

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jana Šafránková

Mnohorozměrné modely typu ARCH a GARCH

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: **Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.**

Studijní program: Matematika, Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí mé práce, Doc. Práškové, za cenné rady, připomínky a hlavně za čas, který mi věnovala.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 18. dubna 2007

Bc. Jana Šafránková

Obsah

1	Úvod	6
2	Použité pojmy a značení	7
2.1	Náhodná veličina	7
2.2	Náhodný proces	10
2.3	Náhodný vektor	12
2.4	Operace s maticemi	14
3	Odvození ARCH a GARCH modelů	16
3.1	ARMA modely	16
3.2	Odvození ARCH a GARCH modelů	17
4	Jednorozměrné modely typu ARCH a GARCH	19
4.1	Existence ARCH procesu	19
4.2	Pravděpodobnostní charakteristiky ARCH procesu	20
4.3	Pravděpodobnostní charakteristiky AR-ARCH procesu	21
4.4	Jednorozměrné modely typu GARCH	23
5	Mnohorozměrné modely typu ARCH	25
6	Přehled mnohorozměrných modelů typu GARCH	27
6.1	Zobecnění jednorozměrného GARCH modelu	28
6.1.1	VEC a BEKK modely	28
6.1.2	Faktorové modely	29
6.2	Lineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH	30
6.2.1	Ortogonální modely	30
6.3	Nelineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH	31
6.3.1	Modely podmíněných korelací	31
6.3.2	Kopula-mnohorozměrné GARCH modely	35
6.4	Pákový efekt v mnohorozměrných modelech typu GARCH	35
7	Odhady parametrů	36
7.1	Metoda maximální věrohodnosti	36
8	Adekvátnost odhadnutých modelů	40
8.1	Portmanteau statistiky	41
8.2	Testy založené na Lagrangeových multiplikátorech	43
8.3	Testy založené na reziduích	44

9 Aplikace na finanční časové řady	45
9.1 Simulace jednorozměrných ARCH modelů	47
9.2 Simulace mnohorozměrných ARCH modelů	51
9.3 Použití mnohorozměrných GARCH modelů pro reálná data	58
10 Závěr	71
Literatura	72

Název práce: *Mnohorozměrné modely typu ARCH a GARCH*

Autor: *Bc. Jana Šafránková*

Katedra: *Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Vedoucí diplomové práce: *Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., KPMS*

e-mail vedoucího: *praskova@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt: Zabýváme se studiem mnohorozměrných modelů typu ARCH a GARCH a jejich následnou aplikací na simulovaná i reálná data. Jedná se o modely podmíněné varianční matice, která je vyjádřena v závislosti na minulých pozorováních zkoumaného procesu. V případě GARCH modelů je podmíněná varianční matice závislá také na svých předchozích hodnotách. Nejprve pojednáváme o jednorozměrných modelech typu ARCH a GARCH pro získání teoretického základu, který je dále rozšířen pro mnohorozměrné modely. Velkou část práce tvoří přehled mnohorozměrných modelů typu GARCH. Následně se věnujeme odhadu parametrů těchto modelů metodou maximální věrohodnosti a pojednáváme o alternativách k mnohorozměrnému normálnímu rozdělení, které je standardním předpokladem při použití této metody. Zabýváme se také testy daných modelů, jak předběžnými, tak i zpětnými pro ověření kvality vytvořených modelů. Na závěr se věnujeme praktickým příkladům, které ukazují úskalí použití těchto modelů pro reálná data.

Klíčová slova: vektorový proces, podmíněná heteroskedasticita, GARCH model, VEC model, maximálně věrohodný odhad

Title: *Multivariate ARCH and GARCH Models*

Author: *Bc. Jana Šafránková*

Department: *Institute of Probability and Mathematical Statistics*

Supervisor: *Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., KPMS*

Supervisor's e-mail address: *praskova@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract: We study multivariate ARCH and GARCH models and their subsequent application to simulated and real data. In discussed models the conditional variance matrix is considered to be a function of lagged data process which is the subject of study. In case of GARCH models the conditional variance matrix is dependent on own lagged values, too. First of all, we deal with univariate ARCH and GARCH models to get some theoretical basis. The subsequent study extends this basis to multivariate models. A survey of multivariate GARCH models is presented in the next part of this thesis. Further study is devoted to maximum likelihood estimators of these models and we deal with alternatives to multivariate normal distribution which is a standard assumption of this method. We occupy ourselves with tests of these models, too. We mention both preestimation tests and postestimation tests to verify the adequacy of models. In conclusion we give practical examples which show difficulties of applications of these models for real data.

Keywords: vector process, conditional heteroscedasticity, GARCH model, VEC model, maximum likelihood estimator

Kapitola 1

Úvod

Modely časových řad se používají pro popis chování dat a následnou předpověď jejich vývoje. V sedmdesátých letech dvacátého století se výzkum soustředil na lineární modely, zejména na smíšené modely autoregrese a klouzavých součtů, tzv. ARMA modely. Tyto modely vyjadřují současnou hodnotu řady, která je předmětem studia, jako lineární funkci jejích vlastních zpožděných hodnot a zároveň současné a minulých hodnot nějakého šumového procesu, který je nazýván inovačním procesem. Linearita modelu ale bohužel znemožňuje jeho použití pro mnohé řady dat, se kterými se setkáváme v praxi. Jedná se hlavně o finanční časové řady vykazující nelineární vývoj, který vychází ze silné závislosti současné hodnoty řady na jejích předchozích pozorováních.

Z tohoto hlediska se autoregresní podmíněně heteroskedastické modely, tzv. ARCH modely představené v článku [5] v roce 1982, staly vhodným nástrojem pro řešení mnoha finančních úloh. Jedná se o druh nelineárních modelů, které umožňují dostatečně přesnou studii nelineárních dat. Volatilita je klíčovou veličinou pro mnoho finančních instrumentů a má důležitou roli v mnoha oblastech finančnictví. Například v modelech oceňování aktiv, při určování cen opcí a v dynamických strategiích zajištění.

Druhá kapitola této práce je věnována souhrnu použitých pojmů a značení z teorie pravděpodobnosti a z teorie matic. Následuje kapitola, v níž odvozujeme jednorozměrné ARCH a GARCH modely, ve čtvrté kapitole popisujeme základní charakteristiky jednorozměrných modelů typu ARCH a GARCH. V dalším textu hovoříme již o mnohorozměrných modelech typu ARCH a GARCH. Pátá kapitola popisuje mnohorozměrné ARCH modely a šestá kapitola podává rozsáhlý přehled mnohorozměrných modelů typu GARCH. V následujících dvou kapitolách se věnujeme odhadu a testování uvedených mnohorozměrných modelů. Dále navazuje praktická část se simulacemi modelů a s jejich aplikacemi na finanční časové řady. Poslední desátá kapitola vyjadřuje naše vlastní poznatky a důležité poznámky k tomuto tématu.

Pro výpočty jsme použili program MATLAB 6.5, který umožňuje snadné zacházení s maticemi. V prostředí MATLABu jsme dále pracovali s knihovnou procedur Statistics 4.0, která obsahuje mnoho funkcí pro určení popisných statistik, a s knihovnou procedur GARCH 1.0.2, kterou jsme použili při samotném odhadu parametrů v modelech typu ARCH a GARCH. Hlavní zásady práce s knihovnou procedur GARCH se lze dočíst v uživatelské příručce, kde jsou uvedeny veškeré možnosti jejího využití včetně příkladů. Dále jsme pracovali s programem NCSS & PASS 2000, který jsme použili pro rychlý výpočet popisných statistik. Vedlejší matematické výpočty jsme počítali pomocí programu Mathematica 5, jednalo se převážně o integrální počet.

Kapitola 2

Použité pojmy a značení

Nejprve zopakujeme definice pojmů z teorie pravděpodobnosti a teorie náhodných procesů, které jsou často používané v následujících kapitolách o mnohorozměrných ARCH a GARCH modelech. Pro vyjádření pravděpodobnostního prostoru zde používáme značení (Ω, \mathcal{A}, P) . Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ je σ -algebra a P je pravděpodobnostní míra na \mathcal{A} , tj. $P(\Omega) = 1$.

2.1 Náhodná veličina

Náhodnou veličinou rozumíme zobrazení $X : \Omega \mapsto E$ s hodnotami v měřitelném prostoru (E, \mathcal{E}) , jestliže se jedná o měřitelné zobrazení, tj. platí-li

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \quad \text{pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Tuto skutečnost označujeme zápisem $X : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (E, \mathcal{E})$. Dále používáme značení \mathbb{R} pro množinu reálných čísel a \mathbb{B} pro borelovskou σ -algebru množiny reálných čísel. Budeme říkat, že X je reálná náhodná veličina, je-li náhodnou veličinou s hodnotami v (\mathbb{R}, \mathbb{B}) . Analogicky použijeme značení $\overline{\mathbb{R}}$ pro rozšířenou množinu reálných čísel a $\overline{\mathbb{B}}$ pro borelovskou σ -algebru rozšířené množiny reálných čísel. Řekneme, že X je zobecněná reálná náhodná veličina, je-li náhodnou veličinou s hodnotami v $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$. V následujících odstavcích se věnujeme popisu charakteristik náhodné veličiny X , které se používají v teorii mnohorozměrných ARCH a GARCH modelů.

Nejprve uvedme definici střední hodnoty zobecněné reálné náhodné veličiny. Její vyjádření přebíráme z ([10], definice 5.1.).

Definice 2.1.1. *Pro zobecněnou reálnou náhodnou veličinu X definovanou na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) definujeme její **střední hodnotu** jako číslo $EX = \int_{\Omega} X dP$, jestliže daný integrál existuje. Pokud neexistuje, pak říkáme, že X nemá střední hodnotu.*

Následující tvrzení známé jako Jensenova nerovnost uvádíme podle ([2], věta 7.84.). Toto tvrzení uvádí vztah mezi funkcí střední hodnoty a střední hodnotou dané funkce.

Tvrzení 2.1.1. *Nechť f je konvexní funkce definovaná na I a nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou taková, že $P(X \in I) = 1$. Pak platí*

$$f(EX) \leq E f(X). \tag{2.1}$$

Je-li f striktně konvexní funkce, pak je nerovnost (2.1) ostrá s výjimkou případu, kdy je veličina X rovna konstantě s pravděpodobností jedna.

Ve ([2], str. 145) lze nalézt citace, které podávají důkazy tohoto tvrzení. Dále zavedeme značení pro různé množiny náhodných veličin:

- množina všech reálných náhodných veličin definovaných na (Ω, \mathcal{A})

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}),$$

- pro každé $1 \leq p < \infty$

$$\mathbb{L}_p = \mathbb{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}) : E|X|^p < \infty\},$$

- množina všech zobecněných reálných náhodných veličin definovaných na (Ω, \mathcal{A})

$$\mathbb{L}^* = \mathbb{L}^*(\Omega, \mathcal{A}).$$

Další důležitou charakteristikou náhodné veličiny je rozptyl, který je definován jako druhý centrální moment

$$\text{var } X = E(X - EX)^2.$$

Specielně $(\text{var } X)^{1/2}$ se nazývá směrodatná odchylka neboli volatilita náhodné veličiny. Ve finanční matematice vyjadřuje volatilita kurzové riziko.

Velmi často používaným pojmem je v následujícím také podmíněná střední hodnota náhodné veličiny. Uvádíme zde její definici, kterou zavádí ([10], definice 7.1.).

Definice 2.1.2. *Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je σ -algebra. Pak každou reálnou náhodnou veličinu Y , která splňuje následující dvě vlastnosti:*

$$(i) Y \in (\Omega, \mathcal{B}, P/\mathcal{B}),$$

$$(ii) \int_B Y dP = \int_B X dP \text{ pro každou množinu } B \in \mathcal{B},$$

nazveme **podmíněnou střední hodnotou** náhodné veličiny X vzhledem k σ -algebře \mathcal{B} (neboli při podmínce \mathcal{B}) a budeme označovat $E[X|\mathcal{B}]$. V literatuře se také setkáme s označeními $E^{\mathcal{B}}X$, $E_{\mathcal{B}}X$. Protože podmíněná střední hodnota není určena jednoznačně, označujeme $E[X|\mathcal{B}]$ množinu všech podmíněných středních hodnot $E[X|\mathcal{B}]$.

Pro osvětlení výpočtů s podmíněnými středními hodnotami, které jsou uvedeny v dalších kapitolách, nyní uvedeme dvě tvrzení převzatá z ([10], věta 7.5., věta 7.13.).

Tvrzení 2.1.2. *Pro náhodné veličiny $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a σ -algebru $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ platí následující čtyři vlastnosti:*

$$(i) \text{ pro konstanty } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ platí}$$

$$E[aX + bY + c|\mathcal{B}] = aE[X|\mathcal{B}] + bE[Y|\mathcal{B}] + c \quad \text{s.j.},$$

$$(ii) \text{ jestliže je } X \leq Y \text{ s.j., potom } E[X|\mathcal{B}] \leq E[Y|\mathcal{B}] \text{ s.j.},$$

$$(iii) \text{ vždy platí } E[E[X|\mathcal{B}]] = EX,$$

(iv) pokud je náhodná veličina X \mathcal{B} -měřitelná, potom $E[X|\mathcal{B}] = X$ s.j.

Tvrzení 2.1.3. Pro náhodnou veličinu $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ σ -algebru platí následující čtyři vlastnosti:

(i) jsou-li $Y \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{B})$ a $XY \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, potom platí

$$E[XY|\mathcal{B}] = YE[X|\mathcal{B}] \quad \text{s.j.},$$

(ii) je-li $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ další σ -algebra, potom platí

$$E[E[X|\mathcal{B}]|\mathcal{C}] = E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}] = E[X|\mathcal{C}] \quad \text{s.j.},$$

(iii) když jsou $\sigma(X)$ a \mathcal{B} dvě nezávislé σ -algebry, potom platí

$$E[X|\mathcal{B}] = EX \quad \text{s.j.},$$

(iv) jsou-li $X_n \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq Z$ s.j., $Z \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $X_n \rightarrow X$ pro $n \rightarrow \infty$ s.j., potom pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$E[X_n|\mathcal{B}] \rightarrow E[X|\mathcal{B}] \quad \text{s.j.}$$

Důkazy obou tvrzení lze nalézt v ([10], str. 35–36, str. 39–41).

Podobně jako jsme definovali podmíněnou střední hodnotu lze definovat také podmíněný rozptyl. Za předpokladu $EX^2 < \infty$ platí rovnice

$$\text{var}[X|\mathcal{B}] = E[(X - E[X|\mathcal{B}])^2|\mathcal{B}].$$

Následující tvrzení umožňuje vyjádřit rozptyl prostřednictvím podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu, přebíráme jej ze ([2], věta 3.26.).

Tvrzení 2.1.4. Je-li $EX^2 < \infty$. Potom platí rovnice

$$\text{var} X = \text{var}(E[X|\mathcal{B}]) + E(\text{var}[X|\mathcal{B}]).$$

Důkaz tvrzení lze nalézt ve ([2], str. 58).

Při odhadu parametrů budeme pracovat s podmíněným rozdělením, uvedme zde proto jeho definici pro náhodnou veličinu, přebíráme ji z ([10], definice 9.1.).

Definice 2.1.3. Necht' $X: (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (E, \mathcal{E})$, $Y: (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (H, \mathcal{H})$ jsou náhodné veličiny s hodnotami v měřitelných prostorech. **Podmíněným rozdělením** náhodné veličiny X za podmínky náhodné veličiny Y budeme rozumět funkci

$$P_{X|Y}: \mathcal{E} \times H \mapsto [0, 1]: (B, y) \mapsto P_{X|Y}(B, y),$$

která splňuje následující tři podmínky:

(i) pro každé $y \in H$ je množinová funkce $B \mapsto P_{X|Y}(B, y)$ pravděpodobnostní mírou na \mathcal{E} ,

(ii) pro každé $B \in \mathcal{E}$ je funkce $y \mapsto P_{X|Y}(B, y)$ \mathcal{H} -měřitelná,

(iii) pro každé $B \in \mathcal{E}$ a $C \in \mathcal{H}$ platí

$$\int_C P_{X|Y}(B|y) dP_Y(y) = P(X \in B, Y \in C).$$

Symbolem $\mathcal{L}(X|Y)$ budeme označovat množinu všech podmíněných rozdělení X za podmínky Y , tedy všech funkcí $P_{X|Y}$. Mnohdy se však podmíněné rozdělení přímo označuje symbolem $\mathcal{L}(X|Y)$.

2.2 Náhodný proces

Nyní již přikročíme k definici náhodného procesu a jeho vlastností, které se používají při popisu mnohorozměrných ARCH a GARCH modelů. Následující definici náhodného procesu přebíráme ze ([13], definice 1.1.).

Definice 2.2.1. *Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá **náhodný proces**.*

V případě, že $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$, hovoříme o procesu s diskrétním časem neboli o časové řadě. Časová řada tedy vzniká realizací náhodného procesu, tj. systému náhodných veličin $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, mluvíme o procesu se spojitým časem.

Každé konečné podmnožině $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ lze přiřadit systém náhodných veličin X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Příslušný systém distribučních funkcí nazýváme konzistentní, jsou-li pro $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ splněny obě dvě následující vlastnosti:

- (i) pro libovolnou permutaci i_1, \dots, i_n čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

- (ii) $\lim_{x_{n+1} \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Ke každému náhodnému procesu tedy existuje konzistentní systém distribučních funkcí.

Zadefinujme dále ještě gaussovský náhodný proces podle ([13], definice 1.6.).

Definice 2.2.2. *Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme **gaussovský** neboli **normální**, jestliže jsou všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální, tedy platí-li, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ má vektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ n -rozměrné normální rozdělení $N_n(\mathbf{m}_n, \mathbf{V}_n)$, kde $\mathbf{m}_n = (E X_{t_1}, \dots, E X_{t_n})'$ a*

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} \text{var } X_{t_1} & \text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \dots & \text{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \text{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \text{var } X_{t_2} & \dots & \text{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \text{cov}(X_{t_n}, X_{t_2}) & \dots & \text{var } X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

V teorii mnohorozměrných modelů typu ARCH a GARCH se při odvozování popisných charakteristik používají pojmy slabá a striktní stacionarita. Jejich definice přebíráme ze ([13], definice 1.8., definice 1.7.).

Definice 2.2.3. *Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ s konečnými druhými momenty se nazývá **slabě stacionární**, má-li konstantní střední hodnotu $\mu_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ a je-li jeho autokovarianční funkce $R(s, t)$ pouze funkcí rozdílu $(s - t)$. Je-li splněna jenom podmínka na autokovarianční funkci, mluvíme o **kovarianční stacionaritě**.*

Definice 2.2.4. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **striktně stacionární**, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná x_1, \dots, x_n a pro libovolná t_1, \dots, t_n a h taková, že $t_k \in T$, $t_k + h \in T$ pro $1 \leq k \leq n$, platí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n).$$

Striktně stacionární náhodný proces tedy má stejně rozdělené náhodné veličiny a jejich charakteristiky zůstávají stejné při posunu v čase.

Následující tvrzení vypovídají o vzájemném vztahu slabé a striktní stacionarity, jsou převzata ze ([13], věta 1.3., věta 1.2.).

Tvrzení 2.2.1. Slabě stacionární gaussovský proces $\{X_t, t \in T\}$ je i striktně stacionární.

Tvrzení 2.2.2. Striktně stacionární náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ s konečnými druhými momenty je i slabě stacionární.

Důkazy obou výše uvedených tvrzení lze nalézt ve ([13], str. 10, str. 9).

V následujícím textu používáme pro zjednodušení zápisu pojem stacionární proces pro označení slabě stacionárního procesu.

Uvažujeme-li náhodný proces $\{\epsilon_t, t \in T\}$, ve kterém mají všechny náhodné veličiny nulovou střední hodnotu, v čase konstantní konečný rozptyl σ^2 , a kde jsou všechny jednotlivé náhodné veličiny vzájemně nekorelované, tj. platí

$$E \epsilon_t \epsilon_s = 0 \quad \text{pro} \quad \forall t, s \in T, t \neq s. \quad (2.2)$$

Potom takový náhodný proces nazýváme homoskedastickým procesem. Pro takto definovaný náhodný proces $\{\epsilon_t, t \in T\}$ používáme také označení bílý šum se zkratkou $WN(0, \sigma^2)$ podle anglického názvu white noise. Všimněme si, že takto definovaný bílý šum splňuje podmínky definice 2.2.3. a jedná se proto o slabý bílý šum. Je-li posloupnost $\{\epsilon_t, t \in T\}$ posloupností iid (independent identically distributed), tj. nezávislých stejně rozdělených, náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným druhým momentem, pak mluvíme o striktním bílém šumu. Statistický model, ve kterém je chybový náhodný proces bílým šumem, nazýváme homoskedastickým modelem.

Jestliže náhodný proces $\{\epsilon_t, t \in T\}$ tvoří náhodné veličiny, které mají nulové střední hodnoty, v čase proměnlivé rozptyly $\sigma^2 k_t$ s neznámými hodnotami k_t pro každé $t \in T$ a které splňují rovnici (2.2), tj. jsou-li všechny náhodné veličiny vzájemně nekorelované, pak takový náhodný proces nazýváme heteroskedastickým procesem a můžeme jej také nazývat heteroskedastickým bílým šumem. Zcela analogicky lze definovat podmíněnou heteroskedasticitu neboli měnící se rozptyl podmíněně vůči informaci, kterou známe z minulosti.

Dále definujeme kauzální lineární proces podle definice uvedené ve ([13], definice 5.2.).

Definice 2.2.5. Nechť $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum a $\{\Lambda_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost konstant taková, že $\sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_j| < \infty$. Náhodná posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j \epsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

se nazývá **kauzální lineární proces**.

Kauzalita tedy vyjadřuje skutečnost, že náhodnou veličinu X_t lze vyjádřit pomocí současné a minulých hodnot veličin ϵ_s , $s \leq t$.

Nyní následuje definice ergodické posloupnosti podle kvadratického středu, kterou přebíráme ze ([13], definice 6.1.).

Definice 2.2.6. Řekneme, že stacionární posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se střední hodnotou μ je **ergodická podle kvadratického středu**, neboli splňuje zákon velkých čísel v $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jestliže pro $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \rightarrow \mu \quad \text{podle kvadratického středu.}$$

Každá ergodická posloupnost podle kvadratického středu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tedy splňuje i slabý zákon velkých čísel pro stacionární posloupnosti, tj. platí, že pro $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \rightarrow \mu \quad \text{v pravděpodobnosti.}$$

Definice 2.2.7. **Posloupností martingalových diferencí** nazýváme posloupnost $\{X_t, t \in T\}$, jestliže je splněna podmínka podmíněné střední hodnoty

$$E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = 0 \quad \text{pro } \forall t \in T.$$

Pro posloupnost martingalových diferencí $\{X_t, t \in T\}$ lze za použití tvrzení 2.1.3., vlastnosti (ii), odvodit nepodmíněnou střední hodnotu a nekorelovanost jejích jednotlivých veličin

$$\begin{aligned} E X_t &= E[E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]] = 0 \quad \text{pro } \forall t \in T, \\ E X_t X_s &= E[E[X_t X_s | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]] = E[X_s E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]] = \\ &= 0 \quad \text{pro } \forall t, s \in T, t > s. \end{aligned}$$

O nekorelované veličiny se samozřejmě jedná i v případě, kdy nastane opačná nerovnost. Tedy pro každá $t, s \in T, t < s$, kde je ve výpočtu použita podmíněná střední hodnota vzhledem k posloupnosti veličin X_{s-1}, X_{s-2}, \dots . Pokud bude navíc druhý moment posloupnosti martingalových diferencí $\{X_t, t \in T\}$ konstantní, tj. $E X_t^2 = k$ pro každé $t \in T$, potom můžeme tuto posloupnost nazvat slabým bílým šumem.

2.3 Náhodný vektor

Řekneme, že $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$ je N -rozměrný náhodný vektor, jedná-li se o náhodnou veličinu s hodnotami v měřitelném prostoru $(\times_{i=1}^N E_i, \otimes_{i=1}^N \mathcal{E}_i)$. N -rozměrný reálný náhodný vektor \mathbf{X} definujeme jako náhodnou veličinu s hodnotami v $(\mathbb{R}^N, \mathbb{B}^N)$ pro nějaké přirozené číslo N . Nechť má náhodný vektor \mathbf{X} vektor střední hodnoty $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$ a varianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ řádu N , kde $\boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})']$. Označme $\tilde{\mathbf{X}}$ normovaný náhodný vektor \mathbf{X} ,

$$\tilde{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}).$$

N -rozměrný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$ má N -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a pozitivně definitní varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$, jestliže má jeho hustota tvar

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Skutečnost, že má náhodný vektor \mathbf{X} výše popsané rozdělení, zkráceně zapisujeme prostřednictvím $\mathbf{X} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Příslušný normovaný vektor $\tilde{\mathbf{X}}$ má v tomto případě rozdělení $\tilde{\mathbf{X}} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Významnou třídou mnohorozměrných rozdělení jsou tzv. elipticky vrstevnicová rozdělení. Následující definici elipticky vrstevnicového rozdělení přebíráme z ([8], str. 107), kde se lze dočíst i o dalších vlastnostech této třídy rozdělení. Před samotnou definicí elipticky vrstevnicového rozdělení ještě připomeňme definici charakteristické funkce náhodného vektoru, jak ji uvádí ([10], definice 15.3.).

Definice 2.3.1. Pro reálný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)'$ zavedeme komplexní funkci

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E[\exp(it'\mathbf{X})] \quad \text{pro } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$$

a budeme ji nazývat **charakteristická funkce** náhodného vektoru \mathbf{X} . Často se lze v literatuře setkat i s označením Fourierův obraz míry $P_{\mathbf{X}}$.

Definice 2.3.2. Nechť \mathbf{X} je náhodný vektor typu $N \times 1$ s vektorem střední hodnoty $\boldsymbol{\mu}$ typu $N \times 1$ a s pozitivně semidefinitní varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$ řádu N . Pak říkáme, že má náhodný vektor \mathbf{X} **elipticky vrstevnicové rozdělení**, jestliže lze jeho charakteristickou funkci zapsat rovnicí

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(it'\boldsymbol{\mu})\psi(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t})$$

pro nějakou funkci ψ . Poznamenejme, že takto uvedená charakteristická funkce $\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ je funkcí kvadratické formy $\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}$.

Jako příklad elipticky vrstevnicového rozdělení uveďme mnohorozměrné normální rozdělení. Pro N -rozměrný náhodný vektor \mathbf{X} s N -rozměrným normálním rozdělením, $\mathbf{X} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, má charakteristická funkce tvar

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(it'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right) \quad \text{pro } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N.$$

Okamžitě vidíme, že tento tvar charakteristické funkce odpovídá předchozí definici. V současnosti je třídě eliptických rozdělení věnována velká pozornost, protože mnoho výsledků platných pro mnohorozměrné normální rozdělení platí i pro tuto obecnou třídu rozdělení.

Označme s_N N -rozměrnou šikmost podle anglického názvu skewness a označme k_N N -rozměrnou špičatost podle anglického názvu kurtosis. Šikmost a špičatost jsou důležitými popisnými statistikami při hledání správného rozdělení pro pozorovaná data. Následující vyjádření mnohorozměrné šikmosti a špičatosti přebíráme z ([9], str. 77–78).

