



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Vladimír Berdák

**Kvantifikace rizika v pojištění důchodu**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Bc. Vladimír Berdák

Chcem sa poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za cenné rady, čas a trpezlivosť, ktorú mi venovala počas vypracovania.  
Ďakujem aj mojim rodičom za podporu počas celého štúdia.

Název práce: Kvantifikace rizika v pojištění důchodu

Autor: Bc. Vladimír Berdák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce zkoumá vliv jednotlivých rizik na důchodový produkt. Zaměřuje se na produkt doživotního důchodu odloženého o  $k$  let a na dvě základní rizika, která mají největší vliv na celkovou ztrátu. Jde o riziko úrokových měr a riziko dlouhověkosti. Jako sledované míry rizika jsou zvoleny směrodatná odchylka ( $\sigma$ ), hodnota v riziku (VaR) a očekávaná ztráta (ES) na různých hladinách spolehlivosti. Na rozklad celkové ztráty je použita Eulerova alokační metoda a Hoeffdingova dekompozice. Tyto metody odhalují, jaká zastoupení mají v tomto pojištění jednotlivá rizika pro různé vstupní věky.

Klíčová slova: riziko úrokových měr, riziko dlouhověkosti, Eulerova alokační metoda, Hoeffdingova dekompozice

Title: Risk quantification in annuity insurance

Author: Bc. Vladimír Berdák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis examines the impact of individual risks on an annuity product. It focuses on the deferred whole life annuity and on two basic risks, which affect the overall loss the most. These are interest rate risk and longevity risk. We choose standard deviation ( $\sigma$ ), value at risk (VaR) and expected shortfall (ES) at different confidence levels for target risk measures. Euler allocation principle and Hoeffding decomposition are used to split the overall loss. These methods will show the distribution of individual risks for different entry ages.

Keywords: interest rate risk, longevity risk, Euler allocation principle, Hoeffding decomposition

Názov: Kvantifikácia rizika v poistení dôchodkov

Autor: Bc. Vladimír Berdák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca skúma vplyv jednotlivých rizík na dôchodkový produkt. Zameriava sa na produkt doživotného dôchodku odloženého o  $k$  rokov a na dve základné rizika, ktoré majú najväčší vplyv na celkovú stratu. Ide o riziko úrokových mier a riziko dlhovekosti. Ako sledované miery rizika sú zvolené smerodajná odchylka ( $\sigma$ ), hodnota v riziku (VaR) a očakávaná strata (ES) na rôznych hladinách spoľahlivosti. Na rozloženie celkovej straty portfólia je použitá Eulerova alokačná metóda a Hoeffdingova dekompozícia. Tieto metódy odhaľujú, aké zastúpenie majú v tomto poistení jednotlivé riziká pre rôzne vstupné veky.

Kľúčové slová: riziko úrokových mier, riziko dlhovekosti, Eulerova alokačná metóda, Hoeffdingova dekompozícia

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Poistenie a hlavné rizikové faktory</b>	<b>3</b>
1.1 Poistenie . . . . .	3
1.2 Poistno-matematické nástroje . . . . .	4
1.3 Poistenie doživotného dôchodku . . . . .	8
1.4 Riziko dlhovekosti . . . . .	8
1.4.1 Lee-Carterov model . . . . .	9
1.5 Riziko úrokových mier . . . . .	12
1.5.1 Cox-Ingersoll-Rossov model . . . . .	13
<b>2 Riziko portfólia</b>	<b>15</b>
2.1 Miery rizika . . . . .	15
2.2 Axiomatický prístup k meraniu rizika . . . . .	16
2.2.1 Smerodajná odchýlka - $\sigma$ . . . . .	17
2.2.2 Hodnota v riziku - VaR . . . . .	17
2.2.3 Očakávaná strata - ES . . . . .	18
2.3 Eulerova alokačná metóda pre subportfólia . . . . .	18
2.4 Eulerova alokačná metóda pre rizikové faktory . . . . .	21
2.5 Hoeffdingova dekompozícia . . . . .	21
<b>3 Aplikácia na poistenie dôchodkov</b>	<b>24</b>
3.1 Porovnanie výsledkov . . . . .	25
3.2 Použitie Eulerovej alokačnej metódy . . . . .	27
3.3 Použitie Hoeffdingovej dekompozície . . . . .	30
<b>Záver</b>	<b>32</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>33</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>35</b>
<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>36</b>

# Úvod

Správne riadenie finančného rizika je nevyhnutné na to, aby každá finančná inštitúcia mohla bezpečne vykonávať svoju činnosť. Akékoľvek druhy rizík, ktorým čelí finančná inštitúcia, by mali byť nepretržite kvantifikované, hlásené a kontrolované. Podstatou je určiť dostatočný kapitál tak, aby bola daná firma solventná. Takémuto kapitálu hovoríme rizikový, pretože sa používa v prípade neočakovaných strát z možných rizík. Je nutné, aby inštitúcia mala potrebné množstvo rizikového kapitálu tak, aby bola jej solventnosť na vysokej úrovni. Úlohou teda ostáva identifikácia jednotlivých rizík a ich následná kvantifikácia.

Práca sa inšpiruje článkom Karabey, Kleinow a Cairns (2014). Prínosom tejto práce je použitie iného modelu úmrtnosti, s použitím na české dáta a na odlišný produkt životného poistenia.

V prvej kapitole zavedieme základne pojmy a matematicko-poistné nástroje. Popíšeme si zvolený produkt (doživotný dôchodok odložený o  $k$  rokov), na ktorý sa zameriame. Taktiež rozoberieme hlavné rizikové faktory, ktoré ho ovplyvňujú a postupne si predstavíme model úmrtnosti (Lee-Carterov model) a model úrokových mier (CIR model).

V druhej kapitole sa sústredíme na riziko portfólia. Popíšeme jednotlivé vlastnosti mier rizík a vyberieme si tri miery ( $\sigma$ , VaR, ES), ktoré budeme porovnávať pri hodnotení výsledkov. Tiež si tu popíšeme teóriu ohľadom Eulerovej alokačnej metódy a Hoeffdingovej dekompozície, ktoré budeme neskôr používať.

V záverečnej tretej kapitole prezentujeme vlastné výsledky, ku ktorým sme sa dopracovali.

# 1. Poistenie a hlavné rizikové faktory

V tejto kapitole si zopakujeme základné termíny z oblasti poisťovníctva a potrebné pojistno-matematické nástroje. Následne uvedieme popis produktu, s ktorým budeme pracovať. Potom si rozoberieme hlavné rizikové faktory, ktoré najviac ovplyvňujú zvolený produkt. Nakoniec si uvedieme modely, pomocou ktorých budeme modelovať a predikovať miery úmrtnosti, resp. úrokové miery.

## 1.1 Poistenie

Na poistenie môžeme pozeráť ako na nástroj finančnej eliminácie negatívnych dôsledkov náhody, ako sú napríklad pracovný úraz, choroba, smrť, poškodenie majetku v dôsledku prírodnej katastrofy alebo odcudzenie majetku. Poistenie sa uzatvára poistnou zmluvou medzi poisťiteľom a poisťníkom. V Českej republike o tom presnejšie hovorí občiansky zákonník upravený zákonom č. 89/2012 Sb., účinný od 1.1.2014: „Pojistnou smlouvou se pojistitel zavazuje vůči pojistníkovi poskytnout jemu nebo třetí osobě pojistné plnění, nastane-li nahodilá událost krytá pojištěním (pojistná událost), a pojistník se zavazuje zaplatit pojistiteli pojistné.“

Rozoberme si podrobnejšie jednotlivé základné pojmy z oblasti poisťovníctva.

*Pojistné riziko* je nebezpečenstvo, ktoré môže viesť k vzniku poistnej udalosti.

*Pojistné plnenie* môžeme deliť do troch kategórií:

1. jednorázovo vyplatená poistná čiastka (v nedôchodkovom životnom poistení),

2. dôchodok (v dôchodkovom poistení), ktorý sa môže ešte deliť na:

- a) životný dôchodok - každá ďalšia výplata dôchodku je podmienená tým, že poistený je nažive,
- b) istý dôchodok - vypláca sa po stanovenú dobu bez nutnosti, aby poistený bol nažive,

3. oslobodenie od platenia poistného - v prípade invalidity poisťníka. Ten je oslobodený od platenia poistného a túto povinnosť na seba preberá poisťovňa, ktorá sa na to pozerá ako na ďalší typ poistného plnenia.

*Pojistné* je možné klasifikovať na:

1. *jednorázove poistné*: je stanovené na celú dobu zjednaného poistenia, t.j. zaplatí sa všetko pri uzavretí zmluvy.

2. *bežné poistné*: je vypočítané za poistné obdobie, t.j. platí sa opakovane v splátkach, obvykle na začiatku jednotlivých poistných období v rovnakej výške. Poisťovne zvyknú motivovať platby poistného za dlhšie poistné obdobia, napr.: jedno, dvoj alebo štvorpercentnou zľavou štvrťročného, polročného alebo ročného poistného voči mesačnému poistnému.



3. *nettopoistné*: je stanovené tak, aby poisťovní v priemere pokrylo vyplatené poistné plnenia.

Ďalšie typy poistného môžeme nájsť v Cipra (2006, časť 2.3.2).

Existujú rôzne spôsoby platenia poistného. Prvou možnosťou je jednorázové poistné zaplatené na začiatku poistenia. Druhou možnosťou sú pravidelné splátky v rovnakej výške. Tretou možnosťou sú pravidelné splátky v rôznych výškach.

Pri platení poistného sa dodržiava, že poistné sa platí predlehotne, pred uplynutím poistnej doby a pred nástupom poistného plnenia.

*Technická úroková miera (TÚM)* - je úroková miera používaná k vyjadreniu časovej hodnoty peňazí v životnom poistení. Predstavuje také zhodnotenie poistného, na ktoré má klient zmluvný nárok. Výška TÚM sa volí konzervatívne. V Českej republike zákonná vyhláška stanovovala hornú hranicu pre TÚM, ktorú vyhlasovala Česká národná banka (ČNB). Výška maximálnej TÚM začala byť regulovaná v apríli 2002, kedy bola stanovená vo výške 4 %. Do tejto doby bolo možné sa stretnúť aj s výrazne vyššou TÚM, pretože aj úrokové sadzby v devädesiatych rokoch boli vysoké. K poslednej úprave pristúpila ČNB 14.1.2015 a to na 1,3 %.

