

DP 2872

Univerzita Karlova v Praze

Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užití geofyziky



**Využití pravděpodobnostních
metod v numerické analýze
geotechnických problémů**

Diplomová práce

Radek Suchomel

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. David Mašín, PhD.**

Praha, duben 2007

Tuto Diplomovou práci jsem vypracoval na Ústavu hydrogeologie, inženýrské geologie a užití geofyziky pod vedením Mgr. Davida Mašína, PhD. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně, použil pouze své výpočty a převzaté prameny jsem řádně citoval. Souhlasím s jejím zapůjčením ke studijním účelům.

Ze všeho nejdříve chci poděkovat Mgr. Davidovi Mašínovi, PhD. za tvorbu veškerého potřebného software použitého v práci a za odborné vedení v průběhu celé přípravy diplomové práce. A také za zprostředkování možnosti účastnit se kurzu na *International Centre for Mechanical Sciences* v Udine věnovanému tomuto tématu, který byl velkým přínosem pro pochopení celé problematiky. Dále za jeho konstruktivní rady při závěrečném zpracování diplomové práce.

Děkuji i všem ostatním zainteresovaným osobám, rodičům a všem přátelům, kteří také umožnili vznik této práce.

V Českých Budějovicích
21.5. 2007

Radek Suchomel

Abstrakt

Pro analýzu stability svahu jsou v současné době v praxi používány dva typy metod. V prvním případě se jedná o analytické metody založené na metodě mezní rovnováhy (např. metoda Pettersonova, Bishopova, Janbuova, Spencerova, Sarmova atd.). Druhým typem jsou numerické metody založené na metodě konečných prvků, ze kterých je téměř výhradně používána tzv. metoda ϕ -c redukce.

Jedna z nevýhod těchto metod tkví v tom, že studovaný svah je nutno rozdělit na kvazi-homogenní celky, jež jsou charakterisovány konstantní hodnotou pevnostních charakteristik. Podrobné studie, například El-Ramly et al., (2006), ukazují, že pevnostní charakteristiky získané testováním většího počtu vzorků z jednoho "kvazi-homogenního" celku vykazují rozptyl, jež lze výstižně popsat statistickými metodami.

Tento poznatek je využíván pro analýzu geotechnických problémů pomocí tzv. *random finite element method* (např. Griffiths a Fenton, 2004). Pro tento účel byl na fakultě vyvinut program *random field* (Mašín 2006), který je schopný generovat náhodná pole z parametrů rozdělení pevnostních charakteristik. Náhodných polí se poté využívá k analýze řešeného problému metodou konečných prvků. Vstupními hodnotami pro analýzu metodou konečných prvků jsou tedy charakteristiky statistického rozdělení pevnostních vlastností materiálu. Dalším parametrem je závislost korelace jednotlivých hodnot na jejich vzdálenosti.

Předmětem této diplomové práce bylo testování programu *random field* na parametrických studiích při řešení stability svahu. V závěru práce jsem provedl výpočet stability sesuvu v Lodalenu z roku 1954 metodou *random finite element* s využitím tohoto programu. Parametry výpočtu a geometrie svahu vycházejí z článku Sevaldson (1956).

Abstract

Two types of conventional methods are used for slope stability analysis in practise. The first type are analytical methods based on limit equilibrium (e.g. methods by Petterson, Bishop, Spencer etc.) The second type are a numerical methods based on finite elements analysis. From this sort the most frequently used is the ϕ -c reduction method.

One of disadvantages of these methods is that analyzed geotechnical problem must be discretised into quasi-homogeneous parts that are characterized by constant value of mechanical properties. Detailed studies, for example El-Ramly et al. (2006), show that mechanical characteristics from one quasi-homogeneous part often have natural variability. This can be described with some type of statistical distribution.

This observation is taken into account in random finite element method (for example Griffiths and Fenton (2004)). To study this method, program *random field* (Mašín 2006) was created. The program is able to generate random fields from parameters of statistical distribution of mechanical properties and map them onto finite element mesh. Next input parameter for creating the fields is correlation length that characterises dependency of random variables on their distance in space. These random fields are used as input mechanical characteristic for the next step which is the finite element analysis.

Subject of this diploma thesis was testing of function of the *random field* program in parametric study on the idealized slope stability problem. Subsequently, probability of failure of the real slide in Lodalen (Norway) from the year 1954 was computed. Mechanical parameters of clay, ground water condition and slope geometry were assumed from the original paper by Sevaldson (1956).

Obsah

1	Náhodná pole	6
1.1	Vlastnosti náhodných proměnných	6
1.1.1	Zákon rozdělení spojité náhodné veličiny	6
1.1.2	Charakteristiky spojité náhodné veličiny	7
1.1.3	Některá důležitá rozdělení náhodných veličin	9
1.2	Vícerozměrná náhodná veličina	11
1.3	Rozdělení a vlastnosti náhodných polí	13
1.3.1	Rozdělení náhodných polí	13
1.3.2	Základní vlastnosti náhodných polí	15
1.3.3	Aplikace náhodných polí pro řešení geotechnických úloh MKP.	20
1.4	Obecná charakteristika metody Monte Carlo	21
2	Využití pravděpodobnosti	24
2.1	Pravděpodobnostní metody	25
2.1.1	Metoda <i>single random variable</i>	25
2.1.2	Metoda <i>the first order second moment</i>	26
2.1.3	Metoda <i>random finite-element</i>	27
2.2	Aplikace teorie pravděpodobnosti	28
2.2.1	Výpočet zemního tlaku metodou <i>the first order second moment</i>	28
2.2.2	Sedání plošného základu	31
2.2.3	Stabilita svahu	34
3	Řešení stability svahu	36

3.1	Program <i>random field</i>	36
3.1.1	Činnost programu.	37
3.1.2	Spolupráce programů <i>random_field</i> a <i>Tochnog</i>	40
3.2	Zadání parametrů	44
3.3	Studie <i>single random variable</i>	48
3.4	Metoda <i>random finite-element</i>	49
4	Sesuv v Lodalenu	58
4.1	Celková situace a geologie sesuvu.	58
4.2	Vyhodnocení vstupních parametrů	60
4.3	Analýza metodou ϕ - c redukce	61
4.4	Pravděpodobnostní analýza	63
4.4.1	Analýza $\theta_c, \theta_\phi = \infty$	64
4.4.2	<i>Random finite elements</i> analýza	64
5	Shrnutí	68

Seznam tabulek

1.1	příklad korelační tabulky vícerozměrné náhodné veličiny	12
2.1	Parametry vstupních veličin pro výpočet zemního tlaku.	30
2.2	Výsledky výpočtu metodou <i>The first order second moment</i>	30
2.3	Vstupní parametry Mohr-Coulombova modelu.	33
3.1	Faktorem bezpečnosti versus. c_u podle Griffiths a Fenton (2004)	46
3.2	Srovnání použitých parametrů v mé práci s článkem Griffiths a Fenton (2004).	56
4.1	Mechanické charakteristiky sesuvu. Hodnoty jsou převzaté z Sevaldson (1956).	59
4.2	60