Mnohorozměrnou šikmostí náhodného vektoru \mathbf{X} budeme rozumět

$$s_N = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})]^3, \quad (2.3)$$

kde \mathbf{Y} označuje nezávislý a stejně rozdělený náhodný vektor vzhledem k náhodnému vektoru \mathbf{X} . Použitím normovaných vektorů $\tilde{\mathbf{X}}$ a $\tilde{\mathbf{Y}}$ lze vzorec (2.3) přepsat do tvaru

$$s_N = E(\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{Y}})^3.$$

V jednorozměrném případě definujeme šikmost jako $s_1^{1/2}$. Pro jakýkoliv středově symetrický náhodný vektor \mathbf{X} je tedy šikmost nulová a zešikmeným náhodným vektorem budeme v následujícím rozumět takový náhodný vektor, jehož šikmost je různá od nuly. Výběrový odhad mnohorozměrné šikmosti založený na náhodném výběru $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T$ má tvar

$$s_N^* = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T [(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})]^3,$$

kde $\bar{\mathbf{X}}$ značí vektor výběrové střední hodnoty a \mathbf{S} značí výběrovou varianční matici. Pro $\bar{\mathbf{X}}$ a \mathbf{S} platí vztahy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{X}_i, \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'. \end{aligned}$$

Pro mnohorozměrnou špičatost náhodného vektoru \mathbf{X} zde budeme používat vyjádření

$$k_N = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})]^2. \quad (2.4)$$

Uvedený vzorec (2.4) lze použitím Euklidovské normy přepsat do tvaru

$$k_N = E(\|\tilde{\mathbf{X}}\|)^4.$$

Zde hodnota k_1 skutečně odpovídá definici jednorozměrné špičatosti. Speciálně pro N -rozměrné normální rozdělení lze výpočet příslušné špičatosti vyjádřit součinem $k_N = N(N+2)$. Špičatým náhodným vektorem budeme rozumět náhodný vektor s hodnotou špičatosti převyšující hodnotu špičatosti náhodného vektoru téhož rozměru, který má normální rozdělení. Výběrový odhad mnohorozměrné špičatosti lze za výše uvedeného značení zapsat rovnicí

$$k_N^* = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T [(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})]^2.$$

V ([9], str. 77–84) se lze dočíst o dalších definicích mnohorozměrné šikmosti a špičatosti a o některých asymptotických charakteristikách příslušných výběrových odhadů.

2.4 Operace s maticemi

Pro větší názornost operací se čtvercovými maticemi budeme v následujícím textu používat operátory $vec(\cdot)$, $vch(\cdot)$ a $vch^l(\cdot)$. Operátor $vec(\cdot)$ přiřadí čtvercové matici řádu n vektor typu $n^2 \times 1$, který obsahuje jednotlivé sloupcové vektory dané matice zapsané pod sebe. Jako ilustrační příklad uveďme čtvercovou matici \mathbf{A} řádu 3, která má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = (a, d, g, b, e, h, c, f, i)' .$$

Obdobnou funkci zastává operátor $\text{vech}(\cdot)$, který pracuje se symetrickými čtvercovými maticemi a po sloupcích zapisuje do sloupcového vektoru pouze prvky z dolní trojúhelníkové části dané matice. Ze symetrické čtvercové matice řádu n tedy vytvoří vektor typu $[n(n+1)/2] \times 1$. Pro ilustraci zde uveďme symetrickou čtvercovou matici \mathbf{B} řádu 3 ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} ,$$

potom platí

$$\text{vech}(\mathbf{B}) = (a, b, c, d, e, f)' .$$

Operátor $\text{vech}^l(\cdot)$ je podobný operátoru $\text{vech}(\cdot)$, ale pracuje pouze s těmi prvky dané matice, které leží pod hlavní diagonálou. Ze symetrické čtvercové matice řádu n tedy vznikne vektor typu $[n(n-1)/2] \times 1$. Pro výše uvedenou matici \mathbf{B} platí

$$\text{vech}^l(\mathbf{B}) = (b, c, e)' .$$

Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n nazýváme diagonální maticí řádu n , jestliže pro ni platí rovnice

$$\mathbf{A} = (\delta_{ij}a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

kde δ_{ij} označuje Kroneckerův symbol. V následujícím textu budeme diagonální matici řádu n zapisovat jako $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Největší vlastní číslo matice \mathbf{A} v absolutní hodnotě nazýváme spektrálním poloměrem matice \mathbf{A} a označujeme jej $r(\mathbf{A})$. Spektrální poloměr matice \mathbf{A} tedy splňuje vzorec $r(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i|$, kde λ_i označují vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $m \times n$ definujeme Hadamardův součin $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ jako matici typu $m \times n$ obsahující prvkové součiny, tedy jako matici s prvky $(a_{ij}b_{ij})$.

Definice 2.4.1. *Nechť \mathbf{A} je matice typu $m \times n$ a \mathbf{B} je matice typu $p \times q$, potom matici*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

typu $mp \times nq$ nazýváme **Kroneckerovým součinem** matic \mathbf{A} a \mathbf{B} , který symbolicky zapisujeme rovnicí

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} .$$

Kapitola 3

Odvození ARCH a GARCH modelů

3.1 ARMA modely

Od doby, kdy Engle v roce 1982 publikoval článek [5] s názvem Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, byly tradiční smíšené modely autoregrese a klouzavých součtů popisující střední hodnotu analogicky rozšířeny pro popis rozptylu. Autoregresní podmíněně heteroskedastické modely jsou nyní široce používány pro popis a předpověď změn volatility finančních časových řad.

V autoregresních modelech klouzavých součtů, tzv. ARMA modelech, se používá inovační proces $\{\epsilon_t\}$, který je tvořený posloupností homoskedastických náhodných veličin neboli použitý proces $\{\epsilon_t\}$ je bílým šumem. ARMA(p, q) model náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat

$$Y_t + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t + \Theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \Theta_q \epsilon_{t-q}, \quad (3.1)$$

kde $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q$ jsou reálné konstanty a $\Phi_p \neq 0, \Theta_q \neq 0$. Rovnici (3.1) lze přepsat použitím operátoru zpětného posunutí L definovaného předpisem $LY_t = Y_{t-1}$. Zavedeme polynomy

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= 1 + \Phi_1 L + \dots + \Phi_p L^p, \\ \Theta(L) &= 1 + \Theta_1 L + \dots + \Theta_q L^q \end{aligned}$$

a potom přepíšeme rovnici (3.1) do následujícího tvaru

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\epsilon_t. \quad (3.2)$$

Podmínky na kauzalitu ARMA(p, q) procesu uvádí následující tvrzení převzaté ze ([13], věta 5.6.).

Tvrzení 3.1.1. *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná posloupnost ARMA(p, q) daná vztahem (3.2). Nechť polynomy $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ nemají společné kořeny a nechť polynom $\Phi(z) = 1 + \Phi_1 z + \dots + \Phi_p z^p$ má všechny kořeny vně jednotkového kruhu. Potom lze Y_t psát ve tvaru*

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j \epsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde jsou koeficienty Λ_j určeny vztahem

$$\Lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$$

Důkaz lze nalézt ve ([13], str. 68–69).

3.2 Odvození ARCH a GARCH modelů

Uvažujme nejprve autoregresní model prvního řádu

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad |\gamma| < 1,$$

kde je $\{\epsilon_t\}$ striktní bílý šum s $\text{var } \epsilon_t = \sigma^2$. Střední hodnoty a rozptyly náhodné veličiny Y_t nepodmíněné i podmíněné vůči informaci z minulosti mají následující vyjádření:

$$\begin{aligned} \text{E} Y_t &= 0 \quad \text{a} \quad \text{E}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots] = \gamma Y_{t-1}, \\ \text{var } Y_t &= \sigma^2 / (1 - \gamma^2) \quad \text{a} \quad \text{var}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots] = \sigma^2. \end{aligned}$$

Lze proto očekávat lepší předpovědní výsledky, pokud máme k dispozici informaci z minulosti.

Model, ve kterém podmíněný rozptyl závisí na minulých pozorováních řady lze zapsat například ve tvaru

$$Y_t = \epsilon_t Y_{t-1}.$$

Zde je podmíněný rozptyl $\text{var}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$ roven $\sigma^2 Y_{t-1}^2$, ale nepodmíněný rozptyl Y_t může být nula nebo nekonečno, proto je tento model nepoužitelný a byly hledány jiné modely.

ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity) modely jsou založeny na autoregresním vyjádření podmíněného rozptylu. ARCH(q) model je definován jako proces $\{\epsilon_t\}$, pro který platí rovnice podmíněných momentů

$$\begin{aligned} \text{E}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= 0, \\ \text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= h_t = c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q \epsilon_{t-q}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ARCH(q) model můžeme zapsat také v následující autoregresní reprezentaci. Zaved'me posloupnost $\{U_t\}$, kde $U_t = \epsilon_t^2 - h_t$. Potom

$$\text{E}[U_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] = \text{E}[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] - h_t = 0. \quad (3.4)$$

Tedy $\{U_t\}$ je posloupnost martingalových diferencí (vzhledem k filtraci \mathcal{F}_{t-1} , což je σ -algebra generovaná náhodnými veličinami $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$). Dále lze z tvrzení 2.1.3., vlastnosti (ii) o opakované podmíněné střední hodnotě odvodit vztahy

$$\begin{aligned} \text{E} U_t &= 0, \\ \text{E} U_t U_s &= 0 \quad \text{pro } t \neq s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Potom dosazením za h_t z rovnic (3.3) do vyjádření posloupnosti U_t získáme rovnici

$$\epsilon_t^2 = c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q \epsilon_{t-q}^2 + U_t. \quad (3.6)$$

Vzhledem k tomu, že chybová složka $\{U_t\}$ obecně nemá konstantní rozptyl, nazýváme vyjádření (3.6) autoregresní reprezentace veličin ϵ_t^2 s heteroskedastickým bílým šumem.

Podle původního článku [5] můžeme všechny diskrétní náhodné procesy $\{\epsilon_t\}$, které lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \sigma_t Z_t, \\ Z_t & \text{ iid, } \quad \mathbb{E} Z_t = 0, \quad \text{var } Z_t = 1,\end{aligned}$$

kde je σ_t kladná, měřitelná a v čase proměnlivá funkce vzhledem k informační množině známé do času $t - 1$, nazývat ARCH model.

GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) modely uvažují podmíněný rozptyl nejen v závislosti na předchozích pozorováních procesu, ale také v závislosti na časově zpožděných hodnotách podmíněných rozptylů. GARCH(p, q) model je tedy definován jako posloupnost $\{\epsilon_t\}$, pro kterou platí rovnice podmíněných momentů

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= 0, \\ \text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= h_t = c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q \epsilon_{t-q}^2 + \\ &+ b_1 h_{t-1} + \dots + b_p h_{t-p}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Takto definovaný GARCH(p, q) model lze vyjádřit v ARMA reprezentaci. Podobně jako v předchozím textu pro ARCH(q) model označme $U_t = \epsilon_t^2 - h_t$, potom opět platí rovnice (3.4) a (3.5). Dosazením za h_t z výrazu (3.7) do vyjádření posloupnosti U_t získáme rovnice

$$\begin{aligned}\epsilon_t^2 &= c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q \epsilon_{t-q}^2 + b_1 (\epsilon_{t-1}^2 - U_{t-1}) + \dots + b_p (\epsilon_{t-p}^2 - U_{t-p}) + U_t, \\ \epsilon_t^2 &= c + \sum_{i=1}^{\max\{p, q\}} (a_i + b_i) \epsilon_{t-i}^2 + U_t - \sum_{j=1}^p b_j U_{t-j},\end{aligned}\tag{3.8}$$

kde $a_i = 0$ pro $i > q$ a $b_i = 0$ pro $i > p$. Toto je ARMA($\max\{p, q\}, p$) zápis procesu $\{\epsilon_t^2\}$, ale s chybovou složkou $\{U_t\}$, která opět nemusí mít konstantní rozptyl a jedná se tedy o heteroskedastický bílý šum.

Kromě samotného GARCH modelu můžeme v praxi uvažovat i složitější modely, ve kterých je chybový proces modelován jako GARCH model. Můžeme například uvažovat lineární regresní model s GARCH chybami

$$Y_t = X_t b + \epsilon_t, \quad \text{kde } \{\epsilon_t\} \sim \text{GARCH}(p, q)$$

nebo ARMA model uvedený v rovnici (3.2), kde je chybový proces $\{\epsilon_t\}$ modelován jako GARCH(p, q) model.

Kapitola 4

Jednorozměrné modely typu ARCH a GARCH

V předchozí kapitole jsme zavedli procesy ARCH(q) a GARCH(p, q). Zabývejme se nyní některými vlastnostmi těchto procesů. Pro jednoduchost budeme v následujícím uvažovat ARCH(1) model ve tvaru

$$E[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] = 0, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

$$\epsilon_t^2 = c + a\epsilon_{t-1}^2 + U_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

a budeme předpokládat, že je $\{U_t\}$ striktní bílý šum.

4.1 Existence ARCH procesu

Nejprve poznamenejme, že rekurzivní rovnice (4.2) není postačující pro jednoznačnost definice procesu $\{\epsilon_t^2\}$. Musí být doplněna počáteční podmínkou na střední hodnotu procesu $\{\epsilon_t^2\}$ v čase 0. Víme, že střední hodnota druhé mocniny procesu $\{\epsilon_t\}$ je

$$m_t = E\epsilon_t^2 = c + am_{t-1},$$

kde známe počáteční hodnotu m_0 . Abychom zajistili časovou stálost této střední hodnoty, předpokládáme následující dvě podmínky:

(i) $|a| < 1$,

(ii) počáteční podmínka $m_0 = \frac{c}{1-a} > 0$.

Navíc musí být zajištěna i kladnost procesu $\{\epsilon_t^2\}$. Postačující podmínky jsou $a > 0$ a $c + u_t \geq 0$ pro všechny možné hodnoty u_t náhodné veličiny U_t . Odtud se tedy hodnoty parametru a dále omezí na hodnoty intervalu $(0, 1)$ a hodnoty parametru c se omezí na hodnoty intervalu $(0, \infty)$.

Zbývá ověřit, že podmínky (4.1) a (4.2) na proces $\{\epsilon_t\}$ jsou vzájemně slučitelné. Uvažujme dva nezávislé procesy $\{Z_t\}$ a $\{\delta_t\}$. Proces $\{Z_t\}$ nabývá kladných hodnot

$$Z_t = c + aZ_{t-1} + U_t.$$

Náhodné veličiny δ_t jsou vzájemně nezávislé, stejně rozdělené a takové, že platí

$$P[\delta_t = +1] = P[\delta_t = -1] = \frac{1}{2}.$$

Potom proces $\{\epsilon_t\}$ definovaný jako $\epsilon_t = Z_t^{1/2}\delta_t$ splňuje obě podmínky (4.1) a (4.2).

4.2 Pravděpodobnostní charakteristiky ARCH procesu

Podmínka (4.1) znamená, že proces $\{\epsilon_t\}$ splňuje podmínku ortogonalitativity vůči minulosti, neboť platí, že

$$\begin{aligned} E \epsilon_t \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-2} \dots &= E(E[\epsilon_t \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-2} \dots | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots]) = \\ &= E(E[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-2} \dots) = 0. \end{aligned}$$

Tato podmínka s sebou přináší tři následující důsledky:

(D.I) Proces $\{\epsilon_t\}$ je ortogonální k minulým hodnotám s libovolným zpožděním

$$E[\epsilon_t | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = 0, \quad \forall h > 0$$

podle tvrzení 2.1.3., vlastnosti (ii).

(D.II) Uvažujeme-li dvě kladná celá čísla k a h

$$\begin{aligned} \text{cov}[(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] &= E[\epsilon_t \epsilon_{t+k} | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = \\ &= E[E[\epsilon_t \epsilon_{t+k} | \epsilon_{t+k-1}, \epsilon_{t+k-2}, \dots] | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = \\ &= E[\epsilon_t E[\epsilon_{t+k} | \epsilon_{t+k-1}, \epsilon_{t+k-2}, \dots] | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = 0 \end{aligned}$$

podle tvrzení 2.1.3., vlastnosti (ii) a vlastnosti (i), kde používáme skutečnost, že $\epsilon_t \in \sigma\{\epsilon_{t+k-1}, \epsilon_{t+k-2}, \dots\}$, a podle vlastnosti (4.1) ARCH(1) procesu $\{\epsilon_t\}$.

(D.III) Podmíněný rozptyl je

$$\text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = c \frac{1 - a^h}{1 - a} + a^h \epsilon_{t-h}^2,$$

kde jsme rekurzivně dosadili do autoregresní rovnice (4.2) a aplikovali podmíněnou střední hodnotu vůči informaci známé do času $t - h$, ve výpočtu jsme využili důsledek (D.I).

Z podmínek (i), (ii) na existenci procesu $\{\epsilon_t^2\}$ dále získáme vyjádření rozptylu

$$\text{var} \epsilon_t = \frac{c}{1 - a}, \quad (4.3)$$

a proto můžeme proces $\{\epsilon_t\}$ nazývat slabým bílým šumem.

Pro odvození dalších vlastností procesu $\{\epsilon_t\}$ předpokládáme, že je jeho podmíněné rozdělení normální

$$\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots \sim N(0, c + a\epsilon_{t-1}^2).$$

Ze symetrie uvedeného rozdělení již víme, že je jeho šikmost nulová, také už známe moment druhého řádu tohoto rozdělení, který má tvar $E \epsilon_t^2 = c/(1 - a)$. Nyní však můžeme spočítat i moment čtvrtého řádu

$$E \epsilon_t^4 = E(E[\epsilon_t^4 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots]) = 3E(c + a\epsilon_{t-1}^2)^2 = 3 \left(c^2 + \frac{2c^2 a}{1 - a} + a^2 E \epsilon_{t-1}^4 \right).$$

Odtud je vidět, že moment čtvrtého řádu bude konstantní pro $3a^2 < 1$, za této podmínky jej lze vyjádřit ve tvaru

$$E\epsilon_t^4 = \frac{3c^2(1+a)}{(1-a)(1-3a^2)}.$$

Oba uvedené momenty jsou konstantní a lze je tedy nazývat stacionární momenty druhého a čtvrtého řádu. Dále dosazením těchto momentů vyjádříme špičatost

$$k = \frac{E(\epsilon_t - E\epsilon_t)^4}{(E\epsilon_t^2 - (E\epsilon_t)^2)^2} = \frac{E\epsilon_t^4}{(E\epsilon_t^2)^2} = 3 \frac{1-a^2}{1-3a^2}, \quad (4.4)$$

kteřá je v tomto případě velmi snadno porovnatelná s hodnotou špičatosti tři pro normální rozdělení. Vidíme, že výraz na pravé straně rovnice (4.4) je vždy ostře větší než tři, protože jediný autoregresní koeficient a v rovnici (4.2) nelze považovat za nulový. Uvedená špičatost je proto vždy ostře větší než ta, kterou vykazuje normální rozdělení a to znamená, že chvosty distribuční funkce $\{\epsilon_t\}$ jsou silnější než u distribuční funkce normálního rozdělení. Výše popsané rozdělení $\{\epsilon_t\}$ nazýváme leptokurtické rozdělení.

4.3 Pravděpodobnostní charakteristiky AR-ARCH procesu

Uvažujme nyní autoregresní model řádu jedna

$$Y_t = \mu + \Phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad |\Phi| < 1, \quad t = 1, 2, \dots,$$

kde je $\{\epsilon_t\}$ bílý šum, který má vlastnosti ARCH(1) modelu popsané v předchozí podkapitole. Nyní se budeme zabývat pravděpodobnostními charakteristikami procesu $\{Y_t\}$. Tyto charakteristiky lze odvodit přímo z charakteristik bílého šumu $\{\epsilon_t\}$:

(CH.I) Nelineární předpovědi Y_t se shodují s lineárními předpověďmi, protože závisí lineárně na nejbližší zpožděné hodnotě procesu $\{Y_t\}$

$$E[Y_t | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots] = \mu \frac{1 - \Phi^h}{1 - \Phi} + \Phi^h Y_{t-h}, \quad h > 0.$$

(CH.II) Podmíněné rozptyly a kovariance lze pro celá čísla k, h , kde $k \geq 0$ a $h > 0$

vyjádřit rovnici

$$\begin{aligned}
& \text{cov}[(Y_t, Y_{t+k}) | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots] = \\
& = \text{cov} \left[\left(\mu \frac{1 - \Phi^h}{1 - \Phi} + \Phi^h Y_{t-h} + \epsilon_t + \Phi \epsilon_{t-1} + \dots + \Phi^{h-1} \epsilon_{t-h+1}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \mu \frac{1 - \Phi^{k+h}}{1 - \Phi} + \Phi^{k+h} Y_{t-h} + \epsilon_{t+k} + \Phi \epsilon_{t+k-1} + \dots + \Phi^{k+h-1} \epsilon_{t-h+1} \right) \middle| \right. \\
& \quad \left. Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots \right] = \\
& = \text{cov}[(\epsilon_t + \Phi \epsilon_{t-1} + \dots + \Phi^{h-1} \epsilon_{t-h+1}, \epsilon_{t+k} + \dots + \Phi^{k+h-1} \epsilon_{t-h+1}) | \\
& \quad Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots] = \\
& = \Phi^k \text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] + \Phi^{k+2} \text{var}[\epsilon_{t-1} | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] + \dots + \\
& \quad + \Phi^{k+2(h-1)} \text{var}[\epsilon_{t-h+1} | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = \\
& = \Phi^k \sum_{j=0}^{h-1} \Phi^{2j} \text{var}[\epsilon_{t-j} | \epsilon_{t-h}, \epsilon_{t-h-1}, \dots] = \\
& = \Phi^k \sum_{j=0}^{h-1} \Phi^{2j} \left(c \frac{1 - a^{h-j}}{1 - a} + a^{h-j} \epsilon_{t-h}^2 \right) = \\
& = \frac{c \Phi^k}{1 - a} \frac{1 - \Phi^{2h}}{1 - \Phi^2} - \frac{ca \Phi^k}{1 - a} \frac{a^h - \Phi^{2h}}{a - \Phi^2} + a \Phi^k \epsilon_{t-h}^2 \frac{a^h - \Phi^{2h}}{a - \Phi^2} = \\
& = \frac{c \Phi^k}{1 - a} \frac{1 - \Phi^{2h}}{1 - \Phi^2} + a \Phi^k \frac{a^h - \Phi^{2h}}{a - \Phi^2} \left(\epsilon_{t-h}^2 - \frac{c}{1 - a} \right) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

a dosadíme-li do rovnice (4.5) hodnoty $k = 0$, $h = 1$, získáme přesnost předpovědi v časovém horizontu délky jedna

$$\text{var}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots] = c + a \epsilon_{t-1}^2.$$

(CH.III) Nepodmíněné kovariance lze pro $k \geq 0$ vyjádřit prostřednictvím přepisu tvrzení 2.1.4. pro kovarianci

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) &= \text{cov}(\text{E}[Y_t | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots], \text{E}[Y_{t+k} | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]) + \\
& + \text{E}(\text{cov}[(Y_t, Y_{t+k}) | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]) \quad \text{pro } \text{E} Y_t Y_{t+k} < \infty. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Platnost uvedené podmínky $\text{E} Y_t Y_{t+k} < \infty$ lze ověřit snadným výpočtem. Podmíněnou střední hodnotu $\text{E}[Y_t | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]$ již známe z charakteristiky (CH.I) a podmíněnou střední hodnotu $\text{E}[Y_{t+k} | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]$ vyjádříme analogicky jako

$$\text{E}[Y_{t+k} | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots] = \mu \frac{1 - \Phi^{k+h}}{1 - \Phi} + \Phi^{k+h} Y_{t-h}.$$

Dále vypočítáme kovarianci těchto dvou podmíněných středních hodnot, která je prvním sčítancem ve vzorci (4.6) pro výpočet kovariance mezi prvky procesu Y_t se zpožděním k

$$\begin{aligned}
& \text{cov}(\text{E}[Y_t | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots], \text{E}[Y_{t+k} | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]) = \\
& = \text{cov}\left(\mu \frac{1 - \Phi^h}{1 - \Phi} + \Phi^h Y_{t-h}, \mu \frac{1 - \Phi^{k+h}}{1 - \Phi} + \Phi^{k+h} Y_{t-h}\right) = \\
& = \Phi^{k+2h} \text{var} Y_{t-h}, \tag{4.7}
\end{aligned}$$

kde pro výpočet $\text{var } Y_{t-h}$ znovu použijeme tvrzení 2.1.4. a dále charakteristiky (CH.I) pro $h = 1$, (CH.II) a vzorec (4.3) pro rozptyl ϵ_t

$$\begin{aligned} \text{var } Y_{t-h} &= \text{var}(\mathbb{E}[Y_{t-h} | Y_{t-h-1}, Y_{t-h-2}, \dots]) + \\ &\quad + \mathbb{E}(\text{var}[Y_{t-h} | Y_{t-h-1}, Y_{t-h-2}, \dots]) = \\ &= \text{var}(\mu + \Phi Y_{t-h-1}) + \mathbb{E}(c + a\epsilon_{t-h-1}^2) = \\ &= \Phi^2 \text{var } Y_{t-h-1} + \frac{c}{1-a} \quad \text{pro } \mathbb{E} Y_{t-h}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Zde uvedená podmínka $\mathbb{E} Y_{t-h}^2 < \infty$ je speciálním případem předchozí podmínky $\mathbb{E} Y_t Y_{t+k} < \infty$ a opět ji lze ověřit snadným výpočtem. Jediné konstantní řešení rovnice (4.8) má tvar

$$\text{var } Y_{t-h} = \frac{c}{(1-a)(1-\Phi^2)}. \quad (4.9)$$

Dosazením výsledku (4.9) do rovnice (4.7) dopočítáme první sčítanec potřebný pro výpočet kovariance

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbb{E}[Y_t | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots], \mathbb{E}[Y_{t+k} | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]) &= \\ = \frac{c\Phi^{k+2h}}{(1-a)(1-\Phi^2)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Druhý sčítanec vypočteme již snadno aplikací střední hodnoty na rovnici (4.5) uvedenou v charakteristice (CH.II). Opět zde použijeme vyjádření rozptylu ϵ_t uvedené v rovnici (4.3)

$$\mathbb{E}(\text{cov}[(Y_t, Y_{t+k}) | Y_{t-h}, Y_{t-h-1}, \dots]) = \frac{c\Phi^k}{1-a} \frac{1-\Phi^{2h}}{1-\Phi^2}. \quad (4.11)$$

Dosazením rovnic (4.10) a (4.11) do rovnice (4.6) získáme výsledek

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{c\Phi^k}{(1-a)(1-\Phi^2)} = \Phi^k \text{var } Y_t.$$

4.4 Jednorozměrné modely typu GARCH

GARCH model vzniká z ARCH modelu přidáním části klouzavých součtů do rovnice podmíněného rozptylu. Je definován prostřednictvím rovnic podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu, které jsou uvedeny v soustavě rovnic (3.7). I zde se opět omezíme na hodnoty $t = 1, 2, \dots$. Takto definovaný proces $\{\epsilon_t\}$ je posloupností martingalových diferencí, tedy nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou. Abychom mohli tento proces $\{\epsilon_t\}$ označit za asymptoticky slabě stacionární, zbývá stanovit rozptyl náhodné veličiny ϵ_t a ukázat, že je konstantní pro velké hodnoty T . Pro výpočet rozptylu náhodné veličiny ϵ_t použijeme tvrzení 2.1.4., protože již známe vyjádření podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu ϵ_t . Zmíněný rozptyl tedy můžeme zapsat rovnicí

$$\text{var } \epsilon_t = \text{var}(\mathbb{E}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots]) + \mathbb{E}(\text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots]) = \mathbb{E} h_t \quad \text{pro } \mathbb{E} \epsilon_t^2 < \infty.$$

Zbývá ukázat, že zde uvedený rozptyl je asymptoticky konstantní. Následující tvrzení převzaté ze ([6], Property 3.19.) uvádí postačující podmínku pro asymptotickou slabou stacionaritu procesu $\{\epsilon_t\}$.