Avšak s účinnosťou zákona č. 304/2016 Sb., ktorý mení zákon č. 277/2009 Sb., o poisťovníctve, od 23.9.2016 úloha ČNB stanovovať TÚM zaniká a každá poisťovňa si ju určuje sama v rámci vlastného riadenia rizík.

V tejto diplomovej práci sa zameriame len na poistenie osôb, v rámci ktorého je možné zjednať:

1. *poistenie pre prípad smrti*, kde poistnou udalosťou je smrť poisteného,
2. *poistenie pre prípad dožitia*, kde poistnou udalosťou je dožitie poisteného do zjednaného veku,
3. *zmiešané poistenie*, kde poistnou udalosťou je smrť alebo dožitie poisteného do zjednaného veku, podľa toho, čo nastane skôr,
4. *dôchodkové poistenie*, kde sa v podstate jedná o špeciálne poistenie pre prípad dožitia, s pravidelne sa opakujúcim poistným plnením vo forme výplaty dôchodku.

Existujú aj iné delenia životného poistenia, ktoré môžeme nájsť napríklad v Cipra (2006, časť 2.3.1). V tejto práci sa zameriame len na dôchodkové poistenie, konkrétne na poistenie doživotného dôchodku, ktoré bližšie popíšeme v časti 1.3.

## 1.2 Poistno-matematické nástroje

Nech  $T_0$  je náhodná veličina vyjadrujúca dĺžku života práve narodeného jedinca. Jej pravdepodobnostné rozdelenie popisuje distribučná funkcia  $F_0$ :

$$F_0(t) = \mathbb{P}(T_0 \leq t).$$

Zároveň je možné zaviesť funkciu prežitia nasledujúcim spôsobom:

$$S_0(t) = \mathbb{P}(T_0 > t) = 1 - F_x(t).$$

V praxi je však zaujímavejšia náhodná veličina  $T_x$ , ktorá vyjadruje zostávajúcu dĺžku života osoby vo veku  $x$ . Inými slovami je to doba, po ktorú bude táto osoba ešte nažive.

**Predpoklad.** *Rozdelenie zostávajúcej doby života osoby vo veku  $x + s$  (t.j.  $T_{x+s}$ ) pre  $s > 0$ , je zároveň podmieneným rozdelením veličiny  $T_x - s$  za podmienky  $T_x > s$ .*

Ak si teda chceme  $T_x$  vyjadriť pomocou  $T_0$ , nesmieme zabúdať na podmienku, že sa veku  $x$  daný jedinec musel dožiť. Inými slovami, jej distribučnú funkciu musíme počítat s podmienenou pravdepodobnosťou:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathbb{P}(T_x \leq t) \stackrel{\text{predp.}}{=} \mathbb{P}(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x + t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \\ &= \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}. \end{aligned}$$

Podobne to platí pre funkciu prežitia vo veku  $x$ :

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \mathbb{P}(T_x > t) \stackrel{\text{predp.}}{=} \mathbb{P}(T_0 > x + t | T_0 > x) = \frac{\mathbb{P}(T_0 > x + t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \\ &= \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}. \end{aligned}$$

Častejšie sa ale stretávame s nasledujúcimi aktuárskymi značeniami:

$${}_tq_x = F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t)$$

a

$${}_tp_x = S_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t),$$

kde  ${}_tq_x$  je pravdepodobnosť, že osoba vo veku  $x$  umrie pred dosiahnutím veku  $x + t$  a  ${}_tp_x$  je pravdepodobnosť, že osoba vo veku  $x$  sa dožije veku  $x + t$ .

Jednou z najdôležitejších popisných charakteristík náhodnej veličiny  $T_x$  je určite jej stredná hodnota, ktorú označujeme ako strednú dĺžku života vo veku  $x$  za podmienky, že daný jedinec sa dožil veku  $x$ :

$${}^{\circ}e_x = E(T_x).$$

Tá udáva priemerný počet rokov, ktorých sa ešte dožije jedinec vo veku  $x$ . Ďalším pojmom je intenzita úmrtnosti vo veku  $x$ , ktorú definujeme vzťahom:

$$\mu_x \stackrel{\text{df.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(T_x \leq h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{{}_hq_x}{h}.$$

V nasledujúcich riadkoch si vyjadríme intenzitu úmrtnosti  $\mu_{x+t}$ , kde  $t \geq 0$ , pomocou rozdelenia  $T_x$ :

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_{x+t} \leq h)}{h} \stackrel{\text{predp.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_x - t \leq h | T_x > t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(t < T_x \leq t + h)}{h \mathbb{P}(T_x > t)} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{F_x(t+h) - F_x(t)}{h}}_{F'_x(t_+)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - F_x(t)}}_{\frac{1}{{}_t p_x}} = \\ &= \frac{f_x(t)}{{}_t p_x}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

V poslednej rovnosti sme použili predpoklad:  $F'_x(t_+) = F'_x(t) = f_x(t)$  pre skoro všetky  $t \geq 0$ .

Celkovo teda dostávame vyjadrenie hustoty náhodnej veličiny  $T_x$  ako súčin pravdepodobnosti dožitia veku  $x+t$  jedincom žijúcim vo veku  $x$  a intenzity úmrtnosti vo veku  $x+t$ :

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}.$$

To môžeme využiť na vyjadrenie strednej dĺžky života  ${}^\circ e_x$  pomocou intenzity úmrtnosti:

$${}^\circ e_x = E(T_x) = \int_0^\infty t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

V tejto práci použijeme vyjadrenie  ${}_t p_x$  pomocou (1.1):

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{{}_t p_x} = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F_x(t)) = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x,$$

kde integrovaním dostaneme:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y dy}.$$

Tento vzťah nám umožňuje vychádzať z analyticky určenej intenzity úmrtnosti. Ďalej zavedieme mieru úmrtnosti  $m_x$ , pre ktorú platí:

$$m_x = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u) du}.$$

Pre reálnu populáciu v kalendárnom roku  $t$  sa používa nasledujúci výpočet:

$$m_x(t) = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}},$$

kde  $D_{x,t}$  je počet osôb, ktoré zomreli vo veku  $x$  v roku  $t$  a  $E_{x,t}$  je centrálna expozícia úmrtnosti. V praxi sa používa stredná veľkosť vekovej skupiny v polovici roka.

**Predpoklad.** *Konštantná intenzita úmrtnosti medzi celočíselnými vekmi.*

Ak zapíšeme tento predpoklad matematicky, tak platí:

$$\mu_{x+t} = \mu_x, \quad 0 < t < 1,$$

pre pevne zvolený celočíselný vek  $x$ . Následne z toho vyplýva

$$m_x(t) = \mu_x, \quad q_x = 1 - e^{-\mu_x}.$$

Pre výpočet jednotlivých pravdepodobností úmrtia budeme používať

$$q_x = 1 - e^{-\mu_x}.$$

Ďalším poistno-matematickým nástrojom používaným sú komutačné čísla. Pre ich definíciu si potrebujeme zaviesť nasledujúce dve postupnosti:

$$l_x = l_0 \cdot p_0$$

a

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

kde  $l_0$  je zvolené ľubovoľné prirodzené číslo (väčšinou sa volí 100 000). Toto číslo sa nazýva *koreň* úmrtnostnej tabuľky.

Postupnosť  $l_x$  interpretujeme ako počet jedincov, ktorí sa pri danom počiatočnom stave  $l_0$  dožijú veku  $x$  a postupnosť  $d_x$  interpretujeme ako počet jedincov, ktorí pri danom počiatočnom stave  $l_0$  zomrú vo veku  $x$ .

Poznamenajme, že sa väčšinou stanovuje aj horná veková hranica  $\omega$ , pre ktorú platí

$$l_x = 0, \quad x > \omega.$$

Nultý rád komutačných čísel definujeme ako:

$$D_x = l_x v^x$$

a

$$C_x = d_x v^{x+1},$$

kde  $v$  je diskontný faktor k danej technickej úrokovej miere.  $D_x$  označuje diskontovaný počet dožívajúcich sa veku  $x$  a  $C_x$  označuje diskontovaný počet jedincov, ktorí zomreli sa veku  $x$ . Definície vyšších rádov komutačných čísel môžeme nájsť v Cipra (2006, časť 7.1.3).

## 1.3 Poistenie doživotného dôchodku

V tomto druhu poistenia poisťovňa vypláca v dohodnutej čiastke dôchodok vždy na začiatku poistného roka, ak je poistený nažive. Teda hovoríme o predlehotnom doživotnom dôchodku. Ďalšou variantou je výplata dôchodku na konci poistného roka. Vtedy hovoríme o polehotnom doživotnom dôchodku. Ak budeme v týchto variantách uvažovať poistenie len na dobu určitú, hovoríme o tzv. predlehotnom, resp. polehotnom dočasnom dôchodku, kedy poisťovňa vypláca dôchodok, pokiaľ poistený žije a súčasne neuplynula poistná doba.

Existujú tiež poistenia odloženého doživotného dôchodku o  $k$  rokov, kedy sa prvá výplata dôchodku odkladá o spomenutých  $k$  rokov. Poslednou variantou, avšak v praxi najbežnejšou, sú področné dôchodky, ktoré sa vyplácajú  $m$ -krát ročne (napr.:  $m = 12$  pre mesačné výplaty dôchodku).

Uvedme si vyjadrenie jednorázového nettopoistného pre predlehotný jednotkový doživotný dôchodok odložený o  $k$  rokov pomocou komutačných čísel:

$${}_k|\ddot{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots}{D_x}.$$

V prípade polehotného jednotkového doživotného dôchodku odloženého o  $k$  rokov má jednorázové nettopoistné tvar

$${}_k|a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots}{D_x}.$$

V poistení doživotného dôchodku majú najväčší význam riziko dlhovekosti a riziko úrokových mier. Týmto dvom rizikám sa budeme venovať v nasledujúcich dvoch kapitolách 1.4 a 1.5.

## 1.4 Riziko dlhovekosti

Riziko dlhovekosti je riziko, ktorým je vystavený dôchodkový fond alebo životná poisťovňa, v dôsledku vyšších výplat ako sa pôvodne očakávalo. Riziko dlhovekosti existuje vzhľadom na rastúci trend očakávanej dĺžky života poistencov a dôchodcov. Najväčšiemu stupňu rizika dlhovekosti sú vystavené dôchodkové plány a životné anuity s definovanými dávkami pre poistencov.

