Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Miroslav Kačena

Topologické vlastnosti kompaktných konvexných množín

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
Studijní obor: Matematická analýza

Rád by som touto cestou poďakoval RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D. za cenné rady, návrhy a pripomienky, odborné konzultácie a poskytnutú literatúru.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.

V Praze dne 12.4.2007 Miroslav Kačena

Obsah

Názov práce: Topologické vlastnosti kompaktných konvexných množín
Autor: Miroslav Kačena
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
e-mail vedúceho: spurny@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: V práci sú najprv vyložené základy Choquetovej teórie funkčných priestorov potrebné v ďalšej časti. Text je zameraný predovšetkým na všeobecné funkčné priestory, špeciálny prípad kompaktných konvexných množín sa skúma len okrajovo. Hlavným cieľom výkladu je veta o ekvivalencii simpliciality s niektorými interpolačnými vlastnosťami funkčného priestoru.

Druhá časť práce sa zaoberá súčinmi funkčných priestorov. Zavedené sú rôzne definície súčinu, pričom najväčší dôraz sa kladie na multiafinný súčin. Úvodná sekcia sa sústreďuje práve na vzťahy medzi týmito súčinmi a ich rozdiely. Primárnym cieľom práce je zovšeobecnenie známych výsledkov pre súčiny kompaktných konvexných množín do kontextu funkčných priestorov. Najskôr sa skúmajú extremálne množiny, hlavným výsledkom je reprezentácia Choquetovej hranice súčinu ako súčinu Choquetových hraníc pôvodných priestorov. Ďalej sa študujú simpliciálne priestory. Je ukázané, že súčin simpliciálnych priestorov je simpliciálny priestor, a že zavedené definície súčinu v takomto prípade splývajú na afinných funkciách. Nakoniec sa vyšetrujú maximálne miery.
Kľúčové slová: funkčný priestor, Choquetova teória, simplex, súčin

Title: Topological properties of compact convex sets
Author: Miroslav Kačena
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: spurny@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: The first part of the thesis presents the basics of Choquet theory of function spaces needed in the next part. Text deals mainly with general function spaces, the special case of compact convex sets is considered only marginally. The main object of this investigation is an equivalence between simpliciality and some interpolation properties of a function space.

The second part is engaged in research on products of function spaces. Various products are defined, the most treated being the multiaffine product. The introductory section focuses just on the connections and differences between these products. The primary goal of the work is a generalization of known results for products of compact convex sets to the context of function spaces. First, extremal sets are examined, the main result is the representation of Choquet boundary of a product space as the product of Choquet boundaries of original spaces. Simplicial spaces are studied next. It is shown, that a product of simplicial spaces is simplicial and in that case established definitions of a product space coincide for affine functions. Finally, maximal measures are investigated.
Keywords: Choquet theory, function space, product, simplex

Úvod

Pôvodný Choquetov výsledok z roku 1956 o reprezentácii bodu metrizovateľnej kompaktnej konvexnej množiny mierou nesenou množinou extremálnych bodov dal vznik teórii, ktorá je dnes známa ako Choquetova teória. Časom sa podarilo zaviesť usporiadanie na priestore Radonových mier a pojem maximálnej miery umožnil rozšírenie teórie aj na nemetrizovateľné množiny. Dôležitú úlohu v rámci teórie zohráva koncept simplexu, ktorý má viacero zaujímavých vlastností. Možnosť reprezentácie každého bodu jedinou maximálnou mierou sa ukázala byť ekvivalentnou mnohým interpolačným, či zväzovým vlastnostiam. Logickým krokom bola myšlienka nájsť rozumný spôsob, ako zo systému simplexov vytvoriť nový simplex. Správny smer udal prístup Lazara, Daviesa a Vincent-Smitha, ktorí ku konštrukcii nového simplexu využili priestor multiafinných funkcií. Zakrátko sa ich definície rozšírili na ľubovoľné kompaktné konvexné množiny.

Nie dlho po vzniku klasickej Choquetovej teórie si matematici uvedomili, že „konvexný prípad“ je vlastne len špeciálnym prípadom funkčného priestoru na kompakte. Postupne sa začala budovať teória odznova analogicky pre všeobecné funkčné priestory…

Cieľom tejto práce by malo byť vyplnenie medzery v Choquetovej teórii týkajúcej sa súčinov funkčných priestorov. Pokúsime sa skompilovať všetky známe výsledky o súčinoch kompaktných konvexných množín a zovšeobecniť ich do kontextu funkčných priestorov, prípadne odvodiť nové.

Text je rozdelený do troch kapitol. V prvej si zhrnieme všetky základné výsledky z matematickej analýzy, ktoré budeme neskôr potrebovať. Zároveň zavedieme značenie používané v celej práci.

V druhej kapitole podáme základy Choquetovej teórie funkčných priestorov. Nepredpokladajú sa žiadne predchádzajúce znalosti tejto teórie. Výklad však nebude koncipovaný s cieľom podať súhrn známych výsledkov, ale skôr vybudovať niektoré konkrétne nástroje používané v ďalšej kapitole. Medzi ne patria hlavne Choquet-Bishop-de Leeuwova veta, Battyho veta, princíp minima a ekvivalencia simpliciality s interpolačnými vlastnosťami funkčného priestoru. Text je doplnený historickými poznámkami.

Ústrednou časťou práce je tretia kapitola. Najskôr zavedieme niekoľko rôznych súčinov funkčných priestorov a ukážeme vzťahy a rozdiely medzi nimi. Výskum sa bude sústreďovať hlavne na multiafinný súčin, ostatné súčiny preto kvôli technickej jednoduchosti budeme uvažovať len pre dva funkčné priestory. Ako sa ukáže v ďalších častiach práce, z pohľadu Choquetovej teórie majú všetky tieto súčiny podobné vlastnosti. Ukážeme, že Choquetova hranica súčinového priestoru je súčinom Choquetových hraníc pôvodných priestorov. Ba dokážeme ešte viac, že podobné tvrdenie platí pre všetky extremálne množiny. Jednou zo základných požiadaviek na súčin funkčných priestorov pochopiteľne je, aby súčin simpliciálnych priestorov bol zase simpliciálny. Ukážeme, že nami definované súčiny skutočne túto vlastnosť majú. K dôkazu použijeme práve interpolačné vlastnosti simpliciálnych priestorov. Uvidíme, že v takom prípade dokonca splýva multiafinný súčin s tenzorovým. Nakoniec vyšetríme maximálne miery a ukážeme, že súčin maximálnych mier je maximálna miera. Text je opäť doplnený historickými poznámkami, príkladmi a takisto problémami.

1 Základné značenie, definície a vety

Na úvod si zhrňme niektoré základné definície a vety, ktoré budeme v texte používať. Všetky tvrdenia v tejto kapitole budú uvedené bez dôkazu, nakoľko ich považujeme za všeobecne známe, a možno ich nájsť v každej učebnici analýzy, zaoberajúcej sa danou problematikou.

1.1 Priestory

Terminológia tejto sekcie vychádza hlavne z [27]. Dôkazy možno nájsť rovnako v [27] alebo aj [29], [33] a [35].

Úmluva. Všetky skaláry uvažované v tomto texte budú reálne čísla.

Definícia. Podmnožina C reálneho vektorového priestoru X sa nazve *konvexným kužeľom*, ak

1. $\alpha C \subset C$ pre všetky $\alpha \geq 0$,
2. $C + C \subset C$.

Povieme, že $K \subset X$ je *konvexná*, ak $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ pre všetky $x, y \in K$ a $\lambda \in [0,1]$. Bod $x \in K$ nazveme *extremálny*, ak nie je stredom žiadnej nedegenerovanej úsečky v K, tj.

$$\frac{y+z}{2} = x,\ y, z \in K \ \Rightarrow\ y = z.$$

Množinu extremálnych bodov K označíme $\operatorname{ext} K$.
Konvexným obalom $\operatorname{co} A$ množiny $A \subset X$ rozumieme najmenšiu konvexnú množinu obsahujúcu A.
Ak je X naviac topologický priestor, potom najmenšiu uzavretú konvexnú množinu obsahujúcu A nazveme *uzavretým konvexným obalom* množiny A, a označíme $\overline{\operatorname{co}}\, A$.
Lokálne konvexným priestorom budeme rozumieť topologický vektorový priestor, ktorý má bázu okolí nuly tvorenú konvexnými množinami.

Tvrdenie. *Nech A je podmnožina topologického vektorového priestoru X, potom platí:*

(i) $\operatorname{co} A = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\,;\ x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) $\overline{\operatorname{co}}\, A = \overline{\operatorname{co} A}$.

Krein-Milmanova veta. *Nech X je kompaktná konvexná podmnožina lokálne konvexného priestoru. Potom $X = \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{ext} X)$.*

Milmanova veta. *Nech A je podmnožina lokálne konvexného priestoru a $X := \overline{\operatorname{co}}\, A$ je kompaktná. Potom $\operatorname{ext} X \subset \overline{A}$.*

Alaogluova veta. *Nech E je normovaný lineárny priestor. Potom uzavretá jednotková guľa $B_{E^*} := \{f \in E^* \,;\, \|f\| \le 1\}$ je w^*-kompaktná.*

Definícia. Nech p je reálna funkcia na vektorovom priestore X. Povieme, že p je *sublineárny funkcionál*, ak

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pre každé $\lambda \ge 0$ a $x \in X$,
2. $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pre každé $x, y \in X$.

Hahn-Banachova veta.

- Algebraická verzia. *Nech p je sublineárny funkcionál na vektorovom priestore X, $M \subset\subset X$ a f je lineárna forma na M taká, že $f \le p$ na M. Potom existuje lineárna forma $F \in X^{\#}$ tak, že $F = f$ na M a $F \le p$ na X.*
- Analytická verzia. *Nech M je podpriestor normovaného lineárneho priestoru E a $f \in M^*$. Potom existuje $F \in E^*$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\|_E = \|f\|_M$.*
- Geometrická verzia. *Nech X je lokálne konvexný priestor a $A, B \subset X$ sú neprázdne disjunktné konvexné množiny.*
  (a) *Ak A je otvorená, potom existuje $f \in X^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že*
  $$f(a) < \alpha \le f(b), \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$
  (b) *Ak jedna je uzavretá a druhá kompaktná, potom existuje $f \in X^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že*
  $$\sup_A f < \alpha < \inf_B f.$$

Definícia. Buď Ω množina a (M, d) metrický priestor. Nech ďalej $f : \Omega \to M$ a $E \subset \Omega$. *Osciláciou f* na E nazveme diameter $f(E)$ a označíme $\operatorname{osc}_E f$, tj.

$$\operatorname{osc}_E f = \sup_{x,y \in E} d(f(x), f(y)).$$

Definícia. Nech X je topologický priestor. Funkciu $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nazveme *zdola polospojitou*, ak množina $\{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\}$ je otvorená pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkciu $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nazveme *zhora polospojitou*, ak funkcia $-f$ je zdola polospojitá.
Nech K je konvexná množina. Funkcia $f : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sa nazve *konkávnou*, ak

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \ge \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \quad \forall x, y \in K,\ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Funkciu $f : K \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nazveme *konvexnou*, ak $-f$ je konkávna. Funkciu, ktorá je zároveň konvexná i konkávna, nazveme *afinnou*.

Označenie. Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor. Symbolom $\mathcal{C}(K)$ budeme značiť priestor všetkých spojitých funkcií na K so supremovou normou, tj. $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$, $f \in \mathcal{C}(K)$.
Množinu borelovských funkcií označíme $\mathcal{B}(K)$ a priestor ohraničených borelovských funkcií so supremovou normou $\mathcal{B}_b(K)$.
Symbolom 1_K budeme značiť konštantnú funkciu rovnú 1 na celom K.
Ak K bude naviac konvexná množina, označíme $A(K)$ priestor všetkých spojitých afinných funkcií na K.

Tvrdenie. *Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor a $f \in \mathcal{C}(K)$, potom existuje $x_0 \in K$ tak, že $|f(x_0)| = \|f\|$.*

Veta. *Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor. Potom $\mathcal{C}(K)$ je separabilný, práve keď K je metrizovateľný.*

Urysohnova lemma. *Nech X je kompaktný Hausdorffov priestor a nech F_0, F_1 sú disjunktné uzavreté podmnožiny X. Potom existuje spojitá funkcia $f : X \to [0,1]$ taká, že $f = 0$ na F_0 a $f = 1$ na F_1.*

Definícia. Podmnožina topologického priestoru sa nazve *relatívne kompaktná*, ak jej uzáver je kompaktný.

Definícia. Množina reálnych funkcií $\mathcal{F}$ na topologickom priestore X sa nazýva *rovnako spojitá*, ak ku každému $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ možno nájsť také okolie U bodu x, že $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, kedykoľvek $f \in \mathcal{F}$ a $t \in U$.

Arzelà-Ascoliho veta. *Buď K kompaktný priestor a $\mathcal{F}$ podmnožina $\mathcal{C}(K)$. Množina $\mathcal{F}$ je relatívne kompaktná v $\mathcal{C}(K)$, práve keď je ohraničená a rovnako spojitá.*

Definícia. Povieme, že $(M, \preceq)$ je *čiastočne usporiadaná* množina, ak $\preceq$ je binárna relácia na množine M taká, že pre všetky $a, b, c \in M$ platí
- $a \preceq a$ (reflexivita),
- ak $a \preceq b$ a $b \preceq c$, potom $a \preceq c$ (tranzitivita),
- ak $a \preceq b$ a $b \preceq a$, potom $a = b$ (antisymetria).

Ak platí naviac
- $a \preceq b$ alebo $b \preceq a$,

nazveme M *lineárne usporiadanou* množinou.
Reťazcom v čiastočne usporiadanej množine budeme rozumieť lineárne usporiadanú podmnožinu.
Vektorový priestor P s čiastočným usporiadaním $\preceq$ nazveme *čiastočne usporiadaným vektorovým priestorom*, ak pre každé $a, b, c \in P$ a $0 \le \lambda \in \mathbb{R}$ platí

- ak $a \preceq b$, potom $a + c \preceq b + c$ (translačná invariantnosť),
- ak $0 \preceq a$, potom $0 \preceq \lambda a$.

Nech $D \subset P$ je neprázdna. Bod $x \in P$ sa nazve *hornou (dolnou) závorou* množiny D, ak $x \succeq y$ ($x \preceq y$) pre každé $y \in D$. *Najmenšou hornou (najväčšou dolnou) závorou* množiny D rozumieme hornú (dolnú) závoru x takú, že $x \preceq z$ ($x \succeq z$) pre všetky ostatné horné (dolné) závory z množiny D.
Priestor P sa nazve *zväz*, ak pre každé $x, y \in P$ má množina $\{x, y\}$ najmenšiu hornú (alebo ekvivalentne najväčšiu dolnú) závoru. Tú budeme značiť $x \curlyvee y$ (resp. $x \curlywedge y$).

Označenie. Množinu nezáporných prvkov čiastočne usporiadaného vektorového priestoru $(P, \preceq)$ označíme P^+, tj. $P^+ := \{x \in P\,;\ x \succeq 0\}$.
Pre $a, b \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme symbolom $a \vee b$ (resp. $a \wedge b$) značiť maximum (resp. minimum) čísel a, b. Pre funkcie f, g z množiny M do $\mathbb{R}^*$ bude $f \vee g$ (resp. $f \wedge g$) ich bodové maximum (resp. minimum), tj. $(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$ (resp. $(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$) pre všetky $x \in M$.

Zornova lemma. *Každá neprázdna čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každý reťazec má hornú závoru, obsahuje maximálny prvok.*

Stone-Weierstrassova veta. *Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor a L lineárny podpriestor $\mathcal{C}(K)$ obsahujúci konštanty, oddeľujúci body a tvoriaci zväz. Potom L je hustý v $\mathcal{C}(K)$.*

Definícia. Množina $\mathcal{F}$ funkcií s hodnotami v $\mathbb{R}^*$ sa nazve

(a) *min-stabilná*, ak
$$f \wedge g \in \mathcal{F}, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}.$$

(b) *nadol usmernená*, ak
$$\forall f, g \in \mathcal{F},\ \exists h \in \mathcal{F} : h \leq f \wedge g.$$

1.2 Kartézsky súčin

Označenie. Nech $\{E_i\}_{i \in I}$ je množina topologických priestorov.

- Symbolom $\bigtimes_{i \in I} E_i$ budeme značiť ich *kartézsky súčin* s obvyklou topológiou, pričom zavádzame konvenciu $\bigtimes_{i \in \emptyset} E_i := \{\emptyset\}$.
  Pre $I' \subset I$ bude $\pi_{I'} : \bigtimes_{i \in I} E_i \to \bigtimes_{i \in I'} E_i$ znamenať prirodzenú *projekciu*.
- Ak $x_i \in E_i$ pre každé $i \in I$, potom $(x_i)_{i \in I}$ značí prvok $x \in \bigtimes_{i \in I} E_i$ taký, že $\pi_i(x) = x_i$ pre všetky $i \in I$.
  Ak je ďalej $\emptyset \neq I' \subsetneq I$, $y = (x_i)_{i \in I'}$ a $z = (x_i)_{i \in I \setminus I'}$, potom označíme $y \times z := (x_i)_{i \in I}$.

- Nech $E = \bigtimes_{i\in I} E_i$, $A \subset E$, $\emptyset \neq I' \subsetneq I$ a $z \in \bigtimes_{i\in I\setminus I'} E_i$. Potom $\pi_{I'}(A)$ bude projekcia množiny A do $\bigtimes_{i\in I'} E_i$, tj.

$$\pi_{I'}(A) := \{x \in \bigtimes_{i\in I'} E_i\,;\ \exists y \in \bigtimes_{i\in I\setminus I'} E_i : x \times y \in A\},$$

a symbol $\pi^z_{I'}(A)$ bude znamenať *rez* množiny A v bode z, tj.

$$\pi^z_{I'}(A) := \{x \in \bigtimes_{i\in I'} E_i\,;\ x \times z \in A\}.$$

V triviálnom prípade definujeme $\pi_I(A) = \pi^{\emptyset}_I(A) := A$.

- Nech $E = \bigtimes_{i\in I} E_i$, $f : E \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq I' \subsetneq I$ a $y \in \bigtimes_{i\in I\setminus I'} E_i$. Potom $\pi^y_{I'}(f)$ bude značiť reálnu funkciu na $\bigtimes_{i\in I'} E_i$ takú, že

$$\pi^y_{I'}(f)(x) = f(x \times y), \quad \forall x \in \bigtimes_{i\in I'} E_i\ .$$

V prípade, že f bude nezávislá na premennej y, použijeme značenie $\pi_{I'}(f)$. Triviálny prípad definujeme $\pi_I(f) = \pi^{\emptyset}_I(f) := f$.

- Pre $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ a $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ budeme značením $f = f_1 \otimes f_2$ myslieť funkciu

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\to \mathbb{R} \\ f(x, y) = f_1(x)f_2(y), &\quad \forall x \in E_1, \forall y \in E_2. \end{aligned}$$

Tichonovova veta. *Nech $\{X_i\}_{i\in I}$ sú topologické priestory. Potom $\bigtimes_{i\in I} X_i$ je kompaktný, práve keď každý X_i je kompaktný.*

Tvrdenie. *Nech $X = \bigtimes_{i\in I} X_i$, kde X_i je metrický priestor pre každé $i \in I$.*

(i) *Ak I je konečná alebo spočítateľná, potom X je metrizovateľný topologický priestor.*

(ii) *Ak I je nespočítateľná, a každý X_i obsahuje aspoň dva rôzne body, potom X nie je metrizovateľný.*

1.3 Teória miery a integrálu

Dôkazy nasledujúcich tvrdení možno nájsť v [28] (viď tiež [35]).

Leviho veta (o monotónnej konvergencii). *Nech $\{f_n\}$ je postupnosť merateľných funkcií na priestore s mierou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ taká, že $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ pre každé n. Potom*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Fatouova lemma. *Nech $\{f_n\}$ je postupnosť nezáporných merateľných funkcií na priestore s mierou $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Potom*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Definícia. Buďte $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou, $(Y, \mathcal{T})$ merateľný priestor a $\phi : X \to Y$ merateľné zobrazenie. Množinovú funkciu

$$\phi(\mu) : E \mapsto \mu(\phi^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{T},$$

nazveme *obrazom miery* μ pri zobrazení ϕ.

Poznámka. Označenie $\phi(\mu)$ budeme občas skracovať na $\phi\mu$.

Tvrdenie. *Buďte $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou, $(Y, \mathcal{T})$ merateľný priestor a $\phi : X \to Y$ merateľné zobrazenie. Potom $\phi(\mu)$ je miera na $(Y, \mathcal{T})$, a pre $\phi(\mu)$-integrovateľnú funkciu $f : Y \to \mathbb{R}^*$ je*

$$\int_Y f \, d\phi(\mu) = \int_X f \circ \phi \, d\mu.$$

Označenie.

- Ak je $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou a f je μ-merateľná funkcia, potom symbolom $\mu(f)$ budeme myslieť $\int_X f \, d\mu$.
- Nech $K = \bigtimes_{i\in I} K_i$ sú kompaktné Hausdorffove priestory, μ je miera na K a $J \subset I$. Potom symbolom $\pi_J(\mu)$ rozumieme obraz miery μ pri projekcii π_J.

Definícia. Nech X je kompaktný Hausdorffov priestor a miera μ je definovaná na σ-algebre $\mathcal{S}$ obsahujúcej všetky borelovské podmnožiny X. Povieme, že μ je *Radonova miera*, ak platí

(a) $\mu(X) < \infty$,
(b) $\mu(A) = \sup\{\mu(K)\,;\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$ pre každú $A \in \mathcal{S}$.

Ak je μ Radonova miera na $(X, \mathcal{S})$, ktorá je úplná, potom μ i $\mathcal{S}$ sú jednoznačne určené hodnotami μ na borelovských množinách X a hovoríme, že μ je *úplná Radonova miera* na X.
Ak je μ nezáporná a $\mu(X) = 1$, nazveme mieru *pravdepodobnostnou*.
Priestor všetkých nezáporných úplných Radonových mier na X budeme značiť $\mathcal{M}^+(X)$, množinu pravdepodobnostných úplných Radonových mier označíme $\mathcal{M}^1(X)$.
Uzavretú množinu

$$\operatorname{spt} \mu = X \setminus \bigcup \{G\,;\ \mu(G) = 0,\ G \text{ otvorená}\}$$

nazývame *nosičom* miery $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$.
Pre $x \in X$ definujeme mieru

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad A \subset X,$$

ktorú nazveme *Diracovou mierou* v bode x.
Povieme, že miera μ je *molekulárna*, ak $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ pre nejaké $\alpha_i \geq 0$, $x_i \in X$ $(1 \leq i \leq n)$.

Rieszova veta o reprezentácii. *Nech X je kompaktný Hausdorffov priestor a Λ je nezáporný lineárny funkcionál na priestore $\mathcal{C}(X)$. Potom existuje práve jedna miera $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ tak, že $\Lambda(f) = \int_X f d\mu$ pre každú $f \in \mathcal{C}(X)$.*

Zvyšok sekcie venujeme súčinom mier. Tie sú prevzaté z [12], [13] a [21].

Definícia. Nech $\{(X_i, \mathcal{S}_i)\}_{i \in I}$ sú merateľné priestory a nech $X = \times_{i \in I} X_i$. Potom *súčinovou σ-algebrou* $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$ budeme rozumieť σ-algebru na X generovanú systémom množín

$$\{\pi_i^{-1}(E)\,;\ E \in \mathcal{S}_i,\ i \in I\}.$$

Veta. *Buďte $\{(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ pravdepodobnostné priestory. Nech $X = \times_{i \in I} X_i$ a $\mathcal{S} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$. Potom existuje práve jedna pravdepodobnostná miera μ na $\mathcal{S}$ taká, že*

$$\mu(\bigtimes_{i \in I} E_i) = \prod_{i \in I} \mu_i(E_i),$$

*kedykoľvek $E_i \in \mathcal{S}_i$ pre každé $i \in I$ a $E_i \neq X_i$ pre konečne mnoho $i \in I$.
Zúplnenie miery μ budeme nazývať súčinom mier $\{\mu_i\}_{i \in I}$.*

Dôkaz. Viď [21, Chapter VI, Theorem 5.3]. □

Tvrdenie. *Buďte $\{(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ pravdepodobnostné priestory a μ súčin mier $\{\mu_i\}_{i \in I}$. Ak $E_i \in \mathcal{S}_i$ pre každé $i \in I$ a $E_i \neq X_i$ pre spočítateľne mnoho $i \in I$, potom $\times_{i \in I} E_i$ je μ-merateľná množina a $\mu(\times_{i \in I} E_i) = \prod_{i \in I} \mu_i(E_i)$.*

Dôkaz. Viď [12, Theorem 254F (b)]. □

Tvrdenie. *Buďte $\{(X_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \in I}$ merateľné priestory, kde $\mathcal{B}_i$ značí σ-algebru borelovských podmnožín X_i. Ak sa miery $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\times_{i \in I} X_i)$ zhodujú na množinách tvaru $\times_{i \in I} E_i$, kde $E_i \in \mathcal{B}_i$ pre každé $i \in I$ a $E_i \neq X_i$ pre konečne mnoho $i \in I$, potom $\mu = \nu$.*

Dôkaz. Viď [21, Chapter I, Proposition 5.3] a dôkaz [13, Corollary 417F]. □

Veta. *Buďte* $\{(K_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ *kompaktné Hausdorffove priestory s úplnými pravdepodobnostnými Radonovými mierami. Potom existuje jednoznačne určená úplná Radonova miera* $\bigotimes_{i\in I} \mu_i$ *rozširujúca súčin mier* $\{\mu_i\}_{i\in I}$.

Dôkaz. Viď [13, Theorem 417Q]. □

Veta (Asociatívny zákon)**.** *Buďte* $\{(K_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ *kompaktné Hausdorffove priestory s úplnými pravdepodobnostnými Radonovými mierami a* $\{J_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *disjunktné pokrytie množiny* I. *Potom* $\bigotimes_{i\in I} \mu_i = \bigotimes_{\gamma\in\Gamma}(\bigotimes_{j\in J_\gamma} \mu_j)$.

Dôkaz. Viď [13, Theorem 417J]. □

Tvrdenie. *Buďte* $\{(K_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ *kompaktné Hausdorffove priestory s úplnými pravdepodobnostnými Radonovými mierami a nech* $J \subset I$. *Potom platí* $\pi_J(\bigotimes_{i\in I} \mu_i) = \bigotimes_{i\in J} \mu_i$.

Dôkaz. Viď [13, Proposition 417K]. □

Fubiniova veta. *Buďte* $(K_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ *a* $(K_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ *kompaktné Hausdorffove priestory s úplnými pravdepodobnostnými Radonovými mierami. Označme* $K := K_1 \times K_2$ *a* $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$.

(a) *Nech* f *je funkcia na* K*, pre ktorú* $\int_K f\,d\mu$ *má zmysel. Potom*

$$\int_K f\,d\mu = \int_{K_1} (\int_{K_2} f(x, .)\,d\mu_2) d\mu_1$$

(a obdobne v obrátenom poradí integrácie).