Seznam obrázků

1.1	Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $P(x)$ a distribuční funkce $D(x)$ normálního rozložení.	8
1.2	Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $P(x)$ a distribuční funkce $D(x)$ lognormálního rozložení.	11
1.3	Schématické zobrazení různých typů náhodných polí	14
1.4	Grafické znázornění korelačního koeficientu Fenton (2006).	16
1.5	Rozdíl mezi Gaussovo a Markovo funkcí pro eliptickou korelaci náhodného pole (Fenton 2006).	17
1.6	Způsob skládání sinusoid u stacionárního náhodného procesu (Fenton 2006).	18
1.7	Snížení variance lokálním průměrováním (Fenton 2006).	20
1.8	Lokální průměrování přes elementy sítě pro MKP	21
2.1	Lineární závislost mezi FS a c_u vypočítaná metodou limitní rovnováhy (Griffiths 2006).	26
2.2	Geometrie příkladu pro výpočet zemního tlaku na konstrukci opěrné stěny (Griffiths 2006).	29
2.3	Plocha smykového porušení pod plošným základem (Fenton a Griffiths 2003)	31
2.4	Ohraničené rozdělení úhlu vnitřního tření ϕ normalizované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (Griffiths a Fenton 2004).	32
2.5	Závislost pravděpodobnosti pf na korelační délce Θ_C pro různé koeficienty variace V_C . Použito z Griffiths a Fenton (2004).	34
2.6	Závislost pravděpodobnosti pf koeficientu variance V_C pro různé hodnoty Θ_C . Použito z Griffiths a Fenton (2004)	35

3.1	Průběh Markovovy funkce.	39
3.2	Znázornění geometrie svahu použitého v analýze.	45
3.3	Stanovení hodnoty \tilde{c}_u pro síť $H = 5$	46
3.4	Efekt různých hodnot H sítí na přesnost výpočtu.	47
3.5	Znázornění sítě použité ve výpočtech.	47
3.6	Teoreticky vypočtená p_f při různém V_{c_u}	48
3.7	Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na změně korelační délky $\theta_{\ln c_u}$	50
3.8	Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na změně koeficientu variace V_{c_u}	51
3.9	Ukázka dvou spadlých svahů při různé korelační délce	52
3.10	Svahy z obrázku 3.9, s zobrazením míst kde došlo k dosažení podmínky plasticity κ	52
3.11	Monte Carlo analýzy provedené programem <i>random field</i> podle hodnot z článku Griffiths a Fenton (2004).	53
3.12	Vliv citlivosti p_f spadnutí na vstupní parametry blížíící se $V_{c_u} = 1.09499$. 54	54
3.13	Celkový přehled výsledků všech simulací programem <i>random-field</i>	55
3.14	Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na koeficientu variance V_{c_u} při $\mu_{c_u} = 25$	56
3.15	Ukázka tří realizací Monte Carlo metody.	57
4.1	Geometrie svahu se znázorněním jednotlivých úprav (Sevaldson 1956). 59	59
4.2	Histogramy mechanických parametrů jílu s proloženým normálním rozdělením.	60
4.3	Zobrazení naměřených dat jílu ze sesuvu v Lodalenu	61
4.4	62
4.5	Výsledek $\phi - c$ redukce sesuvu v Lodalenu.	63
4.6	Srovnání výsledků pravděpodobnostních analýz pro ideálně korelovaný svah, svah z korelační délkou $\theta_c, \theta_\phi = 10$ m se sklony 2:1 a 9:5.	65
4.7	Ukázka ze dvou simulací sesuvu v Lodalenu se zobrazením náhodných polí pro ϕ a c následované normou plastického porušení k	67

Kapitola 1

Náhodná pole

V základní teorii pravděpodobnosti se realizace experimentu, měření atp. označuje jako náhodný pokus. *Náhodným pokusem* se rozumí takový pokus, jehož výsledky na rozdíl od deterministických pokusů nejsou jednoznačně určené jejich podmínkami a které jsou za těchto podmínek nekonečně opakovatelné. Budu je označovat ..., X, Y, Z popřípadě X_1, X_2, \dots, X_n . Výsledky těchto pokusů jsou náhodné jevy. *Náhodný jev* je takové tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o němž lze po realizaci pokusu jednoznačně rozhodnout, zda je nebo není pravdivé (Rektorys et al. 1995). Výsledek *náhodného jevu*, který lze vyjádřit reálným číslem, je hodnotou veličiny, která se nazývá *náhodná veličina* a kterou budu označovat ..., x, y, z popřípadě x_1, x_2, \dots, x_n . Realizaci *náhodného pole* lze definovat jako např. soubor výsledků všech náhodných jevů v jedné laboratoři. Poloha každé pokusné aparatury je dána parametrem t . *Náhodné pole* lze v určitém významu nazývat jako náhodný nebo pravděpodobnostní proces. Termín náhodné pole znamená že polohy výsledků náhodných jevů t jsou prvky prostoru R^n . Parametr t je pak n -rozměrným vektorem $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ je jehož složky t_1, t_2, \dots, t_n udávají polohu náhodné veličiny v prostoru R^n . Názvu proces se používá ve speciálním případě, kdy pokusem obdržíme jednu náhodnou proměnnou s jedinou lokalizací t , nebo současně dvě nebo tři hodnoty s různou lokalizací (Vanmarcke 1984).

1.1 Vlastnosti náhodných proměnných

1.1.1 Zákon rozdělení spojité náhodné veličiny

V této části se budu věnovat některým ze základních vlastností spojitých veličin, které budou důležité pro další části práce. Charakteristickým rysem náhodné veličiny je, že při opakování náhodného pokusu dochází vlivem náhodných činitelů k měnlivo-

sti hodnot. Nemůžeme tedy jednoznačně říct, jaké hodnoty veličina nabude. Náhodné veličiny dělíme na diskrétní a spojité. Diskrétní náhodné veličiny nabývají spočetného počtu hodnot bez ohledu na to, je-li tento počet konečný nebo nekonečný např. počet pilot odvrtných za den. Vlastnosti diskrétních-nespojitéch náhodných veličin nebudou předmětem této kapitoly v důsledku jejich malého využití v následujícím textu práce. Spojité náhodné veličiny (dále jen náhodné veličiny) nabývají všech hodnot z konečného nebo nekonečného intervalu např. měření soudržnosti nebo času konsolidace.