Tvrzení 4.4.1. *Proces $\{\epsilon_t\}$ splňující GARCH(p, q) model zadaný rovnicemi (3.7) s kladným koeficientem $c > 0$ a nezápornými koeficienty $a_i \geq 0, i = 1, \dots, q, b_j \geq 0, j = 1, \dots, p$ je asymptoticky slabě stacionární, jestliže*

$$A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1.$$

Důkaz lze nalézt v ([6], str. 37–38).

Rozdíl mezi podmíněným a nepodmíněným rozdělením je patrný z vyjádření špičatosti. Uvažujme podmíněně gaussovský GARCH proces, potom je mezi momenty druhého a čtvrtého řádu vztah

$$E[\epsilon_t^4 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] = 3(E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])^2. \quad (4.12)$$

Aplikujeme-li na rovnici (4.12) střední hodnotu a použijeme-li tvrzení 2.1.1. a tvrzení 2.1.3., vlastnost (ii), potom získáme nerovnici

$$\begin{aligned} E \epsilon_t^4 &= E(E[\epsilon_t^4 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots]) = 3E(E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])^2 \geq \\ &\geq 3\{E(E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])\}^2 = 3(E \epsilon_t^2)^2 \end{aligned}$$

a vidíme, že marginální rozdělení $\{\epsilon_t\}$ má silnější chvosty než normální rozdělení. Špičatost marginálního rozdělení $\{\epsilon_t\}$ lze vyjádřit prostřednictvím rozptylu podmíněného druhého momentu a nepodmíněného druhého momentu

$$\begin{aligned} k &= \frac{E(\epsilon_t - E \epsilon_t)^4}{(E \epsilon_t^2 - (E \epsilon_t)^2)^2} = \frac{E \epsilon_t^4}{(E \epsilon_t^2)^2} = \frac{E(E[\epsilon_t^4 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])}{(E \epsilon_t^2)^2} = \\ &= \frac{3E(E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])^2}{(E \epsilon_t^2)^2} = 3 + 3 \frac{\text{var}(E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots])}{(E \epsilon_t^2)^2} \geq 3. \end{aligned}$$

Za platnosti jistých podmínek regularity může být slabě stacionární i proces $\{\epsilon_t^2\}$, který lze vyjádřit jako ARMA model rovnicemi (3.8). Za předpokladu, že je proces $\{U_t\}$ slabě stacionární, lze na proces $\{\epsilon_t^2\}$ aplikovat běžné výsledky známé o ARMA modelech. Uvažujme autokovarianční funkci procesu $\{\epsilon_t^2\}$

$$R(h)^{(2)} = \text{cov}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2),$$

kde vyjádříme proces $\{\epsilon_t^2\}$ ARMA modelem (3.8)

$$\begin{aligned} R(h)^{(2)} &= \text{cov}\left(c + \sum_{i=1}^{\max\{p,q\}} (a_i + b_i) \epsilon_{t-i}^2 + U_t - \sum_{j=1}^p b_j U_{t-j}, \epsilon_{t-h}^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\max\{p,q\}} (a_i + b_i) \text{cov}(\epsilon_{t-i}^2, \epsilon_{t-h}^2) + \text{cov}\left(U_t - \sum_{j=1}^p b_j U_{t-j}, \epsilon_{t-h}^2\right). \quad (4.13) \end{aligned}$$

Navíc pro $h \geq p + 1$ je druhý sčítanec na pravé straně rovnice (4.13) nulový a autokovarianční funkci lze vyjádřit lineární rekurzivní rovnicí řádu $\max\{p, q\}$

$$R(h)^{(2)} = \sum_{i=1}^{\max\{p,q\}} (a_i + b_i) R(h-i)^{(2)}, \quad \forall h \geq p + 1. \quad (4.14)$$

Systém rovnic (4.14) je analogií Yuleových-Walkerových rovnic z teorie autoregresních posloupností a používáme jej pro odhad koeficientů $a_i + b_i, i = 1, \dots, \max\{p, q\}$.

Kapitola 5

Mnohorozměrné modely typu ARCH

Definujme mnohorozměrný ARCH(1) proces $\{\epsilon_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ na \mathbb{R}^N založený na inovačním procesu $\{\mathbf{Z}_t, t = 1, 2, \dots\}$ prostřednictvím následujících rovnic

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}_t, \\ \mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}' \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}' \mathbf{A}, \\ \mathbf{Z}_t &\sim iid \quad N_N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N)\end{aligned}\tag{5.1}$$

pro $t = 1, 2, \dots$. Předpokládejme, že matice $\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta})$ typu $N \times N$ je pozitivně definitní a že matice \mathbf{A} typu $N \times N$ je libovolná. Uvedený vzorec pro $\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta})$ je zjednodušením BEKK modelu uvedeného níže v Definicí 6.1.2.

Dvě následující tvrzení převzatá ze ([7], Theorem 1., Theorem 2.) shrnují nejdůležitější poznatky o procesu $\{\epsilon_t\}$.

Tvrzení 5.0.2. *Předpokládejme, že největší vlastní číslo matice \mathbf{A} je v absolutní hodnotě menší než jedna, tj.*

$$r(\mathbf{A}) < 1.\tag{5.2}$$

Potom existuje takové počáteční rozdělení vektoru ϵ_0 , že je proces $\{\epsilon_t\}$ zadaný rovnicemi (5.1) pro $t = 1, 2, \dots$ striktně stacionární. Uvedená podmínka (5.2) je nutnou a postačující podmínkou, aby byl proces $\{\epsilon_t\}$ striktně stacionární s momentem druhého řádu $\boldsymbol{\Sigma}$, který lze vyjádřit rovnicí $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}$ s jednoznačným řešením

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}^i)' \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A}^i < \infty.$$

Zde uvedený proces $\{\epsilon_t\}$ je tedy i slabě stacionární. Poznamenejme, že vektory ϵ_t a ϵ_{t+k} jsou nekorelované, ale nejsou nezávislé pro libovolné $k \geq 1$.

Vektorově lze moment druhého řádu vyjádřit rovnicí

$$vec(\boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{I}_{N^2} - (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{A}'))^{-1} vec(\mathbf{H})$$

za použití operátoru $vec(\cdot)$, který z matice typu $N \times N$ udělá vektor typu $N^2 \times 1$, a za použití Kroneckerova součinu označeného \otimes . Podmínku (5.2) uvedenou v tvrzení 5.0.2. lze ekvivalentně přepsat do tvaru $r(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) < 1$.

Tvrzení 5.0.3. *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady tvrzení 5.0.2. a že počáteční rozdělení vektoru ϵ_0 bylo zvoleno tak, že je proces $\{\epsilon_t\}$ stacionární. Potom pro $T \rightarrow \infty$ platí zákon velkých čísel*

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t \epsilon_t' \rightarrow \Sigma \quad s.j.$$

Příslušné důkazy těchto dvou tvrzení lze nalézt v ([7], str. 7–8, str. 9–10).

Kapitola 6

Přehled mnohorozměrných modelů typu GARCH

Uvažujme vektorový náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ typu $N \times 1$. Podmiňovat budeme vůči σ -algebře, která je tvořena informací z minulosti. Tedy v čase t ji tvoří informace nahromážděné do času $t - 1$. Označme takovou σ -algebru \mathcal{I}_{t-1} , potom platí $\mathcal{I}_{t-1} = \sigma\{\mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{Y}_{t-2}, \dots\}$. Dále označme $\boldsymbol{\theta}$ konečný vektor parametrů a vyjádřeme

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (6.1)$$

kde $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta})$ je vektor podmíněné střední hodnoty \mathbf{Y}_t , $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ je vektorový inovační proces typu $N \times 1$ s nulovým vektorem podmíněné střední hodnoty. Tento proces lze zapsat rovnicí

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}_t, \quad (6.2)$$

kde $\mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta})$ je pozitivně definitní matice typu $N \times N$ taková, že $\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta})$ je podmíněná varianční matice $\boldsymbol{\epsilon}_t$ a tedy také \mathbf{Y}_t . Náhodný vektor \mathbf{Z}_t typu $N \times 1$ má následující první dva momenty

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{Z}_t &= \mathbf{0}, \\ \text{var} \mathbf{Z}_t &= \mathbf{I}_N, \end{aligned}$$

kde \mathbf{I}_N je jednotková matice typu $N \times N$. Vektor $\boldsymbol{\mu}_t$ a matice \mathbf{H}_t závisejí na neznámém vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$, který může být ve většině případů rozdělen na dvě disjunktní části, jednu pro $\boldsymbol{\mu}_t$ a druhou pro \mathbf{H}_t . Případ, kdy toto disjunktní rozdělení vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ nelze učinit, označujeme jako model GARCH ve střední hodnotě, ve kterém je vektor $\boldsymbol{\mu}_t$ závislý na matici \mathbf{H}_t .

Následující klasifikaci GARCH modelů přebíráme ze článku [3], který obsahuje mnoho dalších citací. Matici \mathbf{H}_t lze vyjádřit různými způsoby a rozlišujeme tři vzájemně odlišné postupy vytvoření mnohorozměrných GARCH modelů:

- přímé zobecnění jednorozměrného GARCH modelu, který navrhl Bollerslev (1986): VEC, BEKK a faktorové modely,
- lineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH: zobecněné ortogonální a latentní faktorové modely,
- nelineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH: konstantní a dynamické modely podmíněných korelací, obecné dynamické kovarianční modely.

6.1 Zobecnění jednorozměrného GARCH modelu

Při rozšíření jednorozměrného GARCH modelu na mnohorozměrný případ značně vzroste počet parametrů, stále také musí být zaručena pozitivní definitnost varianční matice \mathbf{H}_t . Je proto nutné zavést přídatné podmínky. Například formou diagonálních matic parametrů, které navíc usnadní i odvození podmínek stacionarity a ergodicity a vyjádření nepodmíněných momentů.

6.1.1 VEC a BEKK modely

Obecný vzorec \mathbf{H}_t navržený Bollerslevem *et al.* (1988) zapisuje každý prvek matice \mathbf{H}_t jako lineární funkci druhých mocnin zpožděných chyb, smíšeného součinu zpožděných chyb a zpožděných hodnot samotné matice \mathbf{H}_t .

Definice 6.1.1. *VEC(1, 1) model je definován jako*

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{h}_{t-1},$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_t &= \text{vech}(\mathbf{H}_t), \\ \boldsymbol{\eta}_t &= \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}'_t)\end{aligned}$$

a $\text{vech}(\cdot)$ označuje operátor, který z dolní trojúhelníkové části matice typu $N \times N$ udělá vektor typu $[N(N+1)/2] \times 1$. Vektor \mathbf{c} je vektorem parametrů typu $[N(N+1)/2] \times 1$, matice \mathbf{A} a \mathbf{G} jsou čtvercové matice parametrů řádu $N(N+1)/2$.

Celkový počet parametrů tohoto modelu je $[N(N+1)(N(N+1)+1)]/2$ a již ve dvourozměrném případě je počet parametrů dvacet jedna. Bollerslev *et al.* (1988) proto navrhl diagonální VEC model, tzv. DVEC model, ve kterém jsou matice \mathbf{A} a \mathbf{G} diagonální, tedy každý prvek h_{ijt} závisí pouze na svých vlastních zpožděních a na předchozí hodnotě součinu $\epsilon_{it}\epsilon_{jt}$. Nutné a postačující podmínky na parametry pro zajištění pozitivní definitnosti podmíněné varianční matice v DVEC modelu lze nejjednodušeji vyjádřit využitím Hadamardova součinu \odot přímo v zápisu modelu. Definujme symetrické čtvercové matice \mathbf{C}^* , \mathbf{A}^* a \mathbf{G}^* řádu N prostřednictvím vztahů

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \text{vech}(\mathbf{C}^*), \\ \mathbf{A} &= \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{A}^*)], \\ \mathbf{G} &= \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{G}^*)].\end{aligned}$$

Potom můžeme diagonální VEC model zapsat rovnicí

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^* + \mathbf{A}^* \odot (\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}\boldsymbol{\epsilon}'_{t-1}) + \mathbf{G}^* \odot \mathbf{H}_{t-1}. \quad (6.3)$$

Nyní je zcela zřejmé, že podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t je pozitivně definitní pro všechna t , jestliže jsou pozitivně definitní matice \mathbf{C}^* , \mathbf{A}^* , \mathbf{G}^* a počáteční podmíněná varianční matice \mathbf{H}_0 . Takový model vyžaduje $3N(N+1)/2$ parametrů a počet parametrů se pro dvourozměrný případ sice sníží na devět, ale stále se s takovým modelem v praxi těžko zachází. Poznamenejme, že DVEC model lze vyjádřit ještě jednodušeji

prostřednictvím skalárů. Potom se jedná o skalární model, ve kterém jsou matice \mathbf{A}^* a \mathbf{G}^* zapsané jako součiny skalárů a jednotkových matic \mathbf{I}_N .

VEC model je kovariančně stacionární, pokud jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A} + \mathbf{G}$ uvnitř jednotkového kruhu. Nepodmíněná varianční matice Σ , $\Sigma = \mathbf{E}\mathbf{H}_t$, je vyjádřena jako

$$\text{vech}(\Sigma) = [\mathbf{I}_{N^*} - \mathbf{A} - \mathbf{G}]^{-1}\mathbf{c},$$

kde $N^* = N(N + 1)/2$.

Podobné vyjádření lze získat i pro následující BEKK model, který je speciálním případem VEC modelu. BEKK model navrhli Engle a Kroner (1995) a jeho označení BEKK pochází ze společné práce Baby, Engla, Krafata a Kronera na téma mnoho-rozměrné modely. Tento model používá kvadratické vyjádření parametrů, které zaručuje pozitivní definitnost varianční matice.

Definice 6.1.2. BEKK(1, 1, K) model je definován jako

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^*\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^* \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}' \mathbf{A}_k^* + \sum_{k=1}^K \mathbf{G}_k^* \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{G}_k^*,$$

kde \mathbf{C}^* , \mathbf{A}^* a \mathbf{G}^* jsou čtvercové matice řádu N a \mathbf{C}^* je horní trojúhelníková matice.

Horní mez součtu K vyjadřuje obecnost modelu, pro jednoduchost a názornost se budeme věnovat případu, kdy $K = 1$. Počet parametrů BEKK(1, 1, 1) modelu je $N(5N+1)/2$, tj. v dvourozměrném případě jedenáct. Pro snížení počtu parametrů je zaveden diagonální BEKK model s $N(N+5)/2$ parametry, který již ovšem ztrácí na obecnosti. Zde při $N = 2$ pracujeme se sedmi parametry. Dalším způsobem snížení počtu parametrů je použití skalárního BEKK modelu, kde jsou matice \mathbf{A}^* a \mathbf{G}^* vyjádřeny součinem skaláru a jednotkové matice.

6.1.2 Faktorové modely

Engle *et al.* (1990b) navrhl parametrizaci \mathbf{H}_t založenou na myšlence závislosti pohybu výnosu akcií na malém počtu podkladových veličin, které jsou nazývány faktory. Na faktorový model lze nahlížet jako na speciální druh BEKK modelu. Uvedenou definici zveřejnil Lin (1992).

Definice 6.1.3. BEKK(1, 1, K) model z předchozí definice je faktorovým GARCH modelem značeným **F-GARCH(1, 1, K)**, jestliže pro každé $k = 1, \dots, K$ mají matice \mathbf{A}_k^* a \mathbf{G}_k^* hodnotu jedna, a pokud obě dvě mají stejné levé a pravé vlastní vektory $\boldsymbol{\lambda}_k$ a \mathbf{w}_k . Tyto matice \mathbf{A}_k^* a \mathbf{G}_k^* tedy můžeme zapsat rovnicemi

$$\mathbf{A}_k^* = \alpha_k \mathbf{w}_k \boldsymbol{\lambda}_k' \quad a \quad \mathbf{G}_k^* = \beta_k \mathbf{w}_k \boldsymbol{\lambda}_k',$$

kde používáme α_k a β_k pro označení skalárů. Vektory $\boldsymbol{\lambda}_k$ a \mathbf{w}_k jsou typu $N \times 1$ a splňují podmínky

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k' \boldsymbol{\lambda}_i &= 0 \quad \text{pro } k \neq i & a & \quad \mathbf{w}_k' \boldsymbol{\lambda}_i = 1 \quad \text{pro } k = i, \\ \sum_{n=1}^N w_{nk} &= 1. \end{aligned}$$

Dosažením vyjmenovaných vlastností do vzorce BEKK modelu získáme vyjádření podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t vzorcem

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{\Omega} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \lambda_k' (\alpha_k^2 \mathbf{w}_k' \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}' \mathbf{w}_k + \beta_k^2 \mathbf{w}_k' \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{w}_k).$$

Poznamenejme, že $\mathbf{w}_k' \boldsymbol{\epsilon}_t$ je k -tý faktor a λ_k je jeho příslušná váha, dále budeme k -tý faktor označovat f_{kt} .

6.2 Lineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH

Nyní se zabýváme modely, které jsou lineární kombinací několika jednorozměrných modelů, které však nemusí být standardními GARCH modely.

6.2.1 Ortogonální modely

Pozorovaná data jsou vytvořena ortogonální transformací N jednorozměrných GARCH procesů, kde matice příslušné lineární transformace je ortogonální maticí vlastních vektorů nepodmíněné varianční matice standardizovaných výnosů. Ortogonální modely mohou být považovány za faktorové modely, kde jsou faktory jednorozměrné GARCH procesy s nulovou střední hodnotou.

V ortogonálním modelu publikovaném Kariyou (1988) a Alexanderem a Chibumbou (1997) je varianční matice řádu N vytvořena m jednorozměrnými GARCH modely.

Definice 6.2.1. **O-GARCH(1, 1, m) model** je definován prostřednictvím vyjádření

$$\mathbf{V}^{-1/2} \boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{U}_t = \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{f}_t,$$

kde platí značení:

- (i) $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_N)$, v_i jsou rozptyly ϵ_{it} pro $i = 1, \dots, N$,
- (ii) $\mathbf{\Lambda}_m$ je matice typu $N \times m$ daná jako

$$\mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{P}_m \text{diag}(l_1^{1/2}, \dots, l_m^{1/2}),$$

kde $l_1 \geq \dots \geq l_m > 0$ je m největších vlastních čísel korelační matice vektoru \mathbf{U}_t a \mathbf{P}_m je matice typu $N \times m$ příslušných vlastních vektorů,

- (iii) $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \dots, f_{mt})'$ je náhodný proces takový, že

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t-1} \mathbf{f}_t &= \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \text{var}_{t-1} \mathbf{f}_t = \mathbf{Q}_t = \text{diag}(\sigma_{f_{1t}}^2, \dots, \sigma_{f_{mt}}^2), \\ \sigma_{f_{it}}^2 &= (1 - a_i - b_i) + a_i f_{i,t-1}^2 + b_i \sigma_{i,t-1}^2 \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Příslušnou podmíněnou varianční matici \mathbf{H}_t potom zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{H}_t = \text{var}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{V}_t \mathbf{V}^{1/2} \quad , \quad \text{kde} \quad \mathbf{V}_t = \text{var}_{t-1} \mathbf{U}_t = \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{Q}_t \mathbf{\Lambda}_m'.$$

Síla ortogonálního modelu spočívá v použití malého počtu jednorozměrných GARCH modelů. Alexander (2001) ukazuje, že pro model dvanácti aktiv stačí dva jednorozměrné GARCH modely.

Definice 6.2.2. **GO-GARCH(1, 1) model** je definován stejně jako O-GARCH(1, 1, m) model v Definici 6.2.1., kde $m = N$ a Λ je nesingulární matice parametrů. Podmíněná korelační matice ϵ_t potom může být vyjádřena jako

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{J}_t^{-1} \mathbf{V}_t \mathbf{J}_t^{-1}, \quad \text{kde } \mathbf{J}_t = (\mathbf{V}_t \odot \mathbf{I}_m)^{1/2} \quad \text{a} \quad \mathbf{V}_t = \Lambda \mathbf{Q}_t \Lambda'.$$

Ortogonální modely jsou konkrétním druhem F-GARCH modelů a tedy také BEKK modelů. Proto se výsledky o stacionaritě, nepodmíněných momentech a odhadech stanovené pro BEKK modely mohou aplikovat i na ortogonální modely. Je zřejmé, že O-GARCH a GO-GARCH modely jsou kovariančně stacionární, jestliže jsou všechny jednotlivé jednorozměrné GARCH procesy stacionární.

Latentní faktorové modely

Faktorový model je latentním faktorovým modelem, pokud jsou faktory f_{kt} pro $k = 1, \dots, K$ skryté, což znamená, že nejsou zahrnuté do σ -algebry \mathcal{I}_t . Příмым důsledkem je skutečnost, že podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t není měřitelná. Proto mohou být latentní faktorové modely zahrnuté do třídy modelů stochastické volatility. Faktory f_{kt} pro $k = 1, \dots, K$ lze často vyjádřit dynamickými heteroskedastickými procesy, tedy například ARCH modely. Podmíněná kovariance mezi jednotlivými faktory je obvykle rovna nule. Mnohorozměrné latentní faktorové modely nacházejí uplatnění například při modelování volatilit směnárenských kurzů nebo výnosů obligací, kde se používá rozkladu mezinárodní úrokové míry na národní a celosvětové latentní faktory.

6.3 Nelineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH

Tato podkapitola shrnuje modely, ve kterých lze samostatně vyjádřit jednotlivé podmíněné rozptyly a podmíněné korelační matice nebo jiné formy závislosti jednotlivých časových řad. Následující modely sice nejsou parametricky náročné a snadno se odhadují, ale teoretické výsledky o stacionaritě, ergodicitě a vyjádření momentů nelze získat tak jednoduše jako tomu bylo u zobecnění jednorozměrných GARCH modelů a lineárních kombinací jednorozměrných GARCH modelů.

6.3.1 Modely podmíněných korelací

Nejprve je potřeba najít model pro každý podmíněný rozptyl a potom lze modelovat podmíněnou korelační matici. Bollerslev (1990) navrhl třídu mnohorozměrných GARCH modelů, ve které jsou podmíněné korelace konstantní, a tím snížil počet neznámých parametrů.

Definice 6.3.1. *Model konstantních podmíněných korelací, tzv. CCC model, je definován jako*

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t = \left(\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjet}} \right),$$

kde

$$\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11t}}, \dots, \sqrt{h_{NNt}}). \quad (6.4)$$

Prvky h_{iit} lze definovat jako nějaké jednorozměrné GARCH modely. Matice $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$ je symetrická pozitivně definitní korelační matice s $\rho_{ii} = 1$ pro $i = 1, \dots, N$.

Model dynamických podmíněných korelací, tzv. DCC model, používá pro vyjádření jednotlivých podmíněných rozptylů GARCH(1, 1) jednorozměrnou rovnici

$$h_{iit} = c_i + a_i \epsilon_{i,t-1}^2 + b_i h_{i,t-1} \quad \text{pro } i = 1, \dots, N,$$

kde jsou parametry c_i kladné a parametry a_i, b_i nezáporné pro $i = 1, \dots, N$. Uvedené parametry současně splňují i nerovnici $a_i + b_i < 1$ pro $i = 1, \dots, N$. Podmíněnou korelační matici vyjadřuje DCC model autoregresním modelem klouzavých součtů. Celkový počet parametrů tohoto modelu je $N(N + 5)/2 + 2$. Matice \mathbf{H}_t je pozitivně definitní právě tehdy, když je všech N podmíněných rozptylů kladných a matice \mathbf{R}_t je pozitivně definitní.

Následující $\text{DCC}_T(M)$ model navrhli Tse a Tsui ve článku [15] v roce 2002.

Definice 6.3.2. $\text{DCC}_T(M)$ model je definován jako

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t,$$

kde je matice \mathbf{D}_t definována vztahem (6.4), ve kterém jsou prvky h_{iit} vyjádřeny rovnicemi nějakých jednorozměrných GARCH modelů, a kde jsou podmíněné korelační matice \mathbf{R}_t definovány rekurzivně vztahem

$$\mathbf{R}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{R} + \theta_1 \boldsymbol{\psi}_{t-1} + \theta_2 \mathbf{R}_{t-1}. \quad (6.5)$$

V rovnici (6.5) značí θ_1 a θ_2 nezáporné parametry splňující nerovnici $\theta_1 + \theta_2 < 1$. Matice $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$ je symetrická pozitivně definitní matice konstantních parametrů typu $N \times N$, kde $\rho_{ii} = 1$. Matice $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$ je korelační matice $\{\mathbf{U}_{t-1}, \dots, \mathbf{U}_{t-M}\}$ typu $N \times N$ a prvky této matice $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$ lze vyjádřit jako

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M U_{i,t-m} U_{j,t-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M U_{i,t-m}^2)(\sum_{m=1}^M U_{j,t-m}^2)}},$$

kde $U_{it} = (Y_{it} - \mu_{it})/h_{iit}^{1/2}$ označuje standardizované reziduum. Matici $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$ lze také vyjádřit rovnicí

$$\boldsymbol{\psi}_{t-1} = \mathbf{B}_{t-1}^{-1} \mathbf{L}_{t-1} \mathbf{L}'_{t-1} \mathbf{B}_{t-1}^{-1},$$

kde \mathbf{B}_{t-1} je diagonální matice typu $N \times N$ s i -tým diagonálním prvkem $(\sum_{m=1}^M U_{i,t-m}^2)^{1/2}$ a $\mathbf{L}_{t-1} = (\mathbf{U}_{t-1}, \dots, \mathbf{U}_{t-M})$ je matice typu $N \times M$.

Z této definice vidíme, že nutnou podmínkou, aby byla matice $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$ pozitivně definitní, je podmínka $M \geq N$, a potom je samozřejmě také pozitivně definitní matice \mathbf{R}_t . Z předchozích definic 6.3.1. a 6.3.2. je zřejmé, že CCC model je speciálním případem DCC modelu. Pro volbu jednoho z těchto dvou modelů je tedy vhodné testovat, zda $\theta_1 = \theta_2 = 0$ před samotným použitím vybraného modelu.

Odlišnou definici DCC modelu navrhl Engle (2002). Tento model budeme v následujícím označovat jako $\text{DCC}_E(1, 1)$.