Priemerná dĺžka života stúpa. Aj veľmi malá zmena očakávanej dĺžky života môže spôsobiť vážne problémy s platobnými schopnosťami pre dôchodkové spoločnosti, či pre životné poisťovne. Presné merania rizika dlhovekosti sú stále nedostačujúce, pretože vývoj v oblasti medicíny a liekov stále napreduje a jeho vplyv na očakávanú dĺžku života neboli zatiaľ kvantifikované.

Riziku dlhovekosti sú vystavené nie len národné vlády, súkromné dôchodkové spoločnosti alebo životné poisťovne, ale aj jednotlivci, pretože im vo vyššom veku nemusia stačiť ich úspory a budú nútení znížiť svoje životné štandardy. V tomto

kontexte, jednotlivci nesú celý rozsah rizika dlhovekosti sami, keďže je toto riziko „nepokryté“.

Súkromné dôchodkové spoločnosti, resp. životné poisťovne pracujú s týmto rizikom tak, že modelujú vývoj úmrtnosti pomocou rôznych modelov. Tým pádom vedia lepšie odhadnúť výšku budúcich záväzkov voči klientom.

### 1.4.1 Lee-Carterov model

Na modelovanie a predikciu úmrtnosti použijeme Lee-Carterov model. Tento model má extrapolatívny charakter, ktorý nezahŕňa znalosti o medicínskych, či sociálnych vplyvoch na zmeny v úmrtnosti. Jeho silnou stránkou je, že spája silný a napriek tomu aj jednoduchý demografický model so štatistickými metódami časových rad. Je postavený na pevných historických dátach, ktoré nám dávajú predstavu o trende. Na základe týchto dát model poskytuje bodové predikcie i intervaly spoľahlivosti.

#### Model

Nech  $m(x, t)$  označuje mieru úmrtnosti pre vek  $x$  v roku  $t$ , kde  $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  a  $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . Tieto miery úmrtnosti budeme prekladať modelom:

$$\ln(m_{x, t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t},$$

respektíve

$$m_{x, t} = e^{a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}},$$

pre vhodne zvolené množiny vekovo-špecifických konštánt  $\{a_x\}$  a  $\{b_x\}$ , a v čase sa meniaci index  $k_t$ , ktorý reprezentuje úroveň úmrtnosti v roku  $t$ .

Reziduálnu zložku modelu predstavuje  $\epsilon_{x,t}$ , s nulovou strednou hodnotou a rozptylom  $\sigma_\epsilon^2$ , ktorá odráža určité vekovo-špecifické historické vplyvy, ktoré nie sú v modeli z najrôznejších dôvodov explicitne uvedené, napr.: prírodné katastrofy, epidémie alebo vojny. Napriek tomu, že miery úmrtnosti môžu kolísať v rádoch tisícoch v danom roku, rozptyly v čase vekovo-špecifických zložiek  $\epsilon_{x,t}$  nebudú výrazne kolísať, pretože reprezentujú odchyľky od logaritmickej hodnôt úmrtnostných mier.

Výraz  $e^{a_x}$  je obecný profil skrz vekmi v úmrtnosti. Pomocou  $b_x$  vyjadrujeme citlivosť miery úmrtnosti pre daný vek  $x$  voči indexu úmrtnosti (úrovni úmrtnosti v čase  $t$ )  $k_t$ . Ak index  $k_t$  je lineárny v čase, úmrtnosť v každom veku sa mení na vlastnú konštantnú exponenciálnu mieru. Pokiaľ  $k$  klesá do mínus nekonečna, potom vekovo-špecifická miera klesá do nuly. Ďalšou výhodou tohto modelu je, že úmrtnostné miery nenadobúdajú záporné hodnoty, čo je výhodou aj pre predikcie.

Pre účely tejto podkapitoly sme sa inšpirovali pôvodným článkom Lee a Carter (1992).

## Odhad modelu

Nie je možné jednoznačne určiť parametre modelu. Z toho dôvodu zavedieme nasledujúce normalizačné podmienky pre  $b_x$  a  $k_t$ :

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} b_x = 1, \quad (1.2)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0. \quad (1.3)$$

Tieto podmienky implikujú, že  $a_x$  predstavuje priemerne hodnoty  $\ln(m_{x,t})$ .

Na odhad modelu nemôžeme použiť regresné metódy, pretože sa v modeli nenáchadzajú žiadne regresory. Na pravej strane rovnice máme len parametre, ktoré chceme odhadnúť a neznámy index  $k_t$ . Použijeme teda metódu najmenších štvorcov. Ideme minimalizovať funkciu, ktorá má tvar:

$$O_{LS}(a, b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2.$$

Začneme s odhadom  $a_x$ . Tým pádom, funkciu  $O_{LS}$  zderivujeme podľa  $a_x$  a deriváciu položíme rovnú nule. Úpravou dostaneme:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t) = 0.$$

Rozpísaním a použitím vyššie spomenutej podmienky (1.3) dostávame:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}) = \sum_{t=t_1}^{t_n} a_x,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}) = (t_n - t_n + 1) a_x.$$

A teda dostávame finálny odhad:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{(t_n - t_n + 1)} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(\hat{m}_{x,t}).$$

Ostáva nám odhadnúť  $b_x$  a  $k_t$ . Použijeme metódu „Singular value decomposition (SVD)“.

**Veta 1.** Pre ľubovoľnú reálnu maticu  $A$  dimenzie  $m \times n$  existuje rozklad

$$A = U\Sigma V^T,$$

kde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$U$  je reálna ortonormálna matica typu  $m \times m$ ,  $V$  je reálna ortonormálna matica typu  $n \times n$  a  $S$  je reálna diagonálna matica ( $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , kde  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ ).

*Dôkaz.* Vid Klema a Laub (1980). □

Keďže diagonálne prvky matice  $\Sigma$  sú zostupne zoradené, tým pádom je matica určená jednoznačne. Ďalej maticu  $A$  môžeme aproximovať pomocou  $k$  najväčších hodnôt

$$A = U\Sigma V^T \approx \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Vektory  $\mathbf{u}_i$  sú ľavé singulárne vektory. Sú to vlastné vektory matice  $AA^T$ . Podobne vektory  $\mathbf{v}_i$  sú pravé singulárne vektory. Tie sú zase vlastné vektory matice  $A^T A$ .

Zavedme si maticu centrovaných logaritmov miery úmrtnosti  $r_{x,t} = \ln(\hat{m}_{x,t}) - \hat{a}_x$ . Na túto maticu použijeme SVD. Tým pádom odhady  $\hat{b}_x$  a  $\hat{k}_t$  minimalizujú

$$\tilde{O}_{LS}(b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (r_{x,t} - b_x k_t)^2$$

a najlepšia aproximácia matice  $R$  v zmysle metódy najmenších štvorcov má tvar

$$R \approx R^* = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T,$$

kde  $\mathbf{u}_1$  a  $\mathbf{v}_1$  postupne odpovedajú prvým vlastným vektorom matice  $RR^T$ , resp.  $R^T R$ .  $\lambda_1$  je prvý prvok zo singulárneho rozkladu matice  $R$ , vid Veta 1.

Týmto dostaneme nasledujúce odhady:

$$\hat{b}_x = \frac{\mathbf{u}_1}{u},$$

$$\hat{k}_t = \sqrt{\lambda_1} u \mathbf{v}_1,$$



kde  $u$  predstavuje súčet po zložkách vektora  $\mathbf{u}_1$ . Samozrejme sme predpokladali, že tento súčet nie je nulový.

Tým pádom máme odhadnuté všetky potrebné parametre. Aj samotní autori Lee a Carter (1992) uvádzajú, že ak by sme odhadovali budúce miery úmrtnosti pomocou týchto odhadov  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{b}_x$  a  $\hat{k}_t$  a použili ich na súčasné vekové rozdelenie populácie, tak si obecné nebudú odpovedať. Je to dôsledkom toho, že odhad parametru  $k_t$  minimalizuje chyby voči logaritmickým hodnotám miery úmrtnosti a nie voči samotným mieram úmrtnosti. Preto tento parameter znova odhadneme. Použijeme na to rovnicu:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_m} E_{x,t} e^{a_x + k_t b_x},$$

kde  $D_{x,t}$  sú napozorované počty úmrtí pre každý vek v jednotlivých rokoch a  $E_{x,t}$  je centrálna expozícia úmrtnosti, tj. koľko ľudí v danom veku  $x$  čelí riziku smrti v roku  $t$ . Pre  $a_x$  a  $b_x$  použijeme vyššie získané odhady. Nový odhad parametru  $k_t$  získame napríklad pomocou Newton-Raphsonovho algoritmu. Jeho popis uvádza Weisstein (2002). Takto odhadnuté parametre ešte musíme preškálovať, aby spĺňali normalizačné podmienky (1.2) a (1.3):

$$\begin{aligned} \hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k} &\rightarrow \hat{a}_x, \\ (\hat{k}_t - \bar{k}) \hat{b}_\bullet &\rightarrow \hat{k}_t, \\ \frac{\hat{b}_x}{\hat{b}_\bullet} &\rightarrow \hat{b}_x, \end{aligned}$$

kde  $\bar{k}$  predstavuje priemer cez  $\hat{k}_t$  a  $\hat{b}_\bullet$  predstavuje súčet  $\hat{b}_x$ .

## Predikcia

Parameter  $k_t$  je jediným zástupcom časovej zložky Lee-Carterovom modeli. Na predikciu tohto parametru použijeme model náhodnej prechádzky s driftom:

$$k_t = k_{t-1} + \alpha + \epsilon_t,$$

kde  $\epsilon_t \sim N(0,1)$  sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny.

## 1.5 Riziko úrokových mier

Predstavuje riziko zmeny hodnoty investície v dôsledku zmeny absolútnej výšky úrokových mier, zmeny v rozpätí medzi dvomi úrokovými mierami, zmeny tvaru výnosvej krivky alebo zmeny vzťahu k inej úrokovej miere.

Tieto zmeny priamo aj nepriamo vplyvajú na hodnotu cenných papierov. Vieme ich zredukovať pomocou diverzifikácie, investovanie do cenných papierov s pevným výnosom s rôznou dĺžkou trvania, alebo „hedgovaním“, tj. pomocou SWAP-u na úrokovú mieru.

Riziko úrokových mier viac vplýva na dlhopisy ako na akcie. Predstavuje najzávažnejšie riziko pre držiteľov dlhopisov. Ak totiž úrokové sadzby stúpajú, hodnota dlhopisov klesá a naopak. Je to dané tým, že pri náraste úrokových mier, klesajú náklady na držanie dlhopisu a tým pádom by investor bol schopný realizovať vyšší výnos zainvestovaním do iných investícií, ktoré reflektujú vyššiu úrokovú mieru.