Spojitá náhodná veličina je z pravděpodobnostního hlediska dokonale popsána, jestliže známe její intervaly hodnot a pravděpodobnosti těchto intervalů. K popisu rozdělení náhodné spojité veličiny můžeme použít zavedení hustoty pravděpodobnosti jako nezáporné reálné funkce $P(x)$ (*probability density function*) a distribuční funkce $D(x)$ náhodné veličiny (*cummulative distribution function*).

$$\begin{aligned} D(x) &= [P(x)]_{-\infty}^x \\ &= P(x) - P(-\infty) \\ &= P(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

takže

$$D(x) = P[X \leq x] \equiv \int_{-\infty}^x P(\xi) d\xi \tag{1.2}$$

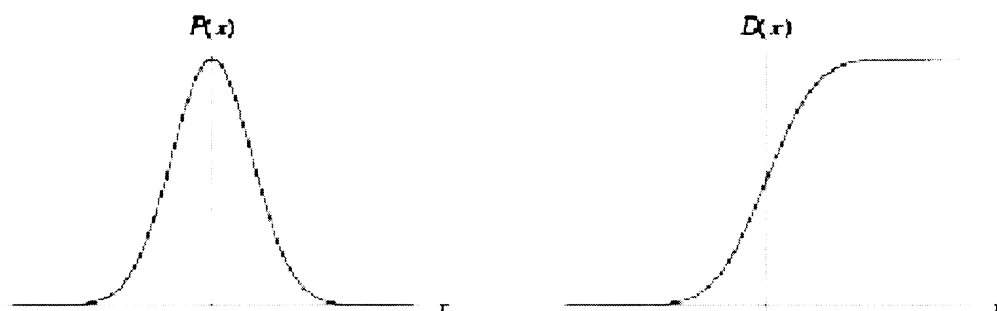
Funkce $P(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že se hodnota vyskytuje v daném intervalu a musí být nezáporná, aby platilo že $0 \leq D(x) \leq 1$. Další z důležitých vlastností funkce jsou $\lim_{x \rightarrow -\infty} D(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} D(x) = 1$ a $P[a \leq X \leq b] = D(a) - D(b)$.

$$P[-\infty \leq X \leq \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx \equiv 1 \tag{1.3}$$

Celkový součet všech pravděpodobností je tedy dán vztahem (1.3) a velikost pravděpodobnosti, že se náhodná veličina vyskytne v určitém intervalu, je tedy dána velikostí příslušné plochy pod touto funkcí. Příklady distribuční funkce a funkce a hustoty pravděpodobnosti jsou na obrázku 1.1.

1.1.2 Charakteristiky spojité náhodné veličiny

Kolísání náhodné veličiny je tedy jednoznačně popsáno jejím zákonem rozdělení, jak je uvedeno v sekci 1.1.1. To je sice úplná informace o náhodné veličině, ale značně



Obrázek 1.1: Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $P(x)$ a distribuční funkce $D(x)$ normálního rozložení.

komplikovaná. Pro další aplikace ve statistických a pravděpodobnostních výpočtech je potřeba zavést vhodné jednodušší číselné údaje, které budou dostatečně výstižně popisovat vlastnosti tohoto rozdělení. Tyto charakteristiky můžeme rozdělovat podle vlastnosti, kterou u rozdělení náhodné veličiny popisují, na charakteristiky:

- polohy; vystihují polohu funkce $D(x)$ na ose x
- variability; měří rozptýlenost hodnot náhodné veličiny
- šikmosti a špičatosti

Dále je můžeme rozdělit podle způsobu jejich výpočtu na:

- momentové, které jsou funkcemi všech hodnot, jichž může náhodná veličina nabýt
- kvantilové, jež se týkají vždy konkrétní hodnoty náhodné veličiny a musí být splněna podmínka $D(x_p) = P$.

V této části uvedu jen nejčastěji používané druhy charakteristik a omezím se jen na ty, které jsou použity dále v textu práce. Mezi ně patří střední nebo-li očekávaná hodnota, rozptyl náhodné veličiny a medián.

Střední hodnota je nejběžněji používanou charakteristikou. Patří mezi obecné momentové charakteristiky, které jsou pro spojitou veličinu X obecně definovány jako

$$\mu'_i(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^i P(x) dx. \quad (1.4)$$

Střední hodnota je prvním momentem $\mu'_1(X)$ a obvykle se značí μ , \bar{x} , $\langle x \rangle$, nebo $E(x)$ (*expected value*). Je statistickým protějškem aritmetického průměru. Platí pro

ní věty o střední hodnotě, které jsou analogické jako u aritmetického průměru. V práci je nebudu zmiňovat, lze je však nalézt například v Rektorys et al. (1995). Další důležitou charakteristikou je druhý centrální moment $\mu_2(X)$, nazývaný *rozptyl* a označovaný $\sigma^2(X)$. Definice rozptylu (1.5) je tedy odvozená od obecné definice centrálních momentů pro spojitou náhodnou veličinu. Opět pro něj platí věty o vlastnostech rozptylu, které zde nebudu uvádět. Rozptyl náhodné veličiny může nabývat všech nezáporných hodnot a je roven 0 pokud $P(X = k) = 1$.

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 P(x) dx \quad (1.5)$$

Vzhledem k tomu, že rozptyl vyjadřuje variabilitu náhodné veličiny v druhé mocnině jednotek, ve kterých je udána, má častější využití druhá odmocnina rozptylu tzv. směrodatná odchylka (1.6), která se označuje $\sigma(X)$. Směrodatná odchylka ukazuje variabilitu v původních jednotkách dané veličiny.

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} \quad (1.6)$$

Normované charakteristiky jsou definovány pro normovanou náhodnou veličinu (bezrozměrná čísla). Nejdůležitější z těchto charakteristik je třetí normovaný moment - koeficient šikmosti, jehož hodnota informuje o sešikmení rozdělení, a čtvrtý normovaný moment-koeficient špičatosti. Dále v práci budu používat *medián*. Jde o charakteristiku polohy založenou na kvantilech x_p . Má-li náhodná veličina X distribuční funkci $D(X)$, pak p kvantilem je taková hodnota náhodné veličiny, která splňuje podmínku

$$D(x_p) = p \quad 0 < p < 1 \quad (1.7)$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z $x \leq x_p$ je tedy p . Median \tilde{x} , je 50% kvantil. Je mu někdy dávána přednost před střední hodnotou, protože je přirozeně interpretovatelný (Hebák a Kahounová 1988).

1.1.3 Některá důležitá rozdělení náhodných veličin

V této části se zmíním jen o těch rozděleních spojitých náhodných veličin, která budu využívat v následujících kapitolách práce. Z hlediska aplikace teorie o náhodných polích v geologii jsou nejvýznamnější rozdělení normální a lognormální, ale i další rozložení mají svá využití, jako např. exponenciální. Toto rozdělení je vhodným modelem „doby čekání“ nastoupení nějakého jevu (Hebák a Kahounová 1988), lze jím například popsat dobu životnosti minerálního těsnění.