Definice 6.3.3. $DCC_E(1, 1)$ *model* je definován jako

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t,$$

kde je matice \mathbf{D}_t definována vztahem (6.4), ve kterém jsou prvky h_{iit} vyjádřeny rovnicemi nějakých jednorozměrných GARCH modelů, a kde

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}(q_{11t}^{-1/2}, \dots, q_{NNt}^{-1/2}) \mathbf{Q}_t \text{diag}(q_{11t}^{-1/2}, \dots, q_{NNt}^{-1/2}).$$

Matice \mathbf{Q}_t zde označuje symetrickou pozitivně definitní matici typu $N \times N$ určenou vztahem

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b) \bar{\mathbf{Q}} + a \mathbf{U}_{t-1} \mathbf{U}'_{t-1} + b \mathbf{Q}_{t-1}$$

pro $a \geq 0$ a $b \geq 0$ parametry splňující podmínku $a + b \leq 1$, $\bar{\mathbf{Q}}$ nepodmíněnou varianční matici \mathbf{U}_t , která je typu $N \times N$, kde $U_{it} = (Y_{it} - \mu_{it})/h_{iit}^{1/2}$.

Prvky matice $\bar{\mathbf{Q}}$ můžeme odhadnout nebo můžeme použít hodnoty vypočtené přímo z dat, se kterými pracujeme.

Pro prokázání rozdílu mezi předchozími definicemi 6.3.2. a 6.3.3. ukážeme, jak každá z nich vyjadřuje korelační koeficient v dvourozměrném modelu. Pro $DCC_T(M)$ model se jedná o korelační koeficient

$$\rho_{12t} = (1 - \theta_1 - \theta_2) \rho_{12} + \theta_1 \frac{\sum_{m=1}^M U_{1,t-m} U_{2,t-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M U_{1,t-m}^2\right) \left(\sum_{m=1}^M U_{2,t-m}^2\right)}} + \theta_2 \rho_{12,t-1} \quad (6.6)$$

a pro $DCC_E(1, 1)$ model lze tentýž korelační koeficient vyjádřit jako

$$\rho_{12t} = \frac{(1 - a - b) \bar{\rho}_{12} + a U_{1,t-1} U_{2,t-1} + b \rho_{12,t-1}}{\sqrt{\left((1 - a - b) \bar{\rho}_{11} + a U_{1,t-1}^2 + b \rho_{11,t-1}\right) \left((1 - a - b) \bar{\rho}_{22} + a U_{2,t-1}^2 + b \rho_{22,t-1}\right)}}. \quad (6.7)$$

Z předchozích rovnic (6.6) a (6.7) vidíme, že DCC_T model vyjadřuje podmíněnou korelaci prostřednictvím váženého součtu minulých korelací, zatímco DCC_E model nikoliv.

Oba zmíněné DCC modely používají pouze jednu dvojici skalárů pro vyjádření pohybu podmíněné korelace, což je postačující podmínkou na parametry pro zajištění pozitivní definitnosti matice \mathbf{R}_t pro všechna t . Pokud jsou podmíněné rozptyly vyjádřené GARCH(1, 1) modelem, potom oba DCC modely obsahují $[N(N+5)]/2 + 2$ parametry.

Obecné dynamické kovarianční modely

Obecné dynamické kovarianční modely jsou sice odlišné od předchozích modelů, ale jak ukážeme v závěru této podkapitoly, jejich definici lze upřesnit pro vyjádření mnohých z výše uvedených modelů. Používáme zde definici, kterou zavedli Kroner a Ng (1998).

Definice 6.3.4. GDC model je definován jako

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t + \Phi \odot \Theta_t,$$

kde platí následující značení:

(i) $\mathbf{D}_t = (d_{ijt})$, kde $d_{iit} = \theta_{iit}^{1/2} \quad \forall i = 1, \dots, N$ a $d_{ijt} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j$,

(ii) matice \mathbf{R}_t je vyjádřena stejně jako v definici 6.3.2. $DCC_T(M)$ modelu nebo stejně jako v definici 6.3.3. $DCC_E(1, 1)$ modelu,

(iii) $\Phi = (\phi_{ij})$, kde $\phi_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$ a $\phi_{ij} = \phi_{ji}$,

(iv) jednotlivé prvky matice $\Theta_t = (\theta_{ijt})$ lze vyjádřit rovnicí

$$\theta_{ijt} = c_{ij} + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{g}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{g}_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

kde \mathbf{a}_i a \mathbf{g}_i jsou vektory parametrů typu $N \times 1$ pro $i = 1, \dots, N$ a matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ je symetrická pozitivně definitní matice typu $N \times N$.

Prvky takto definované matice $\mathbf{H}_t = (h_{ijt})$ lze zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} h_{iit} &= \theta_{iit} \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ h_{ijt} &= \rho_{ijt} \sqrt{\theta_{iit} \theta_{jjt}} + \phi_{ij} \theta_{ijt}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j, \end{aligned}$$

kde jsou jednotlivé prvky θ_{ijt} vyjádřeny BEKK modelem z definice 6.1.2.

GDC model v sobě zahrnuje některé mnohorozměrné modely typu GARCH, které lze vyjádřit zavedením pomocných podmínek. Uvažujme následující množinu podmínek, kterou zavedli Kroner a Ng (1998):

(GDC.I) $\theta_1 = \theta_2 = 0$ v DCC_T modelu nebo $a = b = 0$ v DCC_E modelu,

(GDC.II) $\mathbf{R} = \mathbf{I}_N$ v DCC_T modelu nebo $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}_N$ v DCC_E modelu,

(GDC.III) $\phi_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j$,

(GDC.IV) $\phi_{ij} = 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j$,

(GDC.V) $\mathbf{a}_i = \alpha_i \mathbf{l}_i$ a $\mathbf{g}_i = \beta_i \mathbf{l}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$, kde α_i a β_i jsou skaláry pro $i = 1, \dots, N$, \mathbf{l}_i jsou i -té sloupcové vektory matice \mathbf{I}_N a matice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N]$ a $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_N]$ jsou typu $N \times N$,

(GDC.VI) $\mathbf{A} = \alpha(w\lambda')$ a $\mathbf{G} = \beta(w\lambda')$, kde $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N]$ a $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_N]$ jsou matice typu $N \times N$, α a β jsou skaláry, w a λ jsou vektory typu $N \times 1$.

Potom lze z GDC modelu různými kombinacemi těchto podmínek vyjádřit následující modely:

- DVEC(1, 1) model vznikne z GDC modelu za platnosti souboru podmínek (GDC.I), (GDC.II) a (GDC.V),
- BEKK(1, 1, 1) model vznikne z GDC modelu za platnosti souboru podmínek (GDC.I), (GDC.II) a (GDC.IV),
- F-GARCH(1, 1, 1) model vznikne z GDC modelu za platnosti souboru podmínek (GDC.I), (GDC.II), (GDC.IV) a (GDC.VI),
- CCC model s GARCH(1, 1) modelem pro podmíněné rozptyly vznikne z GDC modelu za platnosti souboru podmínek (GDC.I), (GDC.III) a (GDC.V),

- DCC_T nebo $DCC_E(1, 1)$ model s GARCH(1, 1) modelem pro podmíněné rozptyly vznikne z GDC modelu za platnosti souboru podmínek (GDC.III) a (GDC.V).

Jak vidíme z těchto upřesnění GDC modelu, jedná se o model velmi široký, který vyžaduje $[N(7N - 1) + 4]/2$ parametrů. Například v dvourozměrném případě pracuje GDC model s třemi parametry v matici \mathbf{R}_t , jedním parametrem v matici Φ a jedenácti parametry v matici Θ_t . Celkem je tedy použito v dvourozměrném GDC modelu patnáct parametrů, což je méně než ve VEC modelu, který vyžaduje dvacet jedna parametrů, ale více než v BEKK modelu, kde je použito pouze jedenáct parametrů.

6.3.2 Kopula-mnohorozměrné GARCH modely

Tyto modely jsou založené na skutečnosti, že jakékoli M -rozměrné sdružené rozdělení může být rozloženo na M marginálních rozdělení a kopula funkci, která vyjadřuje závislost mezi M veličinami. Celý model lze potom zapsat marginálními rozděleními jednotlivých řad, podmíněnou kopula funkcí a GARCH rovnicemi podmíněných rozptylů. Zdůrazněme, že podmíněná kopula funkce musí být časově proměnlivá prostřednictvím parametrů.

6.4 Pákový efekt v mnohorozměrných modelech typu GARCH

U akciových výnosů může mít růst hodnoty menší dopad na volatilitu než pokles hodnoty stejné absolutní hodnoty. Jinými slovy, křivka dopadu inovací na volatilitu je asymetrická, tj.

$$\sigma_t^2(\epsilon_{t-1}) \neq \sigma_t^2(-\epsilon_{t-1}).$$

Tento jev se často nazývá pákový efekt, který poprvé publikoval Black (1976).

U mnohorozměrných modelů dochází k pákovému efektu, protože rozptyly a kovariance mohou reagovat různě na kladné a záporné změny hodnot výnosů. Připomeňme, že podmíněná varianční matice je v mnohorozměrných modelech definována jako funkce zpožděných hodnot $\epsilon_t \epsilon_t'$. Změny hodnoty výnosu lze vyjádřit právě prostřednictvím ϵ_t nebo \mathbf{Z}_t . Model, který výslovně zahrnuje znaménka chyb, je asymetrický dynamický kovarianční model, tzv. ADC model, navržený Kronerem a Ngem (1998). Tento model se od obecného dynamického kovariančního modelu, tzv. GDC modelu, liší použitím vektoru $\mathbf{V}_t = \max\{\mathbf{0}, -\epsilon_t\}$ ve vyjádření θ_{ijt}

$$\theta_{ijt} = c_{ij} + \mathbf{a}'_i \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{g}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{g}_j + \mathbf{b}'_i \mathbf{V}_{t-1} \mathbf{V}'_{t-1} \mathbf{b}_j.$$

Pro vyjádření pákového efektu v DVEC modelu přidali Hansson a Hordahl (1998) do rovnice podmíněné varianční matice (6.3) sčítanec $\mathbf{D} \odot \mathbf{V}_{t-1} \mathbf{V}'_{t-1}$, kde \mathbf{D} je diagonální matice parametrů. Pro vyjádření pákového efektu v dvourozměrném BEKK modelu zavedli Hafner a Herwatz (1998) sčítanec $\mathbf{D}'_1 \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} \mathbf{D}_1 \mathbb{I}_{\{\epsilon_{1,t-1} < 0\}} + \mathbf{D}'_2 \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} \mathbf{D}_2 \mathbb{I}_{\{\epsilon_{2,t-1} < 0\}}$, kde jsou $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ čtvercové matice parametrů řádu dva a $\mathbb{I}_{\{\dots\}}$ je indikátor funkce.

Kapitola 7

Odhady parametrů

V páté kapitole jsme zavedli mnohorozměrný ARCH(1) model jako speciální případ později definovaného BEKK modelu v Definicí 6.1.2. Nyní se proto omezíme na vyšetřování odhadu parametrů v mnohorozměrných GARCH modelech, které jsme zavedli v předchozí kapitole, kde jsme pracovali s různými vyjádřeními podmíněné varianční matice. V následující podkapitole se budeme zabývat odhadem příslušných parametrů metodou maximální věrohodnosti, protože odhady získané metodou obyčejných nejmenších čtverců jsou méně eficientní než ty, které poskytuje právě výše zmíněná metoda maximální věrohodnosti.

7.1 Metoda maximální věrohodnosti

Stejně jako v jednorozměrném případě lze pro odhad parametrů podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu použít metodu maximální věrohodnosti. Předpokládejme, že vektorový náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t = 1, \dots, T\}$ splňuje rovnice (6.1) a (6.2) a že má podmíněnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$, podmíněnou varianční matici $\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$ a podmíněné rozdělení $P(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\zeta}_0, \mathcal{I}_{t-1})$, kde $\boldsymbol{\zeta}_0 = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ je vektor parametrů typu $1 \times r$ a $\boldsymbol{\eta}_0$ je vektor parametrů, které se vyskytují v rozdělení náhodného procesu $\{\mathbf{Z}_t\}$. Může tedy nastat situace $\boldsymbol{\zeta}_0 = (\boldsymbol{\theta}_0)$. Příslušnou hustotu podmíněného rozdělení náhodného vektoru \mathbf{Y}_t budeme v následujícím značit $f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\zeta}_0, \mathcal{I}_{t-1})$.

Poznamenejme, že pro zápis věrohodnostní funkce zde vyjádříme sdruženou hustotu procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ podmíněnou vzhledem k vektoru parametrů $\boldsymbol{\zeta}$ prostřednictvím součinu podmíněných hustot $f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\zeta}, \mathcal{I}_{t-1})$. Příslušný vztah těchto hustot je

$$f(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T | \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\zeta}, \mathcal{I}_{t-1})$$

a lze jej odvodit použitím věty o podmíněné hustotě ([2], Věta 3.19.) a opakovaným použitím věty o vztahu sdružené a podmíněné hustoty ([2], věta 3.20.).

Nejčastěji používaným postupem pro odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\zeta}_0$ je maximalizace logaritmicke věrohodnostní funkce, kterou provádíme za předpokladu, že jsou jednotlivé vektory standardizovaného inovačního procesu $\{\mathbf{Z}_t\}$ nezávislé a stejně rozdělené. Jako další předpoklad uvažujeme volbu podmíněné hustoty procesu $\{\mathbf{Z}_t\}$, kterou značíme $g(\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}) | \boldsymbol{\eta})$. Poznamenejme zde, že z rovnic (6.1) a (6.2) lze náhodný proces $\{\mathbf{Z}_t\}$

vyjádřit pomocí pozorovaného procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ vztahem

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}_t).$$

Pro zápis logaritmické věrohodnostní funkce tedy použijeme podmíněnou hustotu vektorového procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$, kterou vyjádříme prostřednictvím zvolené hustoty $g(\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\eta})$ rovnicí

$$f(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{I}_{t-1}) = |\mathbf{H}_t|^{-\frac{1}{2}}g(\mathbf{H}_t^{-1/2}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)|\boldsymbol{\eta}).$$

Prvek $|\mathbf{H}_t|^{-1/2}$ je jakobiánem transformace inovačního procesu na pozorovaný proces. Poznamenejme zde, že patří-li hustota $g(\cdot)$ do třídy elipticky vrstevnicových rozdělání, tj. je-li funkcí $\mathbf{z}'_t\mathbf{z}_t$, potom jsou tato hustota a i samotný odhad metodou maximální věrohodnosti nezávislé na vyjádření $\mathbf{H}_t^{-1/2}$, ale jsou funkcemi \mathbf{H}_t^{-1} , protože $\mathbf{z}'_t\mathbf{z}_t = (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'\mathbf{H}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)$. Nyní již můžeme zapsat logaritmickou věrohodnostní funkci $L_T(\boldsymbol{\zeta})$ pro T pozorování, kterou dále maximalizujeme s ohledem na vektor parametrů $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$, ve tvaru

$$L_T(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{I}_{t-1}).$$

Závislost na vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ je vyjádřena prostřednictvím vektoru $\boldsymbol{\mu}_t$ a matice \mathbf{H}_t .

Standardně používaným rozdělením je mnohorozměrné normální rozdělení. V takovém případě potom platí, že $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\theta})$, protože je dané rozdělení jednoznačně určeno prvními dvěma momenty. Příslušnou logaritmickou věrohodnostní funkci lze vyjádřit rovnicí

$$L_T(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'\mathbf{H}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t). \quad (7.1)$$

Víme ale, že u většiny úloh pracujících s daty vysoké frekvence (např. s burzovními daty) je normalita inovačního procesu zamítnuta, protože jsou špičatosti jednotlivých výnosových řad finančních aktiv větší než tři. Tato špičatost větší než tři prokazuje skutečnost, že pozorovaná data mají příliš mnoho odlehlých pozorování a nelze je modelovat normálním rozdělením. Navíc nepodmíněné rozdělení má mnohdy silnější chvosty oproti těm, které s sebou přináší podmíněné normální rozdělení. Přesto lze maximalizací výrazu (7.1) vůči $\boldsymbol{\theta}$ získat konzistentní odhad $\boldsymbol{\theta}_0$. Takový odhad potom nazýváme kvazi-maximálně věrohodným odhadem. Poznamenejme, že pro samotnou maximalizaci logaritmické věrohodnostní funkce musíme použít numerické metody.

Za předpokladu, že má vektorový náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ podmíněné normální rozdělení $\mathbf{Y}_t|\boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{I}_{t-1} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}_0), \mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta}_0))$, lze například pro $DCC_T(M)$ model uvedený v definici 6.3.2. vyjádřit logaritmickou věrohodnostní funkci ve tvaru

$$\begin{aligned} L_T(\boldsymbol{\theta}) = & -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln h_{iit} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{R}_t^{-1}\mathbf{D}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Maximalizací zde uvedeného výrazu (7.2) vůči vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ získáme maximálně věrohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. V $DCC_T(M)$ modelu uvedeném v definici 6.3.2. lze vektor všech parametrů vyjádřit jako $\boldsymbol{\theta} = (c_1, \dots, c_N, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, \rho_{12}, \dots, \rho_{N-1,N}, \theta_1, \theta_2)$.

V některých případech je ale nutné použít pro inovační proces vhodnější rozdělení než výše uvedené normální rozdělení. Například pokud je inovační proces špičatý, potom lze jako přirozenou alternativu k normálnímu rozdělení použít Studentovo rozdělení, které je popsáno parametrem ν vyjadřujícím počet stupňů volnosti. Poznamenejme, že v takovém případě $\boldsymbol{\eta} = (\nu)$, kde ν je kladné číslo. Pokud $\nu \rightarrow \infty$, potom hustota Studentova rozdělení konverguje k hustotě normálního rozdělení. Oproti tomu se chvosty hustoty Studentova rozdělení zesilují, když $\nu \rightarrow 0$. Hodnota parametru ν vyjadřuje řád nejvyššího existujícího momentu. Například pro $\nu = 2$ existuje moment prvního řádu, ale moment druhého řádu již neexistuje. Z tohoto důvodu je vhodné předpokládat $\nu > 2$. Hustota N -rozměrného Studentova rozdělení má pro náhodný vektor $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{Nt})'$ tvar

$$f(\mathbf{x}_t | \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{\frac{N}{2}}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}'_t \mathbf{x}_t}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}},$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je funkce gama. Jednotlivé složky X_{it} pro $i = 1, \dots, N$ výše uvedeného vektoru mají každá nulovou střední hodnotu a rozptyl $\nu/(\nu-2)$. Zavedeme tedy normovaný vektor $\mathbf{Z}_t = \sqrt{(\nu-2)/\nu} \mathbf{X}_t$ se standardizovaným N -rozměrným Studentovým rozdělením a transformací vypočteme příslušnou hustotu

$$g(\mathbf{z}_t | \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})[\pi(\nu-2)]^{\frac{N}{2}}} \left(1 + \frac{\mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}.$$

Pro samotný výpočet logaritmické věrohodnostní funkce provedeme ještě jednu transformaci $\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{Z}_t$ za předpokladu, že má náhodný vektor \mathbf{Z}_t výše uvedené standardizované N -rozměrné Studentovo rozdělení. Hustota náhodného vektoru \mathbf{Y}_t má pak tvar

$$f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\zeta}, \mathcal{I}_{t-1}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})[\pi(\nu-2)]^{\frac{N}{2}} |\mathbf{H}_t|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)}{\nu-2}\right]^{-\frac{\nu+N}{2}}$$

a odpovídající logaritmická věrohodnostní funkce je

$$\begin{aligned} L_T(\boldsymbol{\zeta}) &= T \ln \Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right) - T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{TN}{2} \ln[\pi(\nu-2)] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \\ &\quad - \frac{\nu+N}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left[1 + \frac{(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)}{\nu-2}\right]. \end{aligned}$$

Chceme-li zahrnout do odhadu parametrů obojí, nadbytečnou špičatost výnosů i jejich zešikmenost, lze použít mnohorozměrnou hustotu inovačního procesu, která má silné chvosty a je zešikmená. Pro tento účel lze použít například šikmé Studentovo rozdělení, ale již v jednorozměrném případě bychom pracovali s velmi složitou logaritmickou věrohodnostní funkcí s mnoha dodatečnými parametry. Pro ilustraci zde

uvedme logaritmickou věrohodnostní funkci pro náhodnou veličinu Y_t , jak ji uvádí [1] s ponecháním předchozího značení

$$L_T(\zeta) = T \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{T}{2} \ln[\pi(\nu-2)] + T \ln\left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}}\right) + \\ + T \ln s - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln H_t - \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left\{ 1 + \left[\frac{s H_t^{-\frac{1}{2}}(y_t - \mu_t) + m}{\nu-2} \right] \xi^{-I_t} \right\},$$

kde ν opět vyjadřuje počet stupňů volnosti daného rozdělení, parametr ξ vyjadřuje asymetrii rozdělení a zbývající parametry s, m a I_t lze vyjádřit rovnicemi

$$s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2} \quad \text{a} \quad m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{(\nu-2)}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right),$$

$$I_t = 1 \quad \text{pro} \quad H_t^{-\frac{1}{2}}(Y_t - \mu_t) \geq -m/s \quad \text{a} \quad I_t = -1 \quad \text{pro} \quad H_t^{-\frac{1}{2}}(Y_t - \mu_t) < -m/s.$$

Nadměrnou špičatost a zešikmenost výnosů můžeme při odhadu parametrů vyjádřit také použitím zobecněného hyperbolického rozdělení, které je definováno jako směs mnohorozměrných normálních rozdělení. Vyjádření příslušné hustoty lze nalézt v ([9], str. 212), kde je uveden také stručný popis tohoto rozdělení. Poznamenejme však, že zde zmíněné rozdělení vyžaduje příliš mnoho parametrů.

Asymptotické charakteristiky kvazi-maximálně věrohodného odhadu parametrů ještě nejsou pevně stanoveny pro zde uvažované mnohorozměrné GARCH modely. Konzistence již prokázána byla, ale asymptotická normalita byla prokázána jen pro BEKK model zavedený v Definici 6.1.2. a pro jeho konkrétní případy, tj. F-GARCH, O-GARCH a GO-GARCH modely, které jsou uvedeny v definicích 6.1.3., 6.2.1. a 6.2.2. v tomto pořadí. Tvzení pojednávající o zde zmíněných asymptotických charakteristikách kvazi-maximálně věrohodného odhadu parametrů obecného BEKK modelu lze nalézt ve ([12], Proposition 16.1.). Poznamenejme ještě, že tyto charakteristiky platí také pro kvazi-maximálně věrohodný odhad parametrů mnohorozměrného ARCH(1) modelu, který je uvedený v páté kapitole, protože je speciálním případem zde definovaného mnohorozměrného BEKK modelu.

Kapitola 8

Adekvátnost odhadnutých modelů

Odhad mnohorozměrných ARCH i GARCH modelů je časově velmi náročný, jak z hlediska programování, tak i z hlediska výpočtů samotných. Je proto vhodné předem ověřit, zda studovaná data obsahují ARCH projevy. Dodatečně je velmi důležité ověřit přiměřenost odhadnutého modelu. Mnohorozměrným modelům se ale věnuje pouze několik testů, ačkoli pro jednorozměrné modely jich existuje mnoho.

Lze rozlišit dva typy testů. Jednorozměrné testy použité nezávisle na jednotlivé výnosové řady a mnohorozměrné testy použité na celou skupinu výnosových řad jako celek. Přestože jednorozměrné testy mohou poskytnout jisté výsledky, korelace mezi veličinami inovačního procesu z téhož časového okamžiku způsobuje, že statistiky z jednotlivých rovnic nejsou nezávislé. Tato skutečnost poukazuje na potřebu použití sdruženého testování.

Jak jsme již zmínili, mnohorozměrný ARCH(1) model uvedený v páté kapitole je speciálním případem BEKK modelu z definice 6.1.2., a proto se v následujícím zaměříme na vyšetřování ARCH projevů v mnohorozměrných GARCH modelech. Předpokládejme, že se pohyb studované řady řídí mnohorozměrným GARCH modelem daným rovnicemi (6.1) a (6.2). Standardizovaná chybová složka $\mathbf{Z}_t = \mathbf{H}_t^{-1/2} \boldsymbol{\epsilon}_t$ by měla splňovat tři následující podmínky:

$$(P.I) \quad E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t') = \mathbf{I}_N,$$

$$(P.II) \quad \text{cov}(Z_{it}^2, Z_{jt}^2) = 0 \quad \text{pro každé } i \neq j,$$

$$(P.III) \quad \text{cov}(Z_{it}^2, Z_{j,t-k}^2) = 0 \quad \text{pro každé } i \neq j, k > 0.$$

Testováním vlastnosti (P.I) lze odhalit chybné vyjádření podmíněné střední hodnoty. Testováním vlastnosti (P.II) lze ověřit, zda je podmíněné rozdělení Gaussovo. Testováním vlastnosti (P.III) lze zjistit přiměřenost vyjádření matice \mathbf{H}_t bez ohledu na platnost předpokladů o rozdělení náhodného vektoru \mathbf{Z}_t . Podmínka (P.II) tedy nemusí být splněna, i když je matice \mathbf{H}_t vyjádřena správně. Za předpokladu, že existují momenty příslušných řádů, které jsou potřeba pro testování podmínek (P.I) – (P.III), lze provést příslušné testy za použití testovacích pravidel podmíněných momentů, která navrhli Newey (1985) a Tauchen (1985). Tyto momenty však mnohdy neexistují.

Testy podmíněně heteroskedastických modelů lze rozdělit do následujících tří skupin:

- Portmanteau testy Boxova-Pierceova-Ljungova typu,

- testy založené na Lagrangeových multiplikatorech,
- testy založené na reziduích.

8.1 Portmanteau statistiky

Ve finančních úlohách je často potřeba testovat, zda jsou autokorelace a smíšené korelace se zpožděními $1, \dots, m$ dané vektorové časové řady nulové. Nejčastěji používanými testy jsou pro tento účel Ljungovy-Boxovy Portmanteau testy. Mnohorozměrná verze Ljungovy-Boxovy statistiky $Q_N(m)$ je zobecněním jednorozměrné Ljungovy-Boxovy statistiky $Q(m)$. Poznamenejme, že m zde budeme volit podle doporučení pro jednorozměrný případ, které je uvedeno ve ([14], str. 25) a které navrhuje použít $m \approx \ln T$. Uvažujme nejprve obecný vektorový náhodný proces $\{\mathbf{X}_t, t = 1, \dots, T\}$, kde jsou jednotlivé vektory typu $N \times 1$. Pro uvedený proces $\{\mathbf{X}_t\}$ se jedná o test nulové hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \dots = \boldsymbol{\rho}_m = \mathbf{0}$ proti alternativní hypotéze $H_1 : \boldsymbol{\rho}_l \neq \mathbf{0}$ pro nějaké $l \in \{1, \dots, m\}$, kde $\boldsymbol{\rho}_l$ označuje smíšenou korelační matici se zpožděním l pro $l = 1, \dots, m$. Pro vyjádření jednotlivých prvků uvedených matic použijeme značení $\boldsymbol{\rho}_l \equiv [\rho_{ij}(l)]$ pro $l = 1, \dots, m, i, j = 1, \dots, N$ a obdobné značení použijeme také pro další matice. Následující tvar mnohorozměrné verze Ljungovy-Boxovy testové statistiky $Q_N(m)$, který přebíráme ze ([14], str. 308), má pro vektorový náhodný proces $\{\mathbf{X}_t\}$ tvar

$$Q_N(m) = T^2 \sum_{l=1}^m \frac{1}{T-l} \text{tr}\{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l' \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1}\}.$$

Symbolem $\text{tr}\{\cdot\}$ zde označujeme stopu matice, jedná se o součet prvků ležících na hlavní diagonále dané čtvercové matice. Maticí $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l$ označujeme výběrovou smíšenou kovarianční matici s časovou prodlevou l pro $l = 1, \dots, m$ a matice $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0$ je výběrová varianční matice. Souhrnně lze tyto matice zapsat rovnicí

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{t-k} - \bar{\mathbf{X}})' \quad \text{pro } k = 0, \dots, m,$$

kde $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{T}(\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_T)$ označuje vektor výběrové střední hodnoty.