Taktiež u cenných papierov s pevným výnosom hrá riziko úrokových mier významnú úlohu. Pri náraste úrokových mier totiž hodnota skôr vydaných cenných papierov s pevným výnosom klesá, resp. len pri poklese ich cien budú konkurencieschopné súčasťným cenným papierom, ktoré garantujú vyšší výnos.

### 1.5.1 Cox-Ingersoll-Rossov model

Na modelovanie a predikciu úrokovej miery použijeme Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR model), ktorý je rozšírením Vašíčkovho modelu, ktorý môžeme nájsť v Brigo a Mercurio (2001, časť 3.2.1). Tento model zaradujeme medzi tzv. „jednofaktorové modely“, pretože iba jeden faktor v modeli odpovedá tržnému riziku. Môže sa napríklad použiť na oceňovanie derivátov úrokových mier.

#### Model

Podľa Brigo a Mercurio (2001, časť 3.2.3) CIR model vymedzuje, že okamžitá úroková miera je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t),$$

s počiatočnou podmienkou  $r(0) = r_0$  a kde  $W(t)$  je Wienerov proces, ktorý predstavuje náhodný tržný rizikový faktor. Parameter  $\alpha > 0$  je tzv. „mean-reversion“ parameter, ktorý má vlastnosť, že sa úroková miera v čase vracia k priemernej hodnote  $\mu > 0$ . Parameter  $\sigma > 0$  predstavuje volatilitu.

Ďalšou vlastnosťou CIR modelu je, že úrokové miery nenadobudajú záporných hodnôt. To je zaručené splnením nasledujúcej nerovnosti:  $2\alpha\mu > \sigma^2$ . Je to dané tým, že ak  $r(t)$  je blízko nule, tak aj  $\sigma\sqrt{r(t)}$  je blízko nule, čím tlmí účinok náhodného šoku. Následne v rovnici má dominantnú pozíciu faktor posunutia,  $\alpha(\mu - r(t))$ , ktorý začne posúvať mieru od nuly k priemernej hodnote  $\mu$ .

#### Odhad modelu a predikcia

Pre ďalšie použitie v diplomovej práci budeme používať nasledujúce vyjadrenie modelu:

$$r(t) = r(t-1) + \alpha(\mu - r(t-1)) + \sigma\sqrt{r(t-1)}\epsilon(t),$$

kde  $\epsilon(t) \sim N(0,1)$  sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny. Nájdenie najlepšieho CIR modelu nie je predmetom tejto práce. Preto použijeme rovnaké parametre modelu, ktoré boli použité v článku Karabey a kol. (2014).

## 2. Riziko portfólia

V nasledujúcom texte vychádzame z článkov Rosen a Saunders (2010) a Karabey a kol. (2014).

Úlohou každého rizikového manažmentu spoločnosti (poistovne) je identifikácia, kvantifikácia a riadenie rizík. Pre čo najlepšie riadenie rizík je dôležité stanovenie hlavných rizík a kalkulácia rizikových prírastkov do celkového rizika portfólia. Spoločne so správnymi alokačnými metódami a vhodnými rizikovými mierami, dokáže rizikový manažment stanoviť hodnotu rizika. Na rizika, a hlavne na rizikové prírastky, sa dá pozeráť dvomi spôsobmi:

1. cez jednotlivé zložky portfólia (subportfólia),
2. cez rizikové faktory.

Pohľad cez subportfólia má veľký význam pre podporu manažérskych rozhodnutí a biznisového plánovania, meranie výkonosti, vytváraní optimálnych stratégií a pod. V tomto prípade môžeme celkovú stratu portfólia napísať ako súčet strát z jednotlivých subportfólií. Pre túto sumu bola zavedená teória aditívnych rizikových prírastkov, založená na koncepte marginálnych prírastkov, niekedy označovaná ako Eulerova alokačná metóda.

Čo sa týka druhého pohľadu na riziká, stratu portfólia obecně nemôžeme napísať ako lineárnu funkciu individuálnych rizikových faktorov. Je to z toho dôvodu, že existuje pár rizikových faktorov, ktoré vzájomne na seba pôsobia naprieč celým portfóliom a tým predstavujú potencionálne hrozby, resp. straty. Z tohto dôvodu nemôžeme priamo použiť teóriu aditívnych prírastkov.

Technika je založená na Hoeffdingovej dekompozícií. Hlavná myšlienka metodiky je veľmi jednoduchá: zatiaľ čo stratu portfólia nemôžeme napísať ako súčet funkcií individuálnych rizikových faktorov, použitie Hoeffdingovej dekompozície nám umožní túto stratu portfólia napísať ako súčet funkcií cez všetky podmnožiny rizikových faktorov. Následne na túto novú dekompozíciu straty. Cenou za túto metodiku je to, že musíme uvažovať nie len jednotlivé rizikové faktory, ale aj jednotlivé interakcie medzi nimi.

Pohľad cez rizikové faktory je dôležitý z dôvodu porozumenia zdrojom rizík v portfóliu. Špeciálne u komplexných portfólií s mnohými subportfóliami, kde individuálne zložky nie sú až tak viditeľné zdroje rizík. Taktiež pomáhajú k pochopeniu rizík u komplikovaných finančných derivátov.

V tejto kapitole si uvedieme požadované vlastnosti rizikových mier a vyberieme si tri rizikové miery, s ktorými budeme neskôr pracovať. Následne si vysvetlíme Eulerovu alokačnú metódu pre subportfólia, ale aj pre rizikové faktory. Nakoniec predstavíme Hoeffdingovu dekompozíciu.

### 2.1 Miery rizika

S mierami rizika sa väčšinou stretávame pri stanovovaní výšky kapitálu potrebného k zaisteniu adekvátnej ochrany proti neočakávaným budúcim strátam.

Ďalej je ich možné použiť pri manažérskych rozhodnutiach, alebo v poisťovniach pri stanovovaní výšky poistného ako kompenzácie za prebratie rizika.

Existuje mnoho spôsobov ako pristupovať k meraniu rizika. V tejto práci si popíšeme axiomatický prístup k meraniu rizika.

## 2.2 Axiomatický prístup k meraniu rizika

V tomto prístupe sa najprv stanovujú minimálne požadované vlastnosti miery rizika a až potom sa začne hľadať ich konkrétna podoba. Rizika budeme interpretovať ako množinu  $M$  náhodných veličín  $X$  na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , ktorý je konvexným kuželom (t.j.  $X_1, X_2 \in M \Rightarrow X_1 + X_2 \in M$  a súčasne  $X \in M \Rightarrow \lambda \cdot X \in M$  pre každé  $\lambda > 0$ ).

V rámci axiomatického prístupu sú rizikovými mierami rôzne funkcie  $\rho : M \rightarrow (-\infty, \infty)$ , ktoré predstavujú množstvo potrebného kapitálu, ktorý by mala mať spoločnosť k dispozícii, ak strata  $X$  nastane. Tým pádom sa odpovedajúca riziková pozícia stane akceptovateľnou v rámci vnútorného, alebo externého auditu. Asi najjednoduchším príkladom rizikovej miery je stredná hodnota  $\rho(X) = E(X)$ . V tomto prípade sa kapitalové požiadavky stanovujú vo výške priemernej straty.

Prejdime k jednotlivým axiómom tak, ako ich uvádzajú napríklad Artzner a kol. (1999):

**Axióm 1** (Translačná invariancia). *Pre každé  $X \in M$  a  $c \in (-\infty, \infty)$  je  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ .*

Tento axióm hovorí o tom, že akákoľvek zmena (zvýšenie alebo zníženie) straty o konštantnú čiastku požaduje rovnakú zmenu kapitalovej požiadavky. Je zrejmé, že ak by sme chceli z rizikovej pozície spraviť bezrizikovú, za platnosti axiómu translačnej invariancie je postačujúce zmierniť stratu  $X$  práve o hodnotu  $\rho(X)$ .

**Axióm 2** (Subaditivita). *Pre každé  $X_1, X_2 \in M$  je  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ .*

Tento axióm hovorí, že riziková miera súčtu dvoch portfólií nebude väčšia, ako súčet jednotlivých rizikových mier dvoch portfólií. Inými slovami, spojením rizík nevytvárame extra riziko.

**Axióm 3** (Pozitívna homogenita). *Pre každé  $X \in M$  a  $\lambda > 0$  je  $\rho(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho(X)$ .*

Ak budeme vychádzať z predošlého axiómu, tak potom  $\rho(n \cdot X) = \rho(X + \dots + X) \leq n \cdot \rho(X)$  pre každé prirodzené  $n$ . Keďže sa agregujú tie isté riziká, je možné predpokladať rovnosť. Iný pohľad na tento axióm je ten, že riziková miera portfólia, pri zmene veľkosti portfólia v dôsledku faktora  $\lambda$ , sa rovná rizikovej miere pred touto zmenou, avšak vynásobená práve faktorom  $\lambda$ .

**Axióm 4** (Monotónia). *Pre každé  $X_1, X_2 \in M$  splňujúce  $X_1 \leq X_2$  s pravdepodobnosťou jedna je  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ .*

Tento axióm garantuje, že čím sú jednotlivé zložky portfólia väčšie, tým aj ich riziková miera, resp. prípadna strata bude väčšia.

**Definícia 1** (Koherentná riziková miera). *Riziková miera sa nazýva koherentná na  $M$ , ak súčasne splňuje axióm translačnej invariance, subaditivity, pozitívnej homogenity a monotónie.*

Takáto koherentná riziková miera sa považuje za rizikovú mieru s dobrými vlastnosťami. Príkladom koherentnej rizikovej miery je „očakávaná strata“  $ES$  (z ang. „Expected Shortfall“). Je pravdou, že v praxi, a aj v tejto práci, je veľmi používanou rizikovou mierou „hodnota v riziku“  $VaR$  (z ang. „Value at Risk“), ktorá ale nie je koherentnou mierou.

## 2.2.1 Smerodajná odchýlka - $\sigma$

**Definícia 2.** *Smerodajná odchýlka  $\sigma$  náhodnej veličiny  $X$  je odmocnina z jej rozptylu, teda:*

$$\sigma = \sqrt{\text{var}X} = \sqrt{E(X - EX)^2}.$$

Smerodajná odchýlka je najčastejším predstaviteľom rozptylových mier rizika, ktoré merajú riziko ako fluktuáciu okolo danej hodnoty (napr. okolo priemeru). Pre svoju jednoduchosť patrí k jedným z najpoužívanejších mier rizík.