V praxi se často setkáváme s normálním rozdělením u řady veličin popisujících např. sledování tělesné výšky, nebo sledování velikosti chyby měření. Nicméně pro popis mechanických vlastností geomateriálů (jako jsou úhel vnitřního tření nebo soudržnost) není příliš výhodné. Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce normálního rozdělení jsou definovány vztahy (1.8). Průběh těchto funkcí je vidět v grafech na obrázku 1.1.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad D(x) = \int_{-\infty}^x P(x') dx' \quad (1.8)$$

Parametry μ a σ jsou střední hodnota (1.4) a směrodatná odchylka (1.6), které jsem již definoval v části 1.1.2. Vzhledem k symetrii normálního rozdělení je parametr μ současně modem a mediánem. Inflexní body funkce $P(x)$ jsou na ose x vzdáleny od střední hodnoty o $\pm\sigma$. Změna velikosti σ mění polohu inflexních bodů funkce $P(x)$ a má za následek změnu variability. Čím je σ menší, tím je křivka hustoty strmější a pravděpodobnost výskytu hodnot v daném intervalu na ose x nižší. Známe-li tedy parametry μ a σ , je normální rozdělení plně určeno a můžeme symbolicky zapsat, že náhodná veličina X má rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

V dalších částech této práce budu často používat rozložení lognormálního. Toto rozložení je asymetrické a sešikmené doprava. Z toho vyplývá, že střední hodnota, medián a mod jsou rozdílné hodnoty, viz. (1.12) a (1.13). Tvar funkce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce je na obrázku 1.2. Náhodná veličina $X = e^Y$ je lognormálně rozdělená, pokud přirozený logaritmus této veličiny $Y = \ln X$ má normální rozdělení. Lognormální rozdělení nabývá jen kladných hodnot. Z toho důvodu je hojně používané pro popis materiálových charakteristik a lze s ním dobře popsat většinu mechanických vlastností geotechnických materiálů. Vzorce (1.9) definují distribuční funkci $D(x)$ a funkci hustoty pravděpodobnosti $P(x)$.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2)} \quad D(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (1.9)$$

Pro lognormální rozdělení tedy platí, že pokud Y má normální rozdělení, tak $X = e^Y$ má rozdělení lognormální. Střední hodnotu a směrodatnou odchylku tohoto podléhajícího normálního rozdělení budu označovat $\mu_{\ln X}$ a $\sigma_{\ln X}$. Pro transformaci mezi normálním a lognormálním rozdělením lze formulovat následující vztahy.

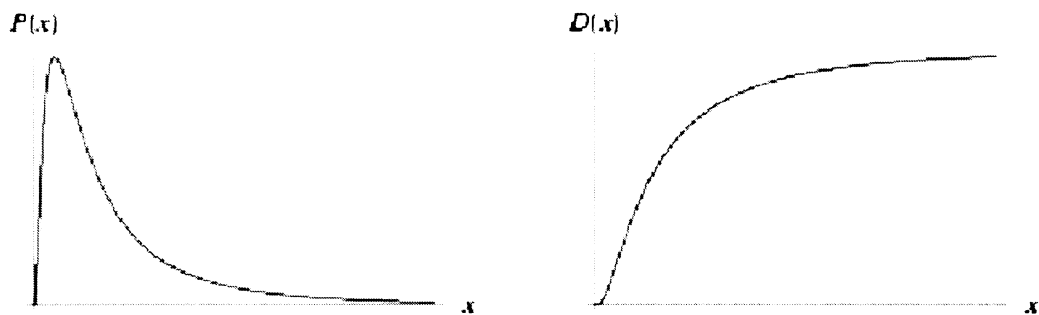
$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln \{1 + V_X^2\}} \quad (1.10)$$

$$\mu_{\ln X} = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \sigma_{\ln X}^2 \quad (1.11)$$

Střední hodnota a směrodatná odchylka se často vyjadřuje v bezrozměrné formě, pomocí koeficientu variace $V_X = \mu_X/\sigma_X$. Median a mód tohoto rozdělení jsou dané takto:

$$\text{median}_X = \exp(\mu_{\ln X}) \quad (1.12)$$

$$\text{mod}_X = \exp(\mu_{\ln X} - \sigma_{\ln X}^2) \quad (1.13)$$



Obrázek 1.2: Průběh funkce hustoty pravděpodobnosti $P(x)$ a distribuční funkce $D(x)$ lognormálního rozložení.

1.2 Vícerozměrná náhodná veličina

Vlastnosti vícerozměrných náhodných veličin nejprve ukáží na dvourozměrné náhodné veličině (X, Y) . Můžeme je rozdělit do tří skupin na marginální charakteristiky, podmíněné charakteristiky a charakteristiky popisující vztah mezi jednotlivými veličinami.

Marginální charakteristiky podávají informaci o rozdělení jednotlivých veličin (X, Y) . Jsou shodné s charakteristikami pro jednorozměrnou veličinu a platí pro ně stejné vztahy jako v sekci 1.1.2.

Podmíněné charakteristiky popisují tvar podmíněného rozdělení veličiny X , nebo Y . Jsou jimi např. podmíněný rozptyl, nebo podmíněná střední hodnota. Dále je zde nechci rozvádět, jelikož mají malý význam pro mou další práci.

Mezi charakteristiky poskytující informaci o vztahu mezi veličinami (X, Y) patří hlavně *kovariance* $\text{cov}(X, Y)$, (1.14) a *koeficient korelace* $\rho(X, Y)$, (1.15). Kovariance je definována jako střední hodnota součinu odchylek veličin X a Y od jejich středních hodnot.

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (1.14)$$

Kovariance může nabývat hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Kovariance se přímo nepoužívá k popisu závislosti mezi dvěma veličinami a slouží spíše jako pomocný nástroj. Nejpoužívanější hodnotou k vyjádření lineární závislosti dvou veličin je koeficient korelace (1.15). Ten lze vyjádřit, jako podíl kovariance a součinu směrodatných odchylek obou náhodných veličin.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (1.15)$$

Koeficient korelace nabývá hodnot z intervalu $(-1, 1)$. Pokud je jeho hodnota rovna ± 1 , pak jde o přímou či nepřímou funkční lineární závislost. Je-li hodnota $\rho(X, Y) = 0$ pak můžeme říci o náhodných veličinách, že jsou lineárně nezávislé, nikoliv však obecně nezávislé.

N -rozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ můžeme popsat vektorem středních hodnot $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$, ve kterém jsou μ_i střední hodnoty veličin X_i a kovariační maticí \mathbf{C} . N -rozměrnou náhodnou veličinu můžeme uspořádat do korelační tabulky (1.1). Toho lze využít například pro zaznamenání jednotlivých elementů sítě a korelaci mezi nimi. V této tabulce jsou v prvním řádku a v prvním slupci čísla elementů sítě pro řešení nějakého problému MKP. Následují vždy jednotlivé koeficienty korelace mezi náhodnou veličinou (např. úhlem vnitřního tření) v i -tém slupci a j -tém řádku, pokud $i = j$ pak je koeficient korelace logicky roven 1.

	el1	el2	el3	el4	...
el1	1.0	0.4	0.2	0.6	...
el2	0.4	1.0	0.5	0.7	...
el3	0.2	0.5	1.0	-0.1	...
el4	0.6	0.7	-0.1	1.0	...
...

