. \end{cases} \tag{37}$$

V ďalšom budeme uvažovať zhladenia f^k len pre $k \geq k_0$. Pre $x \in \partial O$ máme

$$\operatorname{dist}\,(f^k(x), \partial U) \leq |f(x) - f^k(x)| < \epsilon,$$

a teda z (36) dostávame

$$\operatorname{div} \Phi \circ f^k = 0 \ \text{ na } \partial O.$$

Máme teda splnené predpoklady vety 35.8. o substitúcií v [20] a spolu s (36), (37)

$$\int_O \left(\operatorname{div} \Phi \circ f^k \right) J_{f^k} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \deg(f^k, O, y) \operatorname{div} \Phi \, dy = \int_U \operatorname{div} \Phi \, dy. \tag{38}$$

Z *Gauss - Greenovej vety* pre množiny s konečným perimetrom (U) a $\mathcal{C}^1$ funkcie (Φ) pritom máme $\int_U \operatorname{div}\Phi\,dy = \int_{\partial U} \Phi\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1}$, takže spolu s (35) a (38) dostávame

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}&\int_{\partial O}\Phi_l\circ f^k\,df_1^k\wedge\cdots\wedge df_{l-1}^k\wedge df_{l+1}^k\wedge\cdots\wedge df_n^k= \\ &=\int_O\left(\operatorname{div}\Phi\circ f^k\right)J_{f^k}\,dx=\int_U\operatorname{div}\Phi\,dy=\int_{\partial_* U}\Phi\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}\tag{39}$$

Ďalej

$$\begin{aligned}\int_{\partial O}&\Phi_l\circ f^k\,df_1^k\wedge\cdots\wedge df_{l-1}^k\wedge df_{l+1}^k\wedge\cdots\wedge df_n^k= \\ &=\int_{\partial O}(\Phi_l\circ f^k)\sum_{j=1}^{n}\det(\nabla f^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_n= \\ &=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\int_{S_j^+\cup S_j^-}(\Phi_l\circ f^k)\det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\,\nu_j^O\,d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}\tag{40}$$

Z *Lemy 4.19*

$$\det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\to\det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\qquad\text{v } L^1(S_j^{\pm}).$$

Ďalej $f^k \rightrightarrows f$ na kompakte ∂O, $f^k(\partial O)\subset\{y\in\mathbb{R}^{n-1}:\ \operatorname{dist}(y,\partial U)\le\epsilon\}=K$ a Φ_l je rovnomerne spojitá na kompakte K, takže $(\Phi_l\circ f^k)\to(\Phi_l\circ f)$ v $L^\infty(\partial O)$. Z (40) teda dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}&\int_{\partial O}\Phi_l\circ f^k\,df_1^k\wedge\cdots\wedge df_{l-1}^k\wedge df_{l+1}^k\wedge\cdots\wedge df_n^k= \\ &=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\int_{S_j^+\cup S_j^-}(\Phi_l\circ f^k)\det(Df^k)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\,\nu_j^O\,d\mathcal{H}^{n-1}= \\ &=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\int_{S_j^+\cup S_j^-}(\Phi_l\circ f)\det(Df)_{\hat{l}}^{\hat{j}}\,\nu_j^O\,d\mathcal{H}^{n-1}= \\ &=\int_{\partial O}\Phi_l\circ f\,df_1\wedge\cdots\wedge df_{l-1}\wedge df_{l+1}\wedge\cdots\wedge df_n.\end{aligned}$$

Prechodom k limite v (39) teda dostávame, čo sme chceli. □

Dôsledok 4.33. *Pre* $\Phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *takú, že* $\operatorname{div}\Phi=0$ *na okolí* ∂U*, platí*

$$\int_{\partial U}\Phi\cdot\tilde{\nu}^U\,d\mathcal{H}^{n-1}=\int_{\partial_* U}\Phi\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dôkaz. Plynie ihneď z *Lemy 4.32* a z *Lemy 4.17* použitej na jednotlivé zložky Φ_l. □

Značenie 4.34. Majme $\epsilon>0$, definujme nasledovné okolie ∂U:

$$\partial_\epsilon U:=\{y\in\mathbb{R}^n:\ \operatorname{dist}(y,\partial U)<\epsilon\}.$$

Lema 4.35. *Majme $\epsilon > 0$ a $\partial_\epsilon U$ okolie ∂U. Nech $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je merateľná, $\Phi \in \mathcal{C}^1(\partial_\epsilon U, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} \Phi = 0$ na $\partial_\epsilon U$. Potom*

$$\int_{\partial U} \Phi \cdot \tilde{\nu}^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U} \Phi \cdot \nu^U \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dôkaz. Uvažujme zhladenia $\Phi^k = \Phi * \rho^k$, bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať $\operatorname{supp} \rho^k \in B(0, \frac{\epsilon}{2})$ (inak uvažujeme len $k \geq k_0$ pre nejaké $k_0 \in \mathbb{N}$). Potom $\Phi^k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a pre $y \in \partial_{\frac{\epsilon}{2}} U$ platí

$$\operatorname{div} \Phi^k(y) = \operatorname{div} \int_{B(0,\frac{\epsilon}{2})} \Phi(y-z)\rho^k(z)\, dz = \int_{B(0,\frac{\epsilon}{2})} \operatorname{div} \Phi(y-z)\rho^k(z)\, dz = 0,$$

pretože pre $z \in B(0, \frac{\epsilon}{2})$ máme $(y-z) \in \partial_\epsilon U$, kde je funkcia Φ triedy C^1 a $\operatorname{div} \Phi(y-z) = 0$. Z *Dôsledku 4.33* teda máme

$$\int_{\partial U} \Phi^k \cdot \tilde{\nu}^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U} \Phi^k \cdot \nu^U \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Keďže na okolí kompaktu ∂U je funkcia Φ spojitá, máme $\Phi^k \rightrightarrows \Phi$ na ∂U, a teda prechodom k limite dostávame naše tvrdenie. $\square$

Lema 4.36. *Pre každé $r > 0$ platí*

$$\int_{\partial U} \Phi^r \cdot \tilde{\nu}^U \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_* U} \Phi^r \cdot \nu^U \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dôkaz. Pre $r, \epsilon > 0$ a $y \in \mathbb{R}^n$ označme

$$\Phi^{r,\epsilon}(y) := \frac{1}{r^n} \left(\int_{D^-_{r,\delta} \setminus \partial_\epsilon U} \frac{y-z}{|y-z|^n} \, dz - \int_{D^+_{r,\delta} \setminus \partial_\epsilon U} \frac{y-z}{|y-z|^n} \, dz \right).$$

Podľa *Lemy 4.28* je $\Phi^{r,\epsilon}$ spojitá funkcia na $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že $\Phi^{r,\epsilon}$ je dokonca triedy $\mathcal{C}^1$ na množine $\partial_{\frac{\epsilon}{2}} U$ a na tejto množine platí $\operatorname{div} \Phi^{r,\epsilon} = 0$.

Podľa *Lemy 4.27* je funkcia

$$\eta^z(y) := \frac{y-z}{|y-z|^n}$$

triedy C^1 na $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$, pričom $\operatorname{div} \eta^z(y) = 0$ pre $y \neq z$.