## 2.2.2 Hodnota v riziku - VaR

Nech  $F_X(x)$  je distribučná funkcia rozdelenia straty za pevné časové obdobie.

**Definícia 3.** *Majme danú hladinu spoľahlivosti  $\alpha \in (0,1)$ . Hodnota v riziku na hladine  $\alpha$  je také najmenšie číslo  $x$ , pre ktoré pravdepodobnosť, že strata neprekročí hodnotu  $x$ , nie je väčšia ako  $1 - \alpha$ . Teda:*

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Druhý výraz na pravej strane odpovedá definícii kvantilovej funkcie príslušnej distribučnej funkcie  $F_X$ . Inými slovami, hodnota v riziku je  $\alpha$ -kvantil rozdelenia straty  $X$ , tj.  $VaR_\alpha = q_\alpha(F_X)$ . Hladina  $\alpha$  sa často volí na úrovni 0,95 až 0,995.

### 2.2.3 Očakovaná strata - ES

**Definícia 4.** Pre stratu  $X$  s  $E(|X|) < \infty$  a s distribučnou funkciou  $F_X$  definujeme očakovanú stratu na hladine spoľahlivosti  $\alpha \in (0,1)$  vzťahom:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_X) du,$$

kde  $q_u(F_X)$  je kvantilová funkcia príslušnej distribučnej funkcie  $F_X$ .

Z tejto definícií vyplýva súvislosť medzi mierami  $VaR_\alpha$  a  $ES_\alpha$ :

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

$ES_\alpha$  je teda akýmsi priemerom hodnôt  $VaR$  na všetkých hladinách  $u \geq \alpha$ . Tým pádom platí, že

$$ES_\alpha \geq VaR_\alpha.$$

Ak je distribučná funkcia  $F_X$  spojitá, môžeme potom písať

$$ES_\alpha = \frac{E[X; X \geq q_\alpha(F_X)]}{1-\alpha} = E(X|X \geq VaR_\alpha),$$

kde  $E[Y; A] = E(YI_A)$ .

$ES_\alpha$  môžeme teda interpretovať ako očakovanú hodnotu straty za podmienky, že strata prekročí hodnotu  $VaR_\alpha$ .

## 2.3 Eulerova alokačná metóda pre subportfólia

Informácie v tejto podkapitole sú prebraté z článku Tasche (2008).

Predpokladajme reálne náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$ , ktoré predstavujú straty, z jednotlivých subportfólií. Nech  $X$  predstavuje celkovú stratu z portfólia a teda:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (2.1)$$

Ekonomický kapitál ( $EC$  z anglického „economic capital“) potrebný pre prípadné vysoké straty z portfólia je určený rizikovou mierou  $\rho$ :

$$EC = \rho(X). \quad (2.2)$$

V praxi je  $\rho$  obvykle naviazané na rozptyl alebo kvantil rozdelenia straty.

Niekedy je vhodné zaviesť váhy  $u = (u_1, \dots, u_n)$ :

$$X(u) = X(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i X_i. \quad (2.3)$$

Zjavne teda máme  $X = X(1, \dots, 1)$ . Premennú  $u_i$  je možné interpretovať ako objem peňazí investovaných do aktíva, ktorému odpovedá  $X_i$ . Pre potreby tejto kapitoly budeme predpokladať, že pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_n)$  je nemenné. Potom je vhodné zaviesť funkciu:

$$f_{\rho, X}(u) = \rho(X(u)). \quad (2.4)$$

Pre tú istú rizikovú mieru  $\rho$  sa dá na funkciu  $f_{\rho, X}$  pozerat rozdielne v dôsledku rozdielných rozdelení  $X$ . Keďže predpokladáme, že rozdelenie  $X$  je nemenné, môžeme index  $X$  vynechať a písať  $f_\rho$ , namiesto  $f_{\rho, X}$ . Ďalej sa zameriame na (pozitívne) homogénne rizikové miery  $\rho$  a funkcie  $f_\rho$ .

**Definícia 5.** *Riziková miera  $\rho$  má stupeň homogenity  $\tau$ , ak pre všetky  $h > 0$  platí:*

$$\rho(hX) = h^\tau \rho(X)$$

*Funkcia  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má stupeň homogenity  $\tau$ , ak pre všetky  $h > 0$ ,  $u \in U$  a  $hu \in U$  platí:*

$$f(hu) = h^\tau f(u).$$

Poznamenajme, že funkcia  $f_\rho$  z (2.4), vzhľadom k rizikovej miere  $\rho$ , má stupeň homogenity  $\tau$ , ak  $\rho$  je rizikovou mierou so stupňom homogenity  $\tau$ . V prípade spojitých diferencovateľných funkcií, je možné homogénne funkcie popísať nasledujúcou Eulerovou vetou, ktorú uviedol Tasche (1999).

**Veta 2** (Eulerova veta homogenicity). *Nech  $U \subset \mathbb{R}^n$  je otvorená množina a  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá diferencovateľná funkcia. Potom  $f$  má stupeň homogenity  $\tau$  vtedy a len vtedy, keď platí:*

$$\tau f(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f(u)}{\partial u_i}, \quad \text{pre } u = (u_1, \dots, u_n) \in U, \quad h > 0.$$

Ak je ekonomický kapitál portfólia stanovený na základe (2.2), je vhodné si zodpovedať otázku: Aký veľký je príspevok subportfólia  $i$  do  $EC$ ? Niektoré potenciálne odpovede na túto otázku nájdeme nižšie. Ďalej označujeme rizikový prírastok  $X_i$  vzhľadom k  $\rho(X)$  ako  $\rho(X_i|X)$ .

**Definícia 6.** *Nech  $\mu_i = E(X_i)$ . Potom*

• *návratnosť rizikového kapitálu (RORAC – z anglického „Return on Risk Adjusted Capital“) celého portfólia je definovaná vzťahom:*

$$RORAC(X) = \frac{E(X)}{\rho(X)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{\rho(X)},$$

• *návratnosť rizikového kapitálu  $i$ -tého subportfólia je definovaná vzťahom:*

$$RORAC(X_i|X) = \frac{E(X_i)}{\rho(X_i|X)} = \frac{\mu_i}{\rho(X_i|X)}.$$



Na základe tejto definície je vhodné uviesť dve vlastnosti rizikových prírastkov z ekonomického pohľadu.

**Definícia 7.** *Nech  $X$  predstavuje celkovú stratu z portfólia.*

- *Rizikové prírastky  $\rho(X_1|X), \dots, \rho(X_n|X)$  splňujú úplnú alokáciu voči  $\rho(X)$  ak*

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i|X) = \rho(X).$$

- *Rizikové prírastky  $\rho(X_i|X)$  sú RORAC kompatibilné, ak pre nejaké  $\epsilon_i > 0$*

$$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$$

*pre všetky  $0 < h < \epsilon_i$ .*

**Tvrdenie 3.** *Nech  $\rho$  je riziková miera a  $f_\rho$  je funkcia k nej prislúchajúca na základe (2.3) a (2.4). Predpokladajme, že  $f_\rho$  je spojitá diferencovateľná. Ak rizikové prírastky  $\rho(X_1|X), \dots, \rho(X_n|X)$  sú RORAC kompatibilné v zmysle Definície 7, potom  $\rho(X_i|X)$  je jednoznačne určená ako*

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \rho}{\partial h}(X + hX_i)|_{h=0} = \frac{\partial f_\rho}{\partial u_i}(1, \dots, 1) \quad (2.5)$$

*Dôkaz.* Dôkaz môžeme nájsť v Tasche (1999). □

Pozrime sa ešte na vlastnosť úplnej alokácie z Definície 7. Predpokladajme, že funkcia  $f_\rho$  vzhľadom k rizikovej miere  $\rho$  je spojitá diferencovateľná. Potom na základe Eulerovej vety homogenicity (Veta 2) pre  $f_\rho$  platí rovnica

$$f_\rho(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_\rho(u)}{\partial u_i},$$

pre všetky  $u \in U$  vtedy a len vtedy, keď  $f_\rho$  má stupeň homogenity 1.

**Poznámka.** *Ak  $\rho$  je riziková miera, ktorá má stupeň homogenity 1 (vo význame Definície 5), potom rizikové prírastky dané vzťahom (2.5) nazývame Eulerove prírastky. Tieto Eulerove prírastky splňajú obe vlastnosti Definície 7. Metóda, ktorá prerozdeľuje kapitál do aktív na základe počítania Eulerových prírastkov sa nazýva Eulerova alokačná metóda.*

Uvedme si teraz použitie Eulerovej alokačnej metódy pre nami uvažované rizikové miery. Nasledujúce vzťahy sú prebraté z článku Haugh (2010).

Smerodajná odchylka -  $\sigma$

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \sigma(X(u))}{\partial u_i} = \frac{cov(X_i, X)}{\sqrt{var(X)}}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Hodnota v riziku - VaR

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial VaR(X(u))}{\partial u_i} = E(X_i|X = VaR_\alpha(X)), \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Očakovaná strata - ES

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial ES(X(u))}{\partial u_i} = \frac{1}{1-\alpha} E(X_i|X \geq VaR_\alpha(X)), \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

V tejto práci sa ale chceme zaoberať pohľadom na riziká cez rizikové faktory.

## 2.4 Eulerova alokačná metóda pre rizikové faktory

Od tejto podkapitoly sa budeme na  $X_1, \dots, X_n$  pozeráť ako na náhodné veličiny predstavujúce straty z jednotlivých rizikových faktorov.

Aj tu je možnosť aplikovať Eulerovu alokačnú metódu, ale ako bolo spomenuté na začiatku kapitoly, stratu obecné nie je možné napísať ako lineárnu funkciu individuálnych rizikových faktorov, pretože tie vzájomne na seba pôsobia. Tým pádom nebude platiť vzťah (2.1) a taktiež nebude platiť úplná alokácia voči  $\rho(X)$  z Definície 7.

V našom prípade pre dva rizikové faktory je  $n = 2$  a  $u_1 = u_2 = 1$ . Teda budeme môcť použiť vzťahy (2.6), (2.7) a (2.8).