Tabulka 1.1: příklad korelační tabulky vícerozměrné náhodné veličiny

Matematickým zápisem korelační tabulky 1.1 je korelační matice \mathbf{K} , (1.17), která má na hlavní diagonále jedničky. Kovariační matice \mathbf{C} je obdobná, ale jejími prvky jsou kovariance jednotlivých dvojic náhodných veličin. Je to symetrická pozitivně definitní matice (1.16), která má na hlavní diagonále místo jedniček rozptyly jednotlivých náhodných veličin. A její vlastní čísla jsou různá od nuly.

$$\begin{aligned}
|Cov[X_i, X_j]| &\leq \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} && \text{zaručuje, že } \varrho_{ij} \in \langle -1, 1 \rangle \\
Cov[X_i, X_j] &= Cov[X_j, X_i] && \text{matice je symetrická} \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov[X_i, X_j] &\geq 0 && \text{pro jakékoli } a_i \text{ je pozitivně definitní}
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Poslední rovnice (1.16) platí protože pokud je Y lineární kombinací n náhodných proměnných $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ pak je variance Y rovna $Var[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov[X_i, X_j]$ a nemůže být negativní.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1n} \\ \varrho_{21} & 1 & \cdots & \varrho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{n1} & \varrho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}
\tag{1.17}$$

1.3 Rozdělení a vlastnosti náhodných polí

Náhodná pole jsou kolekcí náhodných proměnných $X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_i)$ jedna pro každý bod z náhodného pole. Každé $X(x_1)$ je pozorování nějakého jevu s danou pravděpodobností, a nazýváme ho jednou *realizací* náhodného pole.

U náhodných polí můžeme vyčlenit jednotlivé typy, které stručně uvedu v následujících částech.

1.3.1 Rozdělení náhodných polí

Náhodná pole můžeme rozdělit do dvou podskupin, a to podle toho, jestli jednotlivé náhodné proměnné pozorujeme v diskrétních bodech, nebo kontinuálně například vzhledem k časové ose, nebo prostorovým souřadnicím. Kontinuální náhodné pole je ideální pro popis mechanických vlastností zemin, které se mění plynule se změnou prostorových souřadnic. Dále na náhodnou sérii, mřížový proces, spojitou náhodnou funkci, náhodné dělení prostoru, a náhodný bodový proces, jak je patrné z obrázku 1.3.

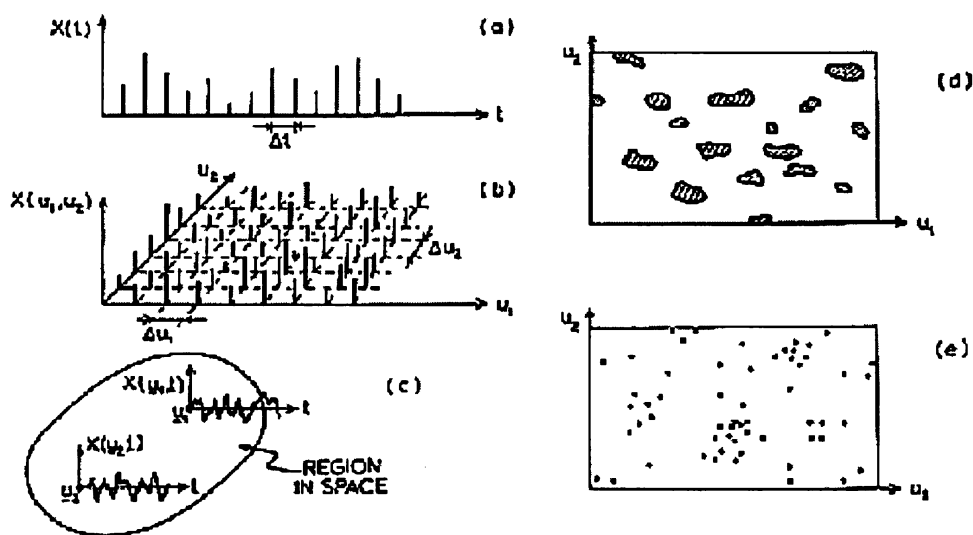
Náhodná série je obvykle diskrétní veličina měřená v rovnoměrně rozložených bodech na časové ose.

Dalším typem je spojitá náhodná funkce, měřená ve všech bodech prostorových os, nebo časové ose.

Výsledkem mřížového procesu je náhodná veličina měřená v uzlech a nebo plochách v prostorové mřížce.

Náhodné uspořádání prvků v prostoru je v geotechnice užitečné pro simulování puklinatosti. Zde se dají jako náhodné proměnné vyjádřit jak jejich výskyt, tak i sklon a orientace vzhledem ke světovým stranám.

Náhodné dělení prostoru můžeme popsat tak, že provádíme měření diskretní náhodné veličiny ve všech bodech daného prostoru. Prostor můžeme dělit např. na černá a bílá pole. Typ tohoto náhodného pole je dobře aplikovatelný na popis šíření a výskytu tekutého kontaminantu v horninovém prostředí.



Obrázek 1.3: (a) náhodná série, (b) mřížový proces, (c) prostorovočasový proces, (d) náhodné dělení prostoru, (e) náhodné uspořádání prvků v prostoru (Vanmarcke 1984).

Mnoho fyzikálních procesů může být modelováno jako prostorovočasový proces $X(\mathbf{v}, t)$, závislý na vektoru prostorových souřadnic \mathbf{v} a čase t . Volba souřadnic náhodného pole není limitována pouze délkou a časem. Jakékoli měřítko, nebo jednotky včetně nominálního měřítka, které oddělují jednotlivá pozorování do samostatných pozic mohou být použity (Vanmarcke 1984). Nominální měřítko nenaznačuje nic o relativní důležitosti anebo velikosti náhodných proměnných. Příkladem nominálního měřítka je třeba identifikace komponent vektoru v každém bodě prostorovočasového kontinua (\mathbf{u}, t) . Například souřadnice vektoru rychlosti v turbulentně proudící kapalině. V tomto případě jsou pozorovány v každém bodě tři skalární proměnné. V jiných příkladech to mohou být materiálové charakteristiky. Ve všech

takovýchto případech je nutno zavést nový celočíselný parametr t_n , který bude rozlišovat jednotlivé skalární hodnoty jako je $t_n = 1, 2, \dots$. Efekt parametru t_n je tedy ten, že zvyšuje počet rozměrů náhodného pole (Vanmarcke 1984).