Majme $y \in \partial_{\frac{\epsilon}{2}} U$. Pre $z \in \mathbb{R}^n \setminus \partial_\epsilon U$ potom máme $|y - z| \geq \frac{\epsilon}{2}$ a z vyjadrenia derivácií funkcie η v dôkaze *Lemy 4.27* plynie

$$\left| \frac{\partial \eta_i^z(y)}{\partial y_i} \right| \leq (n+1) \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{-n}.$$

Máme teda integrovateľnú majorantu a podľa vety o derivovaní integrálu závislého na parametri dostávame

$$\frac{\partial \Phi_i^{r,\epsilon}(y)}{\partial y_i} = \frac{1}{r^n}\left(\int_{D_{r,\delta}^-\setminus\partial_\epsilon U}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{y_i-z_i}{|y-z|^n}\,dz - \int_{D_{r,\delta}^+\setminus\partial_\epsilon U}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{y_i-z_i}{|y-z|^n}\,dz\right),$$
$$\operatorname{div}\Phi^{r,\epsilon}(y) = \frac{1}{r^n}\left(\int_{D_{r,\delta}^-\setminus\partial_\epsilon U}\operatorname{div}\frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz - \int_{D_{r,\delta}^+\setminus\partial_\epsilon U}\operatorname{div}\frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz\right) = 0.$$

Z analogických vyjadrení pre obecné $\frac{\partial \Phi_i^{r,\epsilon}}{\partial y_j}$ a z vety o spojitosti integrálu závislého na parametri $\Phi^{r,\epsilon} \in C^1(\partial_{\frac{\epsilon}{2}}U, \mathbb{R}^n)$. Ak v *Leme 4.35* zvolíme za ϵ naše $\frac{\epsilon}{2}$, spĺňa funkcia $\Phi = \Phi^{r,\epsilon}$ predpoklady tejto lemy a

$$\int_{\partial U}\Phi^{r,\epsilon}\cdot\tilde{\nu}^U\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_* U}\Phi^{r,\epsilon}\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{41}$$

Majme teraz pevné $y \in \partial U$, ukážeme $\lim_{\epsilon\to 0}\Phi^{r,\epsilon}(y) = \Phi^r$. Opäť použijeme vetu o spojitosti integrálu závislého na parametri. Keďže $\lambda_n(\partial U) = 0$, máme

$$\frac{y-z}{|y-z|^n}\chi_{(U^\epsilon)^c} \to \frac{y-z}{|y-z|^n} \quad \text{skoro všade v } \mathbb{R}^n.$$

Za majorantu môžeme zobrať $\frac{1}{|y-z|^{n-1}}$:

$$\begin{aligned}
\Phi^r(y) &= \frac{1}{r^n}\left(\int_{D_{r,\delta}^-}\frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz - \int_{D_{r,\delta}^+}\frac{y-z}{|y-z|^n}\,dz\right) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{r^n}\left(\int_{D_{r,\delta}^-}\frac{y-z}{|y-z|^n}\chi_{(U^\epsilon)^c}\,dz - \int_{D_{r,\delta}^+}\frac{y-z}{|y-z|^n}\chi_{(U^\epsilon)^c}\,dz\right) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Phi^{r,\epsilon}(y).
\end{aligned}$$

Na záver ešte raz veta o spojitosti integrálu závislého na parametri. Pre $\epsilon \to 0$ máme bodovú konvergenciu $\Phi^{r,\epsilon} \to \Phi^r$. Ďalej U je ohraničená, a teda $\partial U \subset B(0,R)$ pre nejaké $0 < R < \infty$. Potom

$$\tilde{C} = \frac{1}{r^n}\int_{B(0,R+r)}\frac{1}{|\tilde{z}|^{n-1}}\,d\tilde{z} \geq \frac{1}{r^n}\int_{D_{r,\delta}^-\cup D_{r,\delta}^+}\frac{1}{|y-z|^{n-1}}\,dz \geq |\Phi^{r,\epsilon}(y)|,$$

takže konštanta $\tilde{C}$ je integrovateľnou ($\mathcal{H}^{n-1}(\partial U) < \infty$) majorantou pre $\Phi^{r,\epsilon}\nu^U$ resp. $\Phi^{r,\epsilon}\tilde{\nu}^U$ a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial U}\Phi^{r,\epsilon}\cdot\tilde{\nu}^U\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U}\Phi^r\cdot\tilde{\nu}^U\,d\mathcal{H}^{n-1},$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial_* U}\Phi^{r,\epsilon}\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_* U}\Phi^r\cdot\nu^U\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Prechodom k limite pre $\epsilon \to 0$ v (41) teda dostávame dokazované tvrdenie. □

Dôsledok 4.37. *Ak platí*

$$\lim_{r\to 0_+}\int_{\partial U}\Phi^r\tilde{\nu}^U\,d\mathcal{H}^{n-1}=n\alpha_n|D^-_{1,\delta}|, \tag{42}$$

potom $e_1=\nu^U(0)$ *(čo chceme v tejto kapitole dokázať).*

Dôkaz. Plynie ihneď z *Dôsledku 4.31* a *Lemy 4.36.* □

Pri dokazovaní (42) aproximujeme najprv $\tilde{\nu}^U$ konštantou $\tilde{\nu}^U(0)=e_1$. Potom využijeme area formulu

$$\int_{\partial U}\Phi_1^r\,d\mathcal{H}^{n-1}=\int_{\partial O}\Phi_1^r\circ f|\tilde{J}_f|\,d\mathcal{H}^{n-1},$$

kde $\tilde{J}_f(x)=J_f^j(x)$ pre $x\in S_j^{\pm}$, t. j. $|\tilde{J}_f|$ je Jakobián f, ak f na jednotlivých stenách O berieme ako zobrazenie z $\mathbb{R}^{n-1}$ do $\mathbb{R}^n$. Na záver ešte aproximujeme zobrazenie f pomocou lineárneho zobrazenia L, ktoré je aproximatívnou deriváciou $f\lfloor_P$ v bode x_0.

Lema 4.38.

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi^r(y)(\tilde{\nu}^U(y)-e_1)|\,dS(y)=0.$$

Dôkaz. Pripomeňme, že $\tilde{\nu}^U(0)=e_1$. Z bodov (v) a $(viii)$ v *Tvrdení 4.24*, ktoré bod $y=0$ spĺňa, máme

$$\lim_{r\to 0+}\frac{\int_{B(0,2r)}|\tilde{\nu}^U(y)-e_1|\,dS}{r^{n-1}}=0. \tag{43}$$

Keďže pre $y\in B(0,2r)$ máme

$$|\Phi^r|(y)\le\frac{1}{r^n}\int_{B(0,r)}\frac{1}{|y-z|^{n-1}}\,dz\le\frac{1}{r^n}\int_{B(0,3r)}\frac{1}{|\tilde{z}|^{n-1}}\,d\tilde{z}=\frac{3n\alpha_n}{r^{n-1}}, \tag{44}$$

dostávame

$$\lim_{r\to 0+}\int_{B(0,2r)}|\Phi^r(y)(\tilde{\nu}^U(y)-e_1)|\,dS(y)=0. \tag{45}$$

Uvažujme ďalej $y\in B(0,2r)^c$, t. j. $|y|\ge 2r$. Z definície Φ^r máme po jednoduchej substitúcií

$$|\Phi^r(y)|=\left|\int_{D^+_{1,\delta}}\left(\frac{y+rz}{|y+rz|^n}-\frac{y-rz}{|y-rz|^n}\right)dz\right|\le\alpha_n\sup_{|z|\le 1}\left|\frac{y+rz}{|y+rz|^n}-\frac{y-rz}{|y-rz|^n}\right|. \tag{46}$$

Pre $|z|\le 1$ pritom máme $|y\pm rz|\ge|y|-r\ge\frac{1}{2}|y|$, a teda

$$\left|rz\left(\frac{1}{|y+rz|^n}+\frac{1}{|y-rz|^n}\right)\right|\le 2^n\frac{r}{|y|^n}. \tag{47}$$

Ďalej z vety o strednej hodnote

$$\left|\frac{1}{|y+rz|^n} - \frac{1}{|y-rz|^n}\right| \le 2r|z| \sup_{t\in[-1,1]} \frac{n}{|y+trz|^{n+1}} \le 2^{n+2} n \frac{r}{|y|^{n+1}},$$

a teda spolu s (47) máme

$$\begin{aligned}\left|\frac{y+rz}{|y+rz|^n} - \frac{y-rz}{|y-rz|^n}\right| &\le \left|rz\left(\frac{1}{|y+rz|^n} + \frac{1}{|y-rz|^n}\right)\right| + |y|\left|\frac{1}{|y+rz|^n} - \frac{1}{|y-rz|^n}\right| \\ &\le \frac{C}{\alpha_n}\frac{r}{|y|^n},\end{aligned}$$

kde $C = \alpha_n 2^n(4n+1)$ je konštanta. Z (46) pre $|y| \ge 2r$ dostávame

$$|\Phi^r(y)| \le C\frac{r}{|y|^n}, \tag{48}$$

a teda s využitím Fubiniho vety pre nezáporné funkcie

$$\begin{aligned}\int_{B(0,2r)^c} |\Phi^r(y)(\tilde{\nu}^U(y) - e_1)|\, dS(y) &\le Cn \int_{B(0,2r)^c} \left(r|\tilde{\nu}^U(y) - e_1| \int_{|y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}\right) dS(y) \le \\ &\le Cn \int_{2r}^{\infty} \left(\int_{B(0,t)} r|\tilde{\nu}^U(y) - e_1|\, dS(y)\right) \frac{dt}{t^{n+1}} = \\ &= Cn \int_2^{\infty} \frac{\int_{B(0,rs)} |\tilde{\nu}^U(y) - e_1|\, dS(y)}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2}.\end{aligned}$$

Pre funkciu

$$F(t) := \frac{\int_{B(0,t)} |\tilde{\nu}^U(y) - e_1|\, dS(y)}{t^{n-1}}$$

z (43) dostávame $\lim_{t\to 0} F(t) = 0$, a teda existuje $\epsilon > 0$ tak, že $F(t) \le 1$ pre $0 < t < \epsilon$. Pre $t \ge \epsilon$ zase $F(t) \le \frac{2}{\epsilon^{n-1}} S(\mathbb{R}^n)$, takže F je ohraničená na celom $\mathbb{R}^+$. Z vety o spojitosti integrálu závislého na parametri (majoranta $\frac{\sup_{t\in\mathbb{R}^+} F(t)}{s^2}$) teda dostávame

$$\lim_{r\to 0} \int_2^{\infty} \frac{\int_{B(0,rs)} |\tilde{\nu}^U(y) - e_1|\, dS(y)}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2} = \int_2^{\infty} \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(0,rs)} |\tilde{\nu}^U(y) - e_1|\, dS(y)}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2} = 0,$$

a teda aj

$$\lim_{r\to 0} \int_{B(0,2r)^c} |\Phi^r(y)(\tilde{\nu}^U(y) - e_1)|\, dS(y) = 0.$$

Spolu s (45) dostávame naše tvrdenie. □

Lema 4.39. *Majme parameter $p > 0$, pre $k \ge 2$ označme*

$$I_k(p) := \int_0^{\infty} \frac{\rho^{k-2}}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{k}{2}}}\, d\rho.$$

Potom platí

$$I_k(p) = \frac{k\alpha_k}{2p(k-1)\alpha_{k-1}}. \tag{49}$$

Dôkaz. Vzťah (49) dokážeme indukciou podľa k. Pre $k = 2$ máme

$$\begin{aligned} I_k(p) &= \int_0^\infty \frac{1}{\rho^2 + p^2}\, d\rho = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{1}{(\frac{\rho}{p})^2 + 1}\frac{d\rho}{p} = \frac{\pi}{2p} = \\ &= \frac{2\cdot\pi}{2p\cdot 1\cdot 2} = \frac{k\alpha_k}{2p(k-1)\alpha_{k-1}}, \end{aligned}$$

pre $k = 3$ máme s využitím substitúcie $\tilde{\rho} = \rho^2 + p^2$

$$\begin{aligned} I_k(p) &= \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\rho = \int_{p^2}^\infty \frac{1}{2}\tilde{\rho}^{-\frac{3}{2}}\, d\tilde{\rho} = \left[-\tilde{\rho}^{-\frac{1}{2}}\right]_{p^2}^\infty = \frac{1}{p} = \\ &= \frac{3\cdot\frac{4}{3}\pi}{2p\cdot 2\cdot\pi} = \frac{k\alpha_k}{2p(k-1)\alpha_{k-1}}. \end{aligned}$$

Ďalej predpokladajme, že vzťah (49) platí pre $k = \tilde{k}$, $\tilde{k} \geq 2$, dokážeme ho pre $k = \tilde{k} + 2$ a budeme hotoví. Použitím per partes a indukčného predpokladu

$$\begin{aligned} I_{\tilde{k}+2}(p) &= \int_0^\infty \frac{\rho^{\tilde{k}}}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{\tilde{k}+2}{2}}}\, d\rho = \\ &= \left[\rho^{\tilde{k}-1}\cdot\left(-\frac{1}{\tilde{k}}(\rho^2+p^2)^{-\frac{\tilde{k}}{2}}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\tilde{k}-1)\rho^{\tilde{k}-2}\cdot\frac{1}{\tilde{k}}(\rho^2+p^2)^{-\frac{\tilde{k}}{2}} = \\ &= 0 + \frac{\tilde{k}-1}{\tilde{k}} I_{\tilde{k}}(p) = \frac{\tilde{k}-1}{\tilde{k}}\frac{\tilde{k}\alpha_{\tilde{k}}}{2p(\tilde{k}-1)\alpha_{\tilde{k}-1}} = \frac{\alpha_{\tilde{k}}}{2p\alpha_{\tilde{k}-1}} = \\ &= \frac{1}{2p}\frac{\frac{\pi^{\frac{\tilde{k}}{2}}}{\Gamma(\frac{\tilde{k}}{2}+1)}}{\frac{\pi^{\frac{\tilde{k}-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\tilde{k}-1}{2}+1)}} = \frac{1}{2p}\frac{\left(\frac{\tilde{k}}{2}+1\right)\frac{\pi^{\frac{\tilde{k}+2}{2}}}{\Gamma(\frac{\tilde{k}+2}{2}+1)}}{\left(\frac{\tilde{k}-1}{2}+1\right)\frac{\pi^{\frac{\tilde{k}+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\tilde{k}+1}{2}+1)}} = \frac{(\tilde{k}+2)\alpha_{\tilde{k}+2}}{2p(\tilde{k}+1)\alpha_{\tilde{k}+1}}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.40. *Pre každé $r > 0$ platí*

$$\int_H \Phi_1^r\, d\mathcal{H}^{n-1} = n\alpha_n |D_{1,\delta}^+|.$$

Dôkaz. Nadrovinu $H = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 = 0\}$ stotožníme s $\mathbb{R}^{n-1}$, mieru $\mathcal{H}^{n-1}$ s λ_{n-1}. Potom pre $y \in H$ a $z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^n$ máme

$$|y + z|^2 = |y + \tilde{z}|^2 + z_1^2,$$

kde normu $|.|$ berieme prvýkrát v $\mathbb{R}^n$ a druhýkrát v $\mathbb{R}^{n-1}$. Po substitúcii ako v (46) a využití symetrie

$$(z_1, \tilde{z}) \in D_{1,\delta}^+ \quad \Leftrightarrow \quad (z_1, -\tilde{z}) \in D_{1,\delta}^+$$

množiny $D^+_{1,\delta}$ teda máme

$$\begin{aligned}
\int_H \Phi_1^r \, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_H \int_{D^+_{1,\delta}} \left(\frac{rz_1}{|y-rz|^n} + \frac{rz_1}{|y+rz|^n} \right) dz \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{D^+_{1,\delta}} \left(\frac{rz_1}{(|y-r\tilde{z}|^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{rz_1}{(|y+r\tilde{z}|^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} \right) dz \, dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{D^+_{1,\delta}} \frac{2rz_1}{(|y-r\tilde{z}|^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} \, dz \, dy = \\
&= 2r \int_{D^+_{1,\delta}} \left(z_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(|y-r\tilde{z}|^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} \, dy \right) dz = \\
&= 2r \int_{D^+_{1,\delta}} \left(z_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(|y|^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} \, dy \right) dz = \\
&= 2r \int_{D^+_{1,\delta}} \left(z_1 (n-1)\alpha_{n-1} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-2}}{(\rho^2 + r^2 z_1^2)^{\frac{n}{2}}} \, d\rho \right) dz = \\
&= 2r(n-1)\alpha_{n-1} \int_{D^+_{1,\delta}} z_1 I_n(rz_1) \, dz = n\alpha_n |D^+_{1,\delta}|,
\end{aligned}$$

kde sme využili *Lemu 4.39* (vrátane značenia $I_n(p)$, kde $p = rz_1$). Fubiniho vetu sme v priebehu výpočtu mohli použiť, pretože integrand bol nezáporný. □

Lema 4.41. *Existuje konštanta $0 < C < \infty$ tak, že pre každé $\kappa > 0$ platí*

$$\int_{B(0,\kappa r)^c \cap H} |\Phi^r| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{C}{\kappa} \quad \textit{pre každé } r > 0, \tag{50}$$

$$\limsup_{r \to 0_+} \int_{B(0,\kappa r)^c \cap \partial U} |\Phi^r| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{C}{\kappa}. \tag{51}$$

Dôkaz. Z odhadov (44) a (48) máme pre každé $y \neq 0$

$$|\Phi^r(y)| \leq \frac{\tilde{C}r}{|y|^n}, \tag{52}$$

kde $\tilde{C} = \alpha_n 2^n (4n+1)$ je konštanta, a teda

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\kappa r)^c \cap H} |\Phi^r| \, d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \tilde{C}r \int_{B(0,\kappa r)^c \cap H} \frac{1}{|y|^n} \, d\mathcal{H}^{n-1} = \tilde{C}r \int_{B(0,\kappa r)^c} \frac{1}{|y|^n} \, d\lambda_{n-1}(y) = \\
&= \tilde{C}r(n-1)\alpha_{n-1} \int_{\kappa r}^\infty \rho^{n-2} \frac{1}{\rho^n} \, d\rho = \frac{C'}{\kappa},
\end{aligned}$$

kde $C' = (n-1)\alpha_{n-1}\tilde{C}$ (v treťom integrále sme brali $B(0,\kappa r)^c$ ako podmnožinu $\mathbb{R}^{n-1}$).

Pri dokazovaní (51) opäť využijeme (52). Podobne ako v dôkaze *Lemy 4.38*

$$\int_{B(0,\kappa r)^c\cap\partial U} |\Phi^r|\, d\mathcal{H}^{n-1} \le \tilde{C}r \int_{B(0,kr)^c} \frac{1}{|y|^n}\, dS(y) = \tilde{C}nr \int_{B(0,\kappa r)^c} \int_{|y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}\, dS(y) \le$$
$$\le \tilde{C}nr \int_{\kappa r}^{\infty} \int_{B(0,t)} dS(y) \frac{dt}{t^{n+1}} = \tilde{C}n \int_{\kappa}^{\infty} \frac{S(B(0,rs))}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2}.$$

Z (27) vieme $\lim_{t\to 0_+} \frac{S(B(0,t))}{t^{n-1}} = \alpha_n$, a teda podobne ako funkcia F v dôkaze *Lemy 4.38* je funkcia $s \mapsto \frac{S(B(0,rs))}{(rs)^{n-1}}$ ohraničená na $\mathbb{R}^+$. Máme teda integrovateľnú majorantu a z Lebesgueovej vety

$$\limsup_{r\to 0_+} \int_{B(0,\kappa r)^c\cap\partial U} |\Phi^r|\, d\mathcal{H}^{n-1} \le \lim_{r\to 0_+} \tilde{C}n \int_{\kappa}^{\infty} \frac{S(B(0,rs))}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2} =$$
$$= \tilde{C}n \int_{\kappa}^{\infty} \lim_{r\to 0_+} \frac{S(B(0,rs))}{(rs)^{n-1}} \frac{ds}{s^2} = \tilde{C}n \int_{\kappa}^{\infty} \alpha_n \frac{ds}{s^2} = \frac{C''}{\kappa},$$

kde $C'' = \tilde{C}n\alpha_n$. Ak teda položíme $C = \sup(C', C'')$, dostaneme (50) aj (51). □

Značenie 4.42. Množinu P berme ako podmnožinu $\mathbb{R}^{n-1}$. Keďže x_0 spĺňa (*iv*) v *Tvrdení 4.24*, existuje aproximatívna derivácia zobrazenia $f\lfloor_P \colon P \to \mathbb{R}^n$ v bode x_0 (a rovná sa slabej derivácii $Df\lfloor_P$), označme ju L. Ďalej označme $|J_L|$ veľkosť (konštantného) Jakobiánu lineárneho zobrazenia $L : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. S využitím (*ii*) z *Tvrdenia 4.24* pre náš $x = x_0$ vieme

$$|J_L| = |J_f^P(x_0)| \neq 0,$$

a teda L je regulárne (matica L má hodnosť $(n-1)$). Ďalej z definície je vektor $\tilde{\nu}^U(x_0) = e^1$ kolmý na všetky zložky $Df\lfloor_P(x_0) = L$, takže L je prosté zobrazenie $\mathbb{R}^{n-1}$ na nadrovinu $H \subset \mathbb{R}^n$.

Označme ešte $\tilde{L}(x) := L(x - x_0)$. Potom $\tilde{L}$ je afinné zobrazenie $\mathbb{R}^n$ na $H \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{L}(x_0) = 0$ a $J_{\tilde{L}} = J_L$.

Lema 4.43.

$$\lim_{r\to 0_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1^r\, dS - \int_H \Phi_1^r\, d\mathcal{H}^{n-1} \right) = 0. \tag{53}$$

Dôkaz. Zo spojitosti $u = f^{-1}$ a kompaktnosti množiny $\partial O \setminus P$, ktorá neobsahuje bod $x_0 = u(0)$, existuje $R > 0$ tak, že

$$\tilde{P} = (u(B(0,R)) \cap \partial O) \subset P.$$

Množinu $\tilde{P}$ budeme rovnako ako P chápať ako podmnožinu $\mathbb{R}^{n-1}$. Potom zo spojitosti f je $\tilde{P}$ otvorená v P, a teda $\tilde{P}$ je okolie x_0 v $\mathbb{R}^{n-1}$.

Keďže pre každé $0 < \kappa < \infty$ platí $B(0,R)^c \subset B(0,\kappa r)^c$, ak $0 < r < \frac{R}{\kappa}$, z *Lemy 4.41,* (51) dostávame

$$\limsup_{r\to 0_+} \int_{B(0,R)^c} |\Phi^r|\, dS \le \limsup_{r\to 0_+} \int_{B(0,\kappa r)^c\cap\partial U} |\Phi^r|\, d\mathcal{H}^{n-1} \le \frac{C}{\kappa}$$

pre každe $\kappa > 0$, pričom C je konštanta, a teda

$$\lim_{r\to 0_+} \int_{B(0,R)^c} |\Phi^r| \, dS = 0. \tag{54}$$

Keďže O je f-regulárny, pre $f\lfloor_P$ platí area formula, a teda

$$\int_{B(0,R)\cap\partial U} \Phi_1^r \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\tilde{P}} \Phi_1^r(f(x))|J_f^P(x)| \, d\lambda_{n-1}(x). \tag{55}$$

Pre afinné zobrazenie $\tilde{L}$ platí tiež area formula, a teda

$$\int_H \Phi_1^r \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_1^r(\tilde{L}(x))|J_L| \, dx. \tag{56}$$

Z (54), (55) a (56) plynie, že stačí dokázať

$$\lim_{r\to 0+} \left(\int_{\tilde{P}} \Phi_1^r(f(x))|J_f^P(x)| \, dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_1^r(\tilde{L}(x))|J_L| \, dx \right) = 0. \tag{57}$$

Majme ľubovoľné $k > 0$. Potom pre dostatočne malé $r > 0$ máme

$$B(x_0, kr) \subset \tilde{P} \tag{58}$$

Z odhadov (44) a (48) existuje konštanta $\tilde{C}(= \alpha_n(4n+1))$ tak, že $|\Phi^r(y)| \leq \frac{\tilde{C}}{r^{n-1}}$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$. Keďže x_0 spĺňa (v) v *Tvrdení 4.24*, je x_0 Lebesgueovým bodom zobrazenia $|J_f^P|$, a teda

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0_+} \int_{B(x_0,kr)} |\Phi_1^r(f(x)) \, \left(|J_f^P(x)| - |J_L|\right)| \leq \\ \leq \tilde{C}\alpha_n k^{n-1} \lim_{r\to 0_+} \fint_{B(x_0,kr)} \left||J_f^P(x)| - |J_f^P(x_0)|\right| = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Majme ďalej ľubovoľné $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2k}$. Z aproximatívnej derivácie $f\lfloor_P$ v bode x_0 vieme, že množina

$$Z_\epsilon := \left\{ x \in \tilde{P} : \frac{|f(x) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|} \geq \epsilon \right\} \tag{60}$$

má v bode x_0 hustotu 0, a teda

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0_+} \int_{B(x_0,kr)\cap Z_\epsilon} |\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x))||J_L| \, dx \leq \\ \leq 2\tilde{C}\alpha_n k^{n-1}|J_L| \lim_{r\to 0_+} \frac{|B(x_0,kr) \cap Z_\epsilon|}{|B(x_0,kr)|} = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Pre $x \in B(x_0, kr) \setminus Z_\epsilon$ odhadneme rozdiel

$$\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x)) = \int_{D_{1,\delta}^+} \left[rz_1 \left(\frac{1}{|rz + f(x)|^n} - \frac{1}{|rz + \tilde{L}(x)|^n} \right) + \right.$$

$$\left. + rz_1 \left(\frac{1}{|rz - f(x)|^n} - \frac{1}{|rz - \tilde{L}(x)|^n} \right) + f_1(x) \left(\frac{1}{|rz + f(x)|^n} - \frac{1}{|rz - f(x)|^n} \right) \right].$$

Pre takéto x totiž máme

$$|f(x) - \tilde{L}(x)| < \epsilon |x - x_0| \le \epsilon kr,$$

$$|f_1(x)| = |f_1(x) - \tilde{L}_1(x)| \le |f(x) - \tilde{L}(x)| \le \epsilon kr \le \frac{\delta}{2} r.$$

S využitím týchto vzťahov dostávame pre $z \in D_{1,\delta}^+$, teda $\delta < z_1 < 1$

$$rz_1 \left| \frac{1}{|rz + f(x)|^n} - \frac{1}{|rz + \tilde{L}(x)|^n} \right| \le$$

$$\le r|f(x) - \tilde{L}(x)| \sup_{t \in [0,1]} \frac{n}{|rz + f(x) + t(\tilde{L}(x) - f(x))|^{n+1}} \le$$

$$\le \epsilon k r^2 \sup_{t \in [0,1]} \frac{n}{|rz_1 + (1-t) f_1(x)|^{n+1}} \le \epsilon k r^2 n \left(\frac{2}{\delta r} \right)^{n+1} = C_{\delta,k} \frac{\epsilon}{r^{n-1}},$$

kde $C_{\delta,k}$ je konštanta závislá len na δ,k a dimenzii n. Analogicky

$$rz_1 \left| \frac{1}{|rz - f(x)|^n} - \frac{1}{|rz - \tilde{L}(x)|^n} \right| \le C_{\delta,k} \frac{\epsilon}{r^{n-1}},$$

$$|f_1(x)| \left| \frac{1}{|rz + f(x)|^n} - \frac{1}{|rz - f(x)|^n} \right| \le \epsilon kr \cdot 2 \left(\frac{2}{\delta r} \right)^n \le C_{\delta,k} \frac{\epsilon}{r^{n-1}}.$$

Z vyjadrenia $\Phi_1^r \circ f - \Phi_1^r \circ \tilde{L}$ teda dostávame

$$\limsup_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr) \setminus Z_\epsilon} |\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x))| |J_L| \le 3\alpha_{n-1} (kr)^{n-1} |J_L| C_{\delta,k} \frac{\epsilon}{r^{n-1}} = \tilde{C}_{\delta,k} \epsilon,$$

kde $\tilde{C}_{\delta,k} = 3\alpha_{n-1} k^{n-1} C_{\delta,k} |J_L|$. Spolu s (61) teda dostávame

$$\limsup_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr)} |\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x))| |J_L| \, dx \le \tilde{C}_{\delta,k} \epsilon,$$

keďže ϵ môže byť ľubovoľne malé, dostávame

$$\lim_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr)} |\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x))| |J_L| \, dx = 0. \tag{62}$$

Chýba nám ešte odhad na množine $B(x_0, kr)^c$. Zo spojitosti afinného zobrazenia $\tilde{L}^{-1} : H \to \mathbb{R}^{n-1}$ existuje $0 < \tau < \infty$ tak, že $\tilde{L}^{-1}(B(0,1) \cap H) \subset B(x_0, \frac{1}{2\tau})$. Z linearity L potom dostávame $\tilde{L}^{-1}(B(0,2\tau kr)\cap H)\subset B(x_0,kr)$ pre každé $k,r>0$, a teda

$$\tilde{L}(B(x_0,kr)^c)=\tilde{L}(B(x_0,kr))^c\cap H\subset B(0,2\tau kr)^c\cap H \quad \text{pre každé } k,r>0. \tag{63}$$

Z *Lemy 4.41*, (50) tak po použití area formule pre $\tilde{L}$ dostávame

$$\int_{B(x_0,kr)^c\cap Q}|\Phi_1^r(\tilde{L}(x))||J_L|\,dx\le\int_{B(0,\tau kr)^c\cap H}|\Phi^r|\,d\mathcal{H}^{n-1}\le\frac{C}{\tau k}. \tag{64}$$

Podobne z *Lemy 4.41*, (51) máme

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0_+}\int_{\tilde{P}\setminus f^{-1}(B(0,\tau kr))}&|\Phi_1^r(f(x))||J_f^P(x)|\,dx\le\\ &\le\limsup_{r\to 0_+}\int_{B(0,\tau kr)^c\cap\partial U}|\Phi^r|\,d\mathcal{H}^{n-1}\le\frac{C}{\tau k}.\end{aligned} \tag{65}$$

Zostáva odhadnúť

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{P}\cap B(x_0,kr)^c\cap f^{-1}(B(0,\tau kr))}|\Phi_1^r\circ f||J_f^P|&\le\int_{B(0,\tau kr)\setminus f(B(x_0,kr))}|\Phi^r|\,dS\le\\ &\le\frac{\tilde{C}}{r^{n-1}}\left[S(B(0,\tau kr))-S(B(0,\tau kr)\cap f(B(x_0,kr)))\right].\end{aligned} \tag{66}$$

Z bodov (vii), $(viii)$ v *Tvrdení 4.24* pre $y=0$ máme

$$\lim_{r\to 0_+}\frac{1}{r^{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}(B(0,\tau kr)\cap F(P\setminus Z))=\alpha_{n-1}(\tau k)^{n-1}, \tag{67}$$

$$\lim_{r\to 0_+}\frac{1}{r^{n-1}}S(B(0,\tau kr))=\alpha_{n-1}(\tau k)^{n-1}. \tag{68}$$

Podľa (vii) v *Tvrdení 4.24* existuje derivácia $F'(x_0)$; keďže x_0 je bod hustoty $P\setminus Z$, kde F splýva s f, nutne $F'(x_0)$ sa rovná aproximatívnej derivácii L funkcie f v x_0. Existuje teda polomer $d>0$ a guľa $B=B(x_0,d)$ tak, že

$$|F(x)-\tilde{L}(x)|\le\tau|x-x_0| \qquad \text{pre každé } x\in B.$$

Keďže z (63) plynie $|\tilde{L}(x)|\ge 2\tau|x-x_0|$, dostávame tak

$$|F(x)|\ge\tau|x-x_0| \qquad \text{pre každé } x\in B. \tag{69}$$

Keďže $f\lfloor_P$ je spojité a prosté, má obraz kompaktu $P\setminus B$ kladnú vzdialenosť od bodu $0=f(x_0)$, a teda existuje $\tilde{d}>0$ tak, že pre $\tau kr<\tilde{d}$ máme

$$B(0,\tau kr)\cap F(B^c\cap P\setminus Z)=B(0,\tau kr)\cap f(B^c\cap P\setminus Z)=\emptyset.$$

Spolu s (69) teda pre $r < \frac{\tilde{d}}{\tau k}$ dostávame

$$\begin{aligned} B(0,\tau kr) \cap F(P \setminus Z) &= B(0,\tau kr) \cap [F(B(x_0,kr) \cap P \setminus Z) \cup F(B^c \cap P \setminus Z)] = \\ &= B(0,\tau kr) \cap F(B(x_0,kr) \cap P \setminus Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial U \cap B(0,\tau kr) \cap \ f(B(x_0,kr))] &\supset [B(0,\tau kr) \cap f(B(x_0,kr) \cap P \setminus Z)] = \\ &= [B(0,\tau kr) \cap F(B(x_0,kr) \cap P \setminus Z)] = [B(0,\tau kr) \cap F(P \setminus Z)]\,. \end{aligned}$$

S využitím (67) teda máme

$$\begin{aligned} &\liminf_{r \to 0_+} \frac{1}{r^{n-1}} S(B(0,\tau kr) \cap f(B(x_0,kr))) \geq \\ &\qquad \geq \lim_{r \to 0_+} \frac{1}{r^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(B(0,\tau kr) \cap F(P \setminus Z)) = \alpha_{n-1}(\tau k)^{n-1}, \end{aligned}$$

spolu s (66) a (68) dostávame

$$\lim_{r \to 0_+} \int_{\tilde{P} \cap B(x_0,kr)^c \cap f^{-1}(B(0,\tau kr))} |\Phi_1^r \circ f||J_f^P| = 0$$

a v kombinácii s (65) dostávame chýbajúci odhad

$$\limsup_{r \to 0_+} \int_{\tilde{P} \cap B(x_0,kr)^c} |\Phi_1^r \circ f||J_f^P| \leq \frac{C}{\tau k}. \tag{70}$$

Keďže pre dostatočne malé $r > 0$ máme $B(x_0,kr) \subset \tilde{P}$ (viď (58)), z odhadov (59), (62), (64) a (70) máme

$$\begin{aligned} &\limsup_{r \to 0_+} \left| \int_{\tilde{P}} \Phi_1^r(f(x))|J_f^P(x)|\,dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_1^r(\tilde{L}(x))|J_L|\,dx \right| \leq \\ &\lim_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr)} \left|\Phi_1^r(f(x))\left(|J_f^P(x)| - |J_L|\right)\right| + \lim_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr)} |\Phi_1^r(f(x)) - \Phi_1^r(\tilde{L}(x))||J_L| \\ &\qquad + \limsup_{r \to 0_+} \int_{B(x_0,kr)^c} |\Phi_1^r(\tilde{L}(x))||J_L|\,dx + \limsup_{r \to 0_+} \int_{\tilde{P} \cap B(x_0,kr)^c} |\Phi_1^r \circ f||J_f^P| \leq \\ &\leq \frac{2C}{\tau k}. \end{aligned}$$

Keďže τ je pevné a k môžeme voliť ľubovoľne veľké, dostávame tak (57), čo sme chceli dokázať. □

Tvrdenie 4.44.

$$\tilde{\nu}^U(0) = e_1.$$

Dôkaz. Z *Lemy 4.38*, *Lemy 4.43* a *Lemy 4.40* máme

$$\lim_{r \to 0_+} \int_{\partial U} \Phi^r \tilde{\nu}^U \,d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{r \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1^r \,dS = \lim_{r \to 0_+} \int_H \Phi_1^r \,d\mathcal{H}^{n-1} = n\alpha_n |D_{1,\delta}^+|,$$

z *Dôsledku 4.37* dostávame naše tvrdenie. □

5 Homeomorfizmy s konečnou distorziou

5.1 Derivácia inverznej funkcie bodovo

Majme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfizmus $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ak je f v bode $x \in \Omega$ klasicky diferencovateľná, f^{-1} je klasicky diferencovateľná v bode $f(x)$ a matica Df má plnú hodnosť, t. j. Jakobián $J_f \neq 0$, potom z derivácie zloženej funkcie $Id = f \circ f^{-1}$ vieme

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1},$$

kde $(Df(x))^{-1}$ je matica inverzná k $Df(x)$. Takýto vzťah pre deriváciu inverznej funkcie dokážeme aj pre absolútne spojité časti derivácií funkcií f, f^{-1}, ak f je homeomorfizmus a obe f, f^{-1} sú funkcie s konečnou variáciou.

Veta 5.1. *Majme $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú množinu a $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ homeomorfizmus. Predpokladajme, že $f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$, teda napríklad $n = 2$ alebo $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (viď* Vetu 1.1 *a* Vetu 1.3*). Označme $D^a f$ resp. $D^a f^{-1}$ hustotu absolútne spojitej časti miery Df resp. Df^{-1} vzhľadom k Lebesgueovej miere (ide o $(n \times n)$-rozmerné vektorové funkcie). Zafixujme si všade v Ω definovaných reprezentantov $D^a f$, $D^a f^{-1}$ a príslušného Jakobiánu $J_f = \det(D^a f)$. Potom pre skoro všetky body x z množiny*

$$\Omega^r := \{z \in \Omega : |J_f(z)| \neq 0\}$$

platí

$$D^a f^{-1}(f(x)) = (D^a f(x))^{-1}. \tag{71}$$

Pritom v článku [5] je uvedený nasledovný príklad:

Príklad 5.2 ([5], Príklad 5.2). *Pre každé $n \geq 3$ existuje homeomorfizmus s konečnou distorziou $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}((-1,1)^n, \mathbb{R}^n)$ taký, že obe funkcie f, f^{-1} nie sú diferencovateľné v žiadnom bode.*

Veta 5.1 teda pre $n \geq 3$ nie je zrejmá ani vtedy, keď $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je homeomorfizmus s konečnou distorziou (viď *Definíciu 5.4*).

Lema 5.3. *Majme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, homeomorfizmus $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ a $\Omega^r \subset \Omega$ ako v znení* Vety 5.1. *Potom Jakobián $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pre každú $N \subset f(\Omega)$, $|N| = 0$ platí*

$$|f^{-1}(N) \cap \Omega^r| = 0.$$

Dôkaz. Dokážme najprv $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Vieme, že existuje množina $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tak, že $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| = 0$ a na $\tilde{\Omega}$ platí pre f area formula, viď záver kapitolky 2.3. Pre každú otvorenú množinu $B \subset\subset \Omega$ je $f(B)$ ohraničená podmnožina $f(\Omega)$, a teda

$$\int_B |J_f(x)|\, dx = \int_{B \cap \tilde{\Omega}} |J_f(x)|\, dx = \int_{f(B \cap \tilde{\Omega})} 1\, dy \leq |f(B)| < \infty,$$

takže skutočne $J_f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Majme ďalej $N \subset f(\Omega)$, $|N| = 0$. Potom

$$0 = |N| = \int_N 1\,dy \geq \int_{N \cap f(\tilde{\Omega})} 1\,dy = \int_{f^{-1}(N) \cap \tilde{\Omega}} |J_f(x)|\,dx,$$

a teda $J_f = 0$ skoro všade na množine $f^{-1}(N) \cap \tilde{\Omega}$. Keďže $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| = 0$, máme $J_f = 0$ skoro všade na množine $f^{-1}(N)$, čo sme chceli dokázať. □

Dôkaz Vety 5.1. Označme $u := f^{-1}$, $G := f(\Omega)$.

Z *Vety 2.11* a *Tvrdenia 2.12* analogicky ako v dôkaze *Tvrdenia 4.24* dostávame, že pre skoro každé $x \in \Omega$ platí:

(i) $D^a f(x)$ je aproximatívna derivácia f v bode x;

(ii) existuje množina $Z_x \subset \mathbb{R}^n$ hustoty 0 v x a Lipschitzovské zobrazenie $F_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tak, že $f = F_x$ na množine $\Omega \setminus Z_x$, $f(x) = F_x(x)$ a F_x je v bode x diferencovateľná; potom už zrejme nutne $F_x'(x) = D^a f(x)$. Ďalej bod x je Lebesgueovým bodom jakobiánu $|J_{F_x}|$.

Množinu "dobrých" bodov $x \in \Omega^r$, pre ktoré platia tieto dva body, označme $\tilde{\Omega}^r$. Máme teda $|\Omega^r \setminus \tilde{\Omega}^r| = 0$.

Podobne označme $\tilde{G}$ množinu tých $y \in G$, pre ktoré platí

($\tilde{i}$) $D^a u(y)$ je aproximatívna derivácia u v bode y;

($\tilde{ii}$) existuje množina $\tilde{Z}_y \subset \mathbb{R}^n$ hustoty 0 v y a Lipschitzovské zobrazenie $v_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tak, že $u = v_y$ na množine $G \setminus \tilde{Z}_y$, $u(y) = v_y(y)$ a $v_y'(y) = D^a u(y)$.

Máme $|G \setminus \tilde{G}| = 0$, a teda z *Lemy 5.3* $|u(G \setminus \tilde{G}) \cap \Omega^r| = 0$. Pre skoro všetky $x \in \Omega^r$ tak dostávame $x \in \tilde{\Omega}^r$, $f(x) \in \tilde{G}$. Zafixujme si takýto bod $x = x_0$, dokážeme preň (71) a budeme hotoví. Pre jednoduchosť označme $F := F_{x_0}$, $v := v_{f(x_0)}$. Z bodov (ii) a ($\tilde{ii}$) dostávame, že existujú klasické derivácie funkcií F resp. v v bodoch x_0 resp. $f(x_0) = F(x_0)$, a teda existuje aj derivácia zloženej funkcie $v \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ v bode x_0:

$$(v \circ F)'(x_0) = v'(f(x_0))F'(x_0) = D^a u(f(x_0)) D^a f(x_0). \tag{72}$$

Vzápätí ukážeme, že vzor $Z := f^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})$ má hustotu 0 v bode x_0. Potom pre $x \in \Omega \setminus (Z_{x_0} \cup Z)$ máme $F(x) = f(x)$, $v(f(x)) = u(f(x))$, a teda $v \circ F = u \circ f = id$ na množine $\Omega \setminus (Z_{x_0} \cup Z)$. Pritom $(Z_{x_0} \cup Z)$ má hustotu 0 v bode x_0 a Ω je okolie bodu x_0, takže existuje aproximatívna derivácia $v \circ F$ a rovná sa identickej matici. Z (72) vieme, že existuje dokonca klasická derivácia $(v \circ F)'$, táto sa musí rovnať aproximatívnej. Máme teda

$$D^a u(f(x_0)) D^a f(x_0) = (v \circ F)'(x_0) = id$$

a keďže $D^a f(x)$ je regulárna matica (máme $x_0 \in \Omega^r$, teda $J_f(x_0) \neq 0$), dostávame tak (71).

Zostalo ukázať, že $Z = f^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})$ má hustotu 0 v bode x_0. Keďže $f^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)}) \subset F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)}) \cup Z_{x_0}$ a Z_{x_0} má hustotu 0 v x_0, stačí dokázať, že $F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})$ má hustotu 0 v x_0. Pritom F je Lipschitzovské, a teda existuje konštanta $K > 0$ tak, že $|F(x)| \leq K|x|$. Pre F ďalej platí area formula, a teda

$$|\tilde{Z}_{f(x_0)} \cap B(f(x_0), Kr)| \geq |\tilde{Z}_{f(x_0)} \cap F(B(x_0, r))| = \int_{B(x_0,r)\cap F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})} |J_F|.$$

Keďže $\tilde{Z}_{f(x_0)}$ má hustotu 0 v bode $f(x_0)$ a na druhej strane x_0 je Lebesgueov bod Jakobiánu $|J_F|$, dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^n} |\tilde{Z}_{f(x_0)} \cap B(f(x_0), Kr)| = \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)\cap F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})} |J_F| = \\ &= \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)\cap F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})} |J_F(x_0)| = |J_F(x_0)| \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^n} |B(x_0, r) \cap F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})|. \end{aligned}$$

Keďže $D^a f(x_0) = F'(x_0)$, a teda $|J_F(x_0)| = |J_f(x_0)| \neq 0$, dostávame tak

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^n} |B(x_0, r) \cap F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})| = 0,$$

teda $F^{-1}(\tilde{Z}_{f(x_0)})$ má hustotu 0 v bode x_0, čo sme chceli dokázať. □

5.2 Lepšia regularita f^{-1} za predpokladov na distorziu f

Definícia 5.4. Majme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú a $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Povieme, že f je *zobrazenie s konečnou distorziou*, ak Jakobián J_f je striktne kladný skoro všade na množine, kde $Df \neq 0$.

Pre takéto f ďalej povieme, že funkcia $K : \Omega \to \mathbb{R}^+_0$ je *distorziou* f, resp. že f má (konečnú) distorziu K, ak platí

$$|Df(x)|^n \leq K(x) J_f(x)$$

skoro všade na Ω.

Poznámka 5.5. Normu $|Df|$ berieme v priestore matíc $n \times n$, pre maticu $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ máme

$$|M| = \sup_{\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi|=1\}} |M\xi|$$

(normu vektorov ξ, $M\xi$ berieme Eukleidovskú).

$$|\operatorname{adj} M| \leq n|M|^{n-1}.$$

V rovine platí nasledujúca veta:

Veta 5.6 ([14], Veta 1.3)**.** *Majme oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nech $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ je homeomorfizmus s konečnou distorziou K, pričom $K \in L^1(\Omega)$. Potom inverzné zobrazenie $f^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^2)$ a f^{-1} je zobrazenie s konečnou distorziou.*

Pre $n \geq 3$ je sú známe nasledovné výsledky:

Veta 5.7 ([15], Veta 4.1). *Majme $n \geq 3$, otvorenú množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nech $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfizmus s konečnou distorziou K, pričom $|Df| \in L^{n-1,1}(\Omega)$ a $K \in L^{n-1}(\Omega)$. Potom $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ a f^{-1} je zobrazenie s konečnou distorziou.*

Príklad 5.8 ([15], Príklad 6.3). *Majme $n \geq 3$ a $\epsilon > 0$. Potom existuje homeomorfizmus $f : [-1,1]^n \to [-1,1]^n$ s konečnou distorziou K tak, že $K \in L^{n-1-\epsilon}([-1,1]^n)$ a $f \in W^{1,n-1-\epsilon}([-1,1]^n, \mathbb{R}^n)$, ale $f^{-1} \notin W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([-1,1]^n, \mathbb{R}^n)$.*

Pre kritický exponent $p = n - 1$ bola nedávno dokázaná nasledujúca veta:

Veta 5.9 ([5], Veta 1.2). *Majme $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorenú a $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ homeomorfizmus s konečnou distorziou. Potom $f^{-1} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(f(\Omega, \mathbb{R}^n)$ a f^{-1} má konečnú distorziu.*

Z uvedených viet nie je jasné, či pre $n \geq 3$ v kritickom prípade $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $K \in L^{n-1}$ dostaneme $f^{-1} \in W^{1,n}$ tak, ako tomu je pre $n = 2$ (*Veta 5.6*). Dokážeme, že to platí, čím dostaneme pekné zobecnenie *Vety 5.6* (aj) do dimenzie $n \geq 3$.

Veta 5.10. *Majme $n \geq 3$, oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfizmus $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ s konečnou distorziou K, pričom $K \in L^{n-1}(\Omega)$. Potom $f^{-1} \in W^{1,n}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ a f^{-1} je zobrazenie s konečnou distorziou.*

Dôkaz. Označme $u := f^{-1}$, $G := f(\Omega)$. Z *Vety 5.9* vieme, že $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^n)$ a u má konečnú distorziu.

Funkcia f spĺňa predpoklady *Vety 5.1*, a teda po zafixovaní všade definovaných reprezentantov slabých derivácií $Df = D^a f$, $Du = D^a u$ dostávame, že pre skoro všetky $x \in \Omega^r = \{z \in \Omega : |J_f(z)| \neq 0\}$ platí (71), označme $\tilde{\Omega}^r$ množinu týchto bodov x. Zároveň existuje množina $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, pre ktorú $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| = 0$ a pre f platí area formula na $\tilde{\Omega}$. Máme teda

$$|(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \cup (\Omega^r \setminus \tilde{\Omega}^r)| = 0.$$

Keďže predpoklady *Vety 5.1* spĺňa aj množina G a zobrazenie $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^n)$ (inverzia $u^{-1} = f$ je totiž v BV), z *Lemy 5.3* dostávame $J_u = 0$ skoro všade na množine

$$u^{-1}((\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \cup (\Omega^r \setminus \tilde{\Omega}^r)) = f(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \cup f(\Omega^r \setminus \tilde{\Omega}^r).$$

Z konečnej distorzie u máme aj $Du = 0$ skoro všade na tejto množine. S využitím area formule na množine $\tilde{\Omega}$ a vzťahu (71) na množine $\tilde{\Omega}^r$ tak dostávame

$$\begin{aligned}
\int_{f(\Omega^r \cup (\Omega \setminus \tilde{\Omega}))} |Du|^n &\leq \int_{f(\tilde{\Omega}^r \cap \tilde{\Omega})} |Du|^n + \int_{f(\Omega^r \setminus \tilde{\Omega}^r)} |Du|^n + \int_{f(\Omega \setminus \tilde{\Omega})} |Du|^n = \\
&= \int_{\tilde{\Omega}^r \cap \tilde{\Omega}} |Du \circ f|^n |J_f| + 0 + 0 = \int_{\tilde{\Omega}^r \cap \tilde{\Omega}} |(Df)^{-1}|^n |J_f| = \\
&= \int_{\tilde{\Omega}^r} \left| \frac{\operatorname{adj} Df}{J_f} \right|^n |J_f| \leq n^n \int_{\tilde{\Omega}^r \cap \tilde{\Omega}} \left(\frac{|Df|^n}{|J_f|} \right)^{n-1} = n^n \int_{\tilde{\Omega}^r \cap \tilde{\Omega}} K^{n-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Pre zostávajúcu množinu $f(\tilde{\Omega} \setminus \Omega^r)$ máme z area formule a definície Ω^r

$$|f(\tilde{\Omega} \setminus \Omega^r)| = \int_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega^r} |J_f| = \int_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega^r} 0 = 0,$$

a teda

$$\int_{f(\Omega)} |Du|^n = \int_{f(\Omega^r\cup(\Omega\setminus\tilde{\Omega}))} |Du|^n + \int_{f(\tilde{\Omega}\setminus\Omega^r)} |Du|^n < \infty,$$

čo sme chceli dokázať. $\square$

Literatúra

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of bounded variation and free discontuniuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[2] J. Appell, P.P.Zabrejko: *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press 1990.

[3] J. Ball: *Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **88** no. $3-4$ (1981), 315-328.

[4] M. A. Brakalova, J. A. Jenkins: *On solutions of the Beltrami equation*, Anal. Math. **76** (1998), 67-92.

[5] M. Csörnyei, S. Hencl, J. Malý: *Homeomorphisms in the Sobolev Space* $W^{1,n-1}$, rukopis.

[6] I. Černý: *Základy analysy v komplexním oboru*, Academia, Praha 1967.

[7] G. David: *Solutions de l'equation de Beltrami avec* $||\mu||_\infty = 1$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, Math. **13** no. 1 (1998), 25-70.

[8] K. Deimling: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg 1985.

[9] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press 1992.

[10] I. Fonseca, W. Gangbo: *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarendon Press, Oxford 1995.

[11] H. Federer: *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin 1969, 1996.

[12] V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugawa, M. Vuorinen: *On the Degenerate Beltrami Equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 875-900.

[13] J. Heinonen, P. Koskela: *Sobolev mappings with integrable dilatations*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** no. 1 (1993), 81-97.

[14] S. Hencl, P. Koskela: *Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism*, Arch. Rational Mech. Anal. **180** (2006), 75-95.

[15] S. Hencl, P. Koskela, J. Malý: *Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism in space*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **136A** no. 6 (2006), 1267-1285.

[16] S. Hencl, P. Koskela, J. Onninen: *Homeomorphisms of Bounded Variation*, vyjde v Arch. Rational Mech. Anal.

[17] T. Iwaniec, G. Martin: *Beltrami equation*, vyjde v Mem. Amer. Math. Soc.

[18] T. Iwaniec, V. Šverák: *On mappings with integrable dilatation*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 181-188.

[19] P. Koskela, J. Onninen: *Mappings of finite distorsion: Capacity and modulus inequalities*, J. Reine Angew. Math. **599** (2006), 1-26.

[20] J. Lukeš, J. Malý: *Measure and Integral*, Matfyzpress 1995.

[21] J. Malý: *Lectures on change of variables in integral*, Preprint 305, University of Helsinky 2001.

[22] J. Malý, D. Swanson, W. P. Ziemer: *Coarea formula for Sobolev mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 2, 477-492.

[23] S. Müller, Q. Tang, B. S. Yan: *On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **11** (1994), 217-243.

[24] W. Rudin: *Analýza v reálním a komplexním oboru*, Academia 2003.

[25] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov: *BMO-Quasiconformal mappings*, J. Analyse Math. **83** (2001), 1-20.

[26] Q. Tang: *Almost-everywhere injectivity in nonlinear elasticity*, Proc. Roy. Soc. Edinbuirgh Sect. A. **109** no. $1-2$ (1988), 79-95.

[27] W. P. Ziemer: *Change of variables for absolutely continuous functions*, Duke Math. J. **36** (1969), no. 1, 171-178.

[28] W. P. Ziemer: *Weakly differentiable functions*, Springer, New York 1989.

Register