## 2.5 Hoeffdingova dekompozícia

V tejto časti práce ozrejmieme koncept Hoeffdingovej dekompozície náhodnej veličiny a pridáme aj finančnú interpretáciu. Demonštrovať obecnú dekompozíciu budeme na príklade s malým počtom rizikových faktorov. Predpokladajme, že

strata portfólia  $X$  je ovplyvňovaná dvoma nezávislými faktormi  $Z_1$  a  $Z_2$ . Následne môžeme náhodnú veličinu  $X$  zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} X &= E(X) + \\ &+ E(X|Z_1) - E(X) + \\ &+ E(X|Z_2) - E(X) + \\ &+ X - [E(X|Z_1) - E(X)] - [E(X|Z_2) - E(X)] - E(X) \end{aligned}$$

Táto dekompozícia je tautológiou, avšak tiež poskytuje dôležité finančné informácie. Prvý výraz (konštanta) nám udáva najlepšie zaistenie straty, ktoré môžeme dosiahnuť použitím riziko-neutrálneho nástroja. Druhý výraz nám udáva najlepšie zaistenie zostávajúceho rizika, ktoré získame použitím nástrojov závislých na faktore  $Z_1$ , bez ohľadu na riziko vyplývajúce z faktora  $Z_2$ . Tretí výraz je obdobou druhého, ale s tým rozdielom, že uvažujeme len riziko vyplývajúce z faktora  $Z_2$  a úplne ignorujeme vplyv faktoru  $Z_1$ . Posledný výraz nám uvádza zvyšné riziko, ktoré nemôže byť zaistené nástrojmi závislými len na jednotlivých faktoroch, ale namiesto toho musí byť zaistené nástrojmi, ktoré závisia na interakciách faktorov.

Pristúpme k formálnejšej definícii dekompozície v obecnom prípade s viacerými faktormi. Nech  $Z_1, \dots, Z_K$  sú nezávislé systematické faktory s konečnými rozptylmi a nech  $X = g(Z_1, \dots, Z_K)$  má tiež konečný rozptyl. Hoeffdingova dekompozícia nám dáva jedinečný kanonický spôsob zápisu straty  $X$ , ako sumu nekorelovaných výrazov zahŕňujúcich podmienené stredné hodnoty  $g$ , dané množinami faktorov  $Z$ . Matematický zápis vyzerá nasledovne:

$$X = \sum_{A \subseteq \{1, \dots, K\}} g_A(Z_j; j \in A), \quad (2.9)$$

kde

$$g_A(Z_j; j \in A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} E(X|Z_k, k \in B).$$

Suma (2.9) ide cez všetky možné podmnožiny faktorov  $A \subseteq \{1, \dots, K\}$ . Každý výraz v dekompozícii má finančnú interpretáciu. Výraz  $g_A(Z_j; j \in A)$  nám dáva najlepšie zaistenie zvyšného rizika daného interakciou systematických faktorov  $Z_j, j \in A$ , ktoré nemôže byť zaistené uvažovaním inej menšej podmnožiny faktorov  $B \subset A$ . Túto interpretáciu nájdeme v článku Rosen a Saunders (2010).

Dekompozíciu teda môžeme využiť na rozpísanie celkovej straty portfólia do jednotlivých zaistení, ktoré zahrňajú nástroje s rastúcou zložitou. Prvý výraz (konštanta)  $E(X)$  odpovedá prázdnej množine faktorov. Udáva nám najlepšie zaistenie použitím len riziko-neutrálneho nástroja. Výrazy „prvého rádu“  $g_k = E(X|Z_k) - E(X)$  zaisťujú zvyšné riziko portfólia dané  $k$ -tým faktorom, ktorý je v izolácii od ostatných faktorov. Výrazy „druhého rádu“  $g_{k,j}$  zaisťujú zostávajúce riziko dané interakciou faktorov  $Z_k$  a  $Z_j$ . Týmto spôsobom sa ďalej pokračuje.

Celkovo sa teda výrazy v dekompozícií dajú zapísať explicitnejšie, napríklad pri dvoch rizikových faktoroch nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}g_{\emptyset} &= E(X), \\g_k &= E(X|Z_k) - E(X), \\g_{k,j} &= E(X|Z_k, Z_j) - E(X|Z_k) - E(X|Z_j) + E(X).\end{aligned}\tag{2.10}$$

# 3. Aplikácia na poistenie dôchodkov

Ako bolo skôr spomenuté, zameriame sa na produkt životného poistenia, konkrétne na doživotný dôchodok odložený o  $k$  rokov. Uvažujeme štyri vstupné veky: 20, 30, 40 a 50. Vstupný vek do výplatnej fázy poistenia sme stanovili na 65 rokov. Pre jednoduchosť vyplácame každému klientovi, ktorý sa dožil veku 65 a viac, na začiatku takéhoto roku jednu korunu. Hornú vekovú hranicu sme stanovili 102 rokov, tj.  $\omega = 102$ . Poistenie zaniká smrťou poisteného bez ďalších výplat. Zaujímať nás bude súčasné hodnoty plnení, ktoré budú pre nás predstavovať straty.

Budeme uvažovať 4 rôzne prípady, kde postupne budeme pridávať jednotlivé rizikové faktory a následne sledovať nami zvolené miery rizika.

Do všetkých prípadov vstupujú 2 rôzne:

- a) pravdepodobnosti úmrtia pre jednotlivé veky v rôznych rokoch,
- b) úrokové miery pre jednotlivé roky.

Potrebné historické dáta pre modelovanie úmrtnosti sme čerpali z verejne dostupnej internetovej databázy „The Human Mortality Database“. Na týchto stránkach sme našli všetky potrebné údaje, ktoré sme potrebovali pre použitie Lee-Carterovho modelu. Zamerali sme sa na českú populáciu. Rozsah údajov je veľmi dobrý. Zahŕňa v sebe údaje od roku 1950 až do roku 2016. Dáta za rok 2017 sa tam momentálne nenachádzajú.

Pre CIR model, ako bolo vyššie spomenuté, sme použili rovnaké parametre, ktoré boli použité v danom článku Karabey a kol. (2014), tj.:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,29, \\ \mu &= 0,0275, \\ \sigma &= 0,1.\end{aligned}$$

Rozoberme si teraz jednotlivé prípady:

1. prípad: Uvažujeme pravdepodobnosti úmrtia pre jednotlivé veky platné pre rok 2016. Budeme predpokladať, že vývoj úmrtnosti sa v ďalších rokoch nijak nezmení, inými slovami napr. pravdepodobnosť úmrtia 45 ročného človeka v roku 2016 je zhodná s pravdepodobnosťou úmrtia 45 ročného človeka v roku 2050. Čo sa týka úrokových mier, budeme predpokladať konštantnú úrokovú mieru na úrovni 4 %. Na určenie tejto úrokovej miery sme chceli použiť aktuálnu TÚM, ale s účinnosťou zákona č. 304/2016 Sb., si od roku 2016 môžu poisťovne samé zvoliť výšku TÚM. Zvolili sme si teda rovnakú úroveň, ako bola použitá v článku Karabey a kol. (2014). Voľba takejto úrokovej miery je v súčasnej dobe veľmi optimistická, ale z dlhodobého hľadiska nie je nereálna.

2. prípad: Rovnako ako v prvom prípade aj tu budeme predpokladať, že sa úmrtnosť populácie v čase nemení. Avšak na rozdiel od prvého prípadu, tu už budeme uvažovať stochastické správanie úrokových mier a vymodelujeme si 1 000 rôznych scenárov.

3. prípad: V tomto prípade si už vymodelujeme 1 000 rôznych scenárov pravdepodobností úmrtia. Na druhú stranu, ale budeme predpokladať konštantnú úrokovú mieru, opäť na úrovni 4 %.

4. prípad: V tomto poslednom prípade skĺbime 1 000 rôznych scenárov pravdepodobností úmrtia z tretieho prípadu s 1 000 rôznymi scenármi úrokových mier z druhého prípadu.

Generátory stochastických scenárov pre oba modely boli naprogramované v programe Wolfram Mathematica 9.0. Takiež tam boli naprogramované výpočty na určenie súčasných hodnôt plnení. Dáta sme následne preniesli do programu R, ktorý nám poskytol popisné štatistiky. Všetky zdrojové kódy a príslušné súbory je možné nájsť na priloženom CD.

### 3.1 Porovnanie výsledkov

Pre každý prípad a pre každý vstupný vek sme na začiatku vždy uvažovali kmeň o veľkosti 1 000 ľudí, ktorý postupne vymieral.

V prvom prípade máme vždy len jedno číslo, ktoré odpovedá priemernej súčasnej hodnote plnenia pre daný kmeň. Pre 2. a 3. prípad už máme 1 000 hodnôt a pre 4. prípad, samozrejme, 1 000 000 hodnôt. Tým pádom si už môžeme vyčísliť priemery, smerodajné odchyľky, hodnoty v riziku a očakávané straty pre 95% a 99,5% hladiny spoľahlivosti.

Priemerné hodnoty s narastajúcim vstupným vekom stúpajú (viď Tabuľka 3.1). Je to logické, pretože sa skracuje doba odkladu, tým pádom sa viac ľudí

		<i>Priemer</i>	<i>Smerodajná odchyľka</i>
20 ročný	<i>1. prípad</i>	1,9025	
	<i>2. prípad</i>	2,7384	1,0228
	<i>3. prípad</i>	2,3838	0,0307
	<i>4. prípad</i>	3,4761	1,3147
30 ročný	<i>1. prípad</i>	2,8274	
	<i>2. prípad</i>	3,7920	1,2514
	<i>3. prípad</i>	3,3932	0,0432
	<i>4. prípad</i>	4,6009	1,5408
40 ročný	<i>1. prípad</i>	4,2260	
	<i>2. prípad</i>	5,2895	1,4918
	<i>3. prípad</i>	4,8631	0,0555
	<i>4. prípad</i>	6,149	1,7592
50 ročný	<i>1. prípad</i>	6,3668	
	<i>2. prípad</i>	7,4577	1,6577
	<i>3. prípad</i>	7,0372	0,0696
	<i>4. prípad</i>	8,2969	1,8818

Tabuľka 3.1: Priemery a smerodajné odchyľky pre jednotlivé prípady.

dožije výplatnej fázy. Tiež si všimnime, že pre všetky vstupné veky, sú priemery z 2. prípadov vždy väčšie ako priemery z 3. prípadov. Taktiež môžeme postrehnúť, že rozdiely medzi nimi sú statické. Priemerný rozdiel medzi 2. a 3. prípadom pre všetky vstupné veky je 0,4001.

Ak sa pozrieme na smerodajné odchyľky, vidíme značnú volatilitu dát z 2. prípadu oproti 3. prípadu. Teda scenáre, v ktorých uvažujeme len riziko úrokových mier majú výraznejšiu volatilitu súčasných hodnôt plnení ako scenáre, kde uvažujeme len riziko dlhovekosti. V 4. prípadoch kombinujeme obe riziká, preto aj výsledné smerodajné odchyľky sú najväčšie.

Teraz sa sústredme na hodnoty v riziku a očakávané straty (viď Tabuľka 3.2). Pre každý vstupný vek sú tieto hodnoty vždy vyššie v 2. prípade ako v 3. prípade. Z toho vyplýva, že aj tieto rizikové miery utvrdzujú názor, že riziko úrokových mier je dominantné oproti riziku dlhovekosti. Ak sa pozrieme napríklad na  $ES_{0,995}$ , tak pre 20 ročného v druhom prípade je táto hodnota na úrovni 5,9088 a v treťom prípade 2,4657, tj. rozdiel medzi nimi je 3,4431. U 50 ročného je tento rozdiel až na úrovni 4,4174. Podobne narastajúci rozdiel je možné nájsť pre každý vstupný vek (viď Tabuľka 3.3)

Nakoniec sa súčasne pozrieme na rozdiely medzi  $VaR_{0,995}$  a  $VaR_{0,95}$  (resp.  $ES_{0,995}$  a  $ES_{0,95}$ ). Bez ohľadu na vstupný vek, rozdiel u týchto hodnôt v druhom

		$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,995}$	$ES_{0,95}$	$ES_{0,995}$
20 ročný	<i>2. prípad</i>	4,6006	5,7396	5,1386	5,9088
	<i>3. prípad</i>	2,4340	2,4610	2,4487	2,4657
	<i>4. prípad</i>	5,8991	7,3444	6,5849	7,5460
30 ročný	<i>2. prípad</i>	5,9893	7,2623	6,6267	7,7688
	<i>3. prípad</i>	3,4630	3,5015	3,4854	3,5129
	<i>4. prípad</i>	7,3211	9,1463	8,1201	9,4788
40 ročný	<i>2. prípad</i>	7,7816	9,0869	8,4104	9,5779
	<i>3. prípad</i>	4,9520	5,0004	4,9764	5,0091
	<i>4. prípad</i>	9,1091	10,7866	9,8636	11,3102
50 ročný	<i>2. prípad</i>	10,1011	11,1640	10,6774	11,6472
	<i>3. prípad</i>	7,1496	7,2157	7,1827	7,2298
	<i>4. prípad</i>	11,3301	12,6831	11,9975	13,1485

Tabuľka 3.2: Hodnoty v riziku a očakávané straty pre jednotlivé prípady.

		$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,995}$	$ES_{0,95}$	$ES_{0,995}$
20 ročný	<i>2. prípad – 3. prípad</i>	2,1666	3,2786	2,6899	3,4431
30 ročný	<i>2. prípad – 3. prípad</i>	2,5263	3,7608	3,1413	4,2559
40 ročný	<i>2. prípad – 3. prípad</i>	2,9515	4,0865	3,4340	4,5688
50 ročný	<i>2. prípad – 3. prípad</i>	2,9515	3,9483	3,4947	4,4174

Tabuľka 3.3: Rozdiely medzi 2. a 3. prípadom u vybraných rizikových mier.

prípade je v priemere 1,1951 u  $VaR$  (resp. 1,0124 u  $ES$ ). V treťom prípade je tento priemerný rozdiel oveľa menší, konk. 0,0450 pre  $VaR$  (resp. 0,0311 pre  $ES$ ), vid Tabuľka 3.4.

Tieto hodnoty nám teda opäť potvrdzujú, že väčšiu volatilitu súčasných hodnôt plnení majú prípady, kedy stochasticky modelujeme úrokové miery v druhom prípade oproti prípadu, kedy stochasticky modelujeme len pravdepodobnosti úmrtia v treťom prípade. Toto tvrdenie nám podsúvalo už samotné skúmanie smerodajných odchýliek. Samozrejme, je to do značnej miery ovplyvnené voľbou parametrov v jednotlivých modeloch.

Na konci tejto podkapitoly sa ešte pozrime na jednotlivé histogramy (vid Obr. 1 a Obr. 2). Na základe ich tvarom by sme mohli usúdiť, že súčasné hodnoty plnení majú normálne rozdelenie. Všimnime si, že pre všetky vstupné veku máme kladnú šikmosť dát pre 2. a 4. prípad, zatiaľ čo pre 3. prípad máme zápornú šikmosť.

## 3.2 Použitie Eulerovej alokačnej metódy

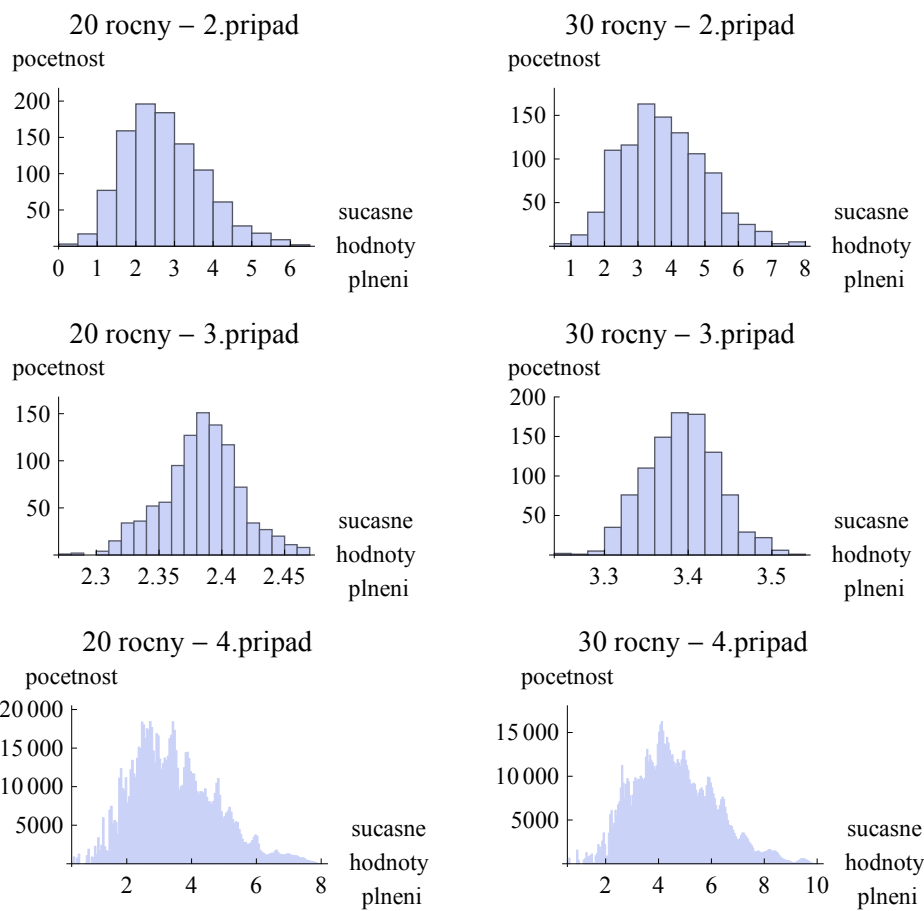
Pri aplikácii tejto metódy si môžeme všimnúť zaujímavú skutočnosť, ktorá nastala a to, že so stúpajúcim vstupným vekom, stúpa aj podiel rizika úrokových mier a klesá podiel rizika dlhovekosti. Nastáva to aj prípade, kedy sme si za rizikovú mieru zvolili smerodajnú odchýlku (vid Tabuľka 3.5), ale aj v prípadoch, kedy sledovanými rizikovými mierami boli hodnota v riziku, resp. očakávaná strata (vid Tabuľka 3.6). Napríklad ak by sme uvažovali hodnotu v riziku, tak u 20 ročného je pomer rizika úrokových mier k riziku dlhovekosti 65,90:34,10. U 50 ročného je tento pomer už 58,91:41,09.

To nás môže upozorňovať na fakt, že so stúpajúcim vstupným vekom klesá doba odkladu. Tým pádom sa aj viac ľudí dožije výplatnej fázy. Ako bolo spomínané, pre každý vstupný vek na začiatku uvažujeme 1 000 ľudí, ktorí postupne

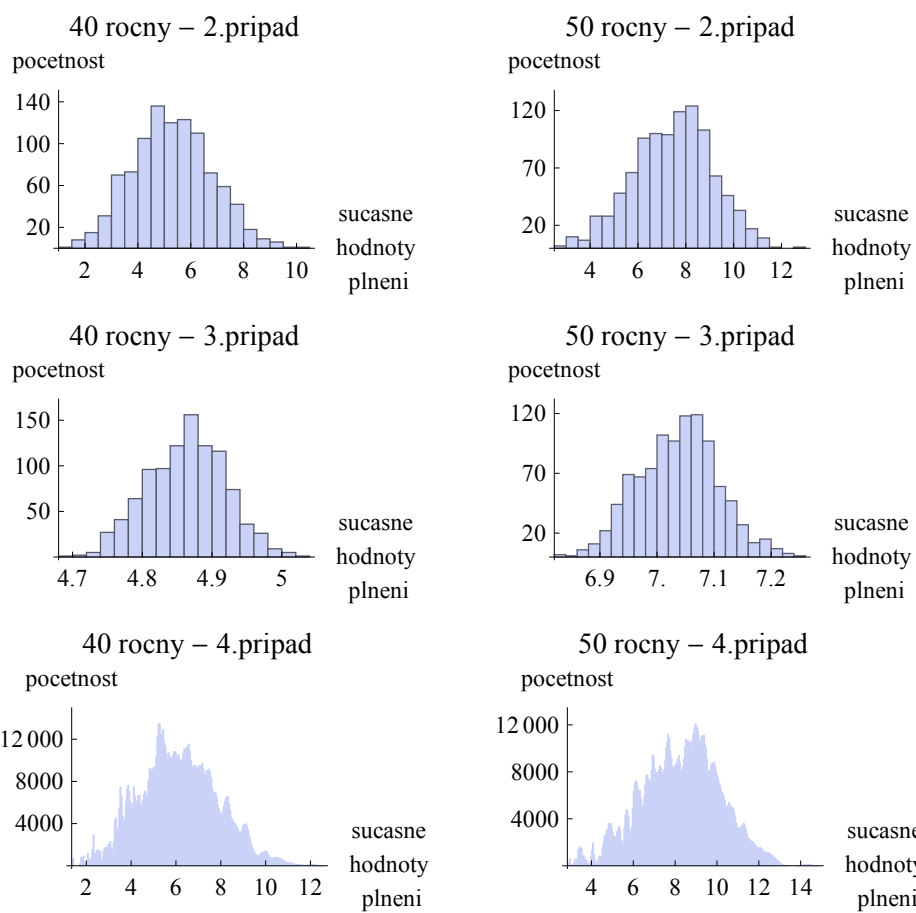
		$VaR_{0,995} - VaR_{0,95}$	$ES_{0,995} - ES_{0,95}$
20 ročný	<i>2. prípad</i>	1,1390	0,7702
	<i>3. prípad</i>	0,0270	0,0170
30 ročný	<i>2. prípad</i>	1,2730	1,1421
	<i>3. prípad</i>	0,0385	0,0275
40 ročný	<i>2. prípad</i>	1,3053	1,1675
	<i>3. prípad</i>	0,0484	0,0327
50 ročný	<i>2. prípad</i>	1,0629	0,9698
	<i>3. prípad</i>	0,0661	0,0471
Priemer	<i>2. prípad</i>	1,1951	1,0124
	<i>3. prípad</i>	0,0450	0,0311

Tabuľka 3.4: Rozdiely medzi  $VaR_{0,995}$  a  $VaR_{0,95}$  (resp.  $ES_{0,995}$  a  $ES_{0,95}$ ).





Obr. 3.1: Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 20 a 30.



Obr. 3.2: Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 40 a 50.

vymierajú. Na začiatku výplatnej fázy ale máme už menší počet ľudí. Tento počet je závislý od celého vývoja úmrtnosti v čase odkladu. Inými slovami, počet žijúcich ľudí je vždy rovnaký alebo menší ako počet žijúcich v predošlých rokoch. Oproti tomu úrokové miery môžu ľubovoľne v čase stúpať a klesať. Navyše tým, že sme na modelovanie úrokových mier použili CIR model má za následok, že sa úroky vracajú k priemernej hodnote  $\mu$ .

### 3.3 Použitie Hoeffdingovej dekompozície

V tomto prípade si môžeme všimnúť, že podiel rizika úrokových mier a podiel rizika dlhovekosti rovnomerne narastá so zvyšujúcim vstupným vekom približne o 1 % (viď Tabuľka 3.7). Je dobré si všimnúť, že ich vzájomný rozdiel je statický. Je to približne 23 % pre všetky vstupné veku. S narastajúcim vstupným vekom zase klesá vplyv interakcie rizík. Na základe týchto výsledkov usudzujeme, že tento vplyv pre vyššie vstupné veku klesá a je rovnomerne rozdelený medzi riziko úrokových mier a riziko dlhovekosti.

		$\sigma$	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	1,0204	99,89
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0011	0,11
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	1,2483	99,86
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0017	0,14
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	1,4881	99,84
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0023	0,16
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	1,6536	99,81
	<i>riziko dlhovekosti</i>	0,0032	0,19

Tabuľka 3.5: Použitie Eulerovej alokačnej metódy - smerodajná odchylka.

		$VaR_{0,95}$	%	$ES_{0,95}$	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	4,6028	65,90	5,1315	68,25
	<i>riziko dlhovekosti</i>	2,3821	34,10	2,3873	31,75
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	5,9911	63,80	6,6180	66,07
	<i>riziko dlhovekosti</i>	3,3988	36,20	3,3986	33,93
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	7,7869	61,54	8,3948	63,27
	<i>riziko dlhovekosti</i>	4,8661	38,46	4,8733	36,73
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	10,1031	58,91	10,6645	60,21
	<i>riziko dlhovekosti</i>	7,0468	41,09	7,0489	39,79

Tabuľka 3.6: Použitie Eulerovej alokačnej metódy - VaR a ES.

Ešte si všimnime, že podiel interakcie rizík nie je vôbec zanedbateľný. U 20 ročného dokonca tvorí cez 16 % z celkového rizika. Tiež poznamenajme, že riziko úrokových mier tvorí nadpolovičnú väčšinu z celkového rizika a to pre všetky vstupné veku. Riziko dlhovekosti v priemere tvorí tretinu z celkového rizika, tak tiež pre všetky vstupné veku.

			$g$	%
20 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	$g_1$	0,84	53,12
	<i>riziko dlhovekosti</i>	$g_2$	0,48	30,58
	<i>interakcia rizík</i>	$g_{1,2}$	0,26	16,30
30 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	$g_1$	0,96	54,39
	<i>riziko dlhovekosti</i>	$g_2$	0,57	31,90
	<i>interakcia rizík</i>	$g_{1,2}$	0,24	13,71
40 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	$g_1$	1,06	55,29
	<i>riziko dlhovekosti</i>	$g_2$	0,64	33,12
	<i>interakcia rizík</i>	$g_{1,2}$	0,22	11,59
50 ročný	<i>riziko úrok. mier</i>	$g_1$	1,09	56,52
	<i>riziko dlhovekosti</i>	$g_2$	0,67	34,73
	<i>interakcia rizík</i>	$g_{1,2}$	0,17	8,75

Tabuľka 3.7: Použitie Hoeffdingovej dekompozície.

# Záver

V práci sme sa zamerali na dve základne riziká, s ktorými musí každá poisťovňa v rámci rizikového manažmentu pracovať. Boli to:

- riziko úrokových mier,
- riziko dlhovekosti.

V prvých dvoch kapitolách sme uviedli potrebnú teóriu, ktorú sme následne v tretej kapitole použili na produkt doživotného dôchodku odloženého o  $k$  rokov. Analýzu sme vykonávali s použitím údajov pre Českú republiku s využitím Eulerovej alokačnej metódy a Hoeffdingovej dekompozície.

Výsledky nám potvrdili, že obe riziká výraznou mierou ovplyvňujú takýto produkt. Ak si však porovnáme zastúpenie jednotlivých rizík a ich percentuálne vyjadrenia, tak si môžeme všimnúť dve veci:

1. jednoznačne nám z dát vyplýva, že riziko úrokových mier je dominantnejšie ako riziko dlhovekosti,

2. so stúpajúcim vstupným vekom stúpa aj podiel rizika dlhovekosti.

Zistili sme, že čím menšia je dĺžka odkladu  $k$ , tým má riziko dlhovekosti väčší vplyv. Je to trochu paradox, pretože by sme skôr predpokladali, že pre dlhšie časové úseky bude podiel tohto rizika na celkovej strate narastať.

Taktiež sme sledovali vplyv, ktorý vzniká vzájomnou interakciou medzi týmito dvomi rizikami. Tu sa ukázalo, že pre najnižší vstupný vek (20) sa tento vplyv pohybuje na úrovni okolo 16 %. Pre najvyšší uvažovaný vstupný vek (50) bol tento vplyv na úrovni približne 8 %. Môžeme teda zhodnotiť, na základe výsledkov, že so zvyšujúcim sa vstupným vekom, tento vplyv klesá.

Ďalším novým poznatkom bolo, že ako sa znižoval vplyv interakcie, tak sa rovnomerne zvyšoval vplyv rizika úrokových mier a rizika dlhovekosti.

V tejto práci sme sa zamerali na rozklad celkovej straty cez rizikové faktory. V tom prípade dáva určite väčší zmysel aplikovať Hoeffdingovu dekompozíciu, pretože pri rozklade celkovej straty uvažuje aj riziko vznikajúce interakciou jednotlivých rizikových faktorov. Na druhú stranu počet rizík, s ktorými sa poisťovne potýkajú je ale omnoho viac. V takom prípade je nutné brať v úvahu výpočetnú zložitost tejto metódy pretože pri  $k$  rizikových faktorov je nutné vyčísliť  $2^k$  výrazov.

# Zoznam použitej literatúry

ANTOLIN, P. (2007). Longevity Risk and Private Pensions. *OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions*, OECD Publishing. Dostupné tiež v online verzii: doi 10.1787/261260613084

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999). Cohorent measure of risk. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203-228.

BRIGO, D., MERCURIO, F. (2001). *Interest rate models theory and practice*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-41772-9.

CIPRA, T. (2013). *Finanční ekonometrie*. 2. upravené vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-93-4.

CIPRA, T. (2006). *Pojistná matematika - teorie a praxe*. 2. aktualizované vydání. Ekopress, Praha. ISBN 80-86929-11-6.

CIPRA, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. 1. vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-87865-24-8.

HAUGH, M. (2010). Risk Measures, Risk Aggregation and Capital Allocation. *IEOR E4602: Quantitative Risk Management*, Columbia University. Dostupné z: <http://www.columbia.edu/~mh2078/RiskMeasures.pdf>

KARABEY, U., KLEINOW, T., CAIRNS, A. J. G. (2014). Factor risk quantification in annuity models. *Insurance: Mathematics and Economics*, **58**, 34-45.

KLEMA, V. C., LAUB, A. J. (1980). The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **25**(2), 164-176.

LEE, R. D., CARTER, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, **87**(419), 659-671.

ROSEN, D., SAUNDERS, D. (2010). Risk factor contributions in portfolio credit risk models. *Journal of Banking & Finance*, **34**, 336-349.

TASCHE, D. (1999). *Risk contributions and performance measurement*. Working paper. Technische Universität München. Dostupné z: <https://pdfs.semanticscholar.org/2659/60513755b26ada0b4fb688460e8334a409dd.pdf>

TASCHE, D. (2008). *Capital Allocation to Business Units and Sub-Portfolios: the Euler Principle* [online]. [Cit. 2008-06-22]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/0708.2542.pdf>

WEISSTEIN, E.W. (2002). *Newton's Method*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>

Zákon č. 89/2012 Sb., Občanský zákoník.

Zákon č. 304/2016 Sb., kterým se mění zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví, ve znění pozdějších předpisů, a další související zákony.

# Zoznam obrázkov

- 3.1 Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 20 a 30. . . 28
- 3.2 Histogramy súčasných hodnôt plnení pre vstupné veky 40 a 50. . . 29



# Zoznam tabuliek

3.1	Priemery a smerodajné odchytky pre jednotlivé prípady. . . . .	25
3.2	Hodnoty v riziku a očakávané straty pre jednotlivé prípady. . . . .	26
3.3	Rozdiely medzi 2. a 3. prípadom u vybraných rizikových mier. . . . .	26
3.4	Rozdiely medzi $VaR_{0,995}$ a $VaR_{0,95}$ (resp. $ES_{0,995}$ a $ES_{0,95}$ ). . . . .	27
3.5	Použitie Eulerovej alokačnej metódy - smerodajná odchytky. . . . .	30
3.6	Použitie Eulerovej alokačnej metódy - VaR a ES. . . . .	30
3.7	Použitie Hoeffdingovej dekompozície. . . . .	31