1.3.2 Základní vlastnosti náhodných polí

Jedny z klíčových vlastností náhodného pole jsou homogenita, isotropie a ergodicita.

Náhodné pole můžeme nazvat homogenní tehdy, jestliže všechny náhodné proměnné s danou lokalizací t_1, t_2, \dots, t_n mají stejnou distribuční funkci i pokud tuto lokalizaci v daném prostoru posuneme. Z toho vyplývá, že všechny závislosti pravděpodobnosti a polohy v prostoru jsou jen relativní (u jednorozměrného náhodného pole se spíše než označení homogenní používá výraz stacionární).

Isotropní je náhodné pole tehdy, když funkce hustoty pravděpodobnosti, opět vázaná na jistou lokalizaci t_1, t_2, \dots, t_n , je stejná i pokud dochází k rotaci soustavy souřadnic.

Pokud lze z jediné realizace náhodného pole (viz sekce 1) usoudit na statistické rozdělení všech ostatních náhodných jevů pak můžeme o tomto poli říci, že je ergodické.

Tyto vlastnosti mají hlavně koncepční hodnotu při praktické aplikaci teorie náhodných polí (Vanmarcke 1984).

Charakteristikami náhodného pole jsou obdobně jako u náhodných veličin střední hodnota náhodného pole μ_X (první moment, viz. sekce 1.1.2), variance σ_X^2 a korelační struktura, v geotechnických aplikacích často používána jako korelační délka θ_X .

Střední hodnota μ_X náhodného pole se v principu může měnit společně se změnou prostorových souřadnic x . Příkladem je smyková pevnost zemin, jež se často mění s hloubkou. Takovou střední hodnotu budeme označovat $\mu(x)$ a toto pole můžeme nazvat *nestacionární*. Trend měnící se střední hodnoty můžeme aplikovat jen v následujících dvou případech. Pokud je náhodné pole reprezentováno nějakým prostorem, kde byla vyhodnocovaná data obdržena a ta jsou vázána na určité souřadnice. A nebo pokud můžeme předvídat trend změny střední hodnoty pro jakýkoliv prostor reprezentovaný náhodným polem. V ostatních případech, kdy neznáme přesnou změnu μ_X , měl by být výrazný trend změny střední hodnoty popsán dalším náhodným polem (Fenton 2006).

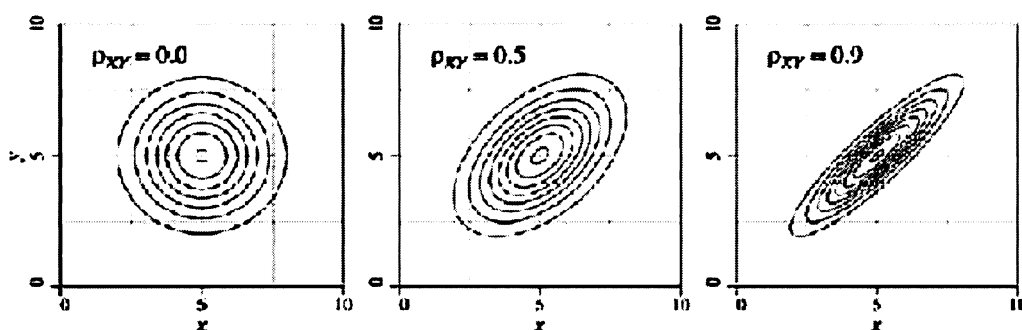
Rovněž variance náhodného pole může být nestacionární σ_X^2 a vykazovat určité změny $\sigma(x)$. Protože vyhodnocení nestacionární variance vyžaduje velmi mnoho dat, je obvykle používána jen stacionární variance. To znamená, že $\sigma(x) = \sigma_X^2 = \sigma = c$, a v celém poli je tedy konstantní.

Náhodná pole, která jsou definovaná nestacionární střední hodnotou $\mu(x)$ a variancí $\sigma^2(x)$, mohou být vždy transformována do slabě stacionárních polí (ve smyslu vari-

ance a střední hodnoty). Pomocí lineární transformace (1.18), kde $X'(x)$ má nulovou stacionární střední hodnotu a jednotkovou varianci.

$$X'(x) = \frac{X(x) - \mu(x)}{\sigma^2(x)} \quad (1.18)$$

Třetí důležitou vlastností náhodného pole je stupeň vzájemné závislosti náhodných proměnných. Například $X(2)$ což může být úhel vnitřního tření se souřadnicí $x = 2$ a je mu přiřazena nějaká velikost. Pokud v daném prostoru jsou veličiny na sobě závislé pak i $X(1)$ bude mít stejnou hodnotu jako $X(2)$. Tuto závislost charakterizujeme koeficientem korelace ρ_{XY} , který je uveden v části 1.2, a definován vztahem (1.15). Grafický význam koeficientu korelace ρ_{XY} můžeme vidět na obrázku 1.4. Na tomto obrázku je dvojrozměrné rozdělení pravděpodobnosti s parametry $\mu = 5, \sigma = 1.5$ pro tři různé hodnoty korelačního koeficientu.



Obrázek 1.4: Grafické znázornění korelačního koeficientu Fenton (2006).

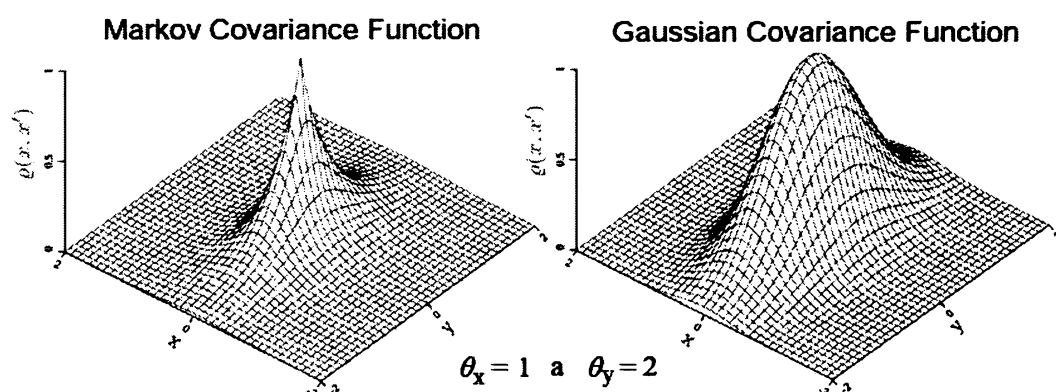
Při popisu mechanických vlastností materiálů můžeme předpokládat, že hodnoty nějakého parametru ve dvou bodech vzájemně prostorově blízkých budou podobné. Naopak pokud porovnáme parametry v bodech od sebe vzdálených, pak se mohou značně lišit a budou tedy téměř nekorelované. Korelační koeficient se tedy bude měnit v tomto případě podle vzdálenosti dvou bodů v prostoru. Tuto myšlenku lze popsat zavedením korelační funkce $\rho(x, x')$, která bude udávat závislost mezi korelačním koeficientem mezi $X(x)$ a $X(x')$.