Statistiku $Q_N(m)$ lze zapsat i prostřednictvím výběrových smíšených korelačních matic $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k$ se zpožděními k pro $k = 0, \dots, m$ za použití operátoru vec a za použití Kroneckerova součinu \otimes . Takto získáme vyjádření

$$Q_N(m) = T^2 \sum_{l=1}^m \frac{1}{T-l} [\text{vec}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_l)]' (\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1}) \text{vec}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_l),$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_k = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k \hat{\mathbf{D}}^{-1} \quad \text{pro } k = 0, \dots, m.$$

Matice $\hat{\mathbf{D}}$ zde označuje diagonální matici s výběrovými směrodatnými odchylkami, tj. $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{11}^{1/2}(0), \dots, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{NN}^{1/2}(0))$.

O asymptotickém rozdělení testové statistiky $Q_N(m)$ se lze dočíst ve ([14], str. 308), kde je uvedeno, že za platnosti nulové hypotézy a za jistých podmínek regularity má

zde uvedená testová statistika asymptoticky chý kvadrát rozdělení s N^2m stupni volnosti. Splňuje-li p -hodnota vypočtené testové statistiky podmínku p -hodnota $< \alpha$ pro předepsanou hladinu testu α , potom zamítáme nulovou hypotézu a můžeme zpracovávaná data považovat za vzájemně závislá. Obvykle volíme $\alpha = 0.05$. Statistika $Q_N(m)$ je sdruženým testem pro vyšetření prvních m smíšených korelačních matic \mathbf{X}_t a velká hodnota testové statistiky svědčí proti nulové hypotéze. Proto zamítneme-li nulovou hypotézu, musíme pro řadu vytvořit mnohorozměrný model zabývající se vztahem jednotlivých vektorů dané řady do zpoždění m včetně tohoto posledního řádu m .

Tímto Ljungovým-Boxovým testem můžeme také zpětně ověřit správnost vyjádření podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t v libovolném modelu typu GARCH. Víme, že inovační proces již nevykazuje žádný ARCH projev, pokud proces druhých mocnin standardizovaných inovací nemá žádné autokorelace ani smíšené korelace a touto statistikou lze právě otestovat, zda jsou všechny autokorelace i smíšené korelace se zpožděními $1, \dots, m$ v dané mnohorozměrné řadě nulové proti alternativě, že je alespoň jedna z uvedených korelací různá od nuly. Pro tento účel je potřeba ve výše uvedeném výkladu nahradit \mathbf{X}_t procesem $\hat{\mathbf{Z}}_t = \hat{\mathbf{H}}_t^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t$. Poznamenejme, že z rovnice (6.1) lze $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t$ vyjádřit jako $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t = \mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$. V tomto případě již ale neznáme asymptotické rozdělení testové statistiky, protože je pro její výpočet použit odhad \mathbf{Z}_t značený $\hat{\mathbf{Z}}_t$, který je funkcí $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Proto by výsledky tohoto Portmanteau testu měly být vykládány opatrně, ačkoli pro mnoho úloh již bylo simulačními studiemi prokázáno, že uvedený test poskytuje dobré výsledky.

Alternativní Portmanteau statistiku pro testování zbytkové mnohorozměrné podmíněné heteroskedasticity navrhli Ling a Li (1997). Zavedli výběrovou autokorelaci druhých mocnin standardizovaného inovačního procesu se zpožděním l vztahem

$$\tilde{R}(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^T (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-l}' \hat{\mathbf{H}}_{t-l}^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-l} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})}{\sum_{t=l+1}^T (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})^2},$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t$ pro každé $l = 1, \dots, m$. Za předpokladu, že je model vyjádřen správně, lze stanovit $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ postupem, který uvádí ([11], str. 125). Víme, že pro $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t \rightarrow \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t) \quad \text{s.j.},$$

kde $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_t' \mathbf{Z}_t) = N$. Proto pro dostatečně velké T můžeme následovně $\tilde{R}(l)$ nahradit

$$\hat{R}(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^T (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t - N) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-l}' \hat{\mathbf{H}}_{t-l}^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-l} - N)}{\sum_{t=l+1}^T (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t' \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t - N)^2}.$$

Testovou statistiku potom zavedeme pomocí součtu druhých mocnin těchto výběrových autokorelací $\hat{R}(l)$ jako $LL(m) = T \sum_{l=1}^m \hat{R}^2(l)$. Za platnosti nulové hypotézy, že v odhadnutém modelu už není žádná podmíněná heteroskedasticita, má tato testová statistika asymptoticky chý kvadrát rozdělení s m stupni volnosti, jak uvádí ([11], str. 126). Při odvozování asymptotických charakteristik zde nepředpokládáme, že má inovační proces podmíněné normální rozdělení a uvedená testová statistika je tedy robustní vůči volbě podmíněného rozdělení inovačního procesu.

8.2 Testy založené na Lagrangeových multiplika-torech

Velmi často používanými testy v teorii mnohorozměrných GARCH modelů jsou také testy Lagrangeových multiplikátorů. Pro ověření vhodnosti použití nějakého modelu typu ARCH pro pozorovaná data ([12], str. 557–584) uvádí test založený na Lagrangeových multiplika-torech, který používá pomocný regresní model

$$vech(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t') = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathcal{B}_1 vech(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}') + \cdots + \mathcal{B}_q vech(\boldsymbol{\epsilon}_{t-q} \boldsymbol{\epsilon}_{t-q}') + \mathbf{E}_t.$$

Zde je $\boldsymbol{\beta}_0$ vektorem parametrů typu $[N(N+1)/2] \times 1$ a \mathcal{B}_j jsou čtvercové matice parametrů řádu $[N(N+1)/2]$ pro $j = 1, \dots, q$. Jsou-li všechny matice \mathcal{B}_j pro $j = 1, \dots, q$ nulové, potom studovaná data nevykazují žádný ARCH projev. Nulová hypotéza je tedy $H_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \cdots = \mathcal{B}_q = \mathbf{0}$ a příslušná alternativní hypotéza je $H_1 : \mathcal{B}_j \neq \mathbf{0}$ pro nějaké $j \in \{1, \dots, q\}$. Statistiku LM lze potom vypočítat nahrazením $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ odpovídajícími odhadnutými rezidui z rovnice (6.1) a vypočtením odhadu parametrů v pomocném regresním modelu metodou nejmenších čtverců. Označíme-li výsledný odhad kovarianční matice reziduí $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{vech}$ a příslušnou matici získanou pro $q = 0$ jako $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0$, potom lze vyjádřit statistiku LM ve tvaru

$$LM_{ARCH}(q) = \frac{1}{2} TN(N+1) - Ttr\{\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{vech} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1}\}.$$

Za platnosti nulové hypotézy má tato testová statistika asymptoticky chí kvadrát rozdělení s $qN^2(N+1)^2/4$ stupni volnosti. V tomto testu ale každá z matic \mathcal{B}_j pro $j = 1, \dots, q$ představuje velký počet parametrů. Již ve dvourozměrném případě obsahuje každá z těchto matic devět parametrů, a proto zde uvedený test není vhodný pro velká q ani při malém N . Nicméně je ale možné aplikovat tento test pro každou z N řad reziduí jednotlivě.

Pro snížení počtu parametrů v odhadu mnohorozměrných GARCH modelů je vhodné použít například konstantní model podmíněných korelací, tzv. CCC model uvedený v Definicí 6.3.1. CCC model předpokládá, že podmíněná korelační matice je v čase konstantní, je proto potřeba zpětně otestovat, zda tato vlastnost platí v odhadnutém modelu. Tse (2002) navrhl test pro konstantní korelace, kde testujeme nulovou hypotézu $H_0 : h_{ijt} = \rho_{ij} (h_{iit} h_{jtt})^{1/2}$ proti alternativní hypotéze $H_1 : h_{ijt} = \rho_{ijt} (h_{iit} h_{jtt})^{1/2}$ s podmíněnými rozptyly vyjádřenými modelem GARCH(1, 1). Příslušná testová statistika je statistika LM, která má za platnosti nulové hypotézy asymptoticky chí kvadrát rozdělení s $N(N-1)/2$ stupni volnosti.

K testování konstantnosti podmíněné korelační matice lze použít i test založený na dynamickém modelu podmíněných korelací, tzv. DCC modelu, který je uvedený v definici 6.3.3. Engle a Sheppard (2001) navrhli test s nulovou hypotézou $H_0 : \mathbf{R}_t = \overline{\mathbf{R}}$ pro každé $t = 1, \dots, T$ proti alternativní hypotéze $H_1 : vech(\mathbf{R}_t) = vech(\overline{\mathbf{R}}) + \mathcal{B}_1^* vech(\mathbf{R}_{t-1}) + \cdots + \mathcal{B}_q^* vech(\mathbf{R}_{t-q})$. Nulová hypotéza tedy znamená, že jsou všechny koeficienty v pomocném regresním modelu

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\beta}_0^* + \mathcal{B}_1^* \mathbf{X}_{t-1} + \cdots + \mathcal{B}_q^* \mathbf{X}_{t-q} + \mathbf{E}_t^*$$

nulové. Zde je $\mathbf{X}_t = vech^l(\widehat{\mathbf{Z}}_t \widehat{\mathbf{Z}}_t' - \mathbf{I}_N)$, kde je operátor $vech^l$ podobný operátoru $vech$, ale z příslušné matice řadí do sloupcového vektoru pouze prvky ležící pod hlavní diagonálou. Vektor $\widehat{\mathbf{Z}}_t = \widehat{\mathbf{R}}^{-1/2} \widehat{\mathbf{D}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t$ je vektorem standardizovaných reziduí typu $N \times 1$ za platnosti nulové hypotézy, že $\mathbf{R}_t = \overline{\mathbf{R}}$, a opět zde platí, že $\mathbf{D}_t = diag(h_{11t}^{1/2}, \dots, h_{NNt}^{1/2})$.

8.3 Testy založené na reziduích

Výhodou testů založených na reziduích je skutečnost, že se zabývají hned několika příčinami případné zbytkové podmíněné heteroskedasticity současně. Tyto testy spočívají v regresi smíšených součinnů standardizovaných reziduí \hat{U}_t na nějakých vysvětlujících proměnných a v následném testování významnosti regresních koeficientů. Hlavním nedostatkem těchto testů je ale skutečnost, že používají transformovaná rezidua vypočtená až po odhadu počátečního modelu, a tak závisí na odhadovaných parametrech včetně jejich nejistoty. Toto však neplatí, použijeme-li pro odhad parametrů metodu obyčejných nejmenších čtverců.

Tse (2002) stanovil asymptotické rozdělení odhadu vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ právě pro případ, kdy v pomocném regresním modelu použijeme metodou obyčejných nejmenších čtverců. Definujme $\hat{U}_{it} = \hat{\epsilon}_{it}/\hat{h}_{iit}^{1/2}$ jako i -té standardizované reziduum v čase t pro $i = 1, \dots, N$ a $\hat{\rho}_{ijt} = \hat{h}_{ijt}/(\hat{h}_{iit}\hat{h}_{jtt})^{1/2}$ jako odhad podmíněné korelace mezi Y_{it} a Y_{jt} v čase t pro $1 \leq i < j \leq N$. Tse (2002) navrhl následující regresní rovnice

$$\begin{aligned}\hat{U}_{it}^2 - 1 &= \hat{\mathbf{d}}'_{it}\boldsymbol{\delta}_i + \xi_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \hat{U}_{it}\hat{U}_{jt} - \hat{\rho}_{ijt} &= \hat{\mathbf{d}}'_{ijt}\boldsymbol{\delta}_{ij} + \xi_{ijt}, \quad 1 \leq i < j \leq N,\end{aligned}$$

kde vektor $\hat{\mathbf{d}}_{it}$ je odhadem vektoru $\mathbf{d}_{it} = (U_{i,t-1}, \dots, U_{i,t-m})'$, vektor $\hat{\mathbf{d}}_{ijt}$ je odhadem vektoru $\mathbf{d}_{ijt} = (U_{i,t-1}U_{j,t-1}, \dots, U_{i,t-m}U_{j,t-m})'$ a vektory $\boldsymbol{\delta}_i$ a $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ obsahují regresní koeficienty. Příslušné testové statistiky jsou

$$\text{RB}(m)_1 = T\hat{\boldsymbol{\delta}}'_i\hat{\mathbf{L}}_i\hat{\boldsymbol{\Omega}}_i^{-1}\hat{\mathbf{L}}_i\hat{\boldsymbol{\delta}}_i \quad \text{a} \quad \text{RB}(m)_2 = T\hat{\boldsymbol{\delta}}'_{ij}\hat{\mathbf{L}}_{ij}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ij}^{-1}\hat{\mathbf{L}}_{ij}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ij},$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i &= \text{plim} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_{it}\mathbf{d}'_{it} \right\}, \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \text{E}\{(U_{it}^2 - 1)^2\}\mathbf{L}_i - \mathbf{Q}_i\mathbf{G}\mathbf{Q}'_i, \\ \mathbf{Q}_i &= \text{plim} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_{it} \frac{\partial U_{it}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right\}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{ij} &= \text{plim} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{d}_{ijt}\mathbf{d}'_{ijt} \right\}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{ij} = \text{E}\{(U_{it}U_{jt} - 1)^2\}\mathbf{L}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{G}\mathbf{Q}'_{ij}, \\ \mathbf{Q}_{ij} &= \text{plim} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{d}_{ijt} \frac{\partial (U_{it}U_{jt} - \rho_{ijt})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right\}.\end{aligned}$$

Dále Tse (2002) zavedl jisté podmínky, které zaručují, že je odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ metodou maximální věrohodnosti asymptoticky normální, tedy že splňuje podmínku

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \text{N}(0, \mathbf{G}) \quad \text{v distribuci pro } T \rightarrow \infty.$$

A potom ukázal, že za platnosti těchto podmínek a za platnosti nulové hypotézy o správném vyjádření prvních dvou podmíněných momentů, mají testové statistiky $\text{RB}(m)_1$ a $\text{RB}(m)_2$ asymptoticky chí kvadrát rozdělení s m stupni volnosti. Ve výpočtu těchto testových statistik samozřejmě musíme neznámé veličiny nahradit jejich odhadnutými protějšky.

Kapitola 9

Aplikace na finanční časové řady

Porozumění časové závislosti mezi druhými centrálními momenty výnosů aktiv je důležité pro řešení mnoha finančních úloh, ať se jedná o samotné vytvoření modelů nebo jejich následný odhad. Dnes již víme, že se finanční volatilita v čase vyvíjí, jak pro jednotlivá aktiva, tak i pro samotné finanční trhy. Z finančního hlediska tato znalost umožňuje vytvořit lepší závěry v mnoha úlohách typu oceňování aktiv, oceňování opcí a řízení rizika.

Nabízí se otázka, jestli je volatilita aktiva přenášena na jiné aktivum přímo, tj. prostřednictvím podmíněného rozptylu nebo nepřímo, tj. prostřednictvím podmíněných kovariancí. Další otázkou je, zda se korelace mezi výnosy aktiv v čase vyvíjí a nerosteli v období vyšší volatility, které bývá spojováno s obdobím finanční krize. Je třeba také stanovit, do jaké míry se vzájemně ovlivňují volatility jednotlivých trhů. Všechny tyto otázky lze zodpovědět pomocí mnohorozměrných GARCH modelů.

Dalším využitím mnohorozměrných GARCH modelů je výpočet časově proměnných koeficientů zajištění. Nákup nebo prodej futures kontraktů představuje metodu zajištění proti změnám ceny podkladového aktiva. Odhad optimálního koeficientu zajištění tedy vyžaduje stanovení optimálního počtu futures kontraktů, které mají být prodány pro držení spotového aktiva. Potom lze v návaznosti na předchozí značení vypočítat optimální koeficient zajištění rovnicí

$$h_{t-1}^* = -\frac{h_{s,f,t}}{h_{f,t}}$$

a příslušný výnos takto zajištěného portfolia lze vyjádřit jako

$$r_{p,t} = s_t + h_{t-1}^* f_t.$$

Konstantní koeficienty zajištění jsou obvykle odhadovány metodou nejmenších čtverců v regresi spotových výnosů na futures výnosy, protože se jedná o odhad podílu kovariance mezi spotovým kontraktem a futures a rozptylu futures. Oproti tomu lze použitím mnohorozměrného GARCH modelu pro vektor spotových výnosů a futures výnosů stanovit časově proměnlivý koeficient zajištění.

Známe-li odhadnutý jednorozměrný GARCH model výnosové řady, můžeme určit podmíněné rozdělení daného výnosu a předpovědět VaR krátké nebo dlouhé pozice. Uvažujeme-li celé portfolio aktiv, lze jeho výnos vypočítat přímo z jednotlivých podílů aktiv.

V současnosti obsahuje naprogramované funkce pro odhad parametrů v mnohorozměrných GARCH modelech pouze pět programů. Jedná se o programy EViews,

Gauss-FanPac, RATS, SAS a S-Plus-FinMetrics, toto uvedené pořadí je pouze abecední. Jednotlivé programy se dále omezují na použití různých typů GARCH modelů, nejčastěji se jedná o modely VEC, DVEC, BEKK a CCC, které jsou uvedeny v šesté kapitole v Definicí 6.1.1., v rovnici (6.3), v Definicí 6.1.2. a v Definicí 6.3.1. v tomto pořadí. Samozřejmě je také možné naprogramovat vlastní funkce pro odhad parametrů v požadovaném mnohorozměrném modelu typu GARCH. K tomu je vhodné použít například matematický program MATLAB. Následující zhodnocení zde uvedených programů přebíráme ze článku [4], který již na začátku vylučuje ze srovnávací studie program EViews, protože jeho verze 4.0 sice umožňuje vypočítat odhad parametrů v BEKK modelu, ale již neumožňuje vypočítat podobný odhad pro DVEC model, ačkoli se jedná o zjednodušení uvedeného BEKK modelu. Tabulka 9.1 uvádí seznam mnohorozměrných modelů typu GARCH, které lze odhadovat pomocí zbývajících čtyř programů. V praxi se samozřejmě setkáváme s kompromisem mezi přizpůsobivostí a jednoduchostí použití naprogramovaných funkcí. Mnohorozměrné modely typu GARCH jsou již samy o sobě složité, a tak pouze v programu RATS lze provádět úpravy v naprogramovaných funkcích podle konkrétní potřeby dané úlohy. Ve zmíněném programu lze například přidat vlastní vnější proměnné do rovnice podmíněného rozptylu nebo změnit náhodné rozdělení inovačního procesu. Velmi rozdílné jsou již počty desetinných míst, se kterými jednotlivé programy implicitně zobrazují své výsledky. Gauss-FanPac uvádí výsledky pouze se třemi desetinnými místy, SAS a S-Plus-FinMetrics uvádějí ve výsledcích pět desetinných míst a RATS uvádí výsledky s devíti desetinnými místy.

Rozdílnost v samotných odhadech jednotlivých parametrů mezi různými programy je ale znepokojující. Simulační studie prokázala rozdíl třiceti sedmi setin mezi nejnižší a nejvyšší hodnotou odhadu jistého parametru v modelu podmíněného rozptylu výnosu spotového kontraktu a ještě větší rozdíl, čtyřicet čtyři setiny, byl prokázán u téhož parametru v modelu podmíněného rozptylu výnosu futures. Odhady parametrů se v jednotlivých programech liší kvůli použití různých výpočetních metod. Může se jednat o rozdílná vyjádření derivací nebo o použití různých konvergenčních kritérií. Odhady parametrů jsou v mnohorozměrných modelech velmi složité a vzniká tak prostor pro možná selhání použitých metod v jistých specifických případech. Výpočetní metody mohou třeba nalézt pouze lokální maximum nebo ani nemusí dokonvergovat k nějakému řešení. Avšak z praktického hlediska se například v případě dynamického koeficientu zajištění tyto rozdíly ve výsledcích jednotlivých odhadů jeví jako nevýznamné, protože se dosazením do rovnice podmíněné varianční matice vzájemně vyruší. Tuto skutečnost bohužel nelze tak snadno prohlédnout v programu SAS, který neumožňuje zobrazit výsledné odhady podmíněné varianční matice. Program Gauss-FanPac jako jediný rovnoměrně rozděluje míru stálosti podmíněné varianční matice mezi předchozí hodnoty výnosové řady a předchozí hodnoty podmíněné varianční matice, zatímco ostatní programy dávají větší váhu předchozím hodnotám podmíněné varianční matice. Ze zde uvedeného vyplývá, že v současnosti je jednodušší použít jednorozměrný model pro jednotlivé řady pozorovaných dat.

V této práci jsme následující výpočty realizovali v programu MATLAB 6.5, který nám umožnil snadné zacházení s maticemi. Dále jsme některé z uvedených popisných statistik vypočítali v programu NCSS & PASS 2000, který usnadňuje statistické výpočty. Popisné statistiky vypočtené v programu MATLAB se shodují s těmi, které jsou vypočtené v programu NCSS & PASS 2000, zanedbatelné rozdíly se vyskytují až v řádu statisícin. Výsledky zde budeme pro stručnost zobrazovat na čtyři desetinná místa až na

některé výjimky, které vyžadují větší přesnost. Nepracovali jsme s programem EViews 5.1, protože jsme k němu neměli umožněný přístup na dostatečně dlouhou dobu, kterou vyžadují následující výpočty.

verze programu	Gauss 3.2.39- FanPac 1.1.11/2	RATS 4.3	SAS 8.2	S-Plus 6.1- FinMetrics1.0
VEC model	ne	ano	ano	ne
DVEC model	ano	ano	ano	ano
BEKK model	ano	ano	ano	ne
CCC model	ano	ano	ne	ano

Tabulka 9.1: Možnosti využití výpočetních programů pro odhad parametrů v mnoho-rozměrných modelech typu GARCH

9.1 Simulace jednorozměrných ARCH modelů

Pro snažší porozumění chování modelů typu ARCH a GARCH nejprve uvádíme simulační studii jednorozměrného modelu ARCH(1), který se řídí rovnicemi

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= 0, \\ \text{var}[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots] &= h_t = c + a\epsilon_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Uvedený proces $\{\epsilon_t\}$ tedy lze vyjádřit rovnicí

$$\epsilon_t = h_t^{1/2} Z_t, \quad (9.2)$$

kde proces $\{Z_t, t = 1, \dots, 1000\}$ nejprve modelujeme jako nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, 1)$. Počáteční hodnotu h_0 volíme podle doporučení uvedeného ve ([14], str. 98) jako 0 a následně vypočteme počáteční hodnotu ϵ_0 podle rovnice (9.2), tedy $\epsilon_0 = 0$. V následujícím potom tyto počáteční hodnoty soustavy rovnic nezahrnujeme do výpočtů popisných statistik. Pro samotný rekurentní výpočet stanovíme hodnoty $h_1 = c$ a $\epsilon_1 = h_1^{1/2} Z_1$ podle předchozích rovnic (9.1) a (9.2) a zbývající hodnoty náhodného procesu $\{\epsilon_t, t = 1, \dots, 1000\}$ dopočteme prostřednictvím soustavy rovnic

$$\begin{aligned} h_t &= c + a\epsilon_{t-1}^2, \\ \epsilon_t &= h_t^{1/2} Z_t, \end{aligned} \quad (9.3)$$

kteřou uzavřeme do "for" cyklu pro $t = 2, \dots, 1000$. Totéž opakujeme pro různé dvojice parametrů a a c , které shrnuje tabulka 9.2. Poznamenejme zde, že hodnoty parametru a zvolené jako 0.6 a 0.9 již nespĺňují podmínku $3a^2 < 1$ pro existenci konstantního čtvrtého momentu nasimulovaného procesu $\{\epsilon_t\}$.

Výsledné popisné statistiky nasimulovaného procesu $\{\epsilon_t\}$ pro různé dvojice parametrů a a c shrnuje tabulka 9.3. Na první pohled vidíme, že se při změně hodnoty parametru c a zachování hodnoty parametru a nemění šikmost a špičatost, tj. tyto hodnoty

	parametr c 0.01	parametr c 0.1	parametr c 1
parametr a 0.3	1	2	3
parametr a 0.6	4	5	6
parametr a 0.9	7	8	9

Tabulka 9.2: Číselné označení případových studií jednorozměrného ARCH(1) modelu

volba parametrů	1	2	3
stř. hodnota	-0.0042	-0.0133	-0.0420
směr. odchylka	0.1085	0.3432	1.0851
šikmost	-0.0330	-0.0330	-0.0330
špičatost	3.0267	3.0267	3.0267
volba parametrů	4	5	6
stř. hodnota	-0.0045	-0.0142	-0.0449
směr. odchylka	0.1320	0.4172	1.3193
šikmost	-0.1132	-0.1132	-0.1132
špičatost	4.8166	4.8166	4.8166
volba parametrů	7	8	9
stř. hodnota	-0.0047	-0.0150	-0.0474
směr. odchylka	0.1742	0.5510	1.7422
šikmost	-0.3068	-0.3068	-0.3068
špičatost	10.8020	10.8020	10.8020

Tabulka 9.3: Popisné statistiky jednorozměrného ARCH(1) modelu generovaného standardizovaným normálním rozdělením pro různé volby parametrů c a a

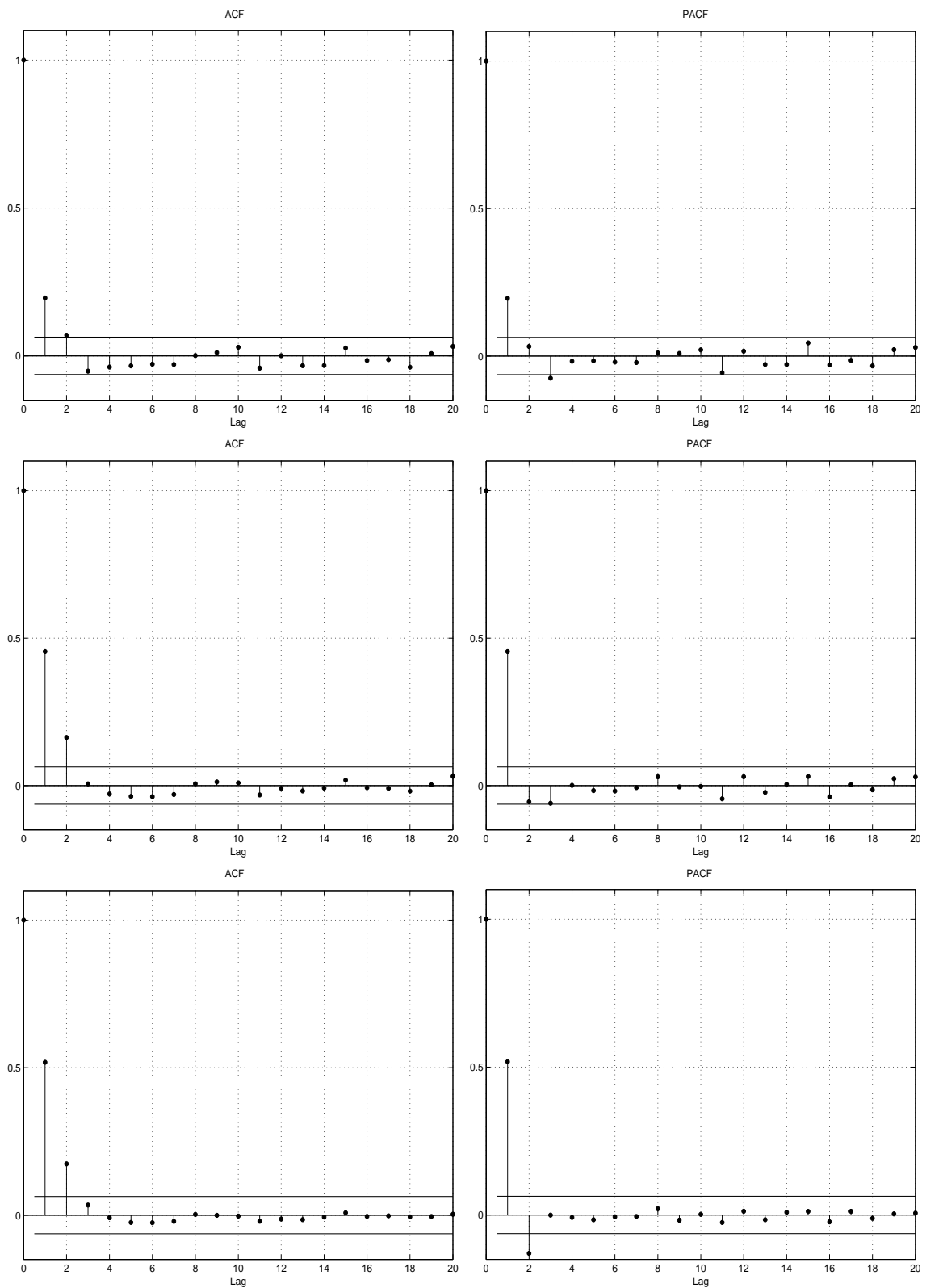
zůstávají stejné v celém řádku uvedené tabulky. Zmíněné výsledky jsou samozřejmě výpočetně doložitelné. Šikmost se při změně hodnoty parametru c nemění proto, že je při simulacích jako podkladové rozdělení použito normální rozdělení, které je symetrické. Konstantní špičatost při měnící se hodnotě parametru c odpovídá již dříve uvedenému vzorci (4.4) pro výpočet špičatosti. Dále si lze všimnout, že se při změně hodnoty parametru c a zachování hodnoty parametru a mění v druhé odmocnině odpovídajícího poměru parametrů c střední hodnota a směrodatná odchylka. S rostoucím parametrem a rostou všechny zde uvedené popisné charakteristiky. Střední hodnota a směrodatná odchylka tedy rostou směrem k pravému dolnímu rohu uvedené tabulky a šikmost a špičatost rostou ve sloupcích směrem dolů. Z nasimulovaných případů má nejmenší střední hodnotu případ 1, který má střední hodnotu -0.0042 , ale má velice malou špičatost 3.0267 , která neodpovídá reálné hodnotě. Druhou nejmenší střední hodnotu -0.0045 má případ 4, tato hodnota se o mnoho neliší od té předchozí, avšak špičatost má v tomto případě již reálnější hodnotu 4.8166 , se kterou se lze setkat i v praxi. Abychom se tedy přiblížili hodnotám reálných popisných statistik, nasimulujeme ještě jeden proces $\{\epsilon_t, t = 1, \dots, 1000\}$ s hodnotami parametrů $c = 0.0001$ a $a = 0.6$, čímž ještě snížíme hodnotu střední hodnoty do řádu statisícin. Tento případ označíme číslem 10. Příslušné popisné statistiky shrnuje tabulka 9.4 a je vidět, že se naplnila naše očekávání.

volba parametrů	10
stř. hodnota	$-4.4850e-04$
směr. odchylka	0.0132
šikmost	-0.1132
špičatost	4.8166

Tabulka 9.4: Popisné statistiky jednorozměrného ARCH(1) modelu generovaného standardizovaným normálním rozdělením pro případ 10, tj. volbu parametrů $c = 0.0001$ a $a = 0.6$

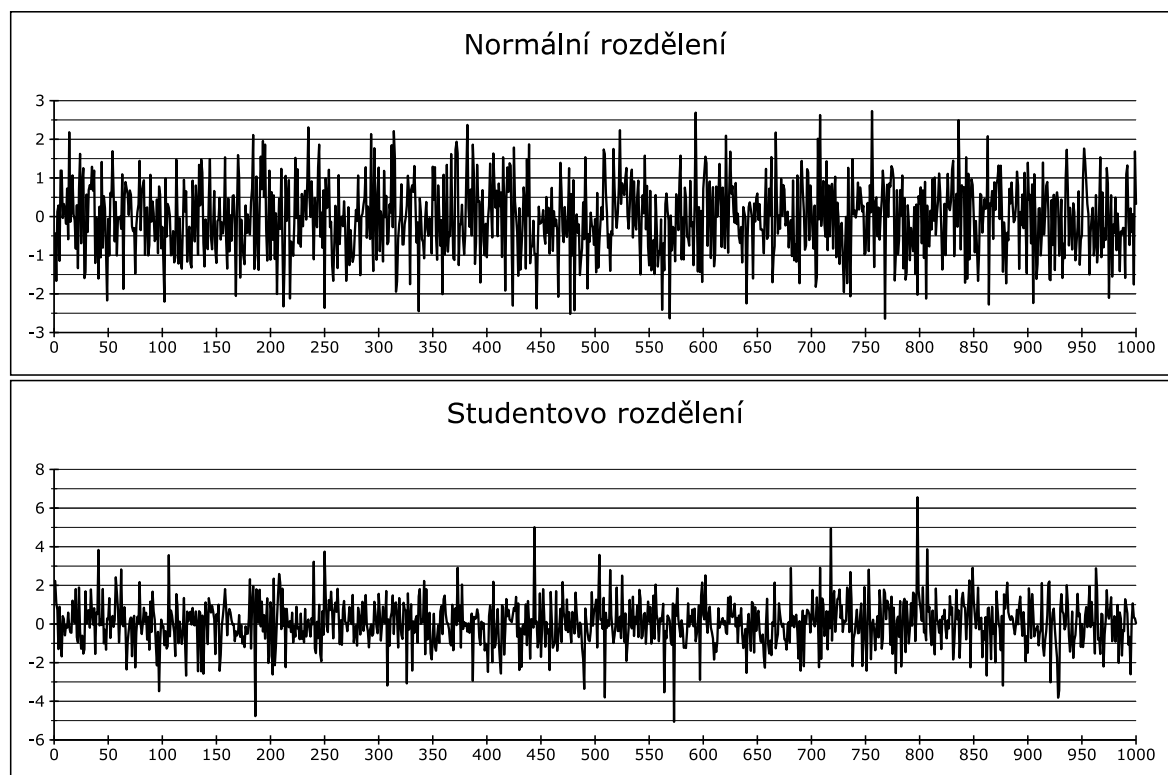
Proces $\{\epsilon_t\}$ má v jednotlivých případech všechny autokorelace nevýznamné a jedná se proto vždy o nějaký bílý šum. Pro doplnění předchozích popisných statistik ještě uveďme příslušné autokorelační a parciální autokorelační funkce procesu $\{\epsilon_t^2\}$. Tyto funkce zobrazujeme pro proces $\{\epsilon_t^2\}$ souhrnně pro případy (1, 2, 3), (4, 5, 6, 10) a (7, 8, 9). Pro náhodný proces $\{\epsilon_t^2\}$ ještě stanovíme pás významnosti hodnot autokorelačních a parciálních autokorelačních funkcí hodnotami $\pm 2/1000^{1/2} = \pm 0.0632$. Všechny zde uvedené grafy zobrazuje obrázek 9.1. Všimněme si hlavně vyhlazující se autokorelační funkce pro rostoucí parametr a , bez ohledu na velikost parametru c . Autokorelační funkce jsou uvedeny v levém sloupci obrázku, kde parametr a roste při sledu shora dolů. Tento obrázek také poukazuje na skutečnost, že při volbě dostatečně malého parametru a lze nasimulovat proces $\{\epsilon_t\}$, jehož druhá mocnina má nevýznamné autokorelace i parciální autokorelace. V tomto případě by špičatost procesu $\{\epsilon_t\}$ byla dokonce menší než tři.

V praxi se ale setkáváme u burzovních dat se špičatostí větší než tři, což nasvědčuje nepřiměřenosti standardizovaného normálního rozdělení. Proto jsme tytéž simulace provedli také pro Studentovo rozdělení a jak doporučuje ([14], str. 89), zvolili jsme Studen-



Obrázek 9.1: Simulace ARCH(1) modelu ze standardizovaného normálního rozdělení: v levém sloupci grafy ACF případových skupin (1, 2, 3), (4, 5, 6, 10) a (7, 8, 9) uvedené v tomto pořadí shora a v pravém sloupci grafy PACF pro stejné případové skupiny jako grafy ACF v levém sloupci

tovo rozdělení se šesti stupni volnosti. Poznamenejme ještě, že Studentovo rozdělení je také symetrické jako dříve použité normální rozdělení. Obrázek 9.2 ukazuje graf veličiny generované standardizovaným normálním rozdělením v horní části a graf veličiny generované Studentovým rozdělením se šesti stupni volnosti v dolní části. Všimněme si zde poměrně častých odlehlých pozorování u veličiny modelované Studentovým rozdělením. Dále uvádíme popisné statistiky, které jsme zde vypočetli pro stejné případy jako u standardizovaného normálního rozdělení a to včetně případu 10 v tabulce 9.5. I zde platí vlastnosti, které jsme popsali výše při použití standardizovaného normálního rozdělení, ale již při volbě parametru $a = 0.3$ je špičatost 7.5715 a další hodnoty parametru a s sebou přináší velmi nadsazené hodnoty špičatosti ve srovnání s praxí. Na obrázku 9.3 vidíme, že s rostoucím parametrem a roste i počet významných autokorelací u $\{\epsilon_t^2\}$. Poznamenejme zde, že například případ 5 má při této simulaci ze Studentova rozdělení se šesti stupni volnosti významné autokorelace již pro proces $\{\epsilon_t\}$. Toto nasvědčuje použití jiného než zde uvedeného Studentova rozdělení pro přiměřené vyjádření nadměrné špičatosti dat.



Obrázek 9.2: Simulace náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením v horním grafu a simulace náhodné veličiny se Studentovým rozdělením se šesti stupni volnosti v dolním grafu

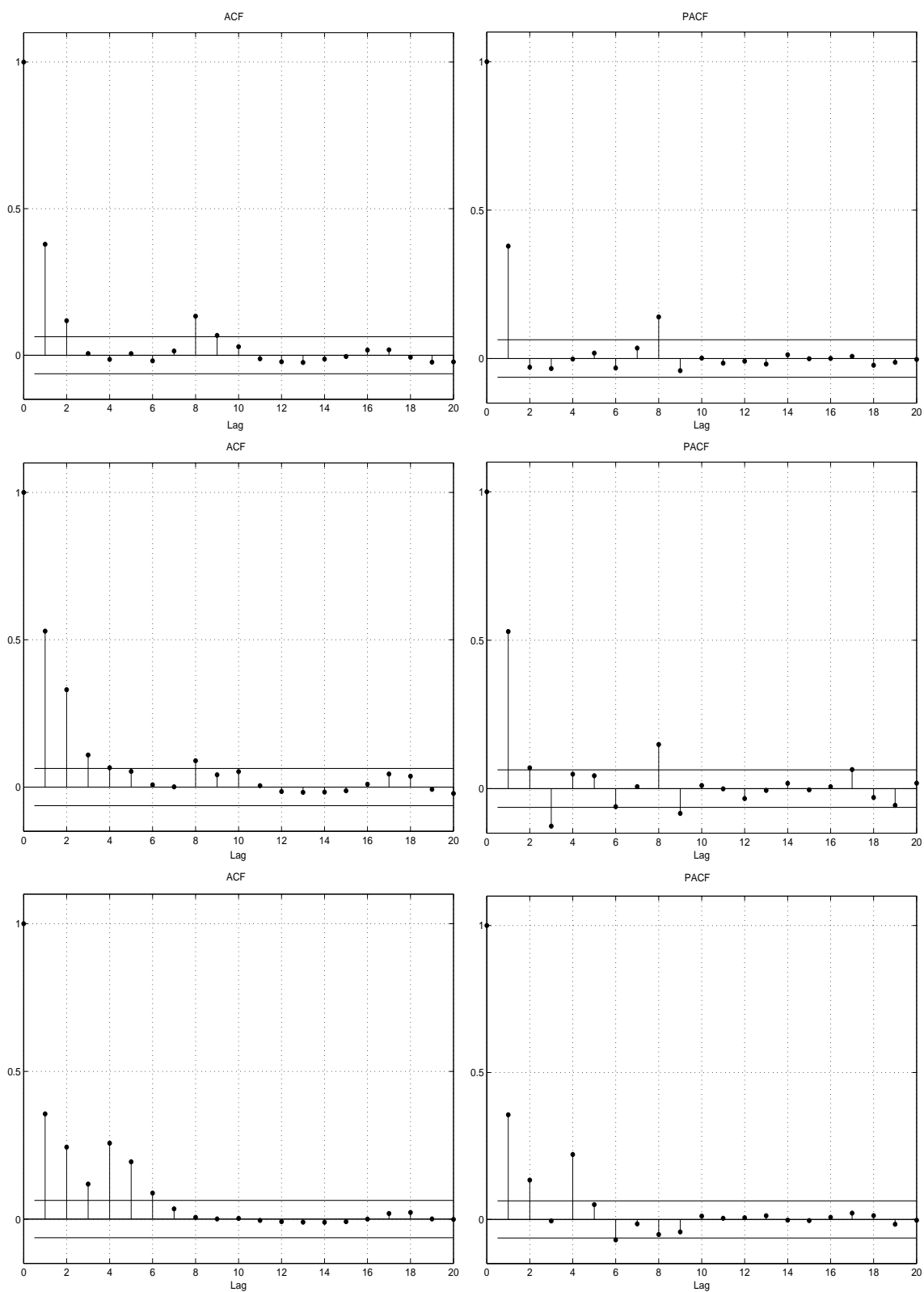
9.2 Simulace mnohorozměrných ARCH modelů

Nyní se budeme zabývat simulací mnohorozměrného ARCH(1) modelu a i zpětným odhadem parametrů. Pro jednoduchost se omezíme na dvourozměrný proces $\{\epsilon_t, t =$

volba parametrů	1	2	3
stř. hodnota	0.0076	0.0239	0.0757
směr. odchylka	0.1567	0.4956	1.5672
šikmost	-0.0371	-0.0371	-0.0371
špičatost	7.5715	7.5715	7.5715
volba parametrů	4	5	6
stř. hodnota	0.0144	0.0455	0.1439
směr. odchylka	0.2380	0.7528	2.3804
šikmost	-0.1475	-0.1475	-0.1475
špičatost	16.0810	16.0810	16.0810
volba parametrů	7	8	9
stř. hodnota	0.0361	0.1141	0.3608
směr. odchylka	0.5118	1.6184	5.1179
šikmost	3.7132	3.7132	3.7132
špičatost	71.8790	71.8790	71.8790

volba parametrů	10
stř. hodnota	0.0014
směr. odchylka	0.0238
šikmost	-0.1475
špičatost	16.0810

Tabulka 9.5: Popisné statistiky jednorozměrného ARCH(1) modelu generovaného Studentovým rozdělením se šesti stupni volnosti pro různé volby parametrů c a a včetně případu 10



Obrázek 9.3: Simulace ARCH(1) modelu ze Studentova rozdělení se šesti stupni volnosti: v levém sloupci grafy ACF případových skupin (1, 2, 3), (4, 5, 6, 10) a (7, 8, 9) uvedené v tomto pořadí shora a v pravém sloupci grafy PACF pro stejné případové skupiny jako grafy ACF v levém sloupci

$1, \dots, 1000\}$, který splňuje soustavu rovnic

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\epsilon}_t | \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-2}, \dots] &= \mathbf{0}, \\ \text{var}[\boldsymbol{\epsilon}_t | \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-2}, \dots] &= \mathbf{H}_t = \mathbf{H} + \mathbf{A}' \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}' \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Takto definovaný vektorový proces můžeme také vyjádřit prostřednictvím dvourozměrného procesu \mathbf{Z}_t , který má nulový vektor střední hodnoty a jednotkovou varianční matici, takové alternativní vyjádření má tvar

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{Z}_t. \quad (9.5)$$

Jak vidíme z uvedených rovnic (9.4) a (9.5), modelování vektorového procesu $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ je podobné tomu jednorozměrnému. Jen zde používáme realizaci standardizovaného normálního rozdělení typu 2×1000 a pracujeme s maticemi, což ale v prostředí MATLABu nepředstavuje žádné komplikace. Protože se nyní budeme zabývat i odhadem parametrů v nasimulovaném modelu, vygenerujeme sto realizací standardizovaného normálního rozdělení typu 2×1000 a výsledný odhad potom vypočteme jako průměr získaných výsledků z odhadovací funkce `garchfit`, která je součástí knihovny `procedur GARCH`. Poznamenejme ještě, že se budeme pokud možno držet zde již zavedeného značení, od kterého se odkloníme pouze kvůli syntaxi programu MATLAB. Veličiny závislé na čase budeme na konci jejich názvu značit písmenem t . Pro lepší orientaci v následujícím algoritmu přesto ještě uvedeme stručný přehled použitého značení

- T ... časový rozsah simulace, kde jednotlivá pozorování označujeme pomocí t , $t = 1, \dots, T$,
- j ... pořadové číslo simulace, zde $j = 1, \dots, 100$,
- Epst ... simulovaný vektorový proces v čase t typu 2×1 , kde pro jednotlivé simulace používáme značení `Epst_sim(:, :, j)` a `Eps0` vyjadřujeme samostatně,
- Ht ... varianční matice vektorového procesu Epst v čase t řádu 2, kde

$$\text{Ht} = \begin{pmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{22t} \end{pmatrix},$$

dohromady pro všechny simulace tvoří tyto matice čtyřrozměrné pole, ve kterém označujeme `Ht_sim(:, :, :, j)` všechny varianční matice j -té simulace, počáteční hodnotu H0 vyjadřujeme samostatně,

- \mathbf{H} ... symetrická matice parametrů řádu 2 vyjadřující konstantní složku podmíněného rozptylu,
- \mathbf{A} ... matice parametrů řádu 2 vyjadřující závislost na zpožděných hodnotách simulovaného procesu v modelu podmíněné varianční matice,
- \mathbf{Z}_t ... vygenerovaný vektor ze standardizovaného normálního rozdělení v čase t typu 2×1 , který pro jednotlivé simulace označujeme `Zt_sim(:, :, j)`,
- `spec_11` ... struktura modelu typu ARCH prvku `h11t` varianční matice Ht , obdobné značení používáme i pro zbývající prvky `h12t` a `h22t` varianční matice Ht ,

- `StredHod_1` ... výběrová střední hodnotu vektoru `Epst_sim(1,:,j)` v j -té simulaci, obdobné značení používáme i pro vektory `Epst_sim(2,:,j)`,
- `EpstBezStredHod_sim(1,:,j)` ... simulovaný vektor j -té simulace očištěný o střední hodnotu, pro vektory `Epst_sim(2,:,j)` používáme podobné značení,
- `coeff_11_sim(j)` ... odhad parametrů v ARCH rovnici prvku `h11t` v j -té simulaci, podobné značení používáme i pro odhady ostatních ARCH rovnic prvků `h12t` a `h22t`,
- `coeff_11C` ... součet odhadů parametru `C` v rovnici `h11t` v jednotlivých simulacích, podobně pro zbývající parametry `K`, `ARCH` a také pro rovnice `h12t`, `h22t`,
- `coeffprum_11C` ... výsledná průměrná hodnota odhadů parametru `C` v rovnicích `h11t` z jednotlivých simulací, podobné značení opět používáme i pro ostatní parametry `K`, `ARCH` a pro rovnice `h12t`, `h22t`.

Poznamenejme, že zde označujeme pomocí `C` konstantní složku rovnice podmíněné střední hodnoty, pomocí `K` konstantní složku rovnice podmíněné varianční matice a pomocí `ARCH` parametry vyjadřující závislost na předchozí hodnotě simulovaného procesu `Epst`. Pro výpočetní algoritmus nejprve vytvoříme funkci pro výpočet varianční matice `Ht` a procesu `Epst` prostřednictvím příkazů

```
function [Ht, Epst] = spoctiHtEpst(T, H0, H, A, Eps0, Zt)
Ht(:,:,1) = H + A' * Eps0 * Eps0' * A;
Epst(:,1) = Ht(:,:,1)^(1/2) * Zt(:,1);
for i = 2:T,
    Ht(:,:,i) = H + A' * Epst(:,i-1) * Epst(:,i-1)' * A;
    Epst(:,i) = Ht(:,:,i)^(1/2) * Zt(:,i);
end
```

a potom zapíšeme samotný algoritmus pro výpočet průměrných hodnot odhadů jednotlivých parametrů, ve kterém použijeme výše zavedenou funkci pro výpočet `Ht` a `Epst`, následovně

```
T = 1000;
H0 = [0 0; 0 0]; Eps0 = [0; 0];
H = [0.01 0.001; 0.001 0.02]; A = [0.9 0; 0 0.6];
spec_11 = garchset('Q', 1, 'ARCH', 0.81);
spec_12=garchset('Q', 1, 'ARCH', 0.54);
spec_22=garchset('Q', 1, 'ARCH', 0.36);
for j = 1:100,
    Zt_sim(:,:,j) = randn(2,n);
    [Ht_sim(:,:,j), Epst_sim(:,:,j)] = spoctiHtEpst(T, H0, H, A,
    Eps0, Zt_sim(:,:,j));
    StredHod_1 = sum(Epst_sim(1,:,j)) / n;
    StredHod_2 = sum(Epst_sim(2,:,j)) / n;
    EpstBezStredHod_sim(1,:,j) = Epst_sim(1,:,j) - StredHod_1 *
    * ones(1,n);
    EpstBezStredHod_sim(2,:,j) = Epst_sim(2,:,j) - StredHod_2 *
```

```

* ones(1,n);
[coeff_11_sim(j), errors_11_sim(j), LLF_11_sim(j),
eFit_11_sim(j,:), sFit_11_sim(j,:),
summary_11_sim(j)] = garchfit(spec_11,
EpstBezStredHod_sim(1,:,j));
[coeff_12_sim(j), errors_12_sim(j), LLF_12_sim(j),
eFit_12_sim(j,:), sFit_12_sim(j,:),
summary_12_sim(j)] = garchfit(spec_12,
sqrt(EpstBezStredHod_sim(1,:,j) .* EpstBezStredHod_sim(2,:,j)));
[coeff_22_sim(j), errors_22_sim(j), LLF_22_sim(j),
eFit_22_sim(j,:), sFit_22_sim(j,:),
summary_22_sim(j)] = garchfit(spec_22,
EpstBezStredHod_sim(2,:,j));
end
coeff_11C = 0; coeff_12C = 0; coeff_22C = 0;
coeff_11K = 0; coeff_12K = 0; coeff_22K = 0;
coeff_11ARCH = 0; coeff_12ARCH = 0; coeff_22ARCH = 0;
for j = 1:100,
    coeff_11C = coeff_11C + coeff_11_sim(j).C;
    coeff_12C = coeff_12C + coeff_12_sim(j).C;
    coeff_22C = coeff_22C + coeff_22_sim(j).C;
    coeff_11K = coeff_11K + coeff_11_sim(j).K;
    coeff_12K = coeff_12K + coeff_12_sim(j).K;
    coeff_22K = coeff_22K + coeff_22_sim(j).K;
    coeff_11ARCH = coeff_11ARCH + coeff_11_sim(j).ARCH;
    coeff_12ARCH = coeff_12ARCH + coeff_12_sim(j).ARCH;
    coeff_22ARCH = coeff_22ARCH + coeff_22_sim(j).ARCH;
end
coeffprum_11C = coeff_11C / 100;
coeffprum_12C = coeff_12C / 100;
coeffprum_22C = coeff_22C / 100;
coeffprum_11K = coeff_11K / 100;
coeffprum_12K = coeff_12K / 100;
coeffprum_22K = coeff_22K / 100;
coeffprum_11ARCH = coeff_11ARCH / 100;
coeffprum_12ARCH = coeff_12ARCH / 100;
coeffprum_22ARCH = coeff_22ARCH / 100;

```

V druhém řádku algoritmu jsme zvolili, podobně jako v jednorozměrném případě, počáteční varianční matici jako nulovou matici řádu dva. V následujícím řádku jsme zavedli matice parametrů H a A na základě předchozí jednorozměrné studie jako

$$H = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.001 \\ 0.001 & 0.02 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Matici A jsme zde záměrně zvolili jako diagonální pro usnadnění výpočtů odhadů parametrů, protože v tomto případě se každá simulace rozdělí na tři jednorozměrné ARCH(1) modely pro jednotlivé prvky varianční matice H_t . Pro tyto rovnice potom

používáme funkce z knihovny procedur GARCH, jedná se o funkce `garchset` a `garchfit`. Poznamenejme zde, že knihovna procedur GARCH umožňuje pracovat s obecným ARMA-GARCH modelem, o kterém jsme se zmínili ve třetí kapitole, a modelovat tak podmíněnou střední hodnotu i podmíněný rozptyl. Funkci `garchset` zde voláme hned v pátém řádku algoritmu, protože s ní vytváříme strukturu modelu. Funkce `garchfit` sice následovně pracuje se zadanou strukturou modelu, ale ačkoli zadáváme pouze podmíněnou varianční rovnici, odhaduje i konstantní parametr v rovnici podmíněné střední hodnoty. Proto funkcí `garchfit` odhadujeme jednotlivé parametry v simulovaných procesech, které jsme očistili o výběrovou střední hodnotu, abychom z rovnic eliminovali parametr C . Tuto funkci voláme až v hlavním "for" cyklu uvedeného algoritmu a následně už jen průměrujeme získané hodnoty odhadů z jednotlivých simulací. Tyto odhady uvádí tabulka 9.6, která obsahuje i konstantní složku C z rovnice podmíněné střední hodnoty. Všimněme si souladu odhadnutých hodnot se skutečnými hodnotami, jimiž byly procesy simulovány, u parametrů v rozptylových rovnicích `h11t` a `h22t`. Hodnoty parametrů v kovarianční rovnici `h12t`, oproti výsledkům pro rozptylové rovnice `h11t` a `h22t`, vykazují výrazné rozdíly. Ty můžeme přisuzovat práci s komplexními čísly, protože numerickými výpočty se ztrácí přesnost výpočtů, která je charakteristická pro analytická vyjádření.

hodnota parametru v rovnici <code>h11t</code>	skutečná	odhadnutá
C	0	-1.6441e-04
K	0.01	0.0100
ARCH	0.81	0.8090
hodnota parametru v rovnici <code>h12t</code>	skutečná	odhadnutá
C	0	$0.0462 + 0.0532i$
K	0.001	0.0035
ARCH	0.54	0.5999
hodnota parametru v rovnici <code>h22t</code>	skutečná	odhadnutá
C	0	1.0542e-05
K	0.02	0.0197
ARCH	0.36	0.3672

Tabulka 9.6: Odhady parametrů v simulovaném dvourozměrném ARCH(1) modelu získané průměrem ze sta simulací

Ještě je nutné poznamenat, že provedením Ljungova-Boxova testu na prokázání zbytkového ARCH projevu v druhých mocninách standardizovaných inovačních procesů pro jednotlivých sto simulací v každé ze tří rovnic, zjistíme nepřiměřenost těchto odhadů pouze u několika simulací u daných rovnic. V uvedeném algoritmu testujeme procesy $(eFit_{11_sim}(j,:) ./ sFit_{11_sim}(j,:)).^2$, $(eFit_{12_sim}(j,:) ./ sFit_{12_sim}(j,:)).^2$ a $(eFit_{22_sim}(j,:) ./ sFit_{22_sim}(j,:)).^2$ pro $j = 1, \dots, 100$ a zjistíme nepřiměřenost těchto odhadů pouze u několika simulací. Vyjádření rozptylové rovnice `h11t` je nepřiměřené u simulací s pořadovými čísly 9, 54, 58, 61, tedy

ve čtyřech případech. Vyjádření kovarianční rovnice `h12t` je nepřiměřené v dvojnásobném počtu simulací oproti rozptylové rovnici `h11t`, jedná se o simulace 6, 14, 15, 20, 28, 36, 69, 70. Rozptylová rovnice `h22t` je nepřiměřená v simulacích číslo 30, 46, 70, 72, 86, tedy v pěti případech. Všimněme si, že pouze u sedmdesáté simulace jsou nevyhovující hned dvě rovnice a to `h12t` a `h22t`. Ljungovy-Boxovy testy tedy prokázaly, že jsou rozptylové rovnice `h11t`, `h22t` a kovarianční rovnice `h12t` vždy alespoň v devadesáti dvou simulacích vyjádřeny správně. Tyto testy jsme realizovali vyvoláním funkce `lbqtest`, která je součástí knihovny procedur GARCH. Podle doporučení uvedeného ve [14] jsme použili $Q(7)$ statistiku, protože ve ([14], str. 25) je doporučeno používat autokorelace s největším řádem zpoždění $m \approx \ln T$. Poznamenejme dále, že hladinu testů jsme zvolili $\alpha = 0.05$. Pro ještě lepší ilustraci uveďme autokorelační funkce druhých mocnin standardizovaných inovačních procesů, tj. opět se jedná o procesy `(eFit_11_sim(j,:) ./ sFit_11_sim(j,:)).^2`, `(eFit_12_sim(j,:) ./ sFit_12_sim(j,:)).^2` a také o `(eFit_22_sim(j,:) ./ sFit_22_sim(j,:)).^2`, z první simulace a první simulace, pro kterou jsme zamítli nulovou hypotézu o přiměřenosti modelu. Pás významnosti je zde opět ± 0.0632 jako u předcházejících simulací jednorozměrných modelů typu ARCH, kde jsme také pracovali s řadami o tisíci pozorováních. Příslušné grafy zobrazuje obrázek 9.4 a vidíme na něm, že se u nepostačujících modelů nejedná o příliš velké hodnoty zpožděných autokorelací, které by výrazně převyšovaly pás významnosti. Jedná se spíše jen o nepatrně zvýšené hodnoty zpožděných autokorelací, které lze považovat za výjimky mezi ostatními šumovými hodnotami.

9.3 Použití mnohorozměrných GARCH modelů pro reálná data

Na finančních trzích vykazují časové řady časový vývoj volatility a nestacionaritu, proto se zabýváme analýzou změn těchto časových řad. Například u cen akcií \mathbf{X}_t sledujeme příslušné výnosy

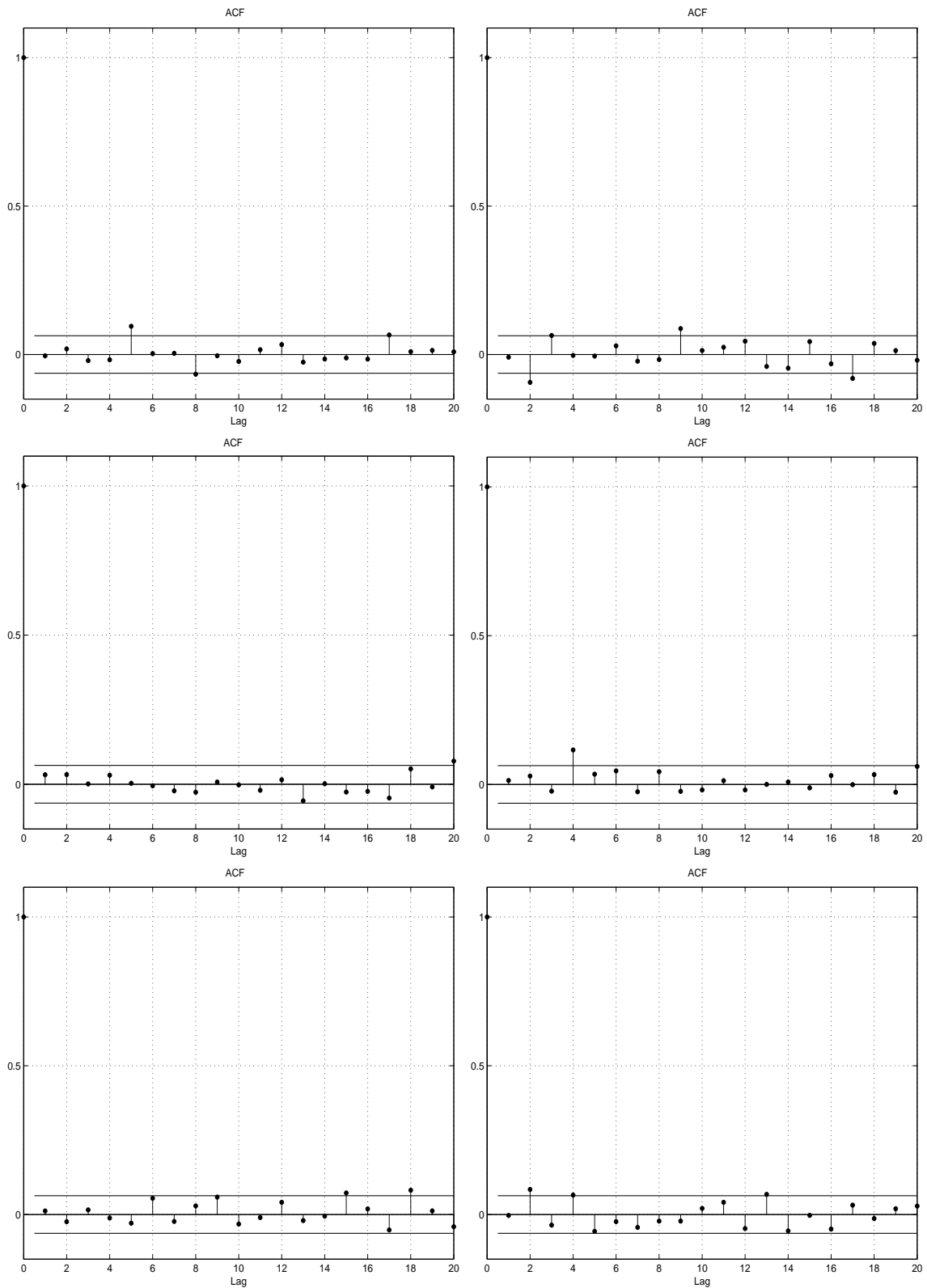
$$\mathbf{Y}_t = \left(\ln \frac{X_{1t}}{X_{1,t-1}}, \dots, \ln \frac{X_{Nt}}{X_{N,t-1}} \right)'.$$

Předpoklady na časovou řadu pro použití GARCH modelů jsou následující:

- (i) slabá stacionarita,
- (ii) klesající autokorelační funkce,
- (iii) podmíněné normální rozdělení

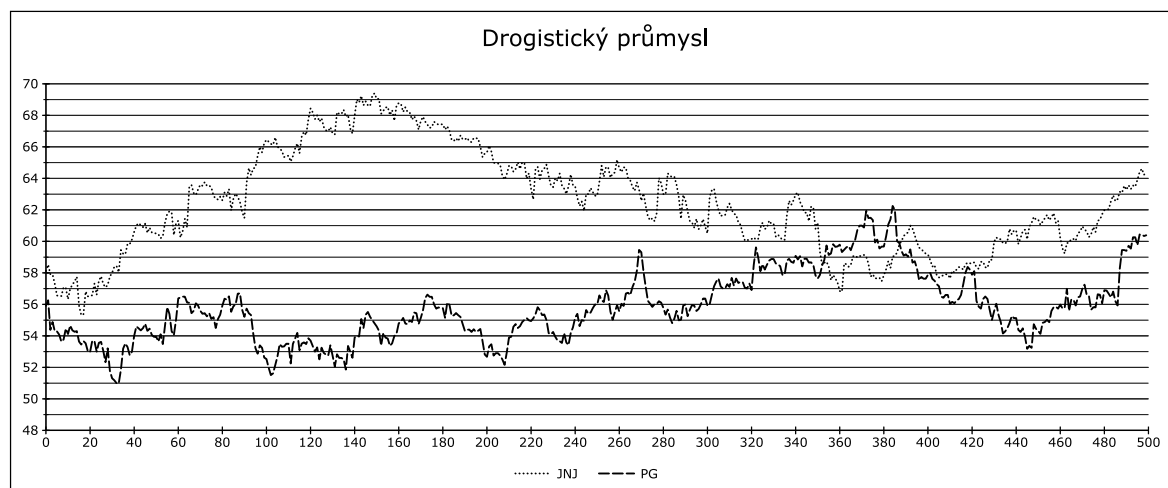
$$\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{I}_{t-1} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta})).$$

Nejoblíbenějšími mnohorozměrnými modely typu GARCH jsou v praxi modely VEC, DVEC a BEKK, které jsou uvedeny v šesté kapitole v definici 6.1.1., rovnici (6.3) a v definici 6.1.2. v tomto pořadí. Jak již bylo zmíněno, VEC model vyžaduje příliš mnoho parametrů, a v naší studii se proto budeme dále zabývat DVEC modelem, který má z těchto tří uvedených modelů nejnižší počet parametrů. Pouze byla-li by struktura varianční matice složitější, použili bychom obecný BEKK(1, 1, K) model v diagonální podobě.



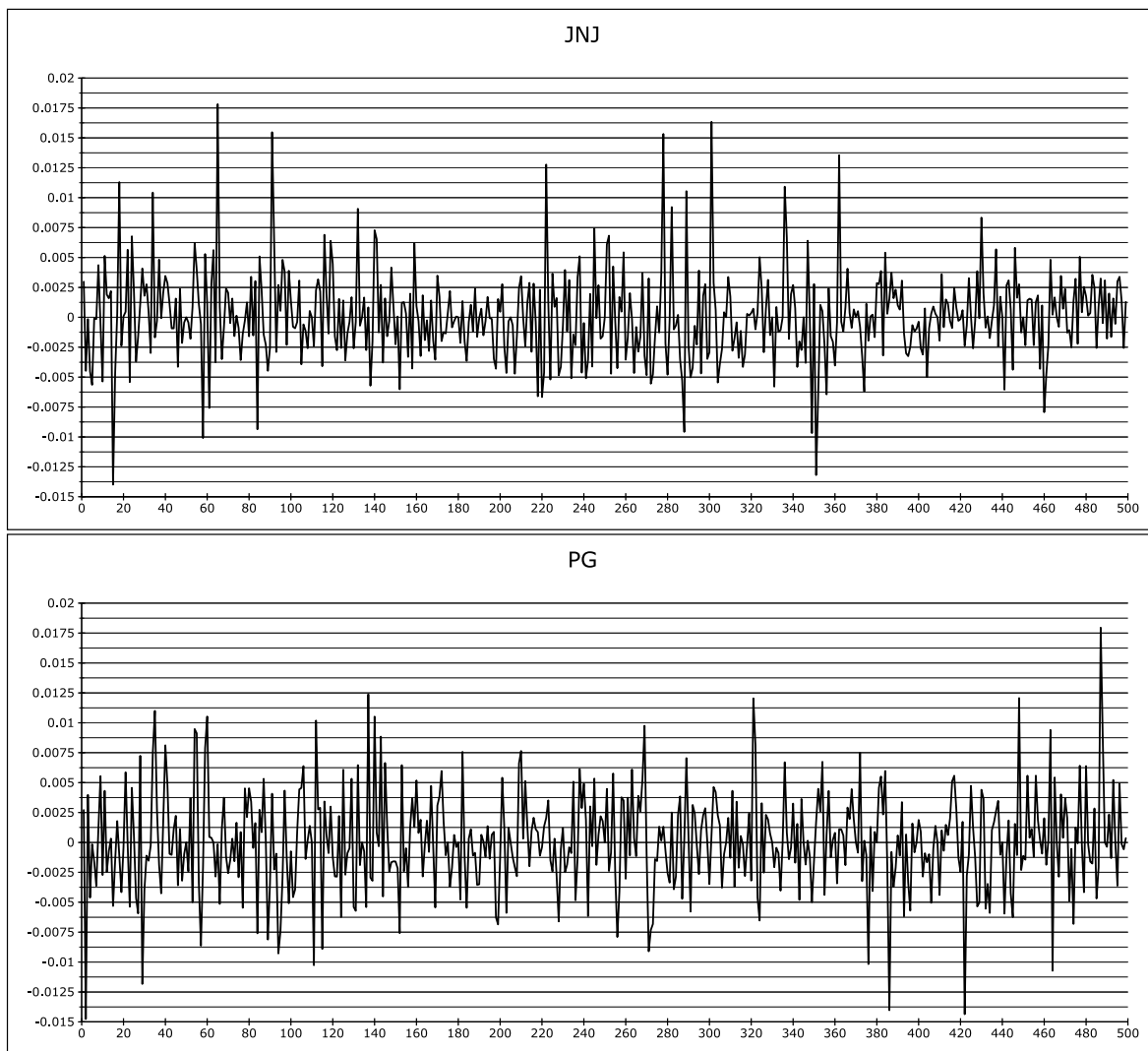
Obrázek 9.4: Grafy ACF druhých mocnin standardizovaných inovačních procesů z rovnic $h11t$, $h12t$ a $h22t$ v tomto pořadí ve sledu shora dolů; v levém sloupci je vždy graf ACF první simulace a v pravém sloupci je vždy graf ACF první simulace, která vedla k zamítnutí nulové hypotézy o přiměřenosti modelu

Sledované časové řady jsou tvořeny hodnotami závěrečných kurzů akcií z jednotlivých po sobě jdoucích obchodních dnů. V následujícím textu se zabýváme dvěma množinami finančních dat, které pro jednoduchost zápisu označujeme jako DS1 a DS2. Zpracovávaná data jsou z <http://www.kurzy.cz/akcie-svet/>. Množinu DS1 tvoří hodnoty závěrečných kurzů akcií dvou amerických firem z drogistického průmyslu z období 16. 9. 2004–18. 8. 2006 s pěti sty pozorováními v každé časové řadě. Jedná se o firmy Johnson&Johnson a Procter & Gamble, které dále označujeme JNJ a PG. Na obrázku 9.5 jsou znázorněny příslušné závěrečné kurzy z daného období. Pro následující analýzu přepočteme tyto časové řady závěrečných kurzů akcií na výnosové časové řady, které zobrazujeme na obrázku 9.6. Dále vypočteme základní popisné statistiky těchto dvou výnosových časových řad, které uvádí tabulka 9.7, pro výpočty jsme použili program NCSS & PASS 2000. Čísla jsou zde pro větší vypovídací schopnost znázorněna na devět desetinných míst. V tabulce 9.7 vidíme, že jsou obě střední hodnoty v řádu statisícin, a proto nebudeme uvedené řady o tyto střední hodnoty očišťovat. Vynecháme i očištění o střední hodnotu u druhé odmocniny součinnové řady výnosů Johnson&Johnson a Procter & Gamble, protože ta má střední hodnotu pouze $4.8456e-06 + (2.4062e-22)i$. Poznamenejme, že tato střední hodnota je oprávněně komplexní číslo, protože jsou některé hodnoty této řady druhými odmocninami ze záporných čísel.



Obrázek 9.5: Závěrečné kurzy akcií z amerického drogistického průmyslu za období 16. 9. 2004–18. 8. 2006

Nejprve ještě před samotnou konstrukcí nějakého modelu typu GARCH provedeme předběžnou analýzu těchto dat, abychom co nejlépe stanovili strukturu modelu a vyhnuli se tak práci s nadbytečnými parametry, které by mohly zkomplikovat konvergenční procedury používané při odhadu parametrů. Jednotlivé výnosové řady a druhá odmocnina z příslušné součinnové řady jsou bílými šумы a dále tedy uvažujeme druhé mocniny těchto tří řad. Obrázek 9.7 ukazuje autokorelační funkce druhých mocnin daných výnosových časových řad a součinu těchto dvou výnosových časových řad, které by se měly chovat jako nějaké ARMA modely. Na zmíněném obrázku 9.7 ale vidíme, že u žádné z uvedených autokorelačních funkcí nedochází k výraznému překročení pásu významnosti ± 0.0895 , a proto upouštíme od dalšího modelování. Tyto tři časové řady můžeme považovat za bílé šумы. Aby bylo ukončení této studie skutečně oprávněné,

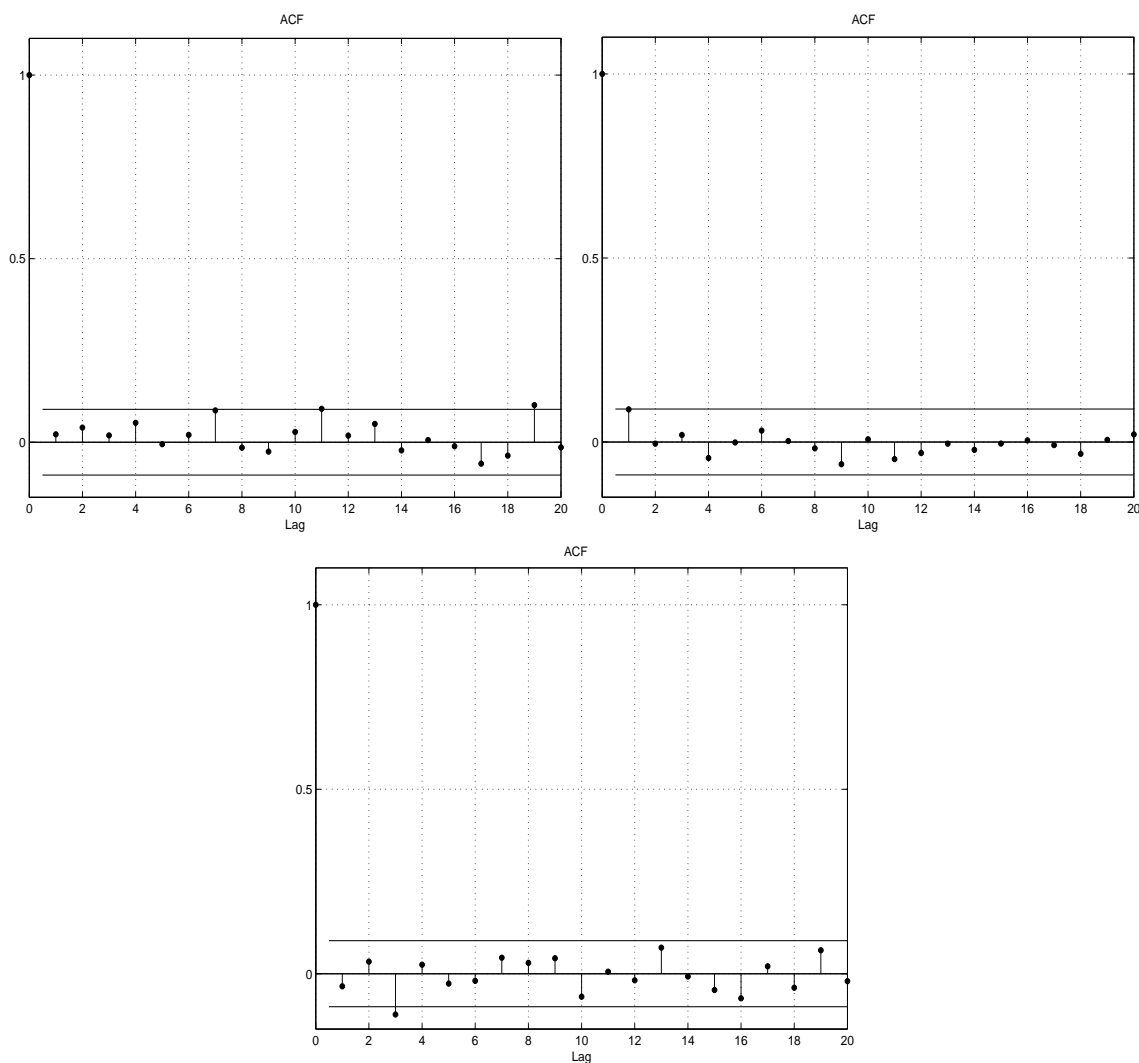


Obrázek 9.6: Výnosová řada Johnson&Johnson v horním grafu a výnosová řada Procter & Gamble v dolním grafu

výnosová řada	JNJ	PG
počet pozorování	499	499
minimum	-0.013984826	-0.014760525
maximum	0.017814334	0.017949236
střední hodnota	0.000084168	0.000074148
směrodatná odchylka	0.003714853	0.004115369
šikmost	0.672991239	0.100262895
špičatost	6.369019339	4.439438935

Tabulka 9.7: Základní popisné statistiky datové množiny DS1

provedeme ještě Ljungův-Boxův test s nulovou hypotézou, že je prvních šest autokorelací druhé mocniny výnosové časové řady Johnson&Johnson nulových, proti alternativní hypotéze, že je alespoň jedna z uvedených autokorelací nenulová s hladinou testu 0.05. Tento test vede k nezamítnutí nulové hypotézy a podporuje tak naše předchozí tvrzení. Stejně je tomu i při testování významnosti autokorelací druhé mocniny výnosové časové řady Procter & Gamble a součinu výnosových časových řad Johnson&Johnson a Procter & Gamble. Výsledky všech těchto testů jsou uvedeny v tabulce 9.8, kde označujeme součinovou řadu výnosových časových řad Johnson&Johnson a Procter & Gamble JNJP.

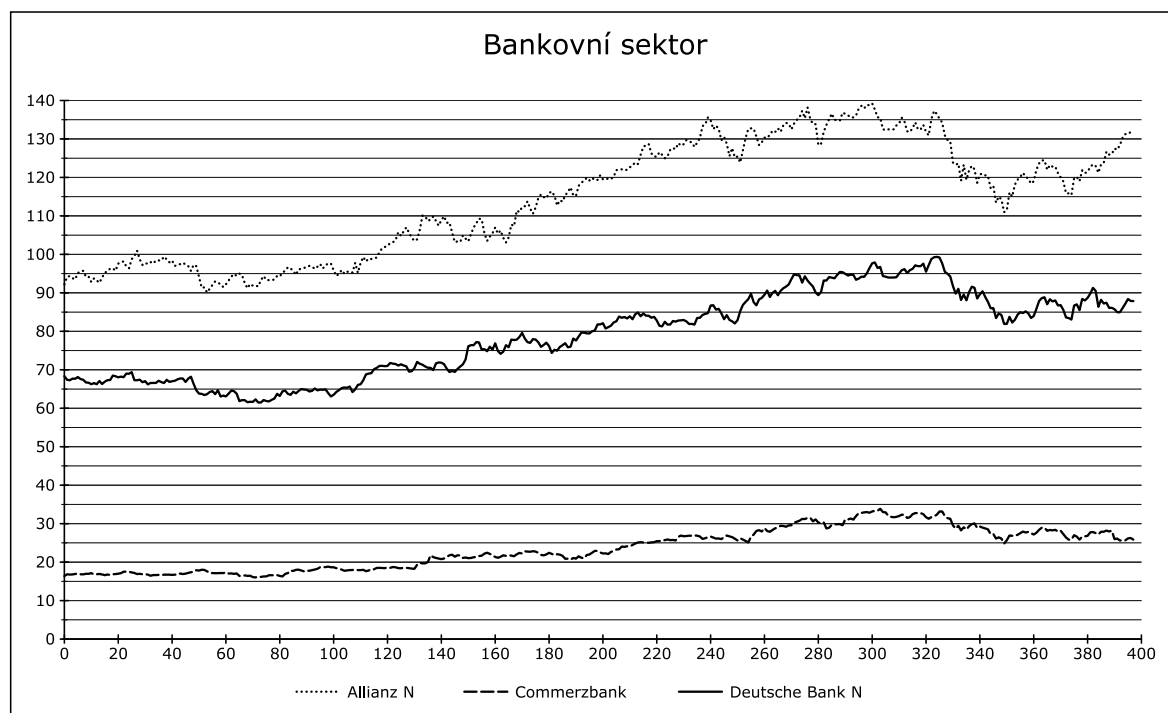


Obrázek 9.7: Grafy ACF druhých mocnin výnosových časových řad Johnson&Johnson a Procter & Gamble v horní části obrázku při sledu zleva doprava a graf ACF součinu těchto dvou výnosových časových řad v dolní části obrázku

Druhou datovou množinu jsme vybrali z německého finančního sektoru a označujeme ji DS2. Tato datová množina obsahuje vývoj závěrečných kurzů akcií tří institucí, jedná se o Allianz N z období 4. 2. 2005–18. 8. 2006, Commerzbank z období 1. 2. 2005–18. 8. 2006 a Deutsche Bank N z období 8. 2. 2005–18. 8. 2006, kde má každá poz-

řada	Q(6) statistika	kritická hodnota	p-hodnota
JNJ	2.8293	12.5916	0.8299
PG	5.5687	12.5916	0.4732
JNJPG	8.1522	12.5916	0.2272

Tabulka 9.8: Výsledky Ljungových-Boxových testů pro datovou množinu DS1



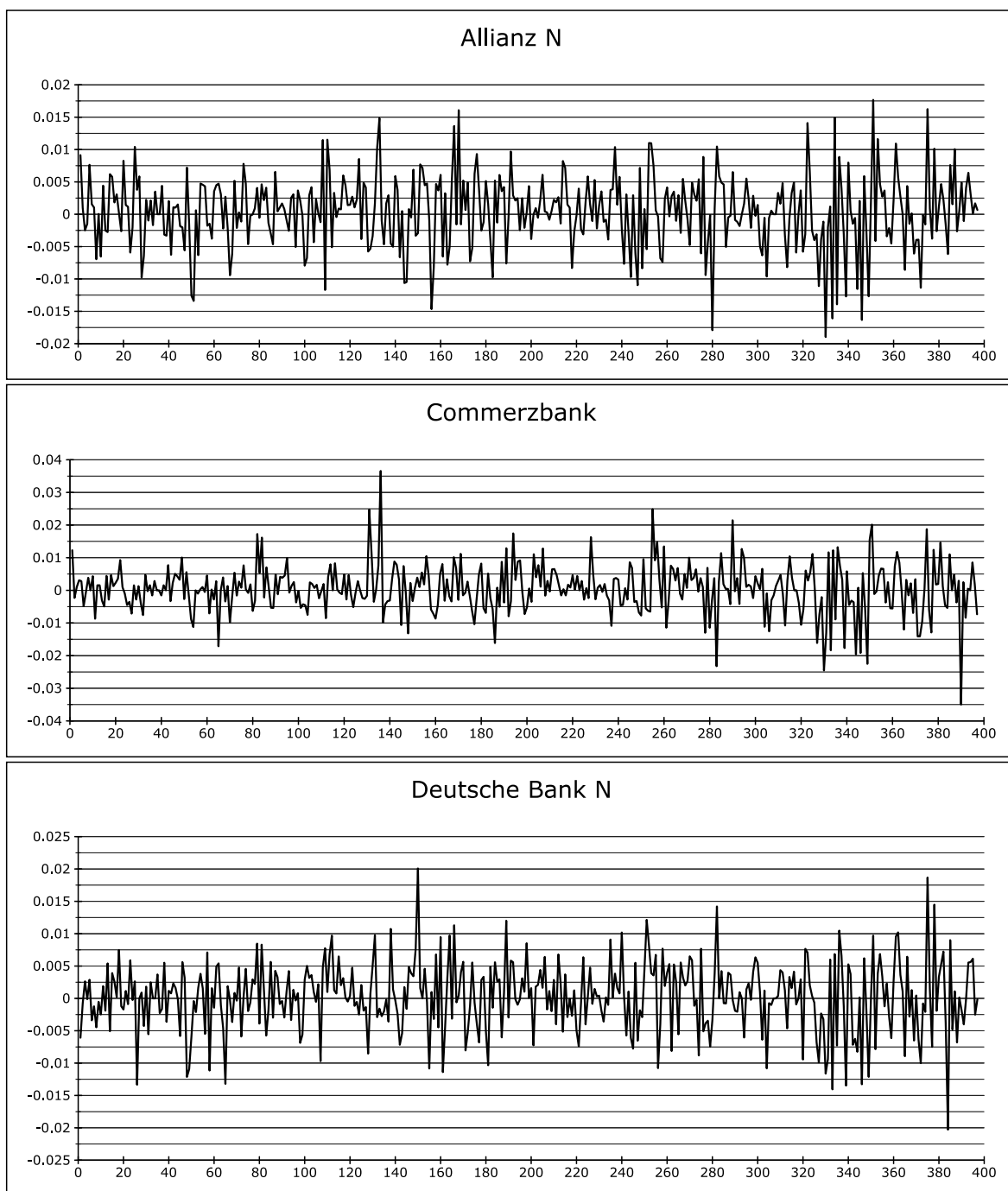
Obrázek 9.8: Řady závěrečných kurzů akcií z německého bankovního sektoru o délce 398 pozorování ke dni 18. 8. 2006

rovaná řada 398 pozorování. V následujícím budeme používat i zkrácené označení AI pro Allianz N, Co pro Commerzbank a DB pro Deutsche Bank N. Obrázek 9.8 ukazuje časový vývoj těchto závěrečných kurzů a vidíme na něm, že ve sledovaném období zaznamenávají hodnoty všech tří kurzů stejné vývojové trendy. Dále je z tohoto grafu patrné, že nejstrmější vývoj závěrečného kurzu vykazuje řada Allianz N. Pro následující analýzu však již přepočteme tato data na výnosové časové řady, které zobrazuje obrázek 9.9. V horní části obrázku vidíme graf výnosové časové řady Allianz N, v prostřední části graf výnosové časové řady Commerzbank a ve spodní části je uveden graf výnosové časové řady Deutsche Bank N. Uvedené řady dále popisuje následující tabulka 9.9 obsahující základní popisné statistiky výnosových časových řad datové množiny DS2, které jsme vypočetli v programu NCSS & PASS 2000. Uvedené hodnoty středních hodnot mají řád desetitisícin, a proto je budeme v dalších výpočtech zanedbávat. Druhé odmocniny součinných řad Allianz N, Commerzbank a Commerzbank, Deutsche Bank N a Deutsche Bank N, Allianz N mají střední hodnoty $1.1116e-05 + (1.0591e-21)i$, $1.1587e-05 + (9.0869e-22)i$ a $1.0142e-05 + (6.8726e-22)i$ v tomto pořadí, a proto je budeme v následujícím také zanedbávat. Připomeňme zde, že se v těchto odmocninových součinných řadách opět vyskytují odmocniny ze záporných čísel, a proto jsou výsledné střední hodnoty komplexní čísla. V tabulce 9.9 si dále všimněme poměrně malých hodnot špičatosti u řad Allianz N a Deutsche Bank N.

časová řada	AI	Co	DB
počet pozorování	397	397	397
minimum	-0.018968139	-0.034993504	-0.020283365
maximum	0.017672665	0.036576281	0.020083861
střední hodnota	0.000395466	0.000506297	0.000282115
směrodatná odchylka	0.005621450	0.007538660	0.005392757
šikmost	-0.250656726	-0.076245970	-0.140000513
špičatost	3.866881359	6.130212426	3.834779831

Tabulka 9.9: Základní popisné statistiky datové množiny DS2

I zde jsou jednotlivé výnosové řady a druhé odmocniny z příslušných součinů dvojic z uvedené trojice řad bílými šumy, a proto dále pracujeme s druhými mocninami těchto řad. Grafická předběžná analýza vhodnosti použití nějakého modelu typu GARCH nenavzdávuje jednoznačnému stanovení řádů modelu. Pro názornost zde uvádíme grafy všech příslušných autokorelačních funkcí v obrázku 9.10. Grafy autokorelačních funkcí ukazují na možnost použít nějaký model typu GARCH se součtem řádů 3 nebo 5. Navíc také nesmíme opomenout zmínit, že autokorelační funkce součinů dvojic výnosových časových řad klesají příliš pomalu, a to může značit nestacionaritu těchto procesů. Ljungovy-Boxovy testy na prokázání ARCH projevů podávají výsledky odpovídající uvedeným autokorelačním funkcím. Pro všech šest uvedených časových řad zamítají nulovou hypotézu a potvrzují tak u nich existenci významných autokorelací. Výsledky všech těchto testů shrnuje Tabulka 9.10, kde označujeme součinné řady příslušnými zkratkami, tj. AI_{Co}, Co_{DB}, AI_{DB}. Opět zde pracujeme s hladinou testu $\alpha = 0.05$. Pro bližší stanovení řádů modelu proto dále použijeme Akaikeho informační kritérium, které je založeno na hodnotě logaritmické věrohodnostní funkce v kvazi-maximálně



Obrázek 9.9: Výnosová časová řada Allianz N v horním grafu, výnosová časová řada Commerzbank v prostředním grafu a výnosová časová řada Deutsche Bank N v dolním grafu

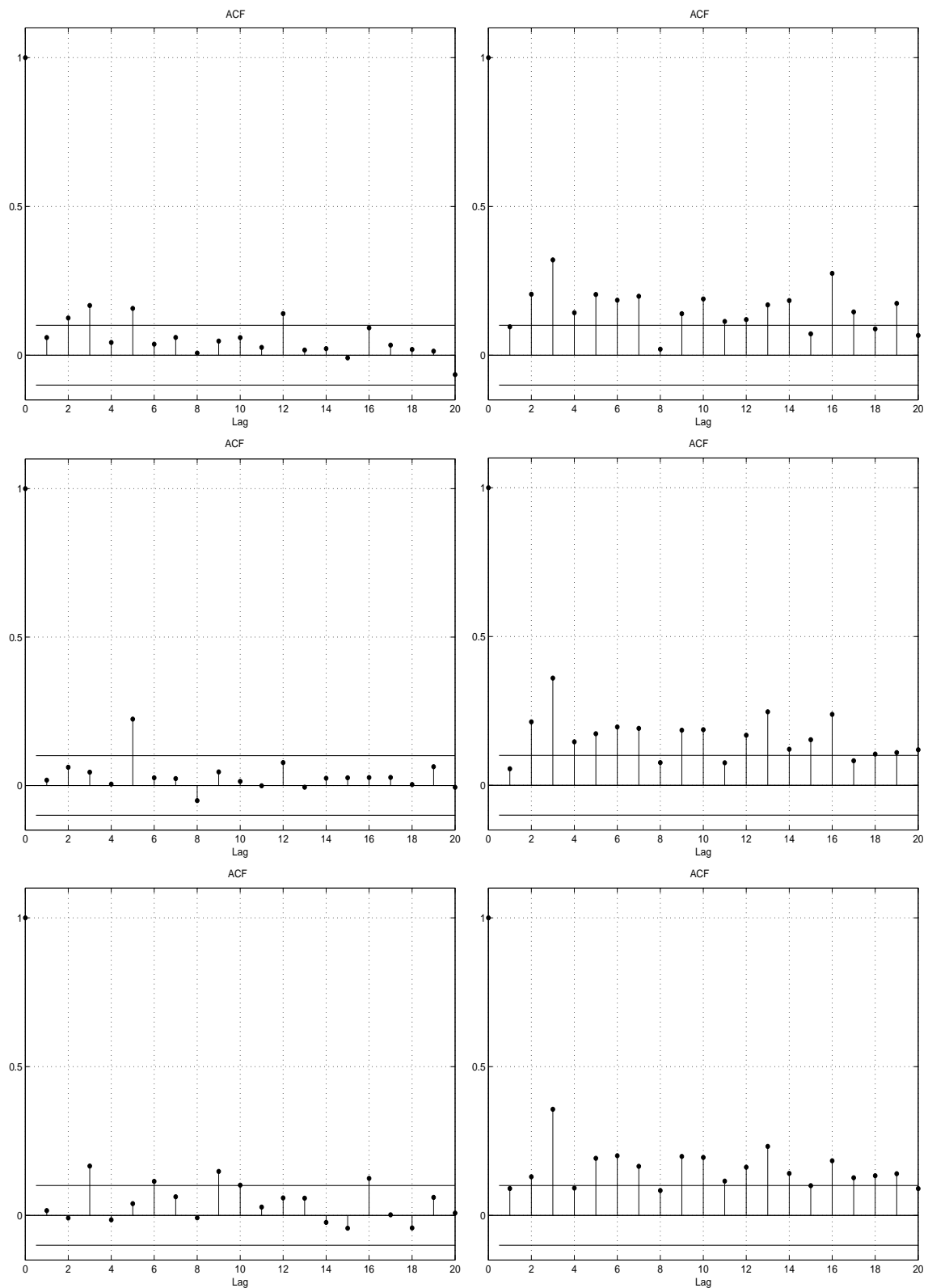
věrohodném odhadu, a je vyhodnocováno jako penalizační funkce. Výsledky zobrazuje tabulka 9.11 a hned na první pohled je zřejmé, že toto kritérium zcela jednoznačně upřednostňuje model s řády (2, 3).

řada	Q(6) statistika	kritická hodnota	p-hodnota
AI	30.1635	12.5916	0.0366e-03
Co	22.9066	12.5916	0.0008
DB	17.2198	12.5916	0.0085
AICo	100.5669	12.5916	0.0000
CoDB	107.8410	12.5916	0.0000
AIDB	95.6726	12.5916	0.0000

Tabulka 9.10: Výsledky Ljungových-Boxových testů pro datovou množinu DS2

řád modelu	řada AI	řada Co	řada DB	řada (AICo) ^{1/2}	řada (CoDB) ^{1/2}	řada (AIDB) ^{1/2}
(0, 3)	-3006.8	-2755.9	-3025.6	-3413.4	-3412.5	-3513.0
(1, 2)	-3006.0	-2770.5	-3023.6	-3426.0	-3423.9	-3532.5
(2, 1)	-3004.9	-2776.0	-3027.1	-3424.0	-3416.7	-3512.1
(0, 5)	-3009.9	-2793.0	-3024.2	-3428.3	-3420.3	-3529.0
(1, 4)	-3005.6	-2768.1	-3023.8	-3422.4	-3426.0	-3528.7
(2, 3)	-3010.1	-2778.6	-3029.6	-3440.5	-3427.7	-3535.0
(3, 2)	-3002.0	-2774.2	-3023.4	-3422.5	-3419.9	-3529.5
(4, 1)	-3000.9	-2773.7	-3023.4	-3420.0	-3412.7	-3508.2

Tabulka 9.11: Výsledky Akaikeho informačního kritéria pro jednotlivé kombinace řádů v GARCH modelu se součtem řádů 3 a 5 pro datovou množinu DS2



Obrázek 9.10: Grafy ACF druhých mocnin výnosových časových řad Al, Co a DB v levém sloupci uvedené v tomto pořadí shora a grafy ACF součinů dvojic výnosových časových řad Al, Co a Co, DB a DB, Al v pravém sloupci uvedené v tomto pořadí také shora

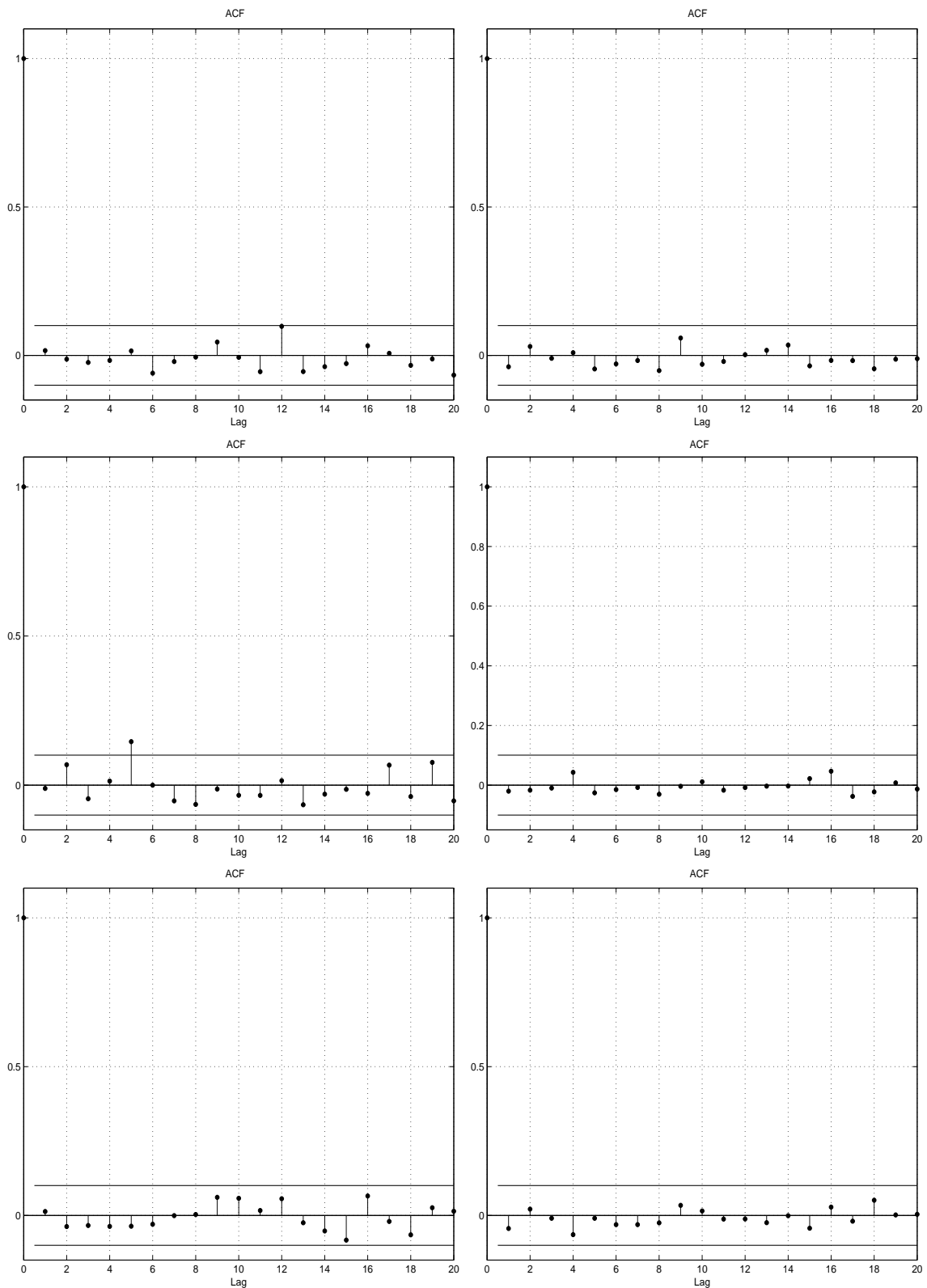
V následujícím se proto zabýváme obecným trojrozměrným VEC(2, 3) modelem v diagonální podobě, který ve svém zápisu používá operátor $vech(\cdot)$ a čtvercové diagonální matice parametrů řádu šest. Tento model tedy můžeme velice snadno z vektorové rovnice přepsat na soustavu šesti rovnic, kde jednotlivé rovnice představují jedno-rozměrné GARCH(2, 3) modely. Při zachování pořadí rovnic, které je určeno aplikací operátoru $vech(\cdot)$, se jedná o soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
 h_{Al,t} &= c_1 + \sum_{k=1}^3 a_{11k}^2 \epsilon_{Al,t-k}^2 + \sum_{l=1}^2 g_{11l}^2 h_{Al,t-l}, \\
 h_{Al,Co,t} &= c_2 + \sum_{k=1}^3 a_{22k} \epsilon_{Al,t-k} \epsilon_{Co,t-k} + \sum_{l=1}^2 g_{22l} h_{Al,Co,t-l}, \\
 h_{Al,DB,t} &= c_3 + \sum_{k=1}^3 a_{33k} \epsilon_{Al,t-k} \epsilon_{DB,t-k} + \sum_{l=1}^2 g_{33l} h_{Al,DB,t-l}, \\
 h_{Co,t} &= c_4 + \sum_{k=1}^3 a_{44k} \epsilon_{Co,t-k}^2 + \sum_{l=1}^2 g_{44l} h_{Co,t-l}, \\
 h_{Co,DB,t} &= c_5 + \sum_{k=1}^3 a_{55k} \epsilon_{Co,t-k} \epsilon_{DB,t-k} + \sum_{l=1}^2 g_{55l} h_{Co,DB,t-l}, \\
 h_{DB,t} &= c_6 + \sum_{k=1}^3 a_{66k} \epsilon_{DB,t-k}^2 + \sum_{l=1}^2 g_{66l} h_{DB,t-l}.
 \end{aligned}$$

Vidíme, že uvedený model obsahuje třicet šest parametrů. Ty odhadneme pomocí funkcí garchset a garchfit a pro tyto účely ještě zavedeme parametry konstantní složky pro rovnice podmíněné střední hodnoty uvedených šesti řad, které označíme C_i pro $i = 1, \dots, 6$. Tyto parametry zavádíme proto, že funkce garchfit odhaduje i parametr konstantní složky z jednotlivých rovnic podmíněné střední hodnoty, přestože zadáváme řády pouze pro GARCH model a řády ARMA modelu pokládáme rovny nule. Celkem tedy odhadujeme model se čtyřiceti dvěma parametry a všechny příslušné odhady zobrazuje tabulka 9.12. Uvedené odhady parametrů splňují pro všechny rovnice podmínku $(a_{ii1} + a_{ii2} + a_{ii3} + g_{ii1} + g_{ii2}) < 1$ pro $i = 1, \dots, 6$, tyto součty se pohybují v rozmezí 0.7621–0.9175. Dále si všimněme, že ve všech šesti rovnicích je největší váha přisuzována odpovídajícímu prvku podmíněné varianční matice z času $t - 2$ a druhá největší váha je v každé rovnici přisuzována minulé hodnotě pozorované řady z času $t - 3$. Pro ověření kvality uvedených odhadů zobrazujeme autokorelační funkce druhých mocnin standardizovaných reziduí z jednotlivých rovnic tohoto modelu v obrázku 9.11. Vidíme, že pouze u rovnice pro podmíněný rozptyl výnosové časové řady Commerzbank zbyla významná autokorelace u pátého zpoždění, a proto můžeme odhad celého troj-rozměrného modelu považovat za zdařilý.

parametr	C_1	c_1	a_{111}	a_{112}	a_{113}	g_{111}	g_{112}
odhad	6.2428e-04	7.1832e-06	0.0756	0.0528	0.2377	0.0000	0.4204
st. chyba	2.4379e-04	3.3363e-06	0.0490	0.0602	0.0790	0.1419	0.1505
parametr	C_2	c_2	a_{221}	a_{222}	a_{223}	g_{221}	g_{222}
odhad	0.0019	1.1133e-06	0.0000	0.0167	0.2737	0.0000	0.6259
st. chyba	2.3934e-04	3.8623e-07	0.0313	0.0219	0.0604	0.0582	0.0663
parametr	C_3	c_3	a_{331}	a_{332}	a_{333}	g_{331}	g_{332}
odhad	0.0018	1.1729e-06	0.0000	0.1478	0.3134	0.0000	0.4444
st. chyba	2.0657e-04	5.4332e-07	0.0402	0.0466	0.0672	0.1230	0.1155
parametr	C_4	c_4	a_{441}	a_{442}	a_{443}	g_{441}	g_{442}
odhad	7.1089e-04	5.2815e-06	0.0178	0.0000	0.1445	0.0000	0.7552
st. chyba	3.5518e-04	2.3393e-06	0.0363	0.0269	0.0431	0.0647	0.0549
parametr	C_5	c_5	a_{551}	a_{552}	a_{553}	g_{551}	g_{552}
odhad	0.0019	2.0809e-06	0.0054	0.0322	0.2363	0.0306	0.5231
st. chyba	2.6319e-04	5.4332e-07	0.0203	0.0400	0.0567	0.0986	0.0900
parametr	C_6	c_6	a_{661}	a_{662}	a_{663}	g_{661}	g_{662}
odhad	2.9030e-04	7.0618e-06	0.0000	0.0000	0.2092	0.0000	0.5529
st. chyba	2.4399e-04	3.5670e-06	0.0415	0.0591	0.0743	0.1617	0.1299

Tabulka 9.12: Odhady parametrů v jednotlivých GARCH(2, 3) rovnicích trojrozměrného VEC modelu v diagonální podobě s příslušnými standardními chybami



Obrázek 9.11: Grafy ACF druhých mocnin standardizovaných reziduí z jednotlivých rovnic diagonálního VEC modelu, v levém sloupci jsou grafy pro rovnice AI, Co a DB v tomto pořadí při sledu shora dolů a v pravém sloupci jsou grafy pro rovnice $(AI Co)^{1/2}$, $(Co DB)^{1/2}$ a $(AI DB)^{1/2}$ uvedené v tomto pořadí při sledu shora dolů

Kapitola 10

Závěr

Mnohorozměrné modely typu ARCH a GARCH umožňují dostatečně přesně vyjádřit podmíněnou varianční matici tak, aby byla symetrická a pozitivně semidefinitní nebo přímo pozitivně definitní. BEKK model je dokonce definován tak, že podmíněná varianční matice vyjádřená tímto modelem je pozitivně definitní již sama o sobě bez dodatečných předpokladů na použité matice parametrů. Ale čím je daný model přizpůsobivější reálným datům, tím roste počet jeho parametrů.

Diagonální VEC a diagonální BEKK modely sice nejsou parametricky náročné, ale ztrácí možnost vyjádřit závislost mezi dvěma různými prvky daného vektoru. Těmito diagonálními modely tedy lze velmi dobře vyjádřit pohyby podmíněných rozptylů a podmíněných kovariancí, a proto jsou například postačující v úlohách oceňování aktiv, ale nejsou vhodné pro modelování přenosu volatilit. Oproti tomu faktorové GARCH modely umožňují, aby podmíněné rozptyly a podmíněné kovariance závisely na minulých pozorováních všech podmíněných rozptylů a podmíněných kovariancí, ale zahrnují v sobě stálost ve všech těchto prvcích. Prostřednictvím dynamických modelů podmíněných korelací již lze vyjádřit různé stálosti mezi podmíněnými rozptyly a podmíněnými korelacemi, a tak ovládat větší počet časových řad. Konkrétním případem je model konstantních podmíněných korelací, který lze použít pro modelování přenosu volatilit jako alternativu k BEKK modelu.

Obecně se však jedná o třídu modelů, která vyžaduje velký počet parametrů, a proto je řešení úloh pracujících s časovými řadami dimenze větší než čtyři prostřednictvím těchto modelů komplikované. Dále také nesmíme opomenout skutečnost, že i samotná datová řada musí splňovat mnoho předpokladů, abychom ji mohli modelovat některým ze zde uvedených modelů, a že v praxi se často setkáváme s tím, že tyto předpoklady na datovou řadu splněny nejsou. Nejedná se proto o obecně použitelnou třídu modelů, nelmuvě o složité struktuře modelů samotných a o současných výpočetních nedostatcích. Jedná se totiž o modely matematicky náročné, které dosud nejsou dostatečně dobře numericky zpracované. Ač se tedy v jednorozměrném případě jedná o velice populární třídu modelů, její mnohorozměrné rozšíření je v praxi hůře uplatnitelné.

Práci se zde uvedenými mnohorozměrnými modely lze usnadnit zavedením jistých podmínek pro snížení počtu parametrů. Lze například využít předběžných odhadů parametrů, které jsou výpočetně nenáročné a zároveň umožňují zachovat pružnou funkční podobu daných modelů. Bližší vyjádření těchto podmínek ale zůstává předmětem současného výzkumu.

Literatura

- [1] Alberg, D., Shalit, H. and Rami, Y. (2006): *Estimating Stock Market Volatility Using Asymmetric GARCH Models*. Discussion Paper No. 06–10, Monaster Centre for Economic Research, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva.
- [2] Anděl, J. (2002): *Základy matematické statistiky*. Preprint, MATFYZPRESS, Praha.
- [3] Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006): *Multivariate GARCH Models: a Survey*. Journal of Applied Econometrics **21**, 79–109.
- [4] Brooks, C., Burke, S. P. and Persaud, G. (2003): *Multivariate GARCH Models: Software Choice and Estimation Issues*. Journal of Applied Econometrics **18**, 725–734.
- [5] Engle, R. F. (1982): *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica **50**, 987–1007.
- [6] Gouriéroux, Ch. (1997): *ARCH Models and Financial Applications*. Springer-Verlag, New York.
- [7] Hansen, E., Rahbek, A. (1998): *Stationarity and Asymptotics of Multivariate ARCH Time Series with an Application to Robustness of Cointegration Analysis*. Preprint No. **12**, Department of Theoretical Statistics, University of Copenhagen, Copenhagen.
- [8] Johnson, M. E. (1987): *Multivariate Statistical Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [9] Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. L. (2000): *Continuous Multivariate Distributions: Volume 1: Models and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [10] Lachout, P. (2002): *Teorie pravděpodobnosti*. Karolinum, Praha.
- [11] Li, W. K. (2004): *Diagnostic Checks in Time Series*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [12] Lütkepohl, H. (2005): *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heildeberg.
- [13] Prášková, Z. (2004): *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, Praha.

- [14] Tsay, R. S. (2002): *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [15] Tse, Y. K., Tsui, A. K. C. (2002): *A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model With Time-Varying Correlations*. *Journal of Business & Economic Statistics* **20**, 351–362.