(b) *Nech* f *je* μ*-merateľná reálna funkcia definovaná* μ*-skoro všade na* K. *Ak integrál* $\int_{K_1}(\int_{K_2} |f(x, .)|\,d\mu_2)d\mu_1$ *alebo* $\int_{K_2}(\int_{K_1} |f(., y)|\,d\mu_1)d\mu_2$ *má zmysel a je konečný, potom* f *je* μ*-integrovateľná.*

Dôkaz. Viď [13, Theorem 417H]. □

2 Základy Choquetovej teórie

V tejto kapitole podáme základy Choquetovej teórie funkčných priestorov, avšak len do takej miery, aby sme vybudovali nástroje potrebné v ďalšej kapitole. Viac sa možno dočítať v [1], [2] alebo [33].

2.1 Funkčné priestory

Definícia 2.1. Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor. Povieme, že $(K, \mathcal{H})$ je *funkčný priestor*, ak $\mathcal{H} \subset\subset \mathcal{C}(K)$, $1_K \in \mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$ oddeľuje body.
Pre $x \in K$ definujme množinu *$\mathcal{H}$-reprezentujúcich mier* vzťahom

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) := \{\mu \in \mathcal{M}^1(K)\,;\ h(x) = \int_K h\,d\mu \text{ pre všetky } h \in \mathcal{H}\}.$$

Choquetovou hranicou $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ funkčného priestoru $(K, \mathcal{H})$ nazveme množinu všetkých bodov $x \in K$, pre ktoré je ε_x jediná $\mathcal{H}$-reprezentujúca miera, tj.

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K := \{x \in K\,;\ \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}\}.$$

Neprázdna uzavretá množina $E \subset K$ sa nazve *$\mathcal{H}$-extremálna*, ak pre každé $x \in E$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je $\operatorname{spt}\mu \subset E$.
Bod $x \in K$ sa nazve *$\mathcal{H}$-exponovaný*, ak existuje funkcia $h \in \mathcal{H}$ tak, že $h(x) = 0$ a $h(y) > 0$ pre $y \neq x$, $y \in K$. Množinu všetkých $\mathcal{H}$-exponovaných bodov budeme značiť $\operatorname{Exp}_{\mathcal{H}} K$.
Funkciu f nazveme *$\mathcal{H}$-konkávnou*, ak platí

$$f(x) \geq \int_K f\,d\mu \quad \text{pre každé } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}),$$

za predpokladu, že integrál má zmysel pre všetky príslušné reprezentujúce miery. Funkciu f nazveme *$\mathcal{H}$-konvexnou*, ak $-f$ je $\mathcal{H}$-konkávna. Označme množinu polospojitých $\mathcal{H}$-konkávnych (resp. $\mathcal{H}$-konvexných) funkcií

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) := \{f \text{ zdola polospojitá}\,;\ f(x) \geq \mu(f) \text{ pre } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}$$
$$(\text{resp. } \mathcal{V}(\mathcal{H}) := \{f \text{ zhora polospojitá}\,;\ f(x) \leq \mu(f) \text{ pre } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}).$$

Priestor $\mathcal{H}$-afinných funkcií definujme ako

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) := \{f \in \mathcal{B}_b(K)\,;\ f(x) = \mu(f) \text{ pre } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}.$$

(Poznamenajme, že ak $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ a f je polospojitá alebo ohraničená borelovská funkcia na K, potom $\mu(f)$ má zmysel.)
Množinu spojitých $\mathcal{H}$-konkávnych (resp. $\mathcal{H}$-konvexných, $\mathcal{H}$-afinných) funkcií

budeme značiť $\mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$).
Definujme ďalej konvexný kužeľ

$$\mathcal{W}(\mathcal{H}) := \{w \in \mathcal{C}(K)\,;\ w = h_1 \vee \ldots \vee h_n,\ h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}\}.$$

Zrejme $\mathcal{W}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.
Pre zhora (resp. zdola) ohraničenú funkciu f na K definujme *hornú* (resp. *dolnú*) *obálku* vzťahom

$$f^* := \inf\{h\,;\ h \geq f,\ h \in \mathcal{H}\}$$
$$(\text{resp. } f_* := \sup\{h\,;\ h \leq f,\ h \in \mathcal{H}\}),$$

a označme

$$\widehat{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{C}(K)\,;\ f_* = f^*\}.$$

Príklady 2.2. Uveďme teraz príklady najzákladnejších funkčných priestorov a bez dôkazu niektoré ich vlastnosti:

(a) *Spojité funkcie.* Triviálny príklad funkčného priestoru, keď $\mathcal{H} = \mathcal{C}(K)$. Choquetova hranica je celý priestor K.

(b) *Konvexný prípad.* Nech X je kompaktná konvexná podmnožina lokálne konvexného Hausdorffovho priestoru. Vezmime $\mathcal{H} = A(X)$. Platí $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} X = \operatorname{ext} X$. Ďalej, polospojité funkcie sú $\mathcal{H}$-konkávne, práve keď sú konkávne, špeciálne $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Taktiež, pre každé $x \in X$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ existuje zovšeobecnená postupnosť molekulárnych mier $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$. (Viď napr. [1].)

(c) *Harmonický prípad.* Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená a otvorená. Funkčný priestor $\mathcal{H}$ definujeme ako priestor všetkých spojitých funkcií na $\overline{\Omega}$, ktoré sú harmonické na Ω. Choquetova hranica je totožná s množinou regulárnych bodov Ω. (Viď napr. [32].)

(d) *Kvadratické polynómy.* Nech $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}$ sú všetky polynómy druhého alebo nižšieho stupňa na K. Ľahko sa nahliadne, že $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K = K$, z čoho potom $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(K) \neq \mathcal{H}$.

Poznámky. Choquetova teória vznikla publikovaním série článkov [15], [19] a [16] (ďalej len [17]) pojednávajúcich o reprezentácii bodov kompaktných konvexných množín Radonovými mierami nesenými množinou extremálnych bodov. Tieto výsledky zosilňovali Krein-Milmanovu vetu [22]. Pôvodne sa teória rozvíjala len pre konvexný prípad, neskôr sa začali uvažovať všeobecné funkčné priestory.

2.2 Obálky a $\mathcal{H}$-konkávne funkcie

Tvrdenie 2.3. *Množiny $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tvoria min-stabilné konvexné kužele uzavreté na rovnomernú konvergenciu.*

Dôkaz. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ sú zrejme konvexné kužele.
Overme min-stabilitu: Nech $f, g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Potom

$$\{x \in K\,;\,(f \wedge g)(x) > \alpha\} = \{x \in K\,;\,f(x) > \alpha\} \cap \{x \in K\,;\,g(x) > \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

z čoho je $f \wedge g$ zdola polospojitá. Nech teraz $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Platí

$$(f \wedge g)(x) \geq \mu(f) \wedge \mu(g) \geq \mu(f \wedge g),$$

a teda $f \wedge g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Nech teraz $\{f_n\} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $f_n \rightrightarrows f$. Potom f je zdola polospojitá a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f), \quad \forall x \in K, \forall \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}),$$

teda $\mathcal{H}$-konkávna.
Podobne pre spojité funkcie. □

Tvrdenie 2.4. $\mathcal{W}(\mathcal{H}) - \mathcal{W}(\mathcal{H})$ *je hustý podpriestor* $\mathcal{C}(K)$.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pomocou Stone-Weierstrassovej vety. Označme

$$L := \mathcal{W}(\mathcal{H}) - \mathcal{W}(\mathcal{H}).$$

Potom L je podpriestor $\mathcal{C}(K)$ obsahujúci konštanty a oddeľujúci body, lebo $\mathcal{H} \subset L$. Overme, že L je zväz. Pre každé $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$ platí

$$(f_1 - g_1) \vee (f_2 - g_2) = (f_1 + g_2) \vee (f_2 + g_1) - (g_1 + g_2) \in L.$$

□

Tvrdenie 2.5. *Platí:*
(a) $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *je uzavretý,*
(b) *pre každé* $x \in K$ *je* $\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$,
(c) $E \subset K$ *je* $\mathcal{H}$*-extremálna, práve keď je* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$*-extremálna,*
(d) $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K = \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})} K$,
(e) $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$,
(f) $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$.

Dôkaz. Výrok (a) plynie z tvrdenia 2.3, keďže $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \cap (-\mathcal{K}(\mathcal{H}))$, (b) plynie z definície, a zvyšné tvrdenia plynú z (b). □

Tvrdenie 2.6. *Nech f je zhora ohraničená funkcia na K. Potom f^* je zhora polospojitá a $\mathcal{H}$-konkávna.*

Dôkaz. Zhora polospojitosť plynie z faktu, že f^* je infimom množiny spojitých funkcií. Nech teraz $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Potom platí

$$\begin{aligned}\mu(f^*) &= \mu(\inf\{h\,;\ h \in \mathcal{H},\ h \geq f\}) \leq \inf\{\mu(h)\,;\ h \in \mathcal{H},\ h \geq f\}\\ &= \inf\{h(x)\,;\ h \in \mathcal{H},\ h \geq f\} = f^*(x)\end{aligned}$$

a f^* je $\mathcal{H}$-konkávna. □

Lemma 2.7. *Nech $x \in K$. Potom zobrazenie $f \mapsto f^*(x)$ je sublineárny funkcionál na $\mathcal{C}(K)$.*

Dôkaz. Nech $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Pre $\lambda > 0$ je

$$(\lambda f)^* = \inf\{h\,;\ h \geq \lambda f,\ h \in \mathcal{H}\} = \inf\left\{\lambda\frac{h}{\lambda}\,;\ \frac{h}{\lambda} \geq f,\ h \in \mathcal{H}\right\} = \lambda f^*.$$

Pre $\lambda = 0$ platí rovnosť triviálne. Nech $h_1, h_2 \in \mathcal{H},\ h_1 \geq f,\ h_2 \geq g$. Potom

$$(f+g)^* \leq (h_1 + h_2)^* = h_1 + h_2,$$

a preto aj $(f+g)^* \leq f^* + g^*$. □

Lemma 2.8. *Nech $f \in \mathcal{C}(K)$ a $x \in K$. Potom*

$$[f_*(x), f^*(x)] = \{\mu(f)\,;\ \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}.$$

Dôkaz.

1. Nech $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Potom pre $g, h \in \mathcal{H}$ také, že $g \leq f \leq h$ platí

   $$g(x) = \mu(g) \leq \mu(f) \leq \mu(h) = h(x).$$

   Prechod k infimu a supremu dáva $f_*(x) \leq \mu(f) \leq f^*(x)$.
2. Zvoľme teraz $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$. Podľa lemmy 2.7 je

   $$p : g \mapsto g^*(x), \quad g \in \mathcal{C}(K)$$

   sublineárny funkcionál. Uvažujme na lineárnom obale f lineárny funkcionál

   $$\Lambda : \lambda f \mapsto \lambda\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Potom $\Lambda \leq p$ na lineárnom obale f:

   $$\begin{aligned}&\Lambda(\lambda f) = \lambda\alpha \leq \lambda f^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f) \quad \text{pre } \lambda \geq 0,\\ &\Lambda(\lambda f) = \lambda\alpha \leq \lambda f_*(x) = -(-\lambda f)_*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f) \quad \text{pre } \lambda < 0.\end{aligned}$$

Z Hahn-Banachovej vety existuje lineárny funkcionál $\overline{\Lambda}$, ktorý rozširuje Λ, a $\overline{\Lambda} \leq p$ na $\mathcal{C}(K)$. Funkcionál $\overline{\Lambda}$ je nezáporný, lebo

$$\overline{\Lambda}(g) \leq p(g) = g^*(x) \leq 0 \text{ pre všetky } g \in \mathcal{C}(K), g \leq 0.$$

Podľa Rieszovej vety o reprezentácii existuje miera $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ tak, že $\overline{\Lambda}(g) = \mu(g)$ pre $g \in \mathcal{C}(K)$. Ukážme, že μ je reprezentujúca:

$$\begin{aligned}\mu(h) \leq p(h) = h^*(x) = h(x) = h_*(x) = -(-h)^*(x) \\ = -p(-h) \leq -\mu(-h) = \mu(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Teda $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $\mu(f) = \overline{\Lambda}(f) = \Lambda(f) = \alpha$.

□

Tvrdenie 2.9. *Nech f je zhora polospojitá funkcia na K a $x \in K$. Potom existuje miera $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $f^*(x) = \mu(f)$.*

Dôkaz. Označme

$$\mathcal{G} := \{g \in \mathcal{C}(K)\,;\ g \geq f\}.$$

Podľa lemmy 2.8 existuje pre každú $g \in \mathcal{G}$ miera $\mu_g \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ taká, že $\mu_g(g) = g^*(x)$. Pre $\varphi \in \mathcal{G}$ definujme

$$M_\varphi := \{\mu_g\,;\ g \leq \varphi,\ g \in \mathcal{G}\}.$$

Množina $\overline{M}_\varphi^{w^*}$ je uzavretá podmnožina w^*-kompaktnej $\mathcal{M}^1(K)$, a teda w^*-kompakt. Naviac, pre každé $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}$ je $\overline{M}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}^{w^*} \subset \overline{M}_{\varphi_1}^{w^*} \cap \overline{M}_{\varphi_2}^{w^*}$. Preto existuje $\mu \in \bigcap_{\varphi \in \mathcal{G}} \overline{M}_\varphi^{w^*}$. Zrejme $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Ďalej si uvedomme, že

$$\inf\{\nu(\varphi)\,;\ \nu \in M_\varphi\} = \inf\{\nu(\varphi)\,;\ \nu \in \overline{M}_\varphi^{w^*}\} \leq \mu(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}.$$

Z toho je

$$\begin{aligned}f^*(x) &\leq \inf\{g^*(x)\,;\ g \in \mathcal{G}\} = \inf\{\mu_g(g)\,;\ g \in \mathcal{G}\} \\ &\leq \inf\{\mu_g(\varphi)\,;\ g \leq \varphi,\ g, \varphi \in \mathcal{G}\} = \inf\{\inf\{\mu_g(\varphi)\,;\ g \leq \varphi, g \in \mathcal{G}\}\,;\ \varphi \in \mathcal{G}\} \\ &= \inf\{\inf\{\nu(\varphi)\,;\ \nu \in M_\varphi\}\,;\ \varphi \in \mathcal{G}\} \leq \inf\{\mu(\varphi)\,;\ \varphi \in \mathcal{G}\} = \mu(f).\end{aligned}$$

Opačnú nerovnosť máme z tvrdenia 2.6. □

Tvrdenie 2.10. *Platí $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.*

Dôkaz. Nech $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Predpokladajme, že $f \in \widehat{\mathcal{H}}$, teda $f_*(x) = f(x) = f^*(x)$. Podľa lemmy 2.8 je $\mu(f) = f(x)$, z čoho $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.
Ak $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, potom $f(x) = \mu(f)$ pre všetky $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Opäť použitím lemmy 2.8 vidíme, že $f_* = f^*$. □

Lemma 2.11. *Nech f je zhora ohraničená funkcia na K. Potom f je zhora polospojitá $\mathcal{H}$-konkávna, práve keď $f = f^*$.*

Dôkaz. Nech f je zhora polospojitá a $\mathcal{H}$-konkávna. Zvoľme $x \in K$. Z tvrdenia 2.9 nájdeme mieru $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ takú, že $f^*(x) = \mu(f)$. Potom

$$f^*(x) = \mu(f) \leq f(x) \leq f^*(x).$$

Ak naopak $f = f^*$, dostávame z tvrdenia 2.6 požadované vlastnosti f. □

Lemma 2.12. *Nech f je zhora ohraničená funkcia na K. Potom*

$$f^* = \inf\{h\,;\ h \geq f,\ h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\} = \inf\{k\,;\ k \geq f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}.$$

Dôkaz. Zrejme platí

$$f^* \geq \inf\{h\,;\ h \geq f,\ h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\} \geq \inf\{k\,;\ k \geq f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}.$$

Použitím lemmy 2.11 dostávame

$$\inf\{k\,;\ k \geq f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\} = \inf\{k^*\,;\ k \geq f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\} \geq f^*.$$

□

Veta 2.13 (Levi)**.** *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$, $\mathcal{F}$ je neprázdny nadol usmernený systém zhora polospojitých funkcií na K a $h = \inf \mathcal{F}$. Potom*

$$\mu(h) = \inf\{\mu(k)\,;\ k \in \mathcal{F}\}.$$

Špeciálne, pre $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ a f zhora ohraničenú funkciu na K je

$$\mu(f^*) = \inf\{\mu(k)\,;\ k \geq f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}.$$

Dôkaz. Označme $\beta := \inf\{\mu(k)\,;\ k \in \mathcal{F}\}$. Zrejme $\mu(h) \leq \beta$. Pre spor predpokladajme, že $\mu(h) < \beta$. Vyberme postupnosť $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ tak, aby $\mu(g_n) \to \beta$. Pretože $\mathcal{F}$ je nadol usmernená, môžeme predpokladať, že postupnosť $\{g_n\}$ je nerastúca. Označme $g := \lim_{n\to\infty} g_n \geq h$. Z Leviho vety o monotónnej konvergencii je $\mu(g) = \beta$. Podľa predpokladu má množina $\{x \in K\,;\ h(x) < g(x)\}$ kladnú mieru. Keďže

$$\{x \in K\,;\ h(x) < g(x)\} = \bigcup_{\substack{q<r\\ q,r\in\mathbb{Q}}} \{x \in K\,;\ h(x) < q < r < g(x)\},$$

existuje $r \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\mu(\{x \in K\,;\ h(x) < r - \varepsilon < r < g(x)\}) > 0.$$

Z regularity miery μ nesenej kompaktom K obsahuje vyššie uvedená množina kompakt K' kladnej miery. Pre každé $x \in K'$ nájdeme funkciu $g'_x \in \mathcal{F}$ takú, že $g'_x(x) < r-\varepsilon$. Z kompaktnosti K' a zhora polospojitosti funkcií g'_x môžeme vybrať $g'_1, \dots, g'_m$ tak, že $g'_1 \wedge \dots \wedge g'_m < r - \varepsilon$ na K'. Nájdime postupnosť funkcií $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tak, aby

$$f_n \le g_n \wedge g'_1 \wedge \dots \wedge g'_m.$$

Potom $f_n \le g_n$ na K a $f_n < r - \varepsilon < g - \varepsilon \le g_n - \varepsilon$ na K' pre každé n. Preto

$$\beta \le \mu(f_n) \le \mu(g_n) - \varepsilon\mu(K') \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N},$$

čo je spor.
Ak je f zhora ohraničená funkcia na K, množina $\{k\,;\, k \ge f,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}$ je min-stabilná, a použitím lemmy 2.12 dostávame okamžite špeciálny prípad. □

Tvrdenie 2.14. *Nech f je zhora polospojitá funkcia na K, $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $f < g$. Potom existuje funkcia $k \in -\mathcal{W}(\mathcal{H})$ tak, že $f < k < g$.*

Dôkaz. Nech $x \in K$. Podľa tvrdenia 2.9 existuje miera $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $f^*(x) = \mu(f)$. Pretože $f < g$, je

$$f^*(x) = \mu(f) < \mu(g) \le g(x).$$

Teda existuje funkcia $h_x \in \mathcal{H}$ taká, že

$$f \le h_x \quad \text{a} \quad h_x(x) < g(x).$$

Naviac môžeme predpokladať, že $h_x > f$.
Zo spojitosti funkcií $\{h_x\}_{x\in K}$ a zdola polospojitosti g na kompakte K vieme vybrať $h_{x_1}, \dots, h_{x_n}$ tak, že $k := h_{x_1} \wedge \dots \wedge h_{x_n} < g$. Zrejme $k \in -\mathcal{W}(\mathcal{H})$ a $f < k < g$. □

Tvrdenie 2.15. *Nech f je zhora polospojitá funkcia na K, $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $f \le g$. Potom existuje funkcia $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že $f \le k \le g$.*

Dôkaz. Pre každé $\varepsilon > 0$ vieme skonštruovať funkcie $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ také, že

- f_ε je zhora polospojitá, $g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$,
- $f \le f_\varepsilon \le g_\varepsilon \le g$,
- $g_\varepsilon - f_\varepsilon \le \varepsilon$.

Skutočne, z tvrdenia 2.14 nájdeme funkciu $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ takú, že $f < k < g+\varepsilon$. Potom
$$f_\varepsilon := (k-\varepsilon) \vee f \quad \text{a} \quad g_\varepsilon := k \wedge g$$
sú hľadané funkcie.
Týmto spôsobom skonštruujeme postupnosti funkcií $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ tak, že
- f_n je zhora polospojitá, $g_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$,
- $f \le f_n \le f_{n+1} \le g_{n+1} \le g_n \le g$,
- $g_n - f_n \le \frac{1}{2^n}$.

Obe postupnosti konvergujú rovnomerne k funkcii k, ktorá zrejme spĺňa
$$f \le f_1 \le k \le g_1 \le g.$$
Podľa tvrdenia 2.3 je $k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, a ako rovnomerná limita zhora polospojitých funkcií je k zhora polospojitá. Teda $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. □

Tvrdenie 2.16. *Nech $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Potom množina*
$$T := \{k\,;\ k \le g,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}$$
je nahor usmernená a $g = \sup T$.

Dôkaz. Nech $f_1, f_2 \in T$. Podľa tvrdenia 2.15 existuje $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že $f_1 \vee f_2 \le k \le g$. Teda T je nahor usmernená.
Znovu z tvrdenia 2.15 vieme pre každú $f \in \mathcal{C}(K)$, $f \le g$ nájsť $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že $f \le k \le g$. Keďže
$$g = \sup\{f\,;\ f \le g,\ f \in \mathcal{C}(K)\},$$
platí aj $g = \sup T$. □

2.3 $\mathcal{H}$-extremálne množiny

Tvrdenie 2.17. $\operatorname{Exp}_{\mathcal{H}} K \subset \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$.

Dôkaz. Nech $x \in \operatorname{Exp}_{\mathcal{H}} K$, $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $h \in \mathcal{H}$ je taká, že $h(x) = 0$ a $h(y) > 0$ pre $y \ne x$, $y \in K$. Potom $\mu(h) = h(x) = 0$, z čoho $\operatorname{spt}\mu = \{x\}$. Teda $\mu = \varepsilon_x$, a $x \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$. □

Veta 2.18 (Bauer)**.** *Nech $x \in K$. Potom $x \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$, práve keď $f_*(x) = f^*(x)$ pre všetky $f \in \mathcal{C}(K)$.*

Dôkaz. Tvrdenie plynie z lemmy 2.8. Ak $x \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$, potom $\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}$, tj. $f_*(x) = \varepsilon_x(f) = f^*(x)$ pre každú funkciu $f \in \mathcal{C}(K)$.
Naopak, ak $f_*(x) = f(x) = f^*(x)$ pre všetky $f \in \mathcal{C}(K)$, potom pre $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je $\mu(f) = f(x)$ pre všetky $f \in \mathcal{C}(K)$, teda $\mu = \varepsilon_x$. □

Tvrdenie 2.19. *Systém $\mathcal{H}$-extremálnych množín je uzavretý na konečné zjednotenia a ľubovoľné prieniky.*

Dôkaz. Konečné zjednotenie $\mathcal{H}$-extremálnych množín $\{E_i\}_{i=1}^n$ je zrejme uzavretá množina. Pre ľubovoľný bod $x \in \bigcup_{i=1}^n E_i$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je $\operatorname{spt}\mu \subset E_j \subset \bigcup_{i=1}^n E_i$ pre nejaké j.
Prienik $\mathcal{H}$-extremálnych množín $\{E_i\}_{i\in I}$ je opäť uzavretý. Pre $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je $\mu(K \setminus \bigcap_{i\in I} E_i) = \mu(\bigcup_{i\in I}(K \setminus E_i))$. Pre každý kompakt $L \subset \bigcup_{i\in I}(K \setminus E_i)$ možno vybrať konečné podpokrytie množinami z uvedeného zjednotenia, a teda $\mu(L) = 0$. Z regularity μ máme $\mu(\bigcup_{i\in I}(K \setminus E_i)) = 0$. □

Tvrdenie 2.20. *Pre každú $\mathcal{H}$-extremálnu množinu E existuje minimálna $\mathcal{H}$-extremálna podmnožina v usporiadaní danom inklúziou $\subset$.*

Dôkaz. Nech $E \subset K$ je $\mathcal{H}$-extremálna. Označme

$$\mathcal{E} := \{A \subset E\,;\ A \text{ je } \mathcal{H}\text{-extremálna}\}.$$

Nech $\mathcal{R}$ je reťazec v $\mathcal{E}$. Potom $\bigcap_{A\in\mathcal{R}} A \neq \emptyset$, lebo je to prienik centrovaného systému uzavretých podmnožín kompaktného priestoru. Podľa tvrdenia 2.19 je tento prienik $\mathcal{H}$-extremálnou množinou, a teda je dolnou závorou $\mathcal{R}$ v $\mathcal{E}$. Podľa Zornovej lemmy existuje v $\mathcal{E}$ minimálny prvok. □

Tvrdenie 2.21. *$E \subset K$ je $\mathcal{H}$-extremálna, práve keď $E = \{x \in K\,;\ k(x) = 0\}$ pre nejakú funkciu $k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $k \geq 0$.*

Dôkaz. Nech E je $\mathcal{H}$-extremálna. Potom

$$k(x) := \begin{cases} 0, & x \in E, \\ \infty, & x \in K \setminus E, \end{cases}$$

zrejme spĺňa požadované podmienky.
Nech je naopak $k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $k \geq 0$ a $E = \{x \in K\,;\ k(x) = 0\}$. Zvoľme $x \in E$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Potom

$$0 \leq \mu(k) \leq k(x) = 0.$$

Teda $\operatorname{spt}\mu \subset E$. Keďže x a μ boli ľubovoľné, dostávame $\mathcal{H}$-extremalitu množiny E. □

Tvrdenie 2.22. *Nech $E \subset K$ je minimálna $\mathcal{H}$-extremálna množina. Potom E je jednobodová.*

Dôkaz. Nech $h \in \mathcal{H}$ a $x \in E$ je taký, že $h(x) = \min_E h$. Potom

$$k(y) := \begin{cases} h(y) - h(x), & y \in E, \\ \infty, & y \in K \setminus E, \end{cases}$$

je nezáporná zdola polospojitá $\mathcal{H}$-konkávna funkcia. Množina

$$E_0 := \{y \in K\,;\, k(y) = 0\} \subset E$$

je podľa tvrdenia 2.21 $\mathcal{H}$-extremálna. Z minimality E máme $E = E_0$. Teda každá funkcia $h \in \mathcal{H}$ je konštantná na E. Keďže $\mathcal{H}$ oddeľuje body, musí byť E jednobodová. □

Tvrdenie 2.23. *Nech $E \subset K$ je $\mathcal{H}$-extremálna množina. Potom*

$$E \cap \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Podľa tvrdenia 2.20 existuje minimálna $\mathcal{H}$-extremálna podmnožina množiny E, ktorá je podľa tvrdenia 2.22 jednobodová. Označme si ju $\{x\}$. Nech teraz $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Z definície musí byť $\operatorname{spt} \mu \subset \{x\}$, a teda $\mu = \varepsilon_x$, z čoho $x \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$. □

Dôsledok 2.24. $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ *je neprázdna.*

Dôkaz. K je zrejme $\mathcal{H}$-extremálna množina. Zvyšok plynie z tvrdenia 2.23. □

Poznámka 2.25. Choquetova hranica všeobecne nemusí byť borelovská množina (viď napr. [5]), teda ani merateľná Radonovou mierou.

Vo zvyšku sekcie si ukážeme, že problém z poznámky 2.25 odpadá, ak pridáme predpoklad metrizovateľnosti.

Definícia 2.26. Funkcia $f \in \mathcal{C}(K)$ sa nazve *striktne $\mathcal{H}$-konvexná*, ak

$$f(x) < \int_K f\, d\mu \quad \text{pre všetky } x \in K,\ \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}),\ \mu \neq \varepsilon_x.$$

Tvrdenie 2.27. *Nech K je metrizovateľný. Potom existuje striktne $\mathcal{H}$-konvexná funkcia na K.*

Dôkaz. Zo separability Banachovho priestoru $\mathcal{C}(K)$ existuje $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ hustá v $\{h \in \mathcal{H}\,;\, 0 \leq h \leq 1\}$. Funkcie h_n^2 sú $\mathcal{H}$-konvexné, lebo

$$h_n^2(x) = \left(\int_K h_n\, d\mu\right)^2 \leq \left(\int_K 1_K\, d\mu\right)\left(\int_K h_n^2\, d\mu\right) = \mu(h_n^2),$$

pre všetky $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.
Nech $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $\mu \neq \varepsilon_x$. Pre spor predpokladajme, že $h_n^2(x) = \mu(h_n^2)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Z rovností

$$\begin{aligned}\int_K (h_n - h_n(x))^2 \, d\mu &= \int_K h_n^2 \, d\mu - 2h_n(x) \int_K h_n \, d\mu + h_n^2(x) \\ &= \mu(h_n^2) - h_n^2(x) = 0\end{aligned}$$

vidíme, že potom $h_n = h_n(x)$ μ-skoro všade pre každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $G := K \setminus \{x\}$. Pretože $\mu \neq \varepsilon_x$, je $\mu(G) > 0$. Takže

$$G \not\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{t \in K \, ; \, h_n(t) \neq h_n(x)\},$$

lebo množina na pravej strane má nulovú mieru. Teda existuje

$$y \in G \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{t \in K \, ; \, h_n(t) = h_n(x)\}.$$

Potom $y \neq x$, ale $h_n(y) = h_n(x)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že $h(y) = h(x)$ pre všetky $h \in \mathcal{H}$, $0 \leq h \leq 1$, čo je spor s faktom, že množina $\mathcal{H}$, a teda aj $\{h \in \mathcal{H} \, ; \, 0 \leq h \leq 1\}$ oddeľuje body K.
Preto pre každé $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $\mu \neq \varepsilon_x$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $h_n^2(x) < \mu(h_n^2)$. Zrejme

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n^2$$

je hľadaná striktne $\mathcal{H}$-konvexná funkcia. □

Tvrdenie 2.28. *Nech K je metrizovateľný. Potom $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ je typu G_δ.*

Dôkaz. Podľa tvrdenia 2.27 existuje striktne $\mathcal{H}$-konvexná funkcia h na K, a použitím Bauerovej charakterizácie 2.18 je

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap_{f \in \mathcal{C}(K)} \{x \in K \, ; \, f_*(x) = f^*(x)\} \subset \{x \in K \, ; \, h(x) = h^*(x)\}.$$

Nech $x \in K \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $\mu \neq \varepsilon_x$. Potom zo striktnej konvexity a lemmy 2.8 je $h(x) < \mu(h) \leq h^*(x)$. Preto

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \{x \in K \, ; \, h(x) = h^*(x)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in K \, ; \, h^*(x) - h(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Keďže h^* je zhora polospojitá, sú množiny $\left\{x \in K \, ; \, h^*(x) - h(x) < \frac{1}{n}\right\}$ otvorené, a teda $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ je typu G_δ. □

Poznámka. Ak bude jasné, o aký priestor $\mathcal{H}$ sa jedná, budeme odteraz Choquetovu hranicu značiť iba $\operatorname{Ch} K$.

2.4 Maximálne miery

Definícia 2.29. Definujme na priestore $\mathcal{M}^+(K)$ *Choquetovo usporiadanie*:

$$\mu \preceq \nu \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu(v) \leq \nu(v) \text{ pre všetky } v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}).$$

Mieru $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ nazveme *maximálnou*, ak je maximálna vzhľadom k usporiadaniu $\preceq$, tj.

$$\mu \preceq \nu, \ \nu \in \mathcal{M}^+(K) \quad \Longrightarrow \quad \mu = \nu.$$

Poznámka 2.30. Uvedomme si, že Choquetovo usporiadanie je dobre definované čiastočné usporiadanie. Reflexivita a tranzitivita platia triviálne, antisymetria plynie z hustoty $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) - \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ v $\mathcal{C}(K)$.
Ak nebude jasné, vzhľadom k akému funkčnému priestoru uvažujeme usporiadanie mier, použijeme značenie $\preceq_{\mathcal{H}}$ a maximálne miery nazveme $\mathcal{H}$-maximálne.

Tvrdenie 2.31. *Pre $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(K)$ je ekvivalentné:*
(i) $\mu \preceq \nu$,
(ii) $\mu(v) \leq \nu(v)$ *pre všetky* $v \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$,
(iii) $\mu(w) \leq \nu(w)$ *pre všetky* $w \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$.

Dôkaz.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Nech $\mu \preceq \nu$ a $v \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$. Podľa tvrdenia 2.16 je množina

$$T := \{f\,;\, f \geq v,\ f \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}$$

nadol usmernená a $v = \inf T$. Použitím Leviho vety 2.13 je $\mu(v) \leq \nu(v)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zrejmé.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Nech $f \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom existuje klesajúca postupnosť $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ funkcií z $\mathcal{W}(\mathcal{H})$ tak, že $f = \inf_{i \in \mathbb{N}} w_i$. Skutočne, podľa tvrdenia 2.14, pre každé $i \in \mathbb{N}$ existuje také w_i, že $f + \frac{1}{2^{i+1}} < w_i < f + \frac{1}{2^i}$. Použitím Leviho vety 2.13 je

$$\mu(f) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \mu(w_i) \leq \inf_{i \in \mathbb{N}} \nu(w_i) = \nu(f).$$

$\square$

Lemma 2.32. *Nech $x \in K$. Platia nasledujúce výroky:*
(a) *Pre každú $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je $\varepsilon_x \preceq \mu$.*
(b) *Ak je $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ a $\mu \preceq \nu$, potom $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.*
(c) *Nech $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom $\varepsilon_x \preceq \mu$, práve keď $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.*

Dôkaz.

(a) Pre $v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ je $\varepsilon_x(v) = v(x) \leq \mu(v)$.
(b) Nech $h \in \mathcal{H}$. Potom $h(x) = \mu(h) = \nu(h)$, keďže $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \cap -\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Dosadením $h = 1_K$ vidíme, že $\|\nu\| = 1$.
(c) Plynie z (a) a (b).

□

Tvrdenie 2.33. *Nech $f \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom*

$$[\lambda(f_*), \lambda(f^*)] = \{\mu(f)\,;\, \lambda \preceq \mu,\, \mu \in \mathcal{M}^1(K)\}.$$

Dôkaz.

1. Zvoľme $\alpha \in [\lambda(f_*), \lambda(f^*)]$ a definujme funkcionál

$$p : g \mapsto \lambda(g^*), \quad g \in \mathcal{C}(K).$$

Podobne ako v lemme 2.7, s využitím Leviho vety 2.13, sa ukáže, že p je sublineárny funkcionál. Rovnakou technikou ako v dôkaze lemmy 2.8 nájdeme mieru $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ takú, že

$$\mu(f) = \alpha \quad \text{a} \quad \mu(g) \leq p(g) \text{ pre všetky } g \in \mathcal{C}(K).$$

Ukážme, že $\lambda \preceq \mu$. Zvoľme $v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom $-v \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ a podľa lemmy 2.11 je $(-v)^* = -v$. Teda

$$\mu(-v) \leq p(-v) = \lambda((-v)^*) = \lambda(-v),$$

z čoho $\lambda(v) \leq \mu(v)$.

2. Nech teraz $\lambda \preceq \mu$, $v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $v \leq f \leq k$. Potom

$$\lambda(v) \leq \mu(v) \leq \mu(f) \leq \mu(k) \leq \lambda(k).$$

Využitím Leviho vety 2.13 dostávame

$$\lambda(f_*) \leq \mu(f) \leq \lambda(f^*).$$

□

Veta 2.34 (Mokobodzki)**.** *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*
(i) *μ je maximálna,*
(ii) *$\mu(f) = \mu(f^*)$ pre všetky $f \in \mathcal{C}(K)$,*
(iii) *$\mu(v) = \mu(v^*)$ pre všetky $v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$,*
(iv) *$\mu(w) = \mu(w^*)$ pre všetky $w \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$.*

Dôkaz.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nech μ je maximálna miera. Ak je μ nulová, platí implikácia triviálne. Predpokladajme teda, že μ je nenulová, a označme $\mu' := \frac{\mu}{\|\mu\|} \in \mathcal{M}^1(K)$. Zvoľme $f \in \mathcal{C}(K)$. Podľa tvrdenia 2.33 existuje miera $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$, $\mu' \preceq \nu$ taká, že $\nu(f) = \mu'(f^*)$. Z maximality μ' máme $\mu' = \nu$, a teda $\mu'(f) = \mu'(f^*)$, z čoho nutne $\mu(f) = \mu(f^*)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) Zrejmé.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Nech $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$, $\mu \preceq \nu$. Zvoľme $w \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$. S pomocou Leviho vety 2.13 dostaneme

$$\begin{aligned}\mu(w) = \mu(w^*) &= \inf\{\mu(k)\,;\ k \geq w,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}\\ &\geq \inf\{\nu(k)\,;\ k \geq w,\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\} = \nu(w^*) \geq \nu(w).\end{aligned}$$

Teda $\mu(w) \geq \nu(w)$, a podľa tvrdenia 2.31 je $\mu \succeq \nu$. Teda $\mu = \nu$, a μ je maximálna.

□

Dôsledok 2.35. *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom μ je maximálna, práve keď*

$$\mu(\{x \in K\,;\ f(x) < f^*(x)\}) = 0 \quad \textit{pre všetky } f \in \mathcal{C}(K).$$

Dôkaz. Plynie z Mokobodzkiho testu maximality 2.34. □

Označenie. Pre $x \in K$ označme $F_x(\mathcal{H}) := \bigcup\{\operatorname{spt}\nu\,;\ \nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}$.

Veta 2.36 (Batty)**.** *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) *μ je maximálna,*

(ii) *existuje množina $S \subset \mathcal{C}(K)$ oddeľujúca body K taká, že každá funkcia z S je konštantná na $F_x(\mathcal{H})$ pre μ-skoro všetky $x \in K$,*

(iii) *každá funkcia z $\mathcal{C}(K)$ je konštantná na $F_x(\mathcal{H})$ pre μ-skoro všetky $x \in K$.*

Dôkaz.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Zvoľme $h \in \mathcal{H}$. Podľa dôsledku 2.35 je $(h^2)^*(x) = h^2(x)$ pre μ-skoro všetky $x \in K$. Uvažujme takýto bod x a mieru $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Využitím lemmy 2.8, vyššie uvedených predpokladov a Hölderovej nerovnosti dostávame

$$\nu(h^2) \leq (h^2)^*(x) = h^2(x) = (\nu(h))^2 \leq \nu(1_K)\nu(h^2) = \nu(h^2).$$

Máme

$$\begin{aligned}\int_K (h - h(x))^2\,d\nu &= \int_K h^2\,d\nu - 2h(x)\int_K h\,d\nu + h^2(x)\\ &= \nu(h^2) - h^2(x) = 0,\end{aligned}$$

z čoho $h = h(x)$ na $\operatorname{spt}\nu$. Preto h je konštantná na $F_x(\mathcal{H})$. Môžeme teda definovať $S := \mathcal{H}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Množina funkcií z $\mathcal{C}(K)$, konštantných na $F_x(\mathcal{H})$ pre μ-skoro všetky $x \in K$, tvorí uzavretý lineárny priestor obsahujúci konštanty a majúci zväzovú vlastnosť. Podľa predpokladu naviac táto množina oddeľuje body K, preto dostávame tvrdenie zo Stone-Weierstrassovej vety.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nech $f \in \mathcal{C}(K)$. Uvažujme bod $x \in K$ taký, že f je konštantná na $F_x(\mathcal{H})$. Podľa lemmy 2.8 existuje $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $f^*(x) = \nu(f)$. Keďže $\operatorname{spt} \nu \subset F_x(\mathcal{H})$, platí $\nu(f) = f(x)$. Z predpokladu teda dostávame $f^*(x) = f(x)$ pre μ-skoro všetky x, čo je podľa dôsledku 2.35 ekvivalentné s maximalitou μ.

□

Tvrdenie 2.37. *Nech K je metrizovateľný. Pre $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ je ekvivalentné:*
(i) *μ je maximálna,*
(ii) $\mu(K \setminus \operatorname{Ch} K) = 0$.

Dôkaz.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Podľa tvrdenia 2.27 existuje striktne $\mathcal{H}$-konvexná funkcia f na K. Teda použitím striktnej konvexity f a lemmy 2.8 dostávame

$$K \setminus \operatorname{Ch} K = \{x \in K\,;\ f(x) < f^*(x)\},$$

a podľa dôsledku 2.35 je $\mu(\{x \in K\,;\ f(x) < f^*(x)\}) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nech $f \in \mathcal{C}(K)$. Keďže z Bauerovej vety 2.18 máme

$$\mu(\{x \in K\,;\ f(x) < f^*(x)\}) \le \mu(K \setminus \operatorname{Ch} K) = 0,$$

je podľa dôsledku 2.35 μ maximálna.

□

Veta 2.38 (Choquet-Bishop-de Leeuw). *Pre každú mieru $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$ existuje maximálna miera μ na K tak, že $\lambda \preceq \mu$. Špeciálne, pre každé $x \in K$ existuje maximálna miera $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.*

Dôkaz. Označme

$$\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H}) := \{\nu \in \mathcal{M}^+(K)\,;\ \lambda \preceq \nu\}.$$

Keďže pre každé $\nu \in \mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H})$ máme $\|\nu\| = \|\lambda\|$, platí

$$\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H}) \subset \{\eta \in \mathcal{M}^+(K)\,;\ \|\eta\| = \|\lambda\|\},$$

pričom množina napravo je w^*-kompaktná. Tvrdenie vyplynie z Zornovej lemmy, ak ukážeme, že každý reťazec v $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H})$ má hornú závoru. Nech $\mathcal{R}$

je taký reťazec. Potom $\mathcal{R}$ je zovšeobecnená postupnosť vo w^*-kompaktnej množine, a teda existuje zovšeobecnená podpostupnosť $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$, ktorá w^*-konverguje k nejakému prvku $\nu_0 \in \mathcal{M}^+(K)$. Ukážme, že $\nu_0 \in \mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H})$ a $\nu \preceq \nu_0$ pre každé $\nu \in \mathcal{R}$.
Zvoľme $\nu \in \mathcal{R}$, $f \in \mathcal{V}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\eta \in \mathcal{J}$ tak, že $\nu \preceq \eta$ a $|(\nu_0 - \eta)(f)| < \varepsilon$. Z toho

$$\nu_0(f) \geq \eta(f) - \varepsilon \geq \nu(f) - \varepsilon \geq \lambda(f) - \varepsilon.$$

Preto $\lambda \preceq \nu \preceq \nu_0$. Podľa Zornovej lemmy má teda množina $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{H})$ maximálny prvok μ.
Špeciálne, pre $x \in K$ a $\lambda = \varepsilon_x$ existuje maximálna miera $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ taká, že $\varepsilon_x \preceq \mu$. Podľa lemmy 2.32 (b) je $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. □

Veta 2.39 (Choquet)**.** *Nech K je metrizovateľný. Potom pre každé $x \in K$ existuje miera $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ taká, že $\mu(K \setminus \operatorname{Ch} K) = 0$.*

Dôkaz. Plynie z Choquet-Bishop-de Leeuwovej vety 2.38 a tvrdenia 2.37. □

Lemma 2.40. *Nech $\{f_n\}$ je zhora ohraničená postupnosť zdola polospojitých $\mathcal{H}$-konvexných funkcií na K. Ak platí* $\limsup f_n \leq 0$ *na* $\operatorname{Ch} K$*, potom* $\limsup f_n \leq 0$ *na K.*

Dôkaz. Zvoľme $x \in K$. Keďže podľa lemmy 2.11 je $f_n = (f_n)_*$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $h_n \in \mathcal{H}$ tak, že

$$h_n \leq f_n \quad \text{a} \quad f_n(x) < h_n(x) + \frac{1}{n}.$$

Nech $\Psi : K \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ je zobrazenie definované

$$\Psi : z \mapsto \{h_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad z \in K.$$

Označme $Y := \Psi(K)$ a $\mathcal{L}$ uzavretý lineárny obal množiny $\{1_Y\} \cup \{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde π_n značí príslušnú projekciu z Y do $\mathbb{R}$. Zobrazenie Ψ je spojité, preto Y je kompaktná podmnožina $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, špeciálne Y je metrický priestor. Ďalej vidíme, že $\mathcal{L}$ je uzavretý funkčný priestor na Y.
Pre $z \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H})$ je $\Psi\mu \in \mathcal{M}_{\Psi(z)}(\mathcal{L})$. Skutočne,

$$\Psi\mu(1_Y) = \mu(1_Y \circ \Psi) = \mu(1_K) = 1,$$
$$\Psi\mu(\pi_n) = \mu(\pi_n \circ \Psi) = \mu(h_n) = h_n(z) = \pi_n(\Psi(z)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nech teraz $y \in \operatorname{Ch}_\mathcal{L} Y$. Definujme funkciu

$$k(w) := \begin{cases} 0, & w = y, \\ \infty, & w \neq y, \end{cases} \quad w \in Y.$$

Zrejme je $k \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$. Tvrdíme, že $k \circ \Psi \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Vskutku,

$$k \circ \Psi(z) = k(\Psi(z)) \geq \Psi\mu(k) = \mu(k \circ \Psi), \quad \forall z \in K, \forall \mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H}).$$

Keďže $\Psi^{-1}(y) = \{z \in K\,;\; k \circ \Psi = 0\}$, je podľa tvrdenia 2.21 $\Psi^{-1}(y)$ $\mathcal{H}$-extremálna množina. Podľa tvrdenia 2.23 existuje $z \in \Psi^{-1}(y) \cap \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$. Potom platí

$$\limsup \pi_n(y) = \limsup \pi_n(\Psi(z)) = \limsup h_n(z) \leq 0.$$

Teda $\limsup \pi_n \leq 0$ na $\operatorname{Ch}_{\mathcal{L}} Y$. Použitím Choquetovej vety o reprezentácii 2.39 existuje miera $\lambda \in \mathcal{M}_{\Psi(x)}(\mathcal{L})$ taká, že $\lambda(Y \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{L}} Y) = 0$. Preto, s pomocou Fatouovej lemmy, dostávame

$$\begin{aligned}\limsup f_n(x) = \limsup h_n(x) &= \limsup \pi_n(\Psi(x)) \\ &= \limsup \lambda(\pi_n) \leq \lambda(\limsup \pi_n) \leq 0.\end{aligned}$$

□

Veta 2.41 (Bishop-de Leeuw)**.** *Nech μ je maximálna miera na K a $F \subset G \subset (K \setminus \operatorname{Ch} K)$, kde F je uzavretá a G typu G_δ. Potom $\mu(F) = 0$.*

Dôkaz. Z predpokladov je $K \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $F_n \subset K$ je uzavretá množina pre každé $n \in \mathbb{N}$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $F_n \subset F_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Pomocou Urysohnovej lemmy vieme nájsť nerastúcu ohraničenú postupnosť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spojitých funkcií na K takú, že

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \in F_n. \end{cases}$$

Použitím Mokobodzkiho testu maximality 2.34, Leviho vety o monotónnej konvergencii a aplikáciou lemmy 2.40 na postupnosť $\{(f_n)_*\}_{n\in\mathbb{N}}$ dostávame

$$0 \leq \mu(F) \leq \lim \mu(f_n) = \lim \mu((f_n)_*) = \mu(\lim (f_n)_*) \leq 0.$$

□

Dôsledok 2.42. *Nech μ je maximálna miera na K a $G \subset (K \setminus \operatorname{Ch} K)$ je typu G_δ. Potom $\mu(G) = 0$. Špeciálne, maximálne miery sú nesené $\overline{\operatorname{Ch} K}$.*

Dôkaz. Pre každý kompakt $F \subset G$ je podľa Bishop-de Leeuwovej vety 2.41 $\mu(F) = 0$. Z regularity miery μ je $\mu(G) = 0$. Množina $K \setminus \overline{\operatorname{Ch} K}$ je otvorená, tým skôr G_δ. □

Tvrdenie 2.43. *Nech $(K', \mathcal{G})$ je funkčný priestor a $\rho : K \to K'$ je spojité zobrazenie také, že $F_{\rho(x)}(\mathcal{G}) \subset \rho(F_x(\mathcal{H}))$ pre všetky $x \in \overline{\operatorname{Ch} K}$. Potom $\rho\mu$ je maximálna miera na K' pre každú maximálnu mieru μ na K.*

Dôkaz. Nech μ je maximálna miera na K. Podľa dôsledku 2.42 je $\operatorname{spt} \mu \subset \overline{\operatorname{Ch} K}$. Zvoľme $f \in \mathcal{C}(K')$. Potom $f \circ \rho \in \mathcal{C}(K)$, a preto podľa Battyho vety 2.36 je $f \circ \rho$ konštantná na $F_x(\mathcal{H})$ pre μ-skoro všetky $x \in K$. Takže f je konštantná na $\rho(F_x(\mathcal{H}))$, a z predpokladov teda aj na $F_{\rho(x)}(\mathcal{G})$ pre μ-skoro všetky $x \in K$. Znovu podľa vety 2.36 je $\rho\mu$ maximálna miera na K'. □

Veta 2.44 (Princíp minima)**.** *Nech f je polospojitá $\mathcal{H}$-konkávna funkcia na K taká, že $f \geq 0$ na $\operatorname{Ch} K$. Potom $f \geq 0$ na K.*

Dôkaz.

1. Nech najskôr f je zhora polospojitá. Potom $f \geq 0$ na $\overline{\operatorname{Ch} K}$. Nech $x \in K$ a μ je maximálna miera reprezentujúca x. Keďže maximálne miery sú nesené $\overline{\operatorname{Ch} K}$, dostávame
$$f(x) \geq \int_K f \, d\mu = \int_{\overline{\operatorname{Ch} K}} f \, d\mu \geq 0.$$
2. Nech teraz f je zdola polospojitá a nech x_0 je bod, kde nadobúda svojho minima. Predpokladajme, že $f(x_0) < 0$. Potom množina
$$E := \{x \in K \,;\, f(x) - f(x_0) = 0\}$$
je neprázdna a podľa tvrdenia 2.21 $\mathcal{H}$-extremálna. Z tvrdenia 2.23 existuje $y \in E \cap \operatorname{Ch} K$. To je ale spor, lebo
$$0 \leq f(y) < f(y) - f(x_0) = 0.$$

□

Poznámky. Choquetova veta o reprezentácii 2.39, pôvodne dokázaná v [17], zosilňuje v konvexnom prípade Krein-Milmanovu vetu. Všeobecnú vetu o reprezentácii 2.38, rovnako ako vetu 2.41, dokázali Bishop a de Leeuw [5]. Dôsledok 2.42 potom zovšeobecňuje Krein-Milmanovu vetu do funkčných priestorov. Myšlienka zavedenia usporiadania na Radonových mierach sa vyskytuje už v [5], avšak vyššie uvedené usporiadanie definoval až Choquet [18]. Mokobodzkiho test maximality 2.34 možno nájsť v [30]. Charakterizáciu maximálnych mier 2.36 spolu s tvrdením 2.43 uviedol Batty [3]. Kým princíp minima pre zhora polospojité funkcie je jednoduchým dôsledkom vety o reprezentácii, prvé ucelené práce o zdola polospojitých funkciách sa objavujú až neskôr [7].

2.5 Stavový priestor

Definícia 2.45. *Stavovým priestorom* $\mathcal{H}$ nazveme množinu

$$S(\mathcal{H}) := \{\varphi \in \mathcal{H}^* \,;\, \varphi \geq 0,\, \varphi(1_K) = 1\}$$

uvažovanú s w^*-topológiou.
Nech $\phi : K \to S(\mathcal{H})$ je zobrazenie definované $\phi(x) := s_x$, $x \in K$, kde $s_x(h) = h(x)$ pre všetky $h \in \mathcal{H}$.
Definujme ďalej zobrazenie $\Phi : \mathcal{H} \to A(S(\mathcal{H}))$ tak, že $\Phi(h)(s) := s(h)$, $h \in \mathcal{H}$, $s \in S(\mathcal{H})$.

Pozorovanie 2.46. *$S(\mathcal{H})$ je konvexná w^*-kompaktná podmnožina $\mathcal{H}^*$. Pomocou Hahn-Banachovej vety môžeme každý bod $s \in S(\mathcal{H})$ rozšíriť na nezáporný funkcionál na $\mathcal{C}(K)$ a z Rieszovej vety potom na mieru $\mu_s \in \mathcal{M}^1(K)$. Špeciálne, pre každé $x \in K$ je $\mu_{s_x} \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.*

Definícia 2.47. Nech X je kompaktná podmnožina lokálne konvexného priestoru E. Povieme, že $x \in E$ je *ťažiskom* miery $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, a označíme $x = r(\mu)$, ak platí

$$\varphi(x) = \int_X \varphi \, d\mu \quad \text{pre všetky } \varphi \in E^*.$$

Lemma 2.48. *Nech X je kompaktná konvexná podmnožina lokálne konvexného priestoru E. Potom priestor $(E^* + \mathbb{R})|_X$ je hustý v $A(X)$.*

Dôkaz. Nech $f \in A(X)$ a $\varepsilon > 0$. Množiny

$$G_1 := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,;\, t = f(x)\},$$
$$G_2 := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,;\, t = f(x) + \varepsilon\}$$

sú disjunktné neprázdne kompaktné a konvexné. Podľa Hahn-Banachovej vety existuje funkcionál $L \in (E \times \mathbb{R})^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\sup_{G_1} L < \alpha < \inf_{G_2} L.$$

Ďalej existujú $l \in E^*$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že $L(x,t) = l(x) + ct$ pre $x \in E$ a $t \in \mathbb{R}$. Z oddeľovacej vlastnosti vidíme, že $c \neq 0$. Definujme

$$\varphi(x) := \frac{\alpha - l(x)}{c}, \quad x \in X.$$

Potom z

$$l(x) + cf(x) < \alpha < l(x) + cf(x) + c\varepsilon, \quad x \in X,$$

plynie $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. $\square$

Tvrdenie 2.49. *Nech X je kompaktná konvexná podmnožina lokálne konvexného priestoru, $x \in X$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Potom $\mu \in \mathcal{M}_x(A(X))$, práve keď $x = r(\mu)$.*

Dôkaz. Tvrdenie ľahko plynie z lemmy 2.48 limitným prechodom. $\square$

Lemma 2.50. *$\varepsilon\mathcal{H} = (\mathcal{H}^*, w^*)^*$, kde ε značí kanonické vnorenie $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}^{**}$.*

Dôkaz. Viď [27, Věta 15.13]. $\square$

Tvrdenie 2.51. *ϕ je homeomorfizmus taký, že*
(a) $S(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\phi(K))$,
(b) $\phi\mu \in \mathcal{M}_{\phi(x)}(A(S(\mathcal{H})))$ *pre každú* $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$,
(c) $\phi(\mathrm{Ch}\, K) = \mathrm{ext}\, S(\mathcal{H})$.