Z předchozí úvahy a vlastností korelačního koeficientu vyplývá, že pokud poroste vzdálenost mezi dvěma body $\tau = x - x'$, hodnota korelačního koeficientu bude klesat. Jednou z obvykle používaných korelačních funkcí je Markovova funkce (1.19) jejíž pomocí kovariance (1.20) klesá exponenciálně s rostoucí vzdáleností mezi dvěma body. Graf průběhu této funkce je na obrázku 3.1.

$$\varrho(x, x') = \exp\left(-\frac{2|x-x'|}{\theta}\right) \quad (1.19)$$

$$\text{Cov}[X(x), X(x')] = \sigma_X^2 \varrho(x, x') \quad (1.20)$$

Korelační délka θ je zjednodušeně vzdálenost za kterou jsou dva body $X(x)$ a $X(x')$ efektivně nekorelované. Zmenšujeme-li tedy korelační délku, náhodné pole bude stále více "hrubé". Pokud korelační délka $\theta \rightarrow 0$ všechny body náhodného pole jsou nekorelované a pole je tak nejvíce nevyrovnané. Tento stav je ale fyzikálně nepřijatelný a označuje se jako *white noise*. Naopak zvětšujeme-li korelační délku, pole je stále více vyhlazené. Nejvíce hladké bude když $\theta \rightarrow \infty$, v tomto případě všechny body náhodného pole jsou plně korelované. Pokud je náhodné pole v tomto případě ještě stacionární, pak všechny realizace náhodného pole mají stejnou hodnotu. Toho se využívá u jednodušší pravděpodobnostní metody *single random variable* (viz sekce 2.1.1).



Obrázek 1.5: Rozdíl mezi Gaussovo a Markovo funkcí pro eliptickou korelaci náhodného pole (Fenton 2006).

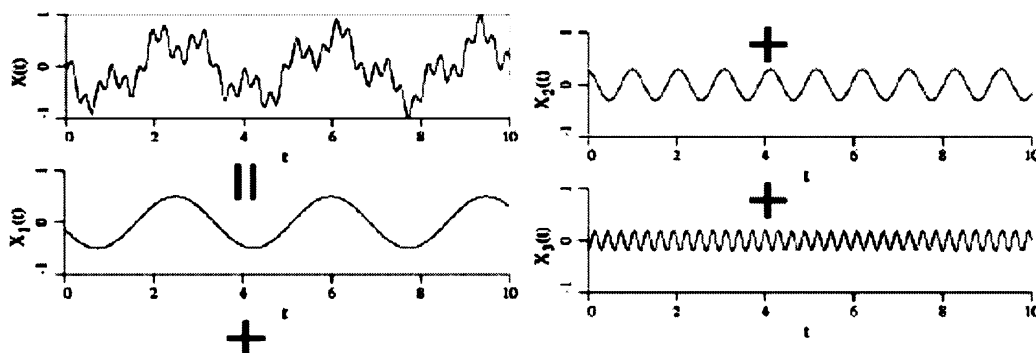
Při modelování sedimentárních hornin nebo zemin je však popisované prostřední do značné míry anizotropní vlivem sedimentačních procesů, které se uplatňovaly při jejich vzniku. Takovou vlastnost nelze vystihnout jedinou korelační délkou shodnou ve všech směrech. V případě kdy je tedy potřeba, aby výsledné náhodné pole mělo anizotropní korelaci, lze Markovovu funkci upavit na rovnici elipsy ve které vystupují na místo jediné korelační délky θ dvě. Zvláště pro vertikální a zvláště pro horizontální směr. Výsledná funkce udávající kovarianci mezi dvěma náhodnými valičinami $X(x)$ a $X(x')$ je pak

$$C[X(x), X(x')] = \sigma^2 \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{2x}{\theta_x}\right)^2 + \left(\frac{2x'}{\theta_y}\right)^2} \right\} \quad (1.21)$$

tato rovnice znamená elipsu na které mají všechny body stejnou hodnotu korelačního koeficientu. To je jeden ze způsobů, jak popsat anizotropní korelaci náhodného pole. Další možný způsob je použitím Gaussovo korelační funkce. Tento způsob zde nebudu více rozvádět a mohu odkázat například na Fenton (2006). Rozdíl mezi oběma způsoby korelace je patrný z obrázku 1.5

Alternativou druhého momentu (momentové charakteristiky viz sekce 1.1.2) pro náhodná pole je *spektrální funkce hustoty pravděpodobnosti*. Uvedu ji zde jen stručně, protože její význam v následujícím textu je malý.

Jestliže $X(t)$ je stacionární náhodný proces a funkce $\varrho(\tau)$ je spojitá v bodě $\tau = 0$, pak může být vyjádřen jako součet sinusoid, například obr.1.6 s vzájemně nezávislými a náhodnými hodnotami amplitud a úhlu fázového posunutí (Fenton 2006).



Obrázek 1.6: Způsob skládání sinusoid u stacionárního náhodného procesu $X(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) + C_3 \cos(\omega_3 t + \Phi_3)$ (Fenton 2006).

Můžeme ho tedy vyjádřit ve formě

$$X(t) = \mu_X + \sum_{k=-N}^N A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \quad (1.22)$$

pokud položíme $A_k = C_k \cos(\Phi_k)$ a $B_k = -C_k \sin(\Phi_k)$. Jestliže bude mít A_k a B_k normální rozložení se střední hodnotou μ_X , pak s toho vyplývá, že C_k má Raeligovo rozložení a Φ_k je rovnoměrně rozložené mezi 0 a 2π (Fenton 2006).

Význam každé komponenty frekvence má vliv na celkovou variabilitu $X(t)$. U každé k -té komponenty procesu $X(t)$ můžeme vyjádřit její varianci a dostaneme vztah

$1/2E[C_k^2]$. Z výše uvedeného vyplývá, že celková variabilita závisí na velikosti sinusových amplitud jednotlivých komponent. Definice dvoustranné spektrální funkce pro jednu komponentu je:

$$S(\omega_k)\Delta\omega = Var[X_k(t)] = \frac{1}{2}E[C_k^2] \quad (1.23)$$

Celkovou varianci procesu $X(t)$ můžeme tedy vyjádřit jako:

$$\sigma_X^2 = Var[X(t)] = \sum_{k=-N}^N S(\omega_k) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega \quad (1.24)$$

Toto je jen velmi zjednodušený popis významu spektrální funkce pro jednorozměrné stacionární náhodné pole. Pro podrobnější studium této problematiky doporučuji například knihu Vanmarcke (1984).

Další momentovou charakteristikou náhodného pole je funkce variance. Ta vyjadřuje redukci variance během průměrování. Vychází z aritmetického průměru (1.25) a ze vztahu pro varianci (1.25)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad Var[\bar{X}] = \frac{\sigma_X^2}{n}. \quad (1.25)$$

Jestliže náhodné proměnné X_i v poli jsou nekorelované, pak se funkce variance redukuje na $\gamma(n) = 1/n$ a potom zprůměrovaná variance je:

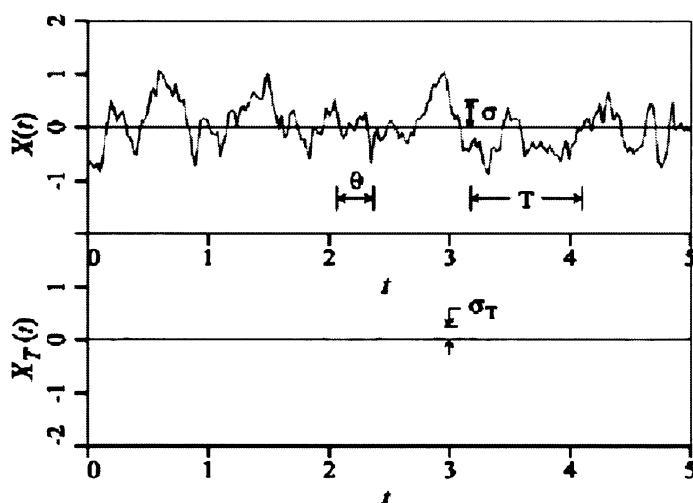
$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \gamma(n)\sigma_X^2 \quad (1.26)$$

Budeme-li uvažovat opačně a náhodné proměnné budou mezi sebou plně korelované, tzn. $X_1 = X_2 = \dots = X_i = X$, potom ze vzorce pro průměr vyplývá, že průměrná hodnota \bar{X} veličiny X je X . Variance náhodného pole je stejná jako variance zprůměrovaná a $\gamma(n) = 1$:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_X^2 \Rightarrow \gamma(n) = 1 \Rightarrow \gamma(n) \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 \right\rangle \quad (1.27)$$

Na obrázku 1.7 je vidět efekt lokálního průměrování na varianci. T je šířka intervalu, přes který jsou hodnoty z horního grafu zprůměrovány a promítnuty do grafu spodního. Lokální průměrování má dva hlavní důsledky. Prvním je redukce variance a druhým je utlumení komponent s vysokou frekvencí, tzv. *low-pass filter*. Z toho vyplývá, že:

- a) Redukce variance je vyšší, čím je vyšší obsah vysokofrekvenčních komponent.
 b) Zvyšování obsahu těchto komponent vede ke zvyšování nezávislosti náhodných proměnných v poli.
 c) Vliv redukce variance se tedy zvyšuje se vzrůstající "nezávislostí" v náhodném poli. To platí pro délku intervalu lokálního průměrování kdy $\gamma(T) \in (0, 1)$.



Obrázek 1.7: Vliv lokálního průměrování na vyhlazení frekvence (snížení variance pole $X(t)$) (Fenton 2006).

1.3.3 Aplikace náhodných polí pro řešení geotechnických úloh MKP.

Pro řešení geotechnických problémů metodou konečných prvků je potřeba promítnout materiálové charakteristiky do zvolené sítě. Výsledné náhodné pole je většinou stacionární a jednotlivé proměnné jsou v prostoru lokalizované v elementech sítě se souřadnicemi středů x_i, y_j . Lokálním průměrováním lze přizpůsobit bodové výsledky laboratorních či polních zkoušek parametrům sítě a zohlednit tak vliv velikosti elementu. K tomu se využívá funkce pro redukcí variance, tedy $\gamma(X)$. Jak velké bude ovlivnění vstupních hodnot závisí na velikosti korelační délky a velikosti elementu. Čím bude element relativně menší ke korelační délce, tím se ovlivnění projeví méně. Na obrázku 1.8 jsou vztahy pro výpočet faktoru gama ($\gamma = \sigma_X^2 / \sigma_X^2$) pro jedno-rozměrný, 2D a 3D element podle Vanmarcke (1984). Jako vzdálenost mezi elementy τ pro výpočet kovariance a definování korelační délky je brána vzdálenost jejich středů. Z toho důvodu je výhodnější používat pouze takové tvary elementů u kterých není výpočet integrálu k získání faktoru γ numericky náročný.

Local averaging over a line

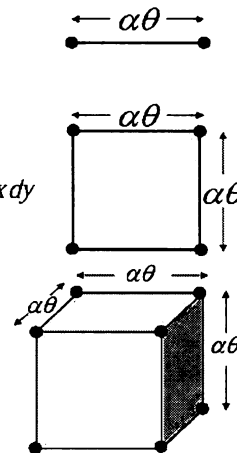
$$\gamma = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} (\alpha - x) \exp(-2x) dx$$

Local averaging over a square

$$\gamma = \frac{4}{\alpha^4} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - x)(\alpha - y) \exp(-2\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

Local averaging over a cube

$$\gamma = \frac{8}{\alpha^6} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - x)(\alpha - y)(\alpha - z) \exp(-2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$



Obrázek 1.8: Vzorce na výpočet faktoru γ pro lineární, čtvercový, a krychlový element (Griffiths 2006).

Jako příklad mohu uvést dvourozměrné stacionární náhodné pole s lognormálním rozložením náhodných proměnných, které jsou použité i dále v práci při řešení stability svahu. Nejprve vypočteme podle vztahů (1.10) a (1.11) parametry podléhajícího normálního rozdělení $\mu_{\ln X}$ a $\sigma_{\ln X}$. V dalším kroku je potřeba vypočíst faktor redukce variance γ , v tomto případě pro čtvercový element. Nyní je nutno podle (1.26) spočítat lokálně zprůměrovanou varianci a směrodatnou odchylku $\sigma_{\ln X_A}$. Střední hodnota normálního rozdělení zůstává neovlivněná faktorem pro redukcí variance $\mu_{\ln X_A} = \mu_{\ln X}$. Na základě takto upravených parametrů můžeme podle inverzních vztahů (1.28) k (1.10) a (1.11) vypočítat parametry původního lognormálního rozdělení:

$$\mu_{\bar{X}} = \exp\left(\mu_{\ln X_A} + \frac{1}{2}\sigma_{\ln X_A}^2\right) \quad \sigma_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \sqrt{\exp(\sigma_{\ln X_A}^2) - 1} \quad (1.28)$$

Lognormální rozložení s těmito parametry se přiřadí všem náhodným proměnným v síti (stacionární pole).

1.4 Obecná charakteristika metody Monte Carlo

Simulace metodou Monte Carlo probíhá tak, že reálný (nebo jen teprve projektovaný) systém nahradíme jeho simulačním modelem se stejnými pravděpodobnostními charakteristikami, a chování reálného systému mnohonásobně simulujeme na zkonstruovaném modelu. Zpