Posudek vedoucího práce Kristýny Zemkové

Vítězslav Kala

30. května 2018

Hlavním tématem diplomové práce Kristýny Zemkové je zobecnění korespondence mezi grupou tříd forem a ideálů, a poté Bhargavovy teorie skládání binárních kvadratických forem na případ obecnějších číselných těles. Jedná se o klasickou, ale zároveň velmi moderní část teorie čísel, což je patrné už jen z toho, že Bhargava v roce 2014 obdržel Fieldsovu medaili za výsledky stavějící na tomto výzkumu. Historie a motivace celého problému je přehledně shrnutá v pěkně napsaném úvodu práce.

V odborné literatuře se objevují v zásadě dva přístupy ke zobecnění Bhargavova přístupu – dá se k němu přistoupit velmi abstraktně využitím algebraické geometrie nebo komutativní algebry, což umožňuje pokrýt velmi obecnou třídu těles, ale má za nevýhodu ztrátu explicitního, (relativně) elementárního přístupu. Nebo je možné postupovat podobně elementárně jako v původních Bhargavových článcích, což ale potom vynutí omezení jen na některá číselná tělesa. Posuzovaná práce jde tímto druhým směrem a nakolik je mi známo, dosahuje v tomto směru zatím nejobecnějších výsledků, kdy je potřeba pouze předpoklad, že dané číselné těleso má úzké třídové číslo jedna.

Druhá kapitola práce již byla zaslaná k publikaci v kvalitním mezinárodním časopise; v návaznosti na ně by měly být v brzké době zaslané i výsledky ze zbytku práce.

K obsahu práce: přehledová první kapitola buduje teorii relativních kvadratických rozšíření číselných těles $K(\sqrt{D}) \supset K$ a odpovídajících kvadratických forem a (orientovaných) ideálů. Toho je pak v druhé kapitole využito k formulaci a důkazu první hlavní věty 2.7 celé práce o korespondenci grupy tříd binárních kvadratických forem daného diskriminantu nad tělesem K a grupy tříd orientovaných ideálů příslušného kvadratického rozšíření. Jedná se o poměrně netriviální a technicky náročnou záležitost, pro niž autorka napřed musela sama přijít na správný způsob zobecnění použitých pojmů z klasického případu.

Třetí kapitola pak přináší alternativní pohled na skládání forem pomocí Bhargavových krychlí. Druhým hlavním výsledkem posuzované práce je věta 3.14, udávající korespondenci mezi skládáním krychlí a balancovaných trojic ideálů. Kromě samotného obecného tvrzení je originálním přínosem autorky i to, že využitím bijekce z druhé kapitoly se může vyhnout výpočetně velmi náročnému řešení jisté soustavy rovnic, které bylo třeba v původních pracích o skládání krychlí (viz sekce 3.5). Závěrečná čtvrtá kapitola práce pak shrnuje vztah mezi úzkou a běžnou grupou tříd ideálů.

Práce je psaná velmi čtivě a přehledně a obsahuje jen minimální množství chyb a překlepů; čtivosti práce značně napomáhají časté neformální vysvětlující a motivující komentáře. Za zmínku také jistě stojí fakt, že studentka pracovala převážně samostatně, jen s občasnými drobnými podněty z mé strany. Autorka se přitom nejprve musela seznámit s důležitými oblastmi algebraické teorie čísel, a potom jich inovativně využít značně netriviálním způsobem k definování potřebných zobecnění základních pojmů a důkazu několika nových, velmi obecných a zajímavých vět.

Jde tedy o velmi kvalitní práci, již proto doporučuji uznat jako diplomovou a hodnotit stupněm *výborně*.

Vítězslav Kala
Katedra algebry