Dôkaz. ϕ je spojité prosté vnorenie K do $S(\mathcal{H})$, a teda homeomorfizmus.

(a) Zrejme $S(\mathcal{H}) \supset \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\phi(K))$. Pre spor predpokladajme, že existuje $s \in S(\mathcal{H}) \setminus \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\phi(K))$. Z Hahn-Banachovej vety existuje $H \in (\mathcal{H}^*, w^*)^*$ tak, že
$$H(s) < H(f) \quad \text{pre všetky } f \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\phi(K)).$$
Podľa lemmy 2.50 existuje $h \in \mathcal{H}$ tak, že $H = \varepsilon_h$. Teda
$$s(h) < \phi(x)(h) = h(x) \quad \text{pre všetky } x \in K.$$
Keďže $s(1_K) = 1$ a $s \geq 0$, je
$$\min_K h = s(\min_K h) \leq s(h) < h(x) \quad \text{pre všetky } x \in K,$$
čo je spor.

(b) Podľa tvrdenia 2.49 stačí ukázať, že $\phi(x) = r(\phi\mu)$. Nech teda $\varphi \in (\mathcal{H}^*, w^*)^*$. Potom existuje $h \in \mathcal{H}$ tak, že $\varphi = \varepsilon_h$. Z toho je
$$\varepsilon_h(\phi(x)) = \phi(x)(h) = h(x) = \mu(h) = \mu(\varepsilon_h \circ \phi) = \phi\mu(\varepsilon_h).$$

(c) Keďže $S(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\phi(K))$, je podľa Milmanovej vety
$$\mathrm{ext}\, S(\mathcal{H}) \subset \overline{\phi(K)}^{w^*} = \phi(K).$$
Zvoľme $s \in \mathrm{ext}\, S(\mathcal{H})$, potom $s = \phi(x)$ pre nejaké $x \in K$. Ak $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, potom použitím (b) je $\phi\mu \in \mathcal{M}_s(A(S(\mathcal{H}))) = \{\varepsilon_s\}$. Teda $\mu = \varepsilon_x$, lebo ϕ je homeomorfizmus, a dostávame $x \in \mathrm{Ch}\, K$.
Nech naopak $x \in \mathrm{Ch}\, K$ a $\phi(x) = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, $s_1, s_2 \in S(\mathcal{H})$. Rozšírme s_i na $\mu_i \in \mathcal{M}^1(K)$, $i = 1, 2$. Potom $\mu := \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Pretože $x \in \mathrm{Ch}\, K$, je $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_x$, z čoho $s_1 = s_2$.

□

Tvrdenie 2.52. *Φ je izometrický izomorfizmus $\mathcal{H}$ na hustý podpriestor $A(S(\mathcal{H}))$. Φ je surjektívne, práve keď $\mathcal{H}$ je uzavretý. V takom prípade je inverzné zobrazenie dané formulou*

$$\Phi^{-1}(F) = F \circ \phi, \quad F \in A(S(\mathcal{H})).$$

Dôkaz. Linearita Φ je zrejmá z definície. Platí

$$\begin{aligned} \|\Phi(h)\| &= \sup_{s \in S(\mathcal{H})} |\Phi(h)(s)| = \sup_{s \in S(\mathcal{H})} |s(h)| \geq \sup_{x \in K} |s_x(h)| = \sup_{x \in K} |h(x)| \\ &= \|h\| = \sup_{s \in S(\mathcal{H})} \|s\| \|h\| \geq \sup_{s \in S(\mathcal{H})} |s(h)| = \|\Phi(h)\|, \end{aligned}$$

a teda Φ je izometria.
Podľa lemmy 2.48 je priestor $((\mathcal{H}^*, w^*)^* + \mathbb{R})|_{S(\mathcal{H})}$ hustý v $A(S(\mathcal{H}))$. Teda $\Phi(\mathcal{H}) + \mathbb{R} = \Phi(\mathcal{H})$ je hustý v $A(S(\mathcal{H}))$.
Ak $\Phi(\mathcal{H}) = A(S(\mathcal{H}))$, potom $\mathcal{H}$ je izometricky izomorfný úplnému priestoru $A(S(\mathcal{H}))$, a teda je uzavretý.
Nech naopak $\mathcal{H}$ je uzavretý. Keďže $\mathcal{H}$ je úplný a Φ je izometria, je $\Phi(\mathcal{H})$ uzavretý v $A(S(\mathcal{H}))$. Ale z hustoty $\Phi(\mathcal{H})$ dostávame

$$\Phi(\mathcal{H}) = \overline{\Phi(\mathcal{H})} = A(S(\mathcal{H})).$$

Nech nakoniec Φ je surjektívne a $F \in A(S(\mathcal{H}))$. Potom existuje $h \in \mathcal{H}$ tak, že $F = \Phi(h)$. Teda

$$\Phi^{-1}(F) = h = \Phi(h) \circ \phi = F \circ \phi.$$

□

Lemma 2.53. *Nech $F \in \mathcal{V}^c(A(S(\mathcal{H})))$. Potom $f := F \circ \phi \in \mathcal{V}^c(\mathcal{H})$.*

Dôkaz. Nech $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Potom z $A(S(\mathcal{H}))$-konvexnosti F a tvrdenia 2.51 (b) platí

$$f(x) = F(\phi(x)) \leq \phi\mu(F) = \mu(F \circ \phi) = \mu(f).$$

□

Tvrdenie 2.54. *Nech $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom platí*
(a) *$\mu \preceq \nu$, práve keď $\phi\mu \preceq \phi\nu$,*
(b) *$\mu = \nu$, práve keď $\phi\mu = \phi\nu$,*

(c) *$\Lambda \in \mathcal{M}^+(S(\mathcal{H}))$ je $A(S(\mathcal{H}))$-maximálna, práve keď $\Lambda = \phi\lambda$ pre nejakú $\mathcal{H}$-maximálnu mieru $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$.*

Dôkaz.

(a) Nech najskôr $\mu \preceq \nu$ a $F \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(A(S(\mathcal{H})))$. Podľa lemmy 2.53 je $F \circ \phi \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom

$$\phi\mu(F) = \mu(F \circ \phi) \le \nu(F \circ \phi) = \phi\nu(F),$$

teda $\phi\mu \preceq \phi\nu$.

Nech naopak $\phi\mu \preceq \phi\nu$. Ak je $w = h_1 \vee \ldots \vee h_n$ pre nejaké $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$, z definícií a predpokladu máme

$$\begin{aligned}
\mu(w) &= \int_K h_1 \vee \ldots \vee h_n \, d\mu = \int_{\phi(K)} \Phi(h_1) \vee \ldots \vee \Phi(h_n) \, d(\phi\mu) \\
&\le \int_{\phi(K)} \Phi(h_1) \vee \ldots \vee \Phi(h_n) \, d(\phi\nu) = \int_K h_1 \vee \ldots \vee h_n \, d\nu = \nu(w).
\end{aligned}$$

Podľa tvrdenia 2.31 je $\mu \preceq \nu$.

(b) Plynie z (a).

(c) Najprv si uvedomme, že každá $A(S(\mathcal{H}))$-maximálna miera $\Gamma \in \mathcal{M}^+(S(\mathcal{H}))$ je nesená množinou $\phi(K)$. Vskutku, použitím dôsledku 2.42 a tvrdenia 2.51 (c) platí

$$\operatorname{spt} \Gamma \subset \overline{\operatorname{ext} S(\mathcal{H})} = \overline{\phi(\operatorname{Ch} K)} \subset \overline{\phi(K)} = \phi(K).$$

Teda existuje miera $\gamma \in \mathcal{M}^+(K)$ tak, že $\Gamma = \phi\gamma$.

Nech teraz Λ je $A(S(\mathcal{H}))$-maximálna. Potom $\Lambda = \phi\lambda$ pre nejakú mieru $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$. Nech $\eta \in \mathcal{M}^+(K)$ je taká, že $\lambda \preceq \eta$. Podľa bodu (a) je $\phi\lambda \preceq \phi\eta$, a z maximality Λ je $\phi\lambda = \phi\eta$. Teda $\lambda = \eta$, a λ je $\mathcal{H}$-maximálna.

Naopak, nech $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$ je $\mathcal{H}$-maximálna. Nech $\Gamma \in \mathcal{M}^+(S(\mathcal{H}))$ je $A(S(\mathcal{H}))$-maximálna miera taká, že $\phi\lambda \preceq \Gamma$. Potom $\Gamma = \phi\gamma$ pre nejakú mieru $\gamma \in \mathcal{M}^+(K)$. Teda $\lambda \preceq \gamma$, z maximality je $\lambda = \gamma$, a $\Lambda = \phi\lambda = \phi\gamma = \Gamma$ je $A(S(\mathcal{H}))$-maximálna.

□

Konštrukcia stavového priestoru umožňuje previesť množstvo problémov z teórie funkčných priestorov na problémy konvexnej analýzy. V zostávajúcej časti tejto sekcie si ukážeme jednu z aplikácií tohto modelu. Uvedieme ďalší typ hranice a využijeme práve dokázané tvrdenia o stavovom priestore.

Definícia 2.55. Množinu $B \subset K$ nazveme *hranicou* K vzhľadom k $\mathcal{H}$, ak

$$\forall h \in \mathcal{H},\ \exists x \in B : |h(x)| = \|h\|.$$

Najmenšiu uzavretú hranicu, ak existuje, nazveme *Šilovovou hranicou*, a označíme $\nabla_{\mathcal{H}} K$.

Tvrdenie 2.56. $\operatorname{Ch} K$ *je hranica.*

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že $\operatorname{Ch} K$ nie je hranica. Potom existuje $h \in \mathcal{H}$ tak, že $h \geq 0$ na K, $h > 0$ na $\operatorname{Ch} K$ a $h = 0$ na $E \subset K$, $E \neq \emptyset$. Podľa tvrdenia 2.21 je E $\mathcal{H}$-extremálna množina, a podľa tvrdenia 2.23 existuje $x \in E \cap \operatorname{Ch} K = \emptyset$, čo je spor. □

Veta 2.57. $\nabla_{\mathcal{H}} K = \overline{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K}$. *Špeciálne,* $\nabla_{\mathcal{H}} K$ *existuje.*

Dôkaz. Podľa tvrdenia 2.56 je $\overline{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K}$ uzavretá hranica. Dokážme, že pre $B \subset K$ uzavretú hranicu je $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \subset B$ (potom aj $\overline{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K} \subset B$). Pre spor predpokladajme, že existuje $y \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus B$, a teda aj okolie U bodu y disjunktné s B. Ukážeme, že existuje $f \in \mathcal{H}$ tak, že

$$\sup |f(K \setminus U)| < |f(y)|.$$

To bude spor s faktom, že $B \subset K \setminus U$ je hranica.
Podľa tvrdenia 2.51 (c) je $\phi(y) \in \operatorname{ext} S(\mathcal{H})$, a $\phi(U)$ je relatívne w^*-okolie $\phi(y)$ v množine $\phi(K)$ (lebo ϕ je homeomorfizmus). Teda existujú $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\phi(y) \in \{\varphi \in \phi(K)\,;\ |\varphi(h_i) - \phi(y)(h_i)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \subset \phi(U).$$

Vyššie uvedenú množinu môžeme vyjadriť v tvare

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in \phi(K)\,;\ \varphi(h_i) - \phi(y)(h_i) < \varepsilon\} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in \phi(K)\,;\ \phi(y)(h_i) - \varphi(h_i) < \varepsilon\}.$$

Uvažujme w^*-kompaktné konvexné množiny

$$\begin{array}{ll} K_i^+ := \{\varphi \in S(\mathcal{H})\,;\ \varphi(h_i) - \phi(y)(h_i) \geq \varepsilon\}, \\ K_i^- := \{\varphi \in S(\mathcal{H})\,;\ \phi(y)(h_i) - \varphi(h_i) \geq \varepsilon\}, \end{array} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Potom $J := \operatorname{co}\left(\bigcup_{i=1}^n K_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^n K_i^-\right)$ je opäť w^*-kompaktná konvexná podmnožina $S(\mathcal{H})$, ktorá neobsahuje $\phi(y)$ (inak by $\phi(y)$ bol konvexnou kombináciou bodov z $K_i^+, K_i^- \subset S(\mathcal{H})$, ale $\phi(y) \in \operatorname{ext} S(\mathcal{H})$). Z Hahn-Banachovej vety a lemmy 2.50 nájdeme funkciu $h \in \mathcal{H}$ takú, že $\sup \varepsilon_h(J) < \phi(y)(h)$. Keďže $\phi(K) \setminus \phi(U) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^n K_i^- \subset J$, dostávame

$$\sup h(K \setminus U) < h(y).$$

Funkcia $f := h + \|h\|$ je zrejme hľadanou funkciou. □

2.6 Simpliciálne priestory

Definícia 2.58. Povieme, že $\mathcal{H}$ je *simpliciálny*, ak pre každé $x \in K$ existuje práve jedna maximálna miera $\delta_x \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. V konvexnom prípade sa K nazve *Choquetov simplex* alebo len *simplex*.

Pozorovanie 2.59. *Ak* $\operatorname{Ch} K = K$*, potom* $\mathcal{H}$ *je simpliciálny.*

Tvrdenie 2.60. *Nech* $\mathcal{H}$ *je simpliciálny a* $f \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$*. Potom* $f^*(x) = \delta_x(f)$ *pre všetky* $x \in K$*.*

Dôkaz. Zvoľme $x \in K$. Nájdime podľa tvrdenia 2.9 mieru $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\mu(f) = f^*(x)$. Ďalej nech $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ je maximálna taká, že $\nu \succeq \mu$. Potom $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a zo simpliciality $\mathcal{H}$ je $\nu = \delta_x$. Preto

$$\begin{aligned} f^*(x) = \mu(f) \le \delta_x(f) \le \delta_x(f^*) &\le \inf\{\delta_x(h)\,;\ h \in \mathcal{H},\, h \ge f\} \\ &= \inf\{h(x)\,;\ h \in \mathcal{H},\, h \ge f\} = f^*(x). \end{aligned}$$

□

Definícia 2.61. Povieme, že priestor $\mathcal{H}$ má

(a) *Rieszovu interpolačnú vlastnosť (R.I.P.)*, ak pre každé $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ také, že $a_i \le b_j$ $(i,j = 1,2)$, existuje $c \in \mathcal{H}$ tak, že $a_i \le c \le b_j$ $(i,j = 1,2)$,

(b) *slabú Rieszovu interpolačnú vlastnosť (W.R.I.P.)*, ak pre každé $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ také, že $a_i < b_j$ $(i,j = 1,2)$, existuje $c \in \mathcal{H}$ tak, že $a_i < c < b_j$ $(i,j = 1,2)$,

(c) *Rieszovu dekompozičnú vlastnosť (R.D.P.)*, ak pre každé $a, b_1, b_2 \in \mathcal{H}^+$ také, že $a \le b_1 + b_2$, existujú $a_1, a_2 \in \mathcal{H}^+$ tak, že $a = a_1 + a_2$ a $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$,

(d) *F.2.I.P. (finite binary intersection property)*, ak pre každý konečný systém uzavretých gúľ $\{B_i\}_{i=1}^n$ v $\mathcal{H}$ taký, že $B_i \cap B_j \ne \emptyset$ pre všetky i, j, je $\bigcap_{i=1}^n B_i \ne \emptyset$.

Lemma 2.62. *Nech* $\mathcal{H}$ *má R.I.P. Potom pre každé* $\{a_i\}_{i=1}^m, \{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}$ *také, že*

$$a_i \le b_j, \quad 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n,$$

existuje $c \in \mathcal{H}$ *tak, že*

$$a_i \le c \le b_j, \quad 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n.$$

Podobne pre W.R.I.P. s ostrými nerovnosťami.

Dôkaz. Pre $m = 1$ alebo $n = 1$ platí lemma triviálne, predpokladajme preto, že $m, n \geq 2$. Použitím R.I.P. na a_1, a_2, b_1, b_2 vieme nájsť $c_2^2 \in \mathcal{H}$ tak, že

$$a_1 \vee a_2 \leq c_2^2 \leq b_1 \wedge b_2.$$

Predpokladajme, že sme našli $c_k^2 \in \mathcal{H}$ $(k = 2, \dots, m-1)$ také, že

$$a_1 \vee \ldots \vee a_k \leq c_k^2 \leq b_1 \wedge b_2.$$

Znovu z R.I.P. existuje $c_{k+1}^2 \in \mathcal{H}$ tak, že

$$c_k^2 \vee a_{k+1} \leq c_{k+1}^2 \leq b_1 \wedge b_2.$$

Predpokladajme teraz, že máme $c_m^l \in \mathcal{H}$ $(l = 2, \dots, n-1)$, ktoré spĺňa

$$a_1 \vee \ldots \vee a_m \leq c_m^l \leq b_1 \wedge \ldots \wedge b_l.$$

Nájdeme $c_m^{l+1} \in \mathcal{H}$, pre ktoré je

$$a_1 \vee \ldots \vee a_m \leq c_m^{l+1} \leq c_m^l \wedge b_{l+1}.$$

Potom $c := c_m^n$ je zrejme hľadaný prvok $\mathcal{H}$.
Pre W.R.I.P. použijeme všade ostré nerovnosti. □

Lemma 2.63. *Nech $\mathcal{H}$ má R.D.P. a*

$$a + b = \sum_{i=1}^{n} c_i \quad (a, b, c_1, \dots, c_n \in \mathcal{H}^+).$$

Potom existujú $\{a_i, b_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}^+$ tak, že

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i, \; b = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{a} \quad c_i = a_i + b_i, \; i = 1, \dots, n.$$

Dôkaz. Prípad $n = 1$ je zrejmý. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n \in \mathbb{N}$, a nech

$$a + b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i.$$

Položme $d = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Potom $d \leq a+b$ a z R.D.P. je $d = a' + b'$, $a' \leq a$, $b' \leq b$, pre nejaké $a', b' \in \mathcal{H}^+$. Indukčný predpoklad dáva

$$a' = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad b' = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{a} \quad c_i = a_i + b_i, \; i = 1, \dots, n.$$

Ak definujeme $a_{n+1} := a - a'$ a $b_{n+1} := b - b'$, dostávame požadovaný rozklad. □

Lemma 2.64. *Nech E je zväz. Potom*
(a) $(x+z) \curlywedge (y+z) = (x \curlywedge y) + z$ *pre všetky* $x, y, z \in E$,
(b) $(x+y) \curlywedge z \leq (x \curlywedge z) + (y \curlywedge z)$ *pre všetky* $x, y, z \in E^+$.

Dôkaz.
(a) Plynie z invariantnosti usporiadania voči posunutiu, tj.

$$u, v, z \in E,\ u \leq v \ \Rightarrow\ u + z \leq v + z.$$

(b) Označme $w := (x+y) \curlywedge z$. Potom

$$w \leq (x+y) \curlywedge (x+z) = x + (y \curlywedge z).$$

Z $y \curlywedge z \geq 0$ máme $w \leq z + (y \curlywedge z)$. Teda

$$w \leq [x + (y \curlywedge z)] \curlywedge [z + (y \curlywedge z)] = (x \curlywedge z) + (y \curlywedge z).$$

□

Lemma 2.65. *Nech E je zväz, $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E^+$ a $\{y_j\}_{j=1}^n \subset E^+$. Ak*

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j,$$

potom existujú $\{z_{ij}\,;\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\} \subset E^+$ *tak, že*

$$x_i = \sum_{j=1}^n z_{ij},\ 1 \leq i \leq m, \quad a \quad y_j = \sum_{i=1}^m z_{ij},\ 1 \leq j \leq n.$$

Dôkaz. Lemmu dokážeme indukciou.

1. Pre $m = 1$ alebo $n = 1$ platí lemma triviálne. Nech $m = n = 2$. Teda $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, kde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E^+$. Položme

$$z_{11} := x_1 \curlywedge y_1, \quad z_{12} := x_1 - z_{11}, \quad z_{21} := y_1 - z_{11}, \quad z_{22} := x_2 - z_{21}.$$

Potom zrejme $z_{11}, z_{12}, z_{21} \in E^+$ a platia rovnosti pre x_1, x_2 a y_1. Platí aj rovnosť $y_2 = z_{12} + z_{22}$, lebo

$$z_{12} + x_2 = x_1 + x_2 - z_{11} = y_1 + y_2 - z_{11} = z_{21} + y_2.$$

Zostáva overiť, že $z_{22} \geq 0$. Keďže $z_{21} \leq z_{21} + y_2 = z_{12} + x_2$, máme

$$\begin{aligned} z_{21} &= z_{21} \curlywedge (z_{12} + x_2) \leq (z_{21} \curlywedge z_{12}) + (z_{21} \curlywedge x_2) \\ &= ((y_1 - z_{11}) \curlywedge (x_1 - z_{11})) + (z_{21} \curlywedge x_2) \\ &= ((y_1 \curlywedge x_1) - z_{11}) + (z_{21} \curlywedge x_2) = z_{21} \curlywedge x_2 \leq x_2. \end{aligned}$$

2. Predpokladajme, že lemma platí pre všetky $m' \leq m$ a $n' \leq n$. Dokážme, že platí aj pre $m+1$ a n. Nech teda

$$x_1 + \ldots + x_{m-1} + (x_m + x_{m+1}) = y_1 + \ldots + y_n,$$

kde $x_i, y_j \in E^+$ pre všetky i, j. Z indukčného predpokladu existujú $\{v_{ij}\,;\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\} \subset E^+$ tak, že

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij},\ 1 \leq i \leq m-1, \quad y_j = \sum_{i=1}^{m} v_{ij},\ 1 \leq j \leq n, \quad \text{a}$$
$$x_m + x_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} v_{mj}.$$

Aplikáciou indukčného predpokladu na poslednú rovnosť dostaneme $\{w_{kj}\,;\ m \leq k \leq m+1,\ 1 \leq j \leq n\} \subset E^+$ tak, že

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} w_{kj},\ m \leq k \leq m+1 \quad \text{a} \quad v_{mj} = w_{mj} + w_{m+1,j},\ 1 \leq j \leq n.$$

Potom

$$z_{ij} := \begin{cases} v_{ij}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ w_{ij}, & m \leq i \leq m+1, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n,$$

je hľadaný systém prvkov E^+.
Zo symetrie platí lemma aj pre $m+1$ a $n+1$.

□

Lemma 2.66. *Nech $\mathcal{F}$ je neprázdna konvexná množina zdola polospojitých funkcií na K. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f > 0$,*
(ii) *pre každú nenulovú mieru $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(f) > 0$.*

Dôkaz.
(i) ⇒ (ii) Zrejmé, lebo pre každú borelovskú funkciu $f > 0$ na K a nenulovú mieru $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ je $\mu(f) > 0$.
(ii) ⇒ (i) Označme

$$H := \{h \in \mathcal{C}(K)\,;\ \text{existuje } f \in \mathcal{F} \text{ tak, že } f > h\},$$
$$G := \{g \in \mathcal{C}(K)\,;\ g \geq 0\}.$$

Stačí ukázať, že $H \cap G \neq \emptyset$. Pre spor predpokladajme, že množiny sú disjunktné. Množina H je neprázdna (lebo napr. $\min_K f - \varepsilon \in H$ pre nejaké $f \in \mathcal{F}$ a $\varepsilon > 0$) a konvexná, množina G takisto. H je naviac otvorená, lebo pre každú $h \in H$ a príslušnú $f \in \mathcal{F}$, $f > h$, je $f - h > 0$ zdola polospojitá, a preto $f > h + u$ pre každé $u \in \mathcal{C}(K)$ z vhodného okolia 0. Podľa geometrickej verzie Hahn-Banachovej vety existuje nenulový spojitý lineárny funkcionál $\Lambda \in \mathcal{C}(K)^*$ tak, že

$$\sup \Lambda(H) \leq \alpha = \inf \Lambda(G).$$

Zrejme $\alpha \leq 0$. Predpokladajme, že $\alpha < 0$. Teda existuje $g \in G$, pre ktoré je $\Lambda(g) < 0$. Potom ale $\alpha \leq \Lambda(ng) = n\Lambda(g) \to -\infty$, čo nie je možné. Preto $\alpha = 0$ a Λ je nezáporný funkcionál. Z Rieszovej vety o reprezentácii existuje miera $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ tak, že $\Lambda(\varphi) = \mu(\varphi)$ pre všetky $\varphi \in \mathcal{C}(K)$. Miera μ je nenulová. Použitím Leviho vety 2.13 dostávame

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \sup\{\mu(h)\,;\, h \leq f,\, h \in \mathcal{C}(K)\} = \sup\{\mu(h)\,;\, h < f,\, h \in \mathcal{C}(K)\} \\ &= \sup\{\Lambda(h)\,;\, h < f,\, h \in H\} \leq 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

To je ale spor s predpokladom, že existuje $f \in \mathcal{F}$ s $\mu(f) > 0$.

□

Veta 2.67. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) *$\mathcal{H}$ je simpliciálny,*

(ii) *pre každé $f \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$ je f^* zhora polospojitá $\mathcal{H}$-afinná funkcia,*

(iii) *pre každé dve $f \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$, $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, kde $f \leq g$, a každé $\varepsilon > 0$ existujú funkcie $f_\varepsilon \in \mathcal{V}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $g_\varepsilon \in \mathcal{K}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ také, že*

$$f \leq f_\varepsilon \leq g_\varepsilon \leq g \quad a \quad \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

(iv) *pre každé dve $f \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$, $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, kde $f \leq g$, existuje funkcia $h \in \mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ taká, že $f \leq h \leq g$,*

(v) *pre každé dve $f \in \mathcal{V}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $g \in \mathcal{K}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$, kde $f \leq g$, existuje funkcia $h \in \mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ taká, že $f \leq h \leq g$,*

(vi) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ má R.I.P.,*

(vii) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ má W.R.I.P.,*

(viii) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ má R.D.P.,*

(ix) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ má F.2.I.P.,*

(x) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})^*$ je zväz,*

(xi) *$S(\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ je simplex,*

(xii) *$\mathcal{A}^\mathcal{C}(\mathcal{H})$ je simpliciálny.*

Dôkaz.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Podľa tvrdenia 2.6 je f^* zhora polospojitá a $\mathcal{H}$-konkávna funkcia. Zvoľme $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Nech ν je maximálna miera taká, že $\nu \succeq \mu$. Zo simpliciality $\mathcal{H}$ musí byť $\nu = \delta_x$. Podľa Leviho vety 2.13 a tvrdenia 2.60 je

$$\begin{aligned}\mu(f^*) &= \inf\{\mu(k)\,;\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),\ k \geq f\}\\ &\geq \inf\{\delta_x(k)\,;\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),\ k \geq f\} = \delta_x(f^*) \geq \delta_x(f) = f^*(x).\end{aligned}$$

Funkcia f^* je preto $\mathcal{H}$-afinná.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Označme

$$\mathcal{F} := \{v - k + \varepsilon\,;\ f \leq v \leq k \leq g,\ v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),\ k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})\}.$$

Implikácia bude dokázaná, ak nájdeme kladnú funkciu v množine $\mathcal{F}$. K tomu stačí podľa lemmy 2.66 ukázať, že pre každú nenulovú mieru $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ existuje $w \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(w) > 0$.

Nech teda $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Podľa predpokladu je f^* zhora polospojitá $\mathcal{H}$-afinná funkcia. Z Leviho vety 2.13 existuje $g' \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$f^* \leq g' \quad \text{a} \quad \mu(g') < \mu(f^*) + \varepsilon\mu(K).$$

Použijeme tvrdenia 2.3 a 2.15, a nájdeme $k \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$f^* \leq k \leq g \wedge g'.$$

Znovu použitím tvrdenia 2.15 nájdeme $v \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$f^* \leq v \leq k.$$

Potom platí

$$\mu(v - k + \varepsilon) = \mu(v - k) + \varepsilon\mu(K) \geq \mu(f^* - g') + \varepsilon\mu(K) > 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Použitím $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ zostrojme postupnosti funkcií $\{f_n\} \subset \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $\{g_n\} \subset \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$f \leq f_n \leq f_{n+1} \leq g_{n+1} \leq g_n \leq g \quad a \quad \|g_n - f_n\| < \varepsilon_n.$$

Postupnosti konvergujú k funkcii $h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, pre ktorú je $f \leq h \leq g$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Zrejmé.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Nech $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ sú také, že $a_i \leq b_j$ $(i, j = 1, 2)$. Podľa tvrdenia 2.3 je $-(a_1 \vee a_2), b_1 \wedge b_2 \in \mathcal{K}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Naviac,

$$a_1 \vee a_2 \leq b_1 \wedge b_2.$$

Z predpokladu existuje $h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$a_1 \vee a_2 \leq h \leq b_1 \wedge b_2.$$

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Nech $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ sú také, že $a_i < b_j$ $(i, j = 1, 2)$. $b_1 \wedge b_2 - a_1 \vee a_2$ je spojitá kladná funkcia na kompakte K, a preto existuje $\varepsilon > 0$ také, že $b_1 \wedge b_2 - a_1 \vee a_2 > \varepsilon$.
Funkcie $a_1 + \frac{\varepsilon}{2}, a_2 + \frac{\varepsilon}{2}, b_1 - \frac{\varepsilon}{2}, b_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ ležia v $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ a

$$(a_1 + \frac{\varepsilon}{2}) \vee (a_2 + \frac{\varepsilon}{2}) = a_1 \vee a_2 + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_1 \wedge b_2 - \frac{\varepsilon}{2} = (b_1 - \frac{\varepsilon}{2}) \wedge (b_2 - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Z R.I.P. existuje $h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$a_1 \vee a_2 < a_1 \vee a_2 + \frac{\varepsilon}{2} \leq h \leq b_1 \wedge b_2 - \frac{\varepsilon}{2} < b_1 \wedge b_2.$$

(vii) $\Rightarrow$ (viii) Nech

$$0 \leq a \leq b_1 + b_2 \quad (b_1, b_2 \geq 0)$$

sú prvky $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom

$$(a - b_2) \vee 0 \leq a \wedge b_1.$$

Z W.R.I.P. vieme nájsť $a^1 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$(a - b_2) \vee 0 - \frac{1}{2} < a^1 < a \wedge b_1 + \frac{1}{2}.$$

Predpokladajme, že sme našli $a^n \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, ktoré spĺňa

$$(a - b_2) \vee 0 - \frac{1}{2^n} < a^n < a \wedge b_1 + \frac{1}{2^n},$$

a teda platí

$$(a - b_2) \vee 0 \vee a^n - \frac{1}{2^{n+1}} < a \wedge b_1 \wedge a^n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Podľa lemmy 2.62 existuje $a^{n+1} \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$(a - b_2) \vee 0 \vee a^n - \frac{1}{2^{n+1}} < a^{n+1} < a \wedge b_1 \wedge a^n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Týmto postupom skonštruujeme postupnosť $(a^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, pre ktorú je $\|a^n - a^{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$. Takže postupnosť je cauchyovská a z úplnosti priestoru $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ je $a_1 := \lim a^n \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Pre a_1 zrejme platí

$$(a - b_2) \vee 0 \leq a_1 \leq a \wedge b_1,$$

a teda aj

$$0 \leq a - a_1 \leq b_2.$$

Definujme $a_2 := a - a_1$. Potom a_1, a_2 je hľadaný rozklad a.

(vi) $\Rightarrow$ (ix) Nech $\{B_i\}_{i=1}^n = \{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^n$ je systém uzavretých gúľ v $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ taký, že $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ pre všetky $i, j = 1, \ldots, n$. Funkcie

$$a_i := x_i - r_i 1_K, \quad b_i := x_i + r_i 1_K, \quad 1 \leq i \leq n,$$

zrejme spĺňajú $a_i \leq b_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Z lemmy 2.62 existuje funkcia $c \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ taká, že $a_i \leq c \leq b_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$, z čoho $c \in \bigcap_{i=1}^n B_i$.

(ix) $\Rightarrow$ (viii) Nech $a, b_1, b_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+$ tak, že $a \leq b_1 + b_2$. Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a, b_1, b_2 \leq 1_K$. Definujme uzavreté gule v $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} &B_1 := B(1_K, 1), && B_2 := B(b_1 - 1_K, 1), \\ &B_3 := B(a - 1_K, 1), && B_4 := B(1_K + a - b_2, 1). \end{aligned}$$

Každé dve z nich sa pretínajú, lebo $0 \in B_1 \cap B_2 \cap B_3$, $a \in B_1 \cap B_3 \cap B_4$ a $b_1 \in B_2 \cap B_4$. Teda existuje $a_1 \in \bigcap_{i=1}^4 B_i$. Položme $a_2 := a - a_1$. Potom

$$\begin{aligned} a_1 \in B_1 &\Rightarrow a_1 \geq 0, \\ a_1 \in B_2 &\Rightarrow a_1 \leq b_1, \\ a_1 \in B_3 &\Rightarrow a_1 \leq a \Rightarrow a_2 \geq 0, \\ a_1 \in B_4 &\Rightarrow a_1 \geq a - b_2 \Rightarrow a_2 \leq b_2. \end{aligned}$$

(viii) $\Rightarrow$ (x) Pripomeňme, že na $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^*$ uvažujeme usporiadanie:

$$\xi \leq \eta \quad \Longleftrightarrow \quad \xi(a) \leq \eta(a) \text{ pre všetky } a \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+.$$

Nech $x, y \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^*$ a ukážme, že existuje $x \curlywedge y$. Definujme funkcionál w na nezáporných prvkoch $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ nasledovne:

$$w(a) := \inf\{x(a_1) + y(a_2)\,;\ a = a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\},\ a \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+.$$

Uvažujme $a, b \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+$:

(a) Zvoľme $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$.

$$\begin{aligned} w(\lambda a) &= \inf\{x(a_1) + y(a_2);\ \lambda a = a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\} \\ &= \inf\{x(\lambda a_1') + y(\lambda a_2');\ \lambda a = \lambda a_1' + \lambda a_2',\ a_1', a_2' \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\} \\ &= \lambda \inf\{x(a_1') + y(a_2');\ a = a_1' + a_2',\ a_1', a_2' \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\} \\ &= \lambda w(a) \end{aligned}$$

(b) Ak $w(a) < r, w(b) < s$, potom existujú rozklady

$$a = a_1 + a_2 \quad \text{a} \quad b = b_1 + b_2 \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+)$$

tak, že

$$x(a_1) + y(a_2) < r \quad \text{a} \quad x(b_1) + y(b_2) < s.$$

Z toho je

$$w(a+b) \leq x(a_1) + y(a_2) + x(b_1) + y(b_2) < r + s,$$

teda w je subaditívny.

(c) Nech $r > w(a+b)$. Potom existuje rozklad

$$\begin{gathered} a + b = c_1 + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+) \\ x(c_1) + y(c_2) < r. \end{gathered}$$

Podľa lemmy 2.63 možno písať

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2 \quad \text{a} \quad c_i = a_i + b_i \ (i = 1, 2).$$

Teda

$$w(a) + w(b) \leq x(a_1) + y(a_2) + x(b_1) + y(b_2) = x(c_1) + y(c_2) < r$$

a w je superaditívny.

Naviac, pre w platí

$$\begin{aligned} |w(a)| &\leq \sup\{|x(a_1)| + |y(a_2)|\,;\ a = a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\} \\ &\leq \sup\{\|x\|\|a_1\| + \|y\|\|a_2\|\,;\ a = a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+\} \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)\|a\|, \quad a \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+. \end{aligned}$$

Nech teraz $c \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ a $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+$ sú také, že

$$c = a_1 - b_1 = a_2 - b_2.$$

Potom je

$$w(a_1) + w(b_2) = w(a_1 + b_2) = w(a_2 + b_1) = w(a_2) + w(b_1),$$

a teda

$$w(a_1) - w(b_1) = w(a_2) - w(b_2).$$

Môžeme preto definovať

$$w'(c) := w(a) - w(b),$$

kde $a, b \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+$ je ľubovoľný rozklad c.
Funkcionál w' definovaný na $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ je lineárny, lebo pre každé $c_i \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),\ a_i, b_i \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+,\ c_i = a_i - b_i,\ i = 1, 2$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned}
w'(\lambda c_1) &= w'(\lambda a_1 - \lambda b_1) = w(\lambda a_1) - w(\lambda b_1) = \lambda w(a_1) - \lambda w(b_1) \\
&= \lambda w'(c_1), \quad \text{ak } \lambda \geq 0, \\
w'(\lambda c_1) &= w'((-\lambda) b_1 - (-\lambda) a_1) = w((-\lambda) b_1) - w((-\lambda) a_1) \\
&= (-\lambda) w(b_1) - (-\lambda) w(a_1) = \lambda w'(c_1), \quad \text{ak } \lambda < 0, \\
w'(c_1 + c_2) &= w'(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) = w(a_1 + a_2) - w(b_1 + b_2) \\
&= w(a_1) + w(a_2) - w(b_1) - w(b_2) = w'(c_1) + w'(c_2).
\end{aligned}$$

Ďalej, w' je ohraničený vďaka nerovnostiam

$$\begin{aligned}
|w'(c)| &\leq |w(\|c\|)| + |w(\|c\| - c)| \leq (\|x\| + \|y\|)(\|c\| + \|\|c\| - c\|) \\
&\leq 3(\|x\| + \|y\|)\|c\|, \quad c \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

a rozširuje w, pretože

$$w'(c) = w(c) - w(0) = w(c), \quad c \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+.$$

Máme $w' \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^*,\ w' \leq x, y$. Vezmime $z \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^*,\ z \leq x, y$, a ukážme, že $z \leq w'$. Ak je $a = a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^+$, potom

$$z(a) = z(a_1) + z(a_2) \leq x(a_1) + y(a_2),$$

a preto $z(a) \leq w(a) = w'(a)$.
Teda $w' = x \curlywedge y$, čo sme chceli dokázať.

(x) $\Rightarrow$ (xi) Označme $S := S(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})),\ E := \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})^*$ a uvažujme ďalej funkčný priestor $(S, A(S))$. Pripomeňme, že polospojité funkcie sú konkávne, práve keď sú $A(S)$-konkávne.
Nech f je spojitá konvexná funkcia na S. Ukážme, že f^* je polospojitá a afinná. Podľa tvrdenia 2.6 je f^* zhora polospojitá a konkávna, stačí teda dokázať jej konvexnosť.
Nech $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ je netriviálna konvexná kombinácia bodov $x_1, x_2 \in S$, a nech $\mu \in \mathcal{M}_z(A(S))$ je taká, že $\mu = \sum_{j=1}^n \beta_j \varepsilon_{y_j}$, kde $\sum_{j=1}^n \beta_j = 1,\ \beta_j > 0$ a $y_j \in S$ $(1 \leq j \leq n)$. Teda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j.$$

Z lemmy 2.65 existujú body $\widehat{z}_{ij} \in E^+$, $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le n$, tak, že

$$\alpha_i x_i = \sum_{j=1}^n \widehat{z}_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad \text{a}$$
$$\beta_j y_j = \widehat{z}_{1j} + \widehat{z}_{2j}, \quad 1 \le j \le n.$$

Nech $\gamma_{ij} \ge 0$ a $z_{ij} \in S$ sú také, že $\widehat{z}_{ij} = \gamma_{ij} z_{ij}$. Potom

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_i} z_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad \text{a}$$
$$y_j = \frac{\gamma_{1j}}{\beta_j} z_{1j} + \frac{\gamma_{2j}}{\beta_j} z_{2j}, \quad 1 \le j \le n,$$

pričom obe sumy sú konvexné kombinácie bodov z S. Použitím predošlých rovností, konvexnosti f a konkávnosti f^* dostávame

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \sum_{j=1}^n \beta_j f\Big(\frac{\gamma_{1j}}{\beta_j} z_{1j} + \frac{\gamma_{2j}}{\beta_j} z_{2j}\Big) \le \sum_{j=1}^n \gamma_{1j} f(z_{1j}) + \gamma_{2j} f(z_{2j}) \\
&= \alpha_1 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{1j}}{\alpha_1} f(z_{1j}) + \alpha_2 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{2j}}{\alpha_2} f(z_{2j}) \\
&\le \alpha_1 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{1j}}{\alpha_1} f^*(z_{1j}) + \alpha_2 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{2j}}{\alpha_2} f^*(z_{2j}) \le \alpha_1 f^*(x_1) + \alpha_2 f^*(x_2).
\end{aligned}$$

Podľa lemmy 2.8 existuje miera $\nu \in \mathcal{M}_z(A(S))$ tak, že $\nu(f) = f^*(z)$. Ďalej vieme, že existuje postupnosť molekulárnych mier $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}_z(A(S))$, pre ktorú $\mu_n(f) \to \nu(f)$. Z toho

$$\begin{aligned}
f^*(z) &\le \sup\{\mu(f)\,;\ \mu \text{ molekulárna}, \mu \in \mathcal{M}_z(A(S))\} \\
&\le \alpha_1 f^*(x_1) + \alpha_2 f^*(x_2),
\end{aligned}$$

teda f^* je konvexná funkcia.
Nech teraz $x \in S$ a $\nu, \eta \in \mathcal{M}_x(A(S))$ sú maximálne miery. Použitím Mokobodzkiho testu maximality 2.34 a $A(S)$-afinnosti f^* máme

$$\nu(f) = \nu(f^*) = f^*(x) = \eta(f^*) = \eta(f), \quad \forall f \in \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(A(S)).$$

Z hustoty $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(A(S)) - \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(A(S))$ v $\mathcal{C}(S)$ je $\nu = \eta$, a S je simplex.

(xi) $\Rightarrow$ (xii) Predpokladajme, že $x \in K$ a $\mu, \nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$ sú maximálne. Podľa tvrdenia 2.54 (c) sú $\phi\mu, \phi\nu$ maximálne na $S(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$, a podľa tvrdenia 2.51 (b) reprezentujú bod $\phi(x)$. Potom ale $\phi\mu = \phi\nu$, a použitím tvrdenia 2.54 (b) je $\mu = \nu$.

(xii) $\Leftrightarrow$ (i) Ekvivalencia plynie z rovností množín reprezentujúcich mier a konvexných funkcií (tvrdenie 2.5 (b) a (e)).

$\square$

Dôsledok 2.68. *Nech $\mathcal{H}$ je simpliciálny a*

$$-f, g : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

sú zdola polospojité $\mathcal{H}$-konkávne funkcie také, že $f \le g$. Predpokladajme ďalej, že E je $\mathcal{H}$-extremálna podmnožina K a $h : E \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia taká, že

$$f|_E \le h \le g|_E \quad a \quad h(x) = \mu(h),\ \forall x \in E, \forall \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}).$$

Potom existuje funkcia $\overline{h} \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, ktorá rozširuje h a spĺňa $f \le \overline{h} \le g$.

Dôkaz. Položme

$$g'(x) := \begin{cases} h(x) & \text{pre } x \in E, \\ g(x) & \text{pre } x \in K \setminus E, \end{cases}$$
$$f'(x) := \begin{cases} h(x) & \text{pre } x \in E, \\ f(x) & \text{pre } x \in K \setminus E. \end{cases}$$

Pre funkcie $-f', g'$ platí:

(a) g' je zdola polospojitá

$$\{x \in K\,; g'(x) \le \alpha\} = \{x \in K\,; g(x) \le \alpha\} \cup \{x \in E\,; h(x) \le \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Obe množiny na pravej strane rovnosti sú uzavreté, pretože g i h sú zdola polospojité, a teda aj ich zjednotenie je uzavretá množina.
Obdobne sa ukáže, že $-f$ je zdola polospojitá funkcia.

(b) g' je $\mathcal{H}$-konkávna

$$g'(x) = h(x) = \int_E h\, d\mu = \int_E g'\, d\mu = \mu(g'), \quad x \in E,\ \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$$
$$g'(x) = g(x) \ge \mu(g) \ge \mu(g'), \quad x \in K \setminus E,\ \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$$

V prvom prípade plynú rovnosti z $h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}|_E)$ a spt $\mu \subset E$, v druhom prípade je $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ a $g' \le g$.
Obdobne sa ukáže, že $-f$ je $\mathcal{H}$-konkávna funkcia.

(c) $f' \le g'$

Podľa vety 2.67 (iv) existuje $\overline{h} \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že $f' \le \overline{h} \le g'$. Funkcia $\overline{h}$ zrejme spĺňa všetky požiadavky. $\square$

Poznámky. Pojem simplex bol známy v euklidovskej geometrii už pred vznikom Choquetovej teórie. Obzvlášť významné výsledky dosiahli v tejto oblasti Carathéodory a Minkowski. Zovšeobecnenú verziu pojmu simplex uviedol Choquet už v [17]. Ekvivalenty z vety 2.67 tvoria len zlomok z celkového množstva charakteristík, ktorými možno popísať simpliciálny priestor. Implikácia (x) $\Rightarrow$ (xi) bola dokázaná takisto už v [17], preto sa v konvexnom prípade simplex spočiatku definoval pomocou vlastnosti (x). Choquet a Meyer [20] ukázali konvexnú verziu ekvivalencie (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (x). Ekvivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iv) je známa pod názvom Edwardsova veta. Pre konvexný prípad ju možno nájsť v [10], kde je (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (viii) $\Leftrightarrow$ (x). Edwardsovu vetu nezávisle dokázali aj Boboc a Cornea [6]. Implikácia (viii) $\Rightarrow$ (x) bola známa vo všeobecnejšom kontexte už dávnejšie zásluhou Riesza [34]. Množstvo ďalších ekvivalentov simpliciality, spolu s (ix), je možné nájsť v práci Lindenstraussa [26].

3 Súčiny funkčných priestorov

Hlavnou motiváciou k zavedeniu súčinu funkčných priestorov je nájsť relatívne jednoduchý spôsob, ako z jednoduchých funkčných priestorov vytvárať komplikovanejšie. V tejto kapitole nadviažeme na práce Lazara [24], a Daviesa a Vincent-Smitha [8], ktorí definovali súčin simplexov takým spôsobom, aby výsledkom bol opäť simplex. Rozšírime ich definície na ľubovoľné funkčné priestory, a ukážeme, že súčin simpliciálnych priestorov je zasa simpliciálny. Taktiež uvedieme charakterizácie spojitých $\mathcal{H}$-afinných funkcií, $\mathcal{H}$-extremálnych množín a maximálnych mier na súčinových priestoroch.

3.1 Súčiny priestorov

Úmluva. Všetky indexové množiny uvažované v tejto kapitole budeme pokladať za neprázdne.

Definícia 3.1. Nech $\{(K_i, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ je systém funkčných priestorov. Označme

$$K := \bigtimes_{i\in I} K_i,$$
$$\mathcal{H} = \bigboxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i := \{f \in \mathcal{C}(K)\,;\ \forall i \in I, \forall y \in \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} K_j : \pi_i^y(f) \in \mathcal{H}_i\}.$$

Potom funkčný priestor $(K, \mathcal{H})$ nazveme *multiafinným súčinom* funkčných priestorov $\{(K_i, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ a budeme značiť $\boxtimes_{i\in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$.
Algebraickým tenzorovým súčinom $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ budeme rozumieť lineárny obal množiny $\{h_1 \otimes h_2\,;\ h_1 \in \mathcal{H}_1,\ h_2 \in \mathcal{H}_2\}$. Ďalej definujeme *injektívny tenzorový súčin* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ako uzáver $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$.
Funkčný priestor $\mathcal{H}$ nazveme *prípustným* súčinom priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, ak

$$\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2.$$

Poznámka 3.2. Označenie „tenzorový súčin“ v definícii 3.1 je odôvodnené. Dá sa ukázať, že $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ je skutočne „algebraický tenzorový súčin“, a ak $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ sú uzavreté, tj. Banachove priestory, potom $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ je ich „slabý (injektívny) tenzorový súčin“ (viď [36, 20.5.5]).

Príklad 3.3. Nech $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i\in I}(K_i, A(K_i))$. Potom $\mathcal{H}$ sú práve všetky spojité multiafinné funkcie na K. Tj. také funkcie $f \in \mathcal{C}(K)$, že pre každé $i \in I$ a $k, k_1, k_2 \in K$ s

$$\pi_j(k) = \pi_j(k_1) = \pi_j(k_2), \quad j \in I \setminus \{i\},$$
$$\pi_i(k) = \lambda\pi_i(k_1) + (1-\lambda)\pi_i(k_2) \quad \text{pre nejaké } \lambda \in [0, 1],$$

platí

$$f(k) = \lambda f(k_1) + (1-\lambda) f(k_2).$$

Tvrdenie 3.4. *Nech $(K_1, \mathcal{H}_1)$ a $(K_2, \mathcal{H}_2)$ sú funkčné priestory. Platí:*

(i) $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2$,

(ii) *ak $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ sú uzavreté, potom $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2$,*

(iii) *ak $\mathcal{H}_1$ alebo $\mathcal{H}_2$ je neuzavretý, potom $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subsetneq \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \not\subset \mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2$.*

Dôkaz. Tvrdenia (i) a (ii) sú triviálne. K dôkazu (iii) zrejme stačí nájsť $f \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \setminus (\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2)$. Nech napríklad $\mathcal{H}_1$ je neuzavretý. Potom existujú funkcie $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ tak, že $h_n \rightrightarrows h \notin \mathcal{H}_1$. Potom aj $h_n \otimes 1_{K_2} \rightrightarrows f := h \otimes 1_{K_2}$. Keďže $h_n \otimes 1_{K_2} \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, musí byť $f \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Ale $\pi_1(f) = h \notin \mathcal{H}_1$, a teda $f \notin \mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2$. □

Definícia 3.5. Povieme, že Banachov priestor E má *aproximačnú vlastnosť*, ak pre každú kompaktnú množinu $C \subset E$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje spojité lineárne zobrazenie $T : E \to E$ také, že $T(E)$ je konečne dimenzionálny a $\|Tx - x\| < \varepsilon$ pre všetky $x \in C$.

Veta 3.6 (Namioka-Phelps)**.** *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) *Pre každé dve kompaktné konvexné podmnožiny K_1, K_2 lokálne konvexných Hausdorffových priestorov je $A(K_1) \otimes A(K_2) = A(K_1) \boxtimes A(K_2)$.*

(ii) *Každý Banachov priestor má aproximačnú vlastnosť.*

Dôkaz. Viď [31]. □

Veta 3.7 (Enflo)**.** *Existuje Banachov priestor, ktorý nemá aproximačnú vlastnosť.*

Dôkaz. Viď [11]. □

Dôsledok 3.8. *Existujú kompaktné konvexné množiny K_1 a K_2 také, že*

$$A(K_1) \otimes A(K_2) \neq A(K_1) \boxtimes A(K_2).$$

Dôkaz. Okamžite plynie z viet 3.6 a 3.7. □

Lemma 3.9. *Nech $\{(K_i, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ sú funkčné priestory a $I = I_1 \cup I_2$, kde $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Potom medzi priestormi $\boxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i$ a $(\boxtimes_{i\in I_1} \mathcal{H}_i) \boxtimes (\boxtimes_{i\in I_2} \mathcal{H}_i)$ existuje izometrický izomorfizmus zachovávajúci usporiadanie.*
Podobne možno stotožniť priestory $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i)$ a $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}((\boxtimes_{i\in I_1} \mathcal{H}_i) \boxtimes (\boxtimes_{i\in I_2} \mathcal{H}_i))$.

Dôkaz. Zobrazenie

$$f \leftrightarrow f'$$
$$f((k_i)_{i\in I}) = f'((k_i)_{i\in I_1}, (k_i)_{i\in I_2}), \quad k_i \in K_i \text{ pre každé } i \in I,$$

definuje izometrický izomorfizmus medzi priestormi $\mathcal{C}(\bigtimes_{i\in I} K_i)$ a $\mathcal{C}((\bigtimes_{i\in I_1} K_i)\times(\bigtimes_{i\in I_2} K_i))$ zachovávajúci usporiadanie.
Nech $m = 1, 2$. Z ekvivalencií

$$\pi_i^k(f) \in \mathcal{H}_i, \quad \forall k \in \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} K_j, \forall i \in I_m,$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi_i^k(\pi_m^{k'}(f')) \in \mathcal{H}_i, \quad \forall k' \in \bigtimes_{j\in I\setminus I_m} K_j, \forall k \in \bigtimes_{j\in I_m\setminus\{i\}} K_j, \forall i \in I_m,$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi_m^{k'}(f') \in \bigboxtimes_{i\in I_m} \mathcal{H}_i, \quad \forall k' \in \bigtimes_{j\in I\setminus I_m} K_j,$$

vidíme, že zobrazenie stotožňuje priestory $\boxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i$ a $(\boxtimes_{i\in I_1} \mathcal{H}_i) \boxtimes (\boxtimes_{i\in I_2} \mathcal{H}_i)$. Stotožnenie spojitých $\mathcal{H}$-afinných funkcií plynie z už dokázaného a charakteristiky z tvrdenia 2.10, tj. $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$. □

Označenie. Nech $K = \bigtimes_{i\in I} K_i$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(K)$ a $I' \subset I$. Označme $\mathcal{G}_{I'}$ priestor funkcií z $\mathcal{G}$, ktoré sú konštantné vzhľadom k premenným $k_i \in K_i$, $i \in I \setminus I'$, tj.

$$\mathcal{G}_{I'} = \{g \in \mathcal{G}\,;\ x, y \in K, \pi_{I'}(x) = \pi_{I'}(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\}$$

a $\mathcal{G}_f$ nech sú funkcie závislé na konečne mnohých súradniciach, tj.

$$\mathcal{G}_f = \{g \in \mathcal{G}\,;\ \exists I_f \subset I \text{ konečná} : g \in \mathcal{G}_{I_f}\}.$$

Pozorovanie 3.10. *Použitím vyššie uvedeného označenia platí:*
(a) $I_1 \subset I_2 \subset I,\ g \in \mathcal{G}_{I_1} \ \Rightarrow\ g \in \mathcal{G}_{I_2}$,
(b) $g \in \mathcal{G}_{I'} \ \Leftrightarrow\ g = \pi_{I'}(g) \otimes 1_{\bigtimes\{K_i;\ i\in I\setminus I'\}}$,
(c) $\mu \in \mathcal{M}^+(K),\ g \in \mathcal{G}_{I'} \ \Rightarrow\ \mu(g) = (\pi_{I'}\mu)(\pi_{I'}(g))$.

Tvrdenie 3.11. *Buď* $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i\in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$*. Potom* $\mathcal{H}_f$ *je hustý v* $\mathcal{H}$*.*

Dôkaz. Nech $f \in \mathcal{H}$ a $\varepsilon > 0$. Pokryme K okoliami $V_1, \dots, V_m$ z obvyklej bázy kartézskeho súčinu tak, že oscilácia f na každom z nich je menšia než ε. Označme

$$J := \{i \in I\,;\ \exists\, l \in \{1, \dots, m\} : \pi_i(V_l) \neq K_i\}.$$

Vyberme $y \in \bigtimes_{i \in I \smallsetminus J} K_i$ a definujme $f' : K \to \mathbb{R}$ ako

$$f'(k) := f(\pi_J(k) \times y), \quad k \in K.$$

Keďže J je konečná, $f' \in \mathcal{H}_f$. Zrejme, pre $k \in K$ platí

$$|f'(k) - f(k)| = |f(\pi_J(k) \times y) - f(k)| < \varepsilon,$$

lebo $k \in V_l \Rightarrow \pi_J(k) \times y \in V_l$. Teda $\overline{\mathcal{H}}_f = \mathcal{H}$. □

Dôsledok 3.12. *Nech $K = \bigtimes_{i \in I} K_i$. Potom $\mathcal{C}_f(K)$ je hustý v $\mathcal{C}(K)$.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že $(K, \mathcal{C}(K)) = \boxtimes_{i \in I}(K_i, \mathcal{C}(K_i))$. □

Do konca tejto sekcie budeme uvažovať $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i \in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$. Ak nebude explicitne uvedené inak, pre $|I| = 2$ môžeme $\mathcal{H}$ považovať za ľubovoľný prípustný súčin priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$.

Tvrdenie 3.13. *Nech $x \in K$, $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $J \subsetneq I$. Potom $\pi_J(\mu) \in \mathcal{M}_{\pi_J(x)}(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$.*

Dôkaz. Nech $h_J \in \boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i$ a definujme $h := h_J \otimes 1_{\bigtimes\{K_i;\, i \in I \smallsetminus J\}}$. Potom $h \in \mathcal{H}$ a platí

$$h_J(\pi_J(x)) = h(x) = \mu(h) = \pi_J(\mu)(h_J).$$

□

Tvrdenie 3.14. *Nech $x = (x_i)_{i \in I} \in K$ a $\mu_i \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i)$ pre každé $i \in I$. Potom $\mu := \bigotimes_{i \in I} \mu_i \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.*

Dôkaz.

1. Nech najskôr $|I| = 2$. Zvoľme $h \in \mathcal{H}$. Potom z Fubiniovej vety

$$\mu(h) = \int_K h \, d\mu = \int_{K_2} \left(\int_{K_1} h(., y) \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y).$$

Keďže $h(., y) \in \mathcal{H}_1$ a $\mu_1 \in \mathcal{M}_{x_1}(\mathcal{H}_1)$, je $\int_{K_1} h(., y) \, d\mu_1 = h(x_1, y)$ pre každé $y \in K_2$. Podobne dostaneme

$$\int_{K_2} h(x_1, y) \, d\mu_2(y) = h(x_1, x_2) = h(x),$$

a teda $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.
Indukciou dostaneme tvrdenie pre konečné súčiny.

2. Nech teraz I je ľubovoľná indexová množina. Zvoľme $h \in \mathcal{H}$ a $\varepsilon > 0$. Podľa vety 3.11 existuje $g \in \mathcal{H}_J$, kde $J \subset I$ je konečná, tak, že
$$\|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Z vlastností μ, g a už dokázaného je
$$\mu(g) = [\bigotimes_{i \in J} \mu_i](\pi_J(g)) = \pi_J(g)((x_i)_{i \in J}) = g(x).$$
Odhadujme
$$|\mu(h) - h(x)| \leq |\mu(h) - \mu(g)| + |\mu(g) - g(x)| + |g(x) - h(x)| < \varepsilon.$$
Toto platí pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, preto $\mu(h) = h(x)$ pre každé $h \in \mathcal{H}$, a teda $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

□

V zostávajúcej časti sekcie sa pozrieme na priestory spojitých $\mathcal{H}$-afinných funkcií a odvodíme vzťahy medzi súčinmi takýchto priestorov.

Lemma 3.15. *Platí* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \subset \boxtimes_{i \in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$.

Dôkaz. Nech $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $i \in I$ a $y \in \times_{j \in I \setminus \{i\}} K_j$. Označme $f_i := \pi_i^y(f)$ a dokážme, že $f_i \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$.
Zvoľme $x_i \in K_i$ a $\mu_i \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i)$. Definujme $x := x_i \times y$ a $\mu := \mu_i \otimes \varepsilon_y$. Potom podľa tvrdenia 3.14 je $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a dostávame
$$f_i(x_i) = f(x) = \mu(f) = \mu_i(f_i).$$
Teda $f_i \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$. □

Lemma 3.16. *Nech* $|I| = 2$. *Potom* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.

Dôkaz. Uvažujme $a_1 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1), a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$ a ukážme, že $a_1 \otimes a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. K tomu využijeme charakteristiku z tvrdenia 2.10, tj. $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.
Predpokladajme najprv, že $a_1, a_2 \geq 0$. Zvoľme $x = (x_1, x_2) \in K$ a $\varepsilon > 0$. Nájdime $\delta > 0$ tak malé, aby platilo
$$\delta(a_1(x_1) + a_2(x_2) + \delta) < \varepsilon.$$
Výraz naľavo zrejme konverguje k 0 pre $\delta \to 0$, preto také δ existuje. Z tvrdenia 2.10 existujú $h_1 \in \mathcal{H}_1, h_1 \geq a_1$ a $h_2 \in \mathcal{H}_2, h_2 \geq a_2$ tak, že
$$h_1(x_1) < a_1(x_1) + \delta \quad \text{a} \quad h_2(x_2) < a_2(x_2) + \delta.$$

Potom zrejme $h_1 \otimes h_2 \in \mathcal{H}$, $h_1 \otimes h_2 \geq a_1 \otimes a_2$ a

$$\begin{aligned} a_1(x_1)a_2(x_2) &\leq h_1(x_1)h_2(x_2) < (a_1(x_1)+\delta)(a_2(x_2)+\delta) \\ &= a_1(x_1)a_2(x_2) + \delta(a_1(x_1)+a_2(x_2)+\delta) < a_1(x_1)a_2(x_2)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Teda $(a_1 \otimes a_2)^* = a_1 \otimes a_2$.
Nech teraz $a_1 \geq 0$ a a_2 je ľubovoľné. Potom $a_2 + \|a_2\| \geq 0$. Podľa lemmy 2.7 je $f \mapsto f^*(x)$ sublineárny funkcionál na $\mathcal{C}(K)$ pre každé $x \in K$. Naviac triviálne, prevedením na jednorozmerný prípad, platí $(a_1 \otimes c)^* = a_1 \otimes c$ pre každú konštantnú funkciu c na K_2. Využitím týchto faktov a už dokázaného dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 \otimes a_2 &\leq (a_1 \otimes a_2)^* = (a_1 \otimes (a_2 + \|a_2\| - \|a_2\|))^* \\ &= (a_1 \otimes (a_2 + \|a_2\|) - a_1 \otimes \|a_2\|)^* \\ &\leq (a_1 \otimes (a_2 + \|a_2\|))^* + (a_1 \otimes (-\|a_2\|))^* \\ &= a_1 \otimes (a_2 + \|a_2\|) + (a_1 \otimes (-\|a_2\|)) = a_1 \otimes a_2. \end{aligned}$$

Pre dolnú obálku platí

$$(a_1 \otimes a_2)_* = -(a_1 \otimes (-a_2))^* = -(a_1 \otimes (-a_2)) = a_1 \otimes a_2.$$

Preto $a_1 \otimes a_2 \in \widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.
Nech nakoniec a_1, a_2 sú ľubovoľné. Potom

$$a_1 \otimes a_2 = (a_1 + \|a_1\|) \otimes a_2 - \|a_1\| \otimes a_2 \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}).$$

Keďže $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ je uzavretý lineárny priestor, je $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. □

Tvrdenie 3.17. *Nech $\mathcal{H} = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom $\mathcal{H}_i = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ pre každé $i \in I$.*

Dôkaz. Zvoľme $i \in I$ a dokážme, že $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i) \subset \mathcal{H}_i$. Vezmime $f_i \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ a definujme $f := f_i \otimes 1_{\times\{K_j;\ j \in I \setminus \{i\}\}}$. Ďalej zvoľme ľubovoľné $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Platí $\mu_i := \pi_i(\mu) \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i)$, kde $x_i := \pi_i(x)$. Z toho dostávame rovnosť

$$f(x) = f_i(x_i) = \mu_i(f_i) = \mu(f).$$

Teda $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, a z definície $\mathcal{H}$ potom nutne $f_i = \pi_i(f) \in \mathcal{H}_i$. □

Tvrdenie 3.18. *Buď $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i \in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$. Ak $\mathcal{H}_i = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ pre každé $i \in I$, potom $\mathcal{H} = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.*

Dôkaz. Využitím lemmy 3.15 dostaneme

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \subset \bigboxtimes_{i\in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i) = \bigboxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}.$$

□

Dôsledok 3.19. *Existujú funkčné priestory $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ také, že*

$$\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) \neq \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2).$$

Dôkaz. Podľa dôsledku 3.8 existujú kompaktné konvexné množiny K_1 a K_2 také, že $A(K_1) \otimes A(K_2) \neq A(K_1) \boxtimes A(K_2)$. Definujme $\mathcal{H}_i := A(K_i)$, $i = 1, 2$. Keďže $\mathcal{H}_i = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ pre $i = 1, 2$, podľa tvrdenia 3.18 platí $\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2)$. Teda dostávame

$$\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) = A(K_1) \otimes A(K_2) \neq A(K_1) \boxtimes A(K_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2).$$

□

Príklad 3.20. Tvrdenie 3.18 nemusí platiť pre všetky prípustné súčiny. Uvažujme $K_i := [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_i := \mathcal{C}(K_i)$, $i = 1, 2$. Zrejme $\mathcal{H}_i = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$. Definujme $(K, \mathcal{H}) := (K_1, \mathcal{H}_1) \odot (K_2, \mathcal{H}_2)$. Potom funkcie z $\mathcal{H}$ sú tvaru $\sum_{j=1}^{n} f_1^j \otimes f_2^j$, kde $f_i^j \in \mathcal{C}(K_i)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Priestor $\mathcal{H}$ obsahuje všetky polynómy na K. Keďže polynómy sú husté v $\mathcal{C}(K)$, dostávame $\mathcal{C}(K) = \overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, z čoho $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(K)$.
Ukážme teraz, že $f(x, y) := e^{xy} \notin \mathcal{H}$. K tomu zrejme stačí dokázať, že každá konečná množina funkcií $\{f(x_k, .)\}_{k=1}^{m}$, kde $x_k \in K_1$ pre $k = 1, \ldots, m$, je lineárne nezávislá. Postupujme indukciou: Pre $m = 1$ vzťah $a_1 e^{x_1 y} = 0$ na K_2 implikuje $a_1 = 0$. Predpokladajme, že máme nezávislosť pre m funkcií. Uvažujme navzájom rôzne $x_k \in K_1$, $k = 1, \ldots, m+1$, a nech $\sum_{k=1}^{m+1} a_k e^{x_k y} = 0$ na K_2. Úpravou dostaneme

$$\sum_{k=1}^{m} a_k e^{(x_k - x_{m+1})y} = -a_{m+1}, \quad y \in K_2,$$

a zderivovaním

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (x_k - x_{m+1}) e^{(x_k - x_{m+1})y} = 0, \quad y \in K_2.$$

Z indukčného predpokladu musí byť $a_k = 0$ pre všetky $k = 1, \ldots, m$. Potom aj $a_{m+1} = 0$, a funkcie sú teda lineárne nezávislé.
Preto $\mathcal{H} \neq \mathcal{C}(K) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Príklad naviac ukazuje, že algebraický tenzorový súčin uzavretých priestorov nemusí byť uzavretý, a taktiež nemusí platiť rovnosť $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \odot \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$. Použité funkčné priestory sú navyše simpliciálne.

Problém 1. Platí $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2)$?

Problém 2. Platí $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2)$?

Problém 3. Platí $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1 \boxtimes \mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$?

Poznámky. Súčin simplexov zaviedli nezávisle Lazar [24] a Davies s Vincent-Smithom [8]. Oba články definujú súčin ako stavový priestor multiafinných funkcií. Lazar nazval súčin *afinný*, Davies a Vincent-Smith ukázali, že ide o *projektívny topologický tenzorový súčin*. V druhom menovanom článku sa naviac rozoberá aj prípad tzv. „*simplex space*“, čo v našej terminológii zahŕňa simpliciálne priestory $\mathcal{H}$, pre ktoré je $\mathcal{H} = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Pre tieto priestory použili autori slabý tenzorový súčin. Ako uvidíme nižšie, pre „simplex spaces“ splýva tenzorový súčin s multiafinným. Z dôsledku 3.8 je však zrejmé, že všeobecne sa môžu tieto definície líšiť. Tvrdenie 3.11 o hustote multiafinných funkcií závislých na konečne mnohých súradniciach možno nájsť v oboch článkoch.

3.2 $\mathcal{H}$-extremálne množiny

Rovnako ako v predošlej sekcii budeme uvažovať $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i \in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$. Pre $|I| = 2$ bude $\mathcal{H}$ značiť ľubovoľný prípustný súčin priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$.

Tvrdenie 3.21. *Nech $J \subset I$, $y \in \bigtimes_{i \in I \setminus J} K_i$ a $E \subset K$ je $\mathcal{H}$-extremálna množina. Potom $\pi_J^y(E)$ je buď prázdna alebo $(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$-extremálna množina.*

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že $E^y := \pi_J^y(E)$ je neprázdna a nie je $(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$-extremálna. Potom existuje $x \in E^y$ a $\mu_J \in \mathcal{M}_x(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$ tak, že $\mu_J((\bigtimes_{i \in J} K_i) \setminus E^y) > 0$. Definujme $\mu := \mu_J \otimes \varepsilon_y$. Potom $x \times y \in E$ a podľa tvrdenia 3.14 je $\mu \in \mathcal{M}_{x \times y}(\mathcal{H})$. Ale $\mu(K \setminus E) = \mu_J((\bigtimes_{i \in J} K_i) \setminus E^y) > 0$, čo je spor. □

Tvrdenie 3.22. *Nech $J \subset I$ a $E \subset K$ je $\mathcal{H}$-extremálna množina. Potom $\pi_J(E)$ je $(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$-extremálna množina.*

Dôkaz. Nech $x \in \pi_J(E)$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$. Potom existuje $y \in \bigtimes_{i \in I \setminus J} K_i$ tak, že $x \times y \in E$. Inak povedané, $x \in \pi_J^y(E)$. Podľa tvrdenia 3.21 je $\pi_J^y(E)$ $(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$-extremálna množina, a preto $\operatorname{spt} \mu \subset \pi_J^y(E) \subset \pi_J(E)$. □

Tvrdenie 3.23. *Nech $E_i \subset K_i$ je $\mathcal{H}_i$-extremálna množina pre každé $i \in I$. Potom $E := \bigtimes_{i \in I} E_i$ je $\mathcal{H}$-extremálna množina.*

Dôkaz. Z Tichonovovej vety je E uzavretá množina.

1. Nech najprv $|I| = 2$. Pre spor predpokladajme, že existuje $x = (x_1, x_2) \in E$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\mu(K \setminus E) > 0$. Označme $\mu_1 := \pi_1(\mu)$ a $\mu_2 := \pi_2(\mu)$. Keďže
$$K \setminus E = ((K_1 \setminus E_1) \times K_2) \cup (K_1 \times (K_2 \setminus E_2)),$$
platí
$$0 < \mu(K \setminus E) \leq \mu_1(K_1 \setminus E_1) + \mu_2(K_2 \setminus E_2).$$
Predpokladajme, že $\mu_1(K_1 \setminus E_1) > 0$. Podľa tvrdenia 3.13 je ale $\mu_1 \in \mathcal{M}_{x_1}(\mathcal{H}_1)$, čo je spor, lebo $x_1 \in E_1$.
Indukciou dostaneme tvrdenie pre ľubovoľný konečný súčin.
2. Nech teraz I je nekonečná množina a existuje $x = (x_i)_{i \in I} \in E$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\mu(K \setminus E) > 0$. Teda existuje $g \in \mathcal{C}(K)$ tak, že $g = 0$ na E, ale $\mu(g) > 0$ (napríklad z Urysohnovej lemmy).
Zvoľme $\varepsilon > 0$. Podľa dôsledku 3.12 existuje $f \in \mathcal{C}_J(K)$, kde $J \subset I$ je konečná a $\|g - f\| < \varepsilon$. Označme x_J, f_J a μ_J príslušné projekcie. Potom $\mu_J \in \mathcal{M}_{x_J}(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$, pričom podľa prvej časti dôkazu je x_J prvkom $(\boxtimes_{i \in J} \mathcal{H}_i)$-extremálnej množiny $E_J := \bigtimes_{i \in J} E_i$. Teda $\operatorname{spt} \mu_J \subset E_J$ a $|f_J| < \varepsilon$ na E_J. Preto platí
$$|\mu(f)| = |\mu_J(f_J)| \leq \int_{E_J} |f_J| \, d\mu_J + \int_{(\bigtimes_{i \in J} K_i) \setminus E_J} |f_J| \, d\mu_J < \varepsilon.$$
Z toho dostávame
$$0 < |\mu(g)| \leq |\mu(g) - \mu(f)| + |\mu(f)| < 2\varepsilon,$$
čo je spor, keďže ε bolo ľubovoľné.

$\square$

Veta 3.24. *Platí* $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigtimes_{i \in I} \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}_i} K_i$.

Dôkaz. Nech $x = (x_j)_{j \in I} \in \operatorname{Ch} K$ a $i \in I$. Podľa tvrdenia 3.22 je $\{x_i\}$ $\mathcal{H}_i$-extremálna množina, a teda $x_i \in \operatorname{Ch} K_i$.
Nech naopak $x_i \in \operatorname{Ch} K_i$ pre každé $i \in I$. Podľa tvrdenia 3.23 je $\bigtimes_{i \in I} \{x_i\}$ $\mathcal{H}$-extremálna množina, teda $(x_i)_{i \in I} \in \operatorname{Ch} K$. $\square$

Dôsledok 3.25. *Platí* $\nabla_{\mathcal{H}} K = \bigtimes_{i \in I} \nabla_{\mathcal{H}_i} K_i$.

Dôkaz. Použitím tvrdenia 2.57 a vety 3.24 dostaneme
$$\nabla_{\mathcal{H}} K = \overline{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K} = \overline{\bigtimes_{i \in I} \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}_i} K_i} = \bigtimes_{i \in I} \overline{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}_i} K_i} = \bigtimes_{i \in I} \nabla_{\mathcal{H}_i} K_i.$$

$\square$

Dôsledok 3.26. *Nech* $\mathcal{A} = \boxtimes_{i\in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$*, resp. pre* $|I| = 2$ *nech* $\mathcal{A}$ *značí ľubovoľný prípustný súčin priestorov* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1)$ *a* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$*. Potom*

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \operatorname{Ch}_{\mathcal{A}} K.$$

Dôkaz. Využijeme vetu 3.24 a tvrdenie 2.5 (d), a dostaneme

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigtimes_{i\in I} \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}_i} K_i = \bigtimes_{i\in I} \operatorname{Ch}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)} K_i = \operatorname{Ch}_{\mathcal{A}} K.$$

□

Poznámky. Grossman [14] dokázal rovnosti o Choquetovej (veta 3.24) a Šilovovej (dôsledok 3.25) hranici súčinu pre priestor $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ definovaný

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{h_1 + h_2\,;\ h_1 \in \mathcal{H}_1,\, h_2 \in \mathcal{H}_2\}, \quad \text{kde}$$
$$[h_1 + h_2](x, y) = h_1(x) + h_2(y), \quad \forall (x, y) \in K_1 \times K_2.$$

Hranica takto definovaného súčinu je teda totožná s hranicou ktoréhokoľvek prípustného súčinu, hoci $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ nemusí byť prípustný súčin, keďže nemusí platiť $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.
Kým konvexnú verziu tvrdenia 3.22, rovnako ako aj vety 3.24, možno nájsť v oboch fundamentálnych článkoch [8] a [24], tvrdenie 3.23 uvádza iba Lazar. Obe práce predpokladajú naviac simplicialitu.
Namioka a Phelps [31] uviedli ďalšie možnosti zavedenia tenzorového súčinu a zovšeobecnili vetu 3.24 pre takéto súčiny kompaktných konvexných množín.

3.3 Aproximácie $\mathcal{H}$-afinných funkcií

Odtiaľto začneme pracovať so simpliciálnymi funkčnými priestormi. Ukážeme, že každá konečná množina funkcií zo súčinu dvoch takých priestorov sa dá aproximovať špeciálnymi funkciami, ktoré majú v istom zmysle rovnaké projekcie na jeden z priestorov. Tento výsledok potom použijeme v nasledujúcej sekcii k dôkazu simpliciality súčinového priestoru.

Definícia 3.27. Nech $(K, \mathcal{H})$ je funkčný priestor. Množinu nezáporných funkcií $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{H}$ nazveme *rozkladom jednotky* na K, ak $\sum_{j=1}^m \psi_j = 1_K$.

Lemma 3.28. *Nech* $(K, \mathcal{H})$ *je simpliciálny funkčný priestor,* $\{f_i\}_{i=1}^n$*,* $\{g_i\}_{i=1}^n$ *sú dve podmnožiny* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *a nech* $\{k_l\}_{l=1}^p \subset \operatorname{Ch} K$ *(*k_l *navzájom rôzne). Predpokladajme, že existujú funkcie* $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ *definované na* $\operatorname{Ch} K$ *také, že*

$$f_i|_{\operatorname{Ch} K} \le \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\phi_j \le g_i|_{\operatorname{Ch} K}, \quad 1 \le i \le n, \tag{1}$$

pre nejaké reálne α_{ij} a nech

$$\phi_j(k_l) = \beta_{jl}, \quad 1 \le j \le m,\ 1 \le l \le p. \tag{2}$$

Potom existujú funkcie $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ také, že

$$f_i \le \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\psi_j \le g_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{3}$$

$$\psi_j(k_l) = \beta_{jl}, \quad 1 \le j \le m,\ 1 \le l \le p. \tag{4}$$

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou podľa m.

1. Predpokladajme, že $m = 1$ a máme dané

$$\begin{aligned} f_i|_{\operatorname{Ch} K} \le \alpha_{i1}\phi_1 \le g_i|_{\operatorname{Ch} K}, &\quad 1 \le i \le n,\\ \phi_1(k_l) = \beta_{1l}, &\quad 1 \le l \le p. \end{aligned} \tag{5}$$

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $\alpha_{i1} \ge 0$, $1 \le i \le n$. (Ak by bolo nejaké $\alpha_{i1} < 0$, uvažovali by sme v (5) pre i nerovnosť $-g_i|_{\operatorname{Ch} K} \le (-\alpha_{i1})\phi_1 \le -f_i|_{\operatorname{Ch} K}$.) Definujme

$$\mathscr{F}_1' := \left\{ \frac{1}{\alpha_{i1}} f_i \,;\ \alpha_{i1} \ne 0,\ 1 \le i \le n \right\},$$

$$\mathscr{F}_1'' := \left\{ \frac{1}{\alpha_{i1}} g_i \,;\ \alpha_{i1} \ne 0,\ 1 \le i \le n \right\}.$$

Podľa (5), na $\operatorname{Ch} K$ nie je žiadna funkcia $\mathscr{F}_1'$ väčšia ako funkcia $\mathscr{F}_1''$, a použitím princípu minima 2.44 toto platí na celom K. Ak definujeme

$$h_1' := \begin{cases} \max\{f \,;\ f \in \mathscr{F}_1'\}, & \mathscr{F}_1' \ne \emptyset,\\ \min\{\beta_{1l} \,;\ 1 \le l \le p\}, & \mathscr{F}_1' = \emptyset, \end{cases}$$

$$h_1'' := \begin{cases} \min\{f \,;\ f \in \mathscr{F}_1''\}, & \mathscr{F}_1'' \ne \emptyset,\\ \max\{\beta_{1l} \,;\ 1 \le l \le p\}, & \mathscr{F}_1'' = \emptyset, \end{cases}$$

potom $-h_1'$, h_1'' sú spojité $\mathcal{H}$-konkávne funkcie na K a $h_1' \le h_1''$. Naviac, $h_1'(k_l) \le \beta_{1l} \le h_1''(k_l)$, $1 \le l \le p$. Podľa dôsledku Edwardsovej vety 2.68 (dosadíme $f := h_1'$, $g := h_1''$, $E := \{k_l\}_{l=1}^p$ a $h : k_l \mapsto \beta_{1l}$) existuje funkcia $\psi_1 \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ taká, že $\psi_1(k_l) = \beta_{1l}$, $1 \le l \le p$, a $h_1' \le \psi_1 \le h_1''$. Potom zrejme ψ_1 spĺňa $f_i \le \alpha_{i1}\psi_1 \le g_i$ kedykoľvek $\alpha_{i1} \ne 0$.
Podľa (5) je

$$f_i|_{\operatorname{Ch} K} \le \alpha_{i1}\psi_1|_{\operatorname{Ch} K} \le g_i|_{\operatorname{Ch} K} \tag{6}$$

kedykoľvek $\alpha_{i1} = 0$. Z princípu minima odvodíme, že (6) platí všade na K, a tým je dokončený prvý krok dôkazu.

2. Predpokladajme teraz, že lemma platí pre $m-1$ funkcií a máme dané (1) a (2). Prepíšme (1) do tvaru

$$f_i|_{\mathrm{Ch}\,K} - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}\phi_j \le \alpha_{im}\phi_m \le g_i|_{\mathrm{Ch}\,K} - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}\phi_j, \quad 1 \le i \le n.$$

Podobne ako v prvom kroku, predpokladajme $\alpha_{im} \ge 0$, $1 \le i \le n$. Potom dostaneme

$$\frac{1}{\alpha_{im}} f_i - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{im}}\phi_j \le \phi_m \le \frac{1}{\alpha_{im}} g_i - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{im}}\phi_j \quad \text{na } \mathrm{Ch}\,K, \tag{7}$$

kedykoľvek $\alpha_{im} \ne 0$, $1 \le i \le n$. Pre každé r a s také, že $\alpha_{rm} \ne 0 \ne \alpha_{sm}$, máme teda

$$\frac{1}{\alpha_{rm}} f_r - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rm}}\phi_j \le \frac{1}{\alpha_{sm}} g_s - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{sj}}{\alpha_{sm}}\phi_j \quad \text{na } \mathrm{Ch}\,K$$

(a opačne, zámenou r a s), z čoho

$$\frac{1}{\alpha_{rm}} f_r - \frac{1}{\alpha_{sm}} g_s \le \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rm}} - \frac{\alpha_{sj}}{\alpha_{sm}}\right)\phi_j \le \frac{1}{\alpha_{rm}} g_r - \frac{1}{\alpha_{sm}} f_s \quad \text{na } \mathrm{Ch}\,K. \tag{8}$$

Pre $\alpha_{im} = 0$, $1 \le i \le n$, spĺňajú funkcie $\phi_1, \dots, \phi_{m-1}$ vzťah

$$f_i|_{\mathrm{Ch}\,K} \le \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}\phi_j \le g_i|_{\mathrm{Ch}\,K}. \tag{9}$$

Aplikáciou indukčného predpokladu na (8) a (9) (uvažujeme množiny funkcií $\{\frac{1}{\alpha_{rm}} f_r - \frac{1}{\alpha_{sm}} g_s\} \cup \{f_i\}, \{\frac{1}{\alpha_{rm}} g_r - \frac{1}{\alpha_{sm}} f_s\} \cup \{g_i\} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ cez všetky r, s také, že $\alpha_{rm} \ne 0 \ne \alpha_{sm}$ a i také, že $\alpha_{im} = 0$) vieme nájsť $\{\psi_j\}_{j=1}^{m-1} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$\psi_j(k_l) = \beta_{jl}, \quad 1 \le j \le m-1,\ 1 \le l \le p, \tag{10}$$

a

$$\frac{1}{\alpha_{rm}} f_r - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rm}}\psi_j \le \frac{1}{\alpha_{sm}} g_s - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{sj}}{\alpha_{sm}}\psi_j, \tag{11}$$

kedykoľvek $\alpha_{rm} \ne 0 \ne \alpha_{sm}$, resp.

$$f_i \le \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}\psi_j \le g_i, \tag{12}$$

ak $\alpha_{im} = 0$.
Definujme

$$\mathscr{F}'_m := \left\{ \frac{1}{\alpha_{im}} f_i - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{im}} \psi_j \,;\ \alpha_{im} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n \right\},$$

$$\mathscr{F}''_m := \left\{ \frac{1}{\alpha_{im}} g_i - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{im}} \psi_j \,;\ \alpha_{im} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Podľa (11) nie je žiadna funkcia $\mathscr{F}'_m$ väčšia ako funkcia $\mathscr{F}''_m$. Ak definujeme

$$h'_m := \begin{cases} \max\{f\,;\ f \in \mathscr{F}'_m\}, & \mathscr{F}'_m \neq \emptyset, \\ \min\{\beta_{ml}\,;\ 1 \leq l \leq p\}, & \mathscr{F}'_m = \emptyset, \end{cases}$$

$$h''_m := \begin{cases} \min\{f\,;\ f \in \mathscr{F}''_m\}, & \mathscr{F}''_m \neq \emptyset, \\ \max\{\beta_{ml}\,;\ 1 \leq l \leq p\}, & \mathscr{F}''_m = \emptyset, \end{cases}$$

potom $-h'_m, h''_m$ sú spojité $\mathcal{H}$-konkávne funkcie na K a $h'_m \leq h''_m$. Naviac (využitím (2), (7) a (10)) platí $h'_m(k_l) \leq \beta_{ml} \leq h''_m(k_l)$, $1 \leq l \leq p$. Opäť podľa dôsledku 2.68 (dosadíme $f := h'_m$, $g := h''_m$, $E := \{k_l\}_{l=1}^p$ a $h : k_l \mapsto \beta_{ml}$) existuje funkcia $\psi_m \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ taká, že $\psi_m(k_l) = \beta_{ml}$, $1 \leq l \leq p$, a $h'_m \leq \psi_m \leq h''_m$. Úpravou dostaneme (3) pre všetky i také, že $\alpha_{im} \neq 0$. Pre $\alpha_{im} = 0$ máme tvrdenie z (12).

□

Dôsledok 3.29. *Nech $(K, \mathcal{H})$ je simpliciálny funkčný priestor, $\{f_i\}_{i=1}^n$ sú funkcie z $\mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ a $\varepsilon > 0$. Predpokladajme, že $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ sú nezáporné funkcie definované na $\operatorname{Ch} K$, $\{k_l\}_{l=1}^m \subset \operatorname{Ch} K$ a $\{\alpha_{ij}\,;\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ sú reálne čísla také, že*

(i) $\sum_{j=1}^m \phi_j = 1$,
(ii) $\phi_j(k_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \leq j, l \leq m$,
(iii) $|f_i(k) - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\phi_j(k)| \leq \varepsilon, \quad k \in \operatorname{Ch} K,\ 1 \leq i \leq n.$

Potom existuje rozklad jednotky $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ tak, že

(iv) $\psi_j(k_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \leq j, l \leq m$,
(v) $|f_i(k) - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\psi_j(k)| \leq \varepsilon, \quad k \in K,\ 1 \leq i \leq n.$

Dôkaz. Z (i) a (iii) môžeme písať

$$\begin{aligned} f_i - \varepsilon - \alpha_{im} \leq \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\phi_j - \alpha_{im} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\phi_j - \alpha_{im}\sum_{j=1}^m \phi_j = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_{ij} - \alpha_{im})\phi_j \\ \leq f_i + \varepsilon - \alpha_{im} \quad \text{na } \operatorname{Ch} K, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Nezáporné funkcie $\phi_1, \ldots, \phi_{m-1}$ teda spĺňajú vzťahy

(1) $f_i - \varepsilon - \alpha_{im} \leq \sum_{j=1}^{m-1}(\alpha_{ij} - \alpha_{im})\phi_j \leq f_i + \varepsilon - \alpha_{im}$ na $\operatorname{Ch} K$, $1 \leq i \leq n$,
(2) $0 \leq \sum_{j=1}^{m-1} \phi_j \leq 1$,
(3) $0 \leq \phi_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq m-1$,
(4) $\phi_j(k_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq l \leq m$.

Podľa predošlej lemmy 3.28 existujú $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1} \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že (1)–(4) platia s ψ_j miesto ϕ_j (uvažujeme množiny funkcií $\{f_i - \varepsilon - \alpha_{im}\}_{i=1}^n \cup \{0\} \cup \{0\}_{j=1}^{m-1}, \{f_i + \varepsilon - \alpha_{im}\}_{i=1}^n \cup \{1_K\} \cup \{1_K\}_{j=1}^{m-1} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ a lemmu aplikujeme na sústavu $n+m$ nerovností daných vzťahmi (1), (2) a (3)). Novo získané vzťahy pre ψ_j označme (1*)–(4*).
Definujme $\psi_m := 1_K - \sum_{j=1}^{m-1} \psi_j$. Podľa (2*) a (3*) je $\psi_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq m$, a teda $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ je rozklad jednotky. Tvrdenie (iv) plynie z (4*) a rovnosti

$$\psi_m(k_l) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \psi_j(k_l) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \delta_{jl} = \delta_{ml}, \quad 1 \leq l \leq m,$$

tvrdenie (v) dostaneme z (1*) rovnakou úpravou ako na začiatku dôkazu. □

Lemma 3.30. *Nech K_1, K_2 sú dva kompaktné Hausdorffove priestory a $K = K_1 \times K_2$. Potom zobrazenie $\Psi : f \mapsto f_1$, kde $f \in \mathcal{C}(K)$ a*

$$\begin{aligned} f_1 : K_1 &\to \mathcal{C}(K_2) \\ k_1 &\mapsto \pi_2^{k_1}(f) \end{aligned}$$

definuje izometrický izomorfizmus priestoru $\mathcal{C}(K)$ na $\mathcal{C}(K_1, \mathcal{C}(K_2))$.

Dôkaz.

1. Uvažujme najskôr $f \in \mathcal{C}(K)$ a ukážme, že f_1 je spojitá funkcia. Zvoľme $k_1 \in K_1$ a $\varepsilon > 0$. Ku každému $x \in K$ vieme nájsť okolie $U_x \subset K$ tak, že $x \in U_x$ a $\operatorname{osc}_{U_x} f < \frac{\varepsilon}{2}$. Bez újmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $U_x = U_x^1 \times U_x^2$, kde $U_x^1 \subset K_1$ a $U_x^2 \subset K_2$ sú otvorené. Systém $\{U_x\}_{x \in K}$ tvorí otvorené pokrytie K. Vyberme konečné podpokrytie $\{U_{x_i}\}_{i=1}^p$. Potom

$$U_1 := \bigcap \{U_{x_i}^1 \,;\, k_1 \in U_{x_i}^1, 1 \leq i \leq p\}$$

je otvorené okolie k_1.
Vezmime ľubovoľné $k_1' \in U_1$. Pre každé $k_2 \in K_2$ existuje $i \in \{1, \ldots, p\}$ tak, že $(k_1, k_2) \in U_{x_i}$. Potom aj $(k_1', k_2) \in U_{x_i}$. Z toho je

$$|f(k_1, k_2) - f(k_1', k_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a teda

$$\|f_1(k_1)-f_1(k_1')\| = \|\pi_2^{k_1}(f)-\pi_2^{k_1'}(f)\| = \sup_{k_2\in K_2} |f(k_1,k_2)-f(k_1',k_2)| < \varepsilon.$$

Funkcia f_1 je preto spojitá.

2. Podľa prvého bodu dôkazu je

$$\Psi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K_1, \mathcal{C}(K_2)).$$

Ukážme, že Ψ je izomorfizmus. Nech $f, g \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Počítajme

$$\Psi(f+g)(k_1) = \pi_2^{k_1}(f+g) = \pi_2^{k_1}(f) + \pi_2^{k_1}(g) = \Psi(f)(k_1) + \Psi(g)(k_1),$$
$$\Psi(\lambda f)(k_1) = \pi_2^{k_1}(\lambda f) = \lambda\pi_2^{k_1}(f) = \lambda\Psi(f)(k_1), \quad \forall k_1 \in K_1.$$

Ψ je teda lineárne. Evidentne, Ψ je prosté. Nech $h_1 \in \mathcal{C}(K_1, \mathcal{C}(K_2))$. Definujme

$$h : K \to \mathbb{R}$$
$$h(k_1,k_2) := h_1(k_1)(k_2), \quad (k_1,k_2) \in K.$$

Nech $k = (k_1,k_2) \in K$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $U^1_{k_1} \subset K_1$ okolie k_1 také, že

$$\|h_1(k_1) - h_1(k_1')\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k_1' \in U^1_{k_1}.$$

Zo spojitosti $h_1(k_1)$ vieme zasa k bodu k_2 nájsť jeho okolie $U^2_{k_1,k_2} \subset K_2$ také, že

$$\operatorname{osc}_{U^2_{k_1,k_2}} h_1(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Preto je $U_k := U^1_{k_1} \times U^2_{k_1,k_2}$ okolie k také, že

$$|h(k) - h(k')| \le |h_1(k_1)(k_2) - h_1(k_1)(k_2')| + |h_1(k_1)(k_2') - h_1(k_1')(k_2')| < \varepsilon,$$
$$\forall k' = (k_1',k_2') \in U_k.$$

Teda $h \in \mathcal{C}(K)$ a Ψ je surjektívne.
Overme teraz izometriu. Nech $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Potom

$$\begin{aligned}\|f-g\| &= \sup_{(k_1,k_2)\in K} |f(k_1,k_2) - g(k_1,k_2)| = \sup_{(k_1,k_2)\in K} |f_1(k_1)(k_2) - g_1(k_1)(k_2)| \\ &= \sup_{k_1\in K_1}\sup_{k_2\in K_2} |f_1(k_1)(k_2) - g_1(k_1)(k_2)| = \sup_{k_1\in K_1} \|f_1(k_1) - g_1(k_1)\| \\ &= \|f_1 - g_1\| = \|\Psi(f) - \Psi(g)\|.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 3.31. *Nech $(K_1, \mathcal{H}_1)$ a $(K_2, \mathcal{H}_2)$ sú funkčné priestory, pričom $\mathcal{H}_1$ je simpliciálny. Majme dané $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{H}_2$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje rozklad jednotky $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1)$, $\{k_l\}_{l=1}^m \subset \operatorname{Ch} K_1$ a $\{y_{ij}\} \subset \mathcal{H}_2$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, tak, že*

(i) $\psi_j(k_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \le j, l \le m,$

(ii) $\left\| f_i - \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes y_{ij} \right\| < \varepsilon, \quad 1 \le i \le n.$

Dôkaz. Označme $\mathcal{H}_2^n$ n-násobný kartézsky súčin priestoru $\mathcal{H}_2$ s maximovou normou, tj.

$$\|y\|_{\max} = \max_{1 \le i \le n} \|\pi_i(y)\|, \quad \text{kde } y \in (\mathcal{H}_2)^n$$

a π_i označuje projekciu na i-tu súradnicu. Nech ďalej $B_r(x)$ značí otvorenú guľu v $\mathcal{H}_2^n$ so stredom v bode $x \in \mathcal{H}_2^n$ a polomerom $r > 0$, tj.

$$B_r(x) = \{y \in \mathcal{H}_2^n\, ;\ \|x - y\|_{\max} < r\}.$$

Nech f je funkcia z K_1 do $\mathcal{H}_2^n$ definovaná

$$f(k) := (\pi_2^k(f_1), \ldots, \pi_2^k(f_n)), \quad k \in K_1.$$

Podľa lemmy 3.30 je $\pi_i \circ f$ $(i = 1, \ldots, n)$, a teda aj f, spojitá funkcia na K_1. Pre každé $y \in \mathcal{H}_2^n$ položme

$$U_y := \left\{ k \in K_1\, ;\ \|y - f(k)\|_{\max} < \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \tag{13}$$

Systém $\{U_y\}_{y \in \mathcal{H}_2^n}$ je otvoreným pokrytím K_1. Nech $U_{y_1}, \ldots, U_{y_p}$ je konečné podpokrytie z neho vybrané. Definujme

$$V_{y_j} := U_{y_j} \cap \operatorname{Ch} K_1, \quad 1 \le j \le p.$$

Uvažujme teraz $\mathscr{V}_0 := \emptyset$ a indukciou definujme systémy $\mathscr{V}_j$, $1 \le j \le p$, podmnožín $\operatorname{Ch} K_1$ ako

$$\mathscr{V}_j := \begin{cases} \mathscr{V}_{j-1} \cup \{V_{y_j}\}, & \text{ak } \mathscr{V}_{j-1} \cup \{V_{y_j}, \ldots, V_{y_p}\} \setminus \{V_{y_j}\} \text{ nepokrýva } \operatorname{Ch} K_1, \\ \mathscr{V}_{j-1}, & \text{inak.} \end{cases}$$

Po prípadnom preznačení môžme predpokladať, že $\mathscr{V}_p = \{V_{y_l}\}_{l=1}^m$, $1 \le m \le p$. Systém $\mathscr{V}_p$ je potom otvoreným pokrytím $\operatorname{Ch} K_1$ a pre každé $l \in \{1, \ldots, m\}$ existuje $k_l \in V_{y_l}$ tak, že $k_l \notin V_{y_j}$ pre $j \neq l$, $1 \le j \le m$.

Označme

$$C := \{y_1, \ldots, y_p\} - \operatorname{co}(y_1, \ldots, y_m)$$
$$D := C + B_{\frac{\varepsilon}{3}}(0).$$

Nech $i \in \{1, \ldots, n\}$. Keďže C je kompaktná podmnožina $\mathcal{H}_2^n$, aj $\pi_i(C)$ je kompaktná podmnožina $\mathcal{H}_2$. Podľa Arzelà-Ascoliho vety sú funkcie z $\pi_i(C)$ rovnako spojité. Ku každému $\xi \in K_2$ vieme preto nájsť otvorené okolie W_ξ tak, že $\xi \in W_\xi$ a $\operatorname{osc}_{W_\xi} h < \frac{\varepsilon}{3}$ pre všetky $h \in \pi_i(C)$. Z otvoreného pokrytia $\{W_\xi\}_{\xi \in K_2}$ vyberme konečné podpokrytie $\{W_{\xi_{ir}}\}_{r=1}^{q_i}$. Pre každú $h \in \pi_i(C)$ existuje $x_h \in K_2$ tak, že $|h(x_h)| = \|h\|$. Bod x_h leží v nejakom $W_{\xi_{ir}}$, a preto $\|h\| - \frac{\varepsilon}{3} < |h(\xi_{ir})|$. Teda platí

$$\|h\| - \frac{\varepsilon}{3} < \max_{1 \le r \le q_i} |h(\xi_{ir})| \le \|h\|, \quad \forall h \in \pi_i(C),$$

a keďže $\pi_i(D) \subset \pi_i(C) + B_{\frac{\varepsilon}{3}}(0)$ (v $\mathcal{H}_2$), aj

$$\|h\| - \frac{2}{3}\varepsilon < \max_{1 \le r \le q_i} |h(\xi_{ir})| \le \|h\|, \quad \forall h \in \pi_i(D). \tag{14}$$

Nech $\Gamma_{ir} \in (\mathcal{H}_2^n)^*$ je lineárny spojitý funkcionál definovaný

$$\Gamma_{ir}(y) := \pi_i(y)(\xi_{ir}), \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le r \le q_i,\ y \in \mathcal{H}_2^n.$$

Potom môžeme z nerovnosti (14) napísať

$$\|h\|_{\max} - \frac{2}{3}\varepsilon < \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le r \le q_i}} |\Gamma_{ir}(h)| \le \|h\|_{\max}, \quad \forall h \in D. \tag{15}$$

Definujme na $\operatorname{Ch} K_1$ funkcie

$$\phi_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{ak } j = \min\{l\,;\ k \in V_{y_l},\ 1 \le l \le m\}, \\ 0, & \text{ak } j \ne \min\{l\,;\ k \in V_{y_l},\ 1 \le l \le m\}, \end{cases} \qquad 1 \le j \le m.$$

Zrejme $\phi_j \ge 0$, $\phi_j(k_l) = \delta_{jl}$ $(1 \le j, l \le m)$ a $\sum_{j=1}^m \phi_j = 1$. Naviac, pre každé $k \in \operatorname{Ch} K_1$ existuje práve jeden index j_k tak, že $\phi_{j_k}(k) \ne 0$. Pre tento index je $k \in V_{y_{j_k}}$. Teda z (13) platí

$$\|f(k) - y_{j_k}\|_{\max} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Táto nerovnosť sa dá prepísať do tvaru

$$\left\| f(k) - \sum_{j=1}^m \phi_j(k) y_j \right\|_{\max} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k \in \operatorname{Ch} K_1. \tag{16}$$

Pretože $\{V_{y_j}\}_{j=1}^m$ je pokrytie $\operatorname{Ch} K_1$, vidíme z (13), že

$$f(k) \in \{y_1, \ldots, y_m\} + B_{\frac{\varepsilon}{3}}(0), \quad k \in \operatorname{Ch} K_1.$$

Ďalej $\sum_{j=1}^m \phi_j(k)y_j \in \{y_1,\dots,y_m\}$. Dostávame teda $f(k)-\sum_{j=1}^m \phi_j(k)y_j \in D$, a využitím (15) a (16) je

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_{ir}(f(k))-\sum_{j=1}^m \phi_j(k)\Gamma_{ir}(y_j)\right| &= \left|\Gamma_{ir}\left(f(k)-\sum_{j=1}^m \phi_j(k)y_j\right)\right| \\ &\le \left\|f(k)-\sum_{j=1}^m \phi_j(k)y_j\right\|_{\max} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}, \quad 1\le i\le n,\ 1\le r\le q_i,\ k\in \operatorname{Ch} K_1.\end{aligned} \tag{17}$$

Z definícií vidíme, že $\{\Gamma_{ir}\circ f\,;\ 1\le i\le n,\ 1\le r\le q_i\}\subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1)$ a $\{\Gamma_{ir}(y_j)\,;\ 1\le i\le n,\ 1\le r\le q_i,\ 1\le j\le m\}\subset\mathbb{R}$. Aplikáciou dôsledku 3.29 na tieto funkcie a koeficienty, spĺňajúce vzťah (17), dostaneme rozklad jednotky $\{\psi_j\}_{j=1}^m\subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1)$ taký, že

$$\left|\Gamma_{ir}(f(k))-\sum_{j=1}^m \psi_j(k)\Gamma_{ir}(y_j)\right| \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad 1\le i\le n,\ 1\le r\le q_i,\ k\in K_1, \tag{18}$$

$$\psi_j(k_l)=\delta_{jl}, \quad 1\le j,l\le m. \tag{19}$$

Pretože $\{U_{y_j}\}_{j=1}^p$ pokrýva K_1, použitím (13) je

$$f(k)\in\{y_1,\dots,y_p\}+B_{\frac{\varepsilon}{3}}(0), \quad k\in K_1.$$

Ďalej $\sum_{j=1}^m \psi_j(k)y_j\in \operatorname{co}(y_1,\dots,y_m)$ pre každé $k\in K_1$, lebo $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ je rozklad jednotky. Preto $f(k)-\sum_{j=1}^m\psi_j(k)y_j\in D$ pre každé $k\in K_1$. Využitím (15) a (18) dostaneme

$$\begin{aligned}\left\|f(k)-\sum_{j=1}^m \psi_j(k)y_j\right\|_{\max}-\frac{2}{3}\varepsilon &< \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le r\le q_i}}\left|\Gamma_{ir}\left(f(k)-\sum_{j=1}^m \psi_j(k)y_j\right)\right| \\ &= \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le r\le q_i}}\left|\Gamma_{ir}(f(k))-\sum_{j=1}^m \psi_j(k)\Gamma_{ir}(y_j)\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3}, \quad k\in K_1.\end{aligned}$$

Teda

$$\left\|f(k)-\sum_{j=1}^m \psi_j(k)y_j\right\|_{\max}<\varepsilon, \quad k\in K_1. \tag{20}$$

Teraz už stačí definovať len $y_{ij}:=\pi_i(y_j)\in\mathcal{H}_2,\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$. Tvrdenie (i) potom máme z (19) a (ii) plynie z (20). □

Poznámka. Výsledky tejto sekcie vychádzajú z [25], kde sú dokázané pre konvexný prípad. Lemma 3.31 je uvedená pre afinné zdola polospojité viachodnotové zobrazenie do metrizovateľného lokálne konvexného lineárneho topologického priestoru. Lazar ju použil k dôkazu svojej selekčnej vety.

3.4 Súčin simpliciálnych priestorov

Tvrdenie 3.32. *Nech $\mathcal{H}$ je ľubovoľný prípustný súčin funkčných priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, z ktorých aspoň jeden je simpliciálny. Potom*

$$\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2).$$

Dôkaz. Použijeme postupne lemmy 3.31, 3.16, 3.15 a dostaneme

$$\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2).$$

□

Tvrdenie 3.33. *Nech $(K, \mathcal{H})$ je ľubovoľný prípustný súčin simpliciálnych funkčných priestorov $(K_1, \mathcal{H}_1)$ a $(K_2, \mathcal{H}_2)$. Potom $\mathcal{H}$ je simpliciálny.*

Dôkaz. Ukážme, že priestor $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ má W.R.I.P. Nech a, b, c, d sú funkcie z $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$ také, že $a \vee b < c \wedge d$. Keďže $c \wedge d - a \vee b$ je spojitá kladná funkcia na kompakte K, platí $c \wedge d - a \vee b > \varepsilon$ pre nejaké $\varepsilon > 0$. Podľa lemmy 3.31 vieme nájsť rozklad jednotky $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1)$, $\{k_l\}_{l=1}^m \subset \operatorname{Ch} K_1$ a funkcie $\{a_j, b_j, c_j, d_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$ tak, že

$$\psi_j(k_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \le j, l \le m, \tag{21}$$

a pre

$$\begin{aligned} a' &:= \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes a_j, \quad b' := \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes b_j, \\ c' &:= \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes c_j, \quad d' := \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes d_j, \end{aligned} \tag{22}$$

je

$$a \vee b < a' \vee b' < c' \wedge d' < c \wedge d. \tag{23}$$

Potom tiež

$$\pi_2^k(a') \vee \pi_2^k(b') < \pi_2^k(c') \wedge \pi_2^k(d'), \quad \forall k \in K_1. \tag{24}$$

Pre každé $j = 1, \ldots, m$ dostávame z (21) a (22)

$$\pi_2^{k_j}(a') = a_j, \quad \pi_2^{k_j}(b') = b_j, \quad \pi_2^{k_j}(c') = c_j, \quad \pi_2^{k_j}(d') = d_j,$$

a z (24) potom
$$a_j \vee b_j < c_j \wedge d_j.$$
Podľa vety 2.67 má priestor $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$ W.R.I.P., a preto vieme nájsť $h_j \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2)$ tak, že
$$a_j \vee b_j < h_j < c_j \wedge d_j. \tag{25}$$
Definujme $h := \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes h_j \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Potom z nezápornosti funkcií $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, nerovnosti (25) a (23) plynie
$$a \vee b < h < c \wedge d.$$
Teda $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ má W.R.I.P. a znovu podľa vety 2.67 je priestor $\mathcal{H}$ simpliciálny.

□

Veta 3.34. *Nech* $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i\in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$, *kde* $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ *sú simpliciálne funkčné priestory. Potom* $\mathcal{H}$ *je simpliciálny a* $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \boxtimes_{i\in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$.

Dôkaz.

1. Dokážme najskôr vetu pre I konečné. Pre $|I| = 2$ máme dôkaz z predošlých tvrdení. Predpokladajme, že $|I| = n > 2$ a veta platí pre $|I| \leq n-1$. Podľa lemmy 3.9 a indukčných predpokladov je
$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) &= \mathcal{A}^{\mathcal{C}}\left(\left(\boxtimes_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i\right) \boxtimes \mathcal{H}_n\right) = \left(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\left(\boxtimes_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i\right)\right) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_n) \\ &= \left(\boxtimes_{i=1}^{n-1}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right) \boxtimes \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_n) = \boxtimes_{i=1}^{n}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i).\end{aligned}$$
Znovu z indukčných predpokladov je priestor $(\boxtimes_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i) \boxtimes \mathcal{H}_n$ simpliciálny. Teda $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}((\boxtimes_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i) \boxtimes \mathcal{H}_n) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ má W.R.I.P., z čoho dostávame simplicialitu $\mathcal{H}$.
2. Nech I je nekonečná množina. Uvažujme $h \in [\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)]_f$, tj. h závislé na konečne mnohých súradniciach $I_f \subset I$. Potom
$$\pi_{I_f}(h) \in \boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}\left(\boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{H}_i\right).$$
Preto využitím lemmy 3.16 a 3.9 dostávame
$$h = \pi_{I_f}(h) \otimes 1_{\times\{K_i\,;\,i\in I\setminus I_f\}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}\left(\left(\boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{H}_i\right) \boxtimes \left(\boxtimes_{i\in I\setminus I_f}\mathcal{H}_i\right)\right) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}).$$

Podľa tvrdenia 3.11 je $[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)]_f$ hustý v $\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$. Teda

$$\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)=\overline{\left[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right]_f}\subset\overline{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}=\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}).$$

Opačnú inklúziu máme z lemmy 3.15.
Nech teraz a,b,c,d sú prvky $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})=\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ také, že $a\vee b<c\wedge d$. Podľa tvrdenia 3.11 existujú funkcie

$$a'\in\left[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right]_{I_a},\quad b'\in\left[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right]_{I_b},$$
$$c'\in\left[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right]_{I_c},\quad d'\in\left[\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)\right]_{I_d}$$

tak, že

$$a\vee b<a'\vee b'<c'\wedge d'<c\wedge d$$

a $I_f:=I_a\cup I_b\cup I_c\cup I_d$ je konečná podmnožina I. Potom máme aj

$$\pi_{I_f}(a')\vee\pi_{I_f}(b')<\pi_{I_f}(c')\wedge\pi_{I_f}(d').$$

Podľa už dokázaného je $\boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{H}_i$ simpliciálny, a teda vieme nájsť funkciu $h'\in\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{H}_i)=\boxtimes_{i\in I_f}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ takú, že

$$\pi_{I_f}(a')\vee\pi_{I_f}(b')<h'<\pi_{I_f}(c')\wedge\pi_{I_f}(d').$$

Funkcia $h:=h'\otimes 1_{\times\{K_i;\ i\in I\setminus I_f\}}\in\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)=\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ zrejme spĺňa

$$a\vee b<h<c\wedge d.$$

Teda $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ má W.R.I.P. a podľa vety 2.67 je priestor $\mathcal{H}$ simpliciálny. □

Veta 3.35. *Nech $(K,\mathcal{H})=\boxtimes_{i\in I}(K_i,\mathcal{H}_i)$, resp. pre $|I|=2$ nech $\mathcal{H}$ je ľubovoľný prípustný súčin priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, a nech $\mathcal{H}$ je simpliciálny. Potom $\mathcal{H}_i$ je simpliciálny funkčný priestor pre každé $i\in I$ a $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})=\boxtimes_{i\in I}\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$.*

Dôkaz. Opäť použijeme vlastnosť W.R.I.P. simpliciálnych priestorov. Zvoľme $i\in I$. Nech $a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ také, že $a_i\vee b_i<c_i\wedge d_i$. Označme $K':=\times_{j\in I\setminus\{i\}}K_j$. Potom podľa lemmy 3.16 sú

$$a:=a_i\otimes 1_{K'},\quad b:=b_i\otimes 1_{K'},\quad c:=c_i\otimes 1_{K'},\quad d:=d_i\otimes 1_{K'}$$

prvky $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Navyše $a \vee b < c \wedge d$. Zo simpliciality $\mathcal{H}$ existuje $h \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ tak, že

$$a \vee b < h < c \wedge d.$$

Zvoľme ľubovoľne $y \in K'$. Podľa lemmy 3.15 je $h \in \boxtimes_{j \in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_j)$, a preto $\pi_i^y(h) \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$. Keďže platí naviac

$$a_i \vee b_i < \pi_i^y(h) < c_i \wedge d_i,$$

má priestor $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ vlastnosť W.R.I.P., a teda $\mathcal{H}_i$ je simpliciálny.
Rovnosť $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = \boxtimes_{i \in I} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i)$ potom dostávame z vety 3.34, resp. tvrdenia 3.32. □

Príklad 3.36. Ukážme, že Grossmanom definovaný súčinový priestor $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ (viď poznámky k sekcii 3.2) nemusí byť simpliciálny:
Nech $K_1 = K_2 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = A([0,1])$. Zrejme $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ sú simpliciálne priestory. Označme $K := K_1 \times K_2$ a ukážme, že $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = A(K)$.

1. Zvoľme $h \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $x = (x_1, x_2) \in K$, $y = (y_1, y_2) \in K$ a $\lambda \in [0,1]$. Predpokladajme, že $h = h_1 + h_2$, kde $h_1 \in \mathcal{H}_1$ a $h_2 \in \mathcal{H}_2$. Potom platí

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= h_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + h_2(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \\ &= \lambda h_1(x_1) + (1-\lambda)h_1(y_1) + \lambda h_2(x_2) + (1-\lambda)h_2(y_2) \\ &= \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \end{aligned}$$

   Teda $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \subset A(K)$.
2. Nech $h \in A(K)$. Z elementárnej geometrie vieme, že existujú konštanty $a, b, c \in \mathbb{R}$ také, že

$$h(k_1, k_2) = ak_1 + bk_2 + c, \quad k_1 \in K_1,\ k_2 \in K_2.$$

   Potom $h_1(k_1) := ak_1$ a $h_2(k_2) := bk_2 + c$ je hľadaný rozklad h.

Množina $K = [0,1]^2$ nie je simplex, pretože napríklad k bodu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ existujú dve maximálne reprezentujúce miery $\mu_1 := \frac{\varepsilon_{(0,0)}}{2} + \frac{\varepsilon_{(1,1)}}{2}$ a $\mu_2 := \frac{\varepsilon_{(0,1)}}{2} + \frac{\varepsilon_{(1,0)}}{2}$. Skutočne,

$$\mu_1(f) = \frac{\varepsilon_{(0,0)}}{2}(f) + \frac{\varepsilon_{(1,1)}}{2}(f) = \frac{f(0,0)}{2} + \frac{f(1,1)}{2} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad f \in A(K).$$

Podobne sa ukáže, že μ_2 reprezentuje bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a maximalita plynie z faktu, že obe miery sú nesené množinou extremálnych bodov K.

Poznámky. Lazar [24] dokázal, že súčin simplexov, definovaný ako stavový priestor spojitých multiafinných funkcií, je simplex. Využil pri tom svoje

predchádzajúce výsledky [23], [25] a výsledky Lindenstraussa [26] a ukázal, že priestor multiafinných funkcií má vlastnosť F.2.I.P.
Davies a Vincent-Smith [8] naviac ukázali, že takto definovaný súčin možno považovať za projektívny tenzorový súčin kompaktných konvexných podmnožín topologických priestorov. Ďalej dokázali, že slabý tenzorový súčin simpliciálnych priestorov uzavretých na operáciu $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ je simpliciálny. Pri dôkazoch použili zväzovú vlastnosť a R.I.P.
Oba články predpokladajú simplicialitu pôvodných priestorov, preto ani v jednom z nich nie je analógia vety 3.35 o obrátení vety o simplicialite súčinu. Túto myšlienku možno vidieť až v [31].

3.5 Maximálne miery

Uvažujme ďalej $(K, \mathcal{H}) = \boxtimes_{i\in I}(K_i, \mathcal{H}_i)$. Pre $|I| = 2$ bude $\mathcal{H}$ značiť ľubovoľný prípustný súčin priestorov $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$.

Lemma 3.37. *Nech* $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ *a* $i \in I$. *Potom* $\operatorname{spt} \pi_i\mu = \pi_i(\operatorname{spt} \mu)$.

Dôkaz.

1. Ukážme $\operatorname{spt} \pi_i\mu \subset \pi_i(\operatorname{spt} \mu)$. Nech $G_i = K_i \setminus \pi_i(\operatorname{spt} \mu)$. Potom

$$0 = \mu(G_i \times \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} K_j) = (\pi_i\mu)(G_i).$$

2. Nech naopak $G_i = K_i \setminus \operatorname{spt} \pi_i\mu$. Potom

$$0 = (\pi_i\mu)(G_i) = \mu(G_i \times \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} K_j),$$

a teda $\operatorname{spt} \mu \subset K \setminus (G_i \times \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} K_j)$, z čoho $\pi_i(\operatorname{spt} \mu) \subset \operatorname{spt} \pi_i\mu$.

□

Lemma 3.38. *Nech* $\mu_i \in \mathcal{M}^1(K_i)$ *pre všetky* $i \in I$. *Potom*

$$\operatorname{spt} \bigotimes_{i\in I} \mu_i = \bigtimes_{i\in I} \operatorname{spt} \mu_i.$$

Dôkaz. Označme $\mu := \bigotimes_{i\in I} \mu_i$. Z lemmy 3.37 plynie, že $\operatorname{spt} \mu \subset \bigtimes_{i\in I} \operatorname{spt} \mu_i$. Predpokladajme pre spor, že existuje $x \in (\bigtimes_{i\in I} \operatorname{spt} \mu_i) \setminus \operatorname{spt} \mu$. Potom existuje otvorené okolie $G = \bigtimes_{i\in I_f} G_i \times \bigtimes_{i\in I\setminus I_f} K_i$ bodu x disjunktné s $\operatorname{spt} \mu$, kde $I_f \subset I$ je konečná a $G_i \subset K_i$, $i \in I_f$, je otvorená. Teda platí

$$\mu(G) = \prod_{i\in I_f} \mu_i(G_i) > 0,$$

čo je spor.

□

Tvrdenie 3.39. *Nech $x = (x_i)_{i\in I} \in K$. Potom $F_x(\mathcal{H}) = \bigtimes_{i\in I} F_{x_i}(\mathcal{H}_i)$.*

Dôkaz. Ukážme najskôr $F_x(\mathcal{H}) \subset \bigtimes_{i\in I} F_{x_i}(\mathcal{H}_i)$. Pre každú mieru $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $i \in I$ je podľa lemmy 3.37 $\pi_i(\operatorname{spt}\nu) = \operatorname{spt}\pi_i\nu$, a keďže podľa tvrdenia 3.13 je $\pi_i\nu \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i)$, platí $\pi_i(\operatorname{spt}\nu) \subset F_{x_i}(\mathcal{H}_i)$. Preto aj $\pi_i(F_x(\mathcal{H})) \subset F_{x_i}(\mathcal{H}_i)$ pre všetky $i \in I$.
Nech naopak $\nu_i \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i)$ pre každé $i \in I$. Podľa tvrdenia 3.14 je $\nu := \bigotimes_{i\in I} \nu_i \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, a teda z lemmy 3.38 je $\bigtimes_{i\in I} \operatorname{spt}\nu_i = \operatorname{spt}\nu \subset F_x(\mathcal{H})$. □

Tvrdenie 3.40. *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ je $\mathcal{H}$-maximálna. Potom pre každé $J \subset I$ je $\pi_J(\mu)$ $(\boxtimes_{i\in J} \mathcal{H}_i)$-maximálna miera .*

Dôkaz. Nech $J \subset I$. Označme $\mathcal{H}_J := \boxtimes_{i\in J} \mathcal{H}_i$. Podľa tvrdenia 2.43 stačí ukázať, že $F_{\pi_J(x)}(\mathcal{H}_J) \subset \pi_J(F_x(\mathcal{H}))$ pre všetky $x \in K$. To je ale pravda, lebo z tvrdenia 3.39 máme

$$F_{\pi_J(x)}(\mathcal{H}_J) = \bigtimes_{i\in J} F_{x_i}(\mathcal{H}_i) = \pi_J(\bigtimes_{i\in I} F_{x_i}(\mathcal{H}_i)) = \pi_J(F_x(\mathcal{H})),$$

kde $x = (x_i)_{i\in I} \in K$. □

Lemma 3.41. *Nech $\mu \preceq_{\mathcal{H}} \nu$, kde $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom pre každé $J \subsetneq I$ platí $\pi_J(\mu) \preceq_{\boxtimes_{i\in J}\mathcal{H}_i} \pi_J(\nu)$.*

Dôkaz. Zvoľme $w_J \in \mathcal{W}(\boxtimes_{i\in J} \mathcal{H}_i)$. Označme $K' := \bigtimes_{i\in I\setminus J} K_i$. Potom $w := w_J \otimes 1_{K'} \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$. Preto $\mu(w) \le \nu(w)$, a teda platí

$$\pi_J(\mu)(w_J) = \mu(w) \le \nu(w) = \pi_J(\nu)(w_J).$$

Pretože w_J bolo ľubovoľné, dostávame z tvrdenia 2.31 $\pi_J(\mu) \preceq \pi_J(\nu)$. □

Tvrdenie 3.42. *Nech $|I| = 2$ a $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ je taká, že $\pi_i\mu$ je $\mathcal{H}_i$-maximálna miera pre $i = 1, 2$. Potom μ je $\mathcal{H}$-maximálna.*
Špeciálne, ak $\mu_i \in \mathcal{M}^1(K_i)$ je $\mathcal{H}_i$-maximálna miera pre $i = 1, 2$, potom $\mu_1 \otimes \mu_2$ je $\mathcal{H}$-maximálna.

Dôkaz. Nech $h \in \mathcal{H}$. Podľa lemmy 3.30 je $\Psi : x_1 \mapsto \pi_2^{x_1}(h)$ spojité zobrazenie kompaktu K_1 do normovaného priestoru $\mathcal{H}_2$, a teda má separabilný obor hodnôt. Zvoľme množinu $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hustú v $\Psi(K_1)$. Využitím maximality miery $\pi_2\mu$ a Battyho vety 2.36 je každá h_n konštantná na $F_{x_2}(\mathcal{H}_2)$ pre $\pi_2\mu$-skoro všetky $x_2 \in K_2$. Tj. pre každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$E_n := \{x_2 \in K_2\,;\ h_n = h_n(x_2) \text{ na } F_{x_2}(\mathcal{H}_2)\}$$

je $(\pi_2\mu)(E_n) = \|\pi_2\mu\| = \|\mu\|$. Definujme $E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Potom $(\pi_2\mu)(E) = \|\mu\|$ a všetky h_n, $n \in \mathbb{N}$, sú konštantné na $F_{x_2}(\mathcal{H}_2)$ pre $x_2 \in E$. Keďže

$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je hustá v $\Psi(K_1)$, potom aj všetky $\pi_2^{x_1}(h)$, $x_1 \in K_1$, sú konštantné na $F_{x_2}(\mathcal{H}_2)$ pre každé $x_2 \in E$. Dostávame teda, že pre každé $x \in K_1 \times E$ platí

$$h(x_1, y) = h(x_1, \pi_2(x)), \quad x_1 \in K_1,\ y \in F_{\pi_2(x)}(\mathcal{H}_2). \tag{26}$$

Vzťah (26) preto platí pre μ-skoro všetky $x \in K$, keďže $\mu(K_1 \times E) = \|\mu\|$. Analogicky odvodíme, že pre μ-skoro všetky $x \in K$ platí

$$h(y, x_2) = h(\pi_1(x), x_2), \quad y \in F_{\pi_1(x)}(\mathcal{H}_1),\ x_2 \in K_2. \tag{27}$$

Z (26) a (27) plynie, že pre μ-skoro všetky $x \in K$ platí

$$h(x_1, x_2) = h(\pi_1(x), \pi_2(x)), \quad x_1 \in F_{\pi_1(x)}(\mathcal{H}_1),\ x_2 \in F_{\pi_2(x)}(\mathcal{H}_2). \tag{28}$$

Podľa tvrdenia 3.39 je $F_x(\mathcal{H}) = F_{\pi_1(x)}(\mathcal{H}_1) \times F_{\pi_2(x)}(\mathcal{H}_2)$ pre každé $x \in K$, a preto z (28) dostávame, že pre μ-skoro všetky $x \in K$ je h konštantná na $F_x(\mathcal{H})$. Keďže $h \in \mathcal{H}$ bola ľubovoľná funkcia, je μ podľa Battyho vety 2.36 $\mathcal{H}$-maximálna miera.
Špeciálne tvrdenie plynie z faktu, že $\pi_i(\mu_1 \otimes \mu_2) = \mu_i,\ i = 1, 2$. □

Veta 3.43. *Nech $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ je taká, že $\pi_i\mu$ je $\mathcal{H}_i$-maximálna miera pre každé $i \in I$. Potom μ je $\mathcal{H}$-maximálna.*
Špeciálne, ak $\mu_i \in \mathcal{M}^1(K_i)$ je $\mathcal{H}_i$-maximálna miera pre každé $i \in I$, potom $\mu := \bigotimes_{i\in I} \mu_i$ je $\mathcal{H}$-maximálna.

Dôkaz. Pre $|I| = 2$ máme dôkaz z tvrdenia 3.42. Predpokladajme, že veta platí pre $|I| \leq n$ a nech $|I| = n + 1$. Vieme, že $\pi_{n+1}(\mu)$ je maximálna miera. Keďže $\pi_i(\pi_{\{1,\dots,n\}}\mu) = \pi_i\mu$ je maximálna miera pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$, z indukčného predpokladu je $\pi_{\{1,\dots,n\}}\mu$ ($\boxtimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$)-maximálna miera. Obe projekcie sú teda maximálne miery, a preto je μ podľa tvrdenia 3.42 $((\boxtimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i) \boxtimes \mathcal{H}_{n+1})$-maximálna miera a vzhľadom k lemme 3.9 aj $\mathcal{H}$-maximálna.
Nech teraz I je ľubovoľné. Podľa Choquet-Bishop-de Leeuwovej vety 2.38 existuje maximálna miera $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ tak, že $\mu \preceq \nu$. Zvoľme ľubovoľnú konečnú množinu $J \subset I$. Podľa lemmy 3.41 je $\pi_J(\mu) \preceq \pi_J(\nu)$. Z prvej časti dôkazu je ale $\pi_J(\mu)$ maximálna miera (lebo $\pi_i(\pi_J\mu) = \pi_i\mu$ pre každé $i \in J$), a preto $\pi_J(\nu) = \pi_J(\mu)$. Z toho dostávame, že pre každú konečnú množinu $J \subset I$ a každú $E = \bigtimes_{i\in I} E_i$, kde E_i je borelovská množina na K_i pre všetky $i \in I$ a $E_i = K_i$ pre $i \in I \setminus J$, platí

$$\nu(E) = \pi_J(\nu)(\bigtimes_{i\in J} E_i) = \pi_J(\mu)(\bigtimes_{i\in J} E_i) = \mu(E).$$

Pretože miery μ a ν sa zhodujú na množinách hore uvedeného tvaru, ako nezáporné úplné Radonove miery sa musia rovnať. Teda μ je maximálna miera. □

Veta 3.44. *Predpokladajme, že $\mathcal{H}_i$ sú simpliciálne priestory pre všetky $i \in I$. Potom pre každé $x = (x_i)_{i\in I} \in K$ je $\delta_x = \bigotimes_{i\in I} \delta_{x_i}$.*

Dôkaz. Podľa tvrdenia 3.14 je $\bigotimes_{i\in I} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a podľa vety 3.43 je táto miera maximálna. Keďže veta 3.34 (resp. tvrdenie 3.33) nám dáva simpliciálitu $\mathcal{H}$, musí byť $\delta_x = \bigotimes_{i\in I} \delta_{x_i}$. □

Príklad 3.45. Pre funkčné priestory $(K_i, \mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, a ich prípustný súčin $(K, \mathcal{H})$ platí využitím tvrdenia 3.14 inklúzia

$$\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathcal{M}_{x_1}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{M}_{x_2}(\mathcal{H}_2)) \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{H}), \quad x = (x_1, x_2) \in K, \tag{29}$$

kde $\mathcal{M}_{x_1}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{M}_{x_2}(\mathcal{H}_2) := \{\mu_1 \otimes \mu_2\,;\, \mu_i \in \mathcal{M}_{x_i}(\mathcal{H}_i),\ i = 1, 2\}$. Ukážme, že v (29) nemusí vždy platiť rovnosť.
Definujme $K_i := \{r_i, s_i, t_i\}$, $\mathcal{H}_i := \{f \in \mathcal{C}(K_i)\,;\, f(s_i) = \frac{1}{2}(f(r_i)+f(t_i))\}$, $i = 1, 2$. Potom $\mathcal{M}_{s_i}(\mathcal{H}_i) = \mathrm{co}\,\{\varepsilon_{s_i}, \frac{\varepsilon_{r_i}+\varepsilon_{t_i}}{2}\}$. Nech teraz $(K, \mathcal{H})$ je prípustný súčin $(K_1, \mathcal{H}_1)$ a $(K_2, \mathcal{H}_2)$. Označme

$$C := \mathrm{co}\,\{\varepsilon_{s_1} \otimes \varepsilon_{s_2},\ \varepsilon_{s_1} \otimes \frac{\varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{t_2}}{2},\ \frac{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{t_1}}{2} \otimes \varepsilon_{s_2},\ \frac{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{t_1}}{2} \otimes \frac{\varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{t_2}}{2}\}.$$

Potom $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathcal{M}_{s_1}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{M}_{s_2}(\mathcal{H}_2)) = C$. Uvažujme ďalej mieru

$$\mu := \frac{\varepsilon_{(s_1,t_2)}}{2} + \frac{\varepsilon_{(r_1,r_2)}}{4} + \frac{\varepsilon_{(t_1,r_2)}}{4}.$$

Zrejme je $\mu \in \mathcal{M}_{(s_1,s_2)}(\mathcal{H})$. Pre všetky body $x \in K \setminus \{(s_1, t_2), (r_1, r_2), (t_1, r_2)\}$ je $\mu(\{x\}) = 0$. Ak by ale μ bola prvkom C, potom by musel mať aspoň jeden z bodov $(s_1, s_2), (s_1, r_2), (r_1, s_2), (r_1, t_2)$ nenulovú mieru.

Problém 4. Platí v (29) rovnosť, ak budeme na oboch stranách uvažovať iba maximálne reprezentujúce miery?

Poznámky. Tvrdenie o maximalite súčinu maximálnych mier dokázali pre simplexy Behrends a Wittstock [4]. Charakterizáciu maximálnych mier na súčine všeobecných kompaktných konvexných množín (tvrdenia 3.40 a 3.42) dokázal Batty [3].

Literatúra

[1] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[2] L. Asimow and A. J. Ellis, *Convexity theory and its applications in functional analysis*, Academic Press, London-New York, 1980.

[3] C. J. K. Batty, *Maximal measures on tensor products of compact convex sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **33** (1982), 1–10.

[4] E. Behrends und G. Wittstock, *Tensorprodukte kompakter konvexer Mengen*, Invent. Math. **10** (1970), 251–266.

[5] E. Bishop and K. de Leeuw, *The representations of linear functionals by measures on sets of extreme points*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **9** (1959), 305–331.

[6] N. Boboc et A. Cornea, *Cônes des fonctions continues sur un espace compact* C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 2564–2567.

[7] N. Boboc and A. Cornea, *Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **12** (1967), 471–525.

[8] E. B. Davies and G. F. Vincent-Smith, *Tensor products, infinite products, and projective limits of Choquet simplexes*, Math. Scand. **22** (1968), 145–164.

[9] D. A. Edwards, *Minimum-stable wedges of semicontinuous functions*, Math. Scand. **19** (1966), 15–26.

[10] D. A. Edwards, *Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet*, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 2798–2800.

[11] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[12] D. H. Fremlin, *Measure Theory, vol. 2*, Torres Fremlin, 2001.

[13] D. H. Fremlin, *Measure Theory, vol. 4*, Torres Fremlin, 2003.

[14] M. W. Grossman, *A Choquet boundary for the product of two compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 967–971.

[15] G. Choquet, *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **243** (1956), 699–702.

[16] G. Choquet, *Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **243** (1956), 736–737.

[17] G. Choquet, *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, Séminaire Bourbaki **139**, Décembre 1956.

[18] G. Choquet, *Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **10** (1960), 333–344.

[19] G. Choquet, *Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés*, C. R. Acad. Sci. Paris **243** (1956), 555–557.

[20] G. Choquet et P.-A. Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **13** (1963), 139–154.

[21] K. Jacobs, *Measure and integral*, Academic Press, New York-London, 1978.

[22] M. Krein and D. Milman, *On extreme points of regular convex sets*, Studia Math. **9** (1940), 133–138.

[23] A. J. Lazar, *Affine functions on simplexes and extreme operators*, Israel J. Math. **5** (1967), 31–43.

[24] A. J. Lazar, *Affine products of simplexes*, Math. Scand. **22** (1968), 165–175.

[25] A. J. Lazar, *Spaces of affine continuous functions on simplexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 503–525.

[26] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. No. **48**, 1964.

[27] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, 2003.

[28] J. Lukeš a J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 2002.

[29] J. Milota, *Matematická analýza I, 2. část*, SPN, Praha, 1976.

[30] G. Mokobodzki, *Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques sur un espace compact*, C. R. Acad. Sci. Paris **254** (1962), 803–805.

[31] I. Namioka and R. R. Phelps, *Tensor products of compact convex sets*, Pacific J. Math. **31** (1969), 469–480.

[32] I. Netuka, *The Dirichlet problem for harmonic functions*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 621–628.

[33] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, 1966.

[34] F. Riesz, *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires*, Ann. of Math. **41** (1940), 174–206.

[35] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.

[36] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions. Vol. I.*, Monografie Matematyczne, Tom 55. PWN—Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1971.

Zoznam symbolov

$\emptyset$	prázdna množina, 8
$\vee$	bodové maximum, 8
$\wedge$	bodové minimum, 8
$\curlyvee$	najmenšia horná závora, 8
$\curlywedge$	najväčšia dolná závora, 8
$\preceq$	čiastočné usporiadanie, 7
$\preceq, \preceq_{\mathcal{H}}$	Choquetovo usporiadanie, 24
$\rightrightarrows$	rovnomerná konvergencia, 15
$\prod_{i\in I} a_i$	súčin reálnych čísel, 11
$\bigtimes_{i\in I} K_i$	kartézsky súčin, 8
$\bigotimes_{i\in I} \mu_i$	súčin Radonových mier, 12
$\boxtimes_{i\in I} \mathcal{H}_i$	multiafinný súčin, 49
1_K	konštantná jednotka, 7
$A(K)$	spojité afinné funkcie, 7
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$-afinné funkcie, 13
$\mathcal{A}^{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$	spojité $\mathcal{H}$-afinné funkcie, 14
$\mathcal{B}(K)$	borelovské funkcie, 7
$\mathcal{B}_b(K)$	ohraničené borelovské funkcie, 7
$\mathcal{C}(K)$	spojité funkcie, 7
$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K, \operatorname{Ch} K$	Choquetova hranica, 13
$\operatorname{co} A$	konvexný obal, 5
$\overline{\operatorname{co}}\, A$	uzavretý konvexný obal, 5
δ_{ij}	Kroneckerovo delta, 61
δ_x	unikátna maximálna reprezentujúca miera, 36
ε_x	Diracova miera, 11
$\operatorname{Exp}_{\mathcal{H}} K$	$\mathcal{H}$-exponované body, 13
$\operatorname{ext} K$	extremálne body, 5
$f^*, f_*, \widehat{\mathcal{H}}$	obálky, 14
$f_1 \otimes f_2$	tenzorový súčin funkcií, 9
$F_x(\mathcal{H})$	zjednotenie nosičov reprezentujúcich mier, 26
$\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$	algebraický tenzorový súčin, 49
$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$	injektívny tenzorový súčin, 49
$\mathcal{H}_f$	funkcie závislé na konečne súradniciach, 51
$\mathcal{H}_J$	funkcie závislé na súradniciach z J, 51
$\mathcal{K}(\mathcal{H})$	zdola polospojité $\mathcal{H}$-konkávne funkcie, 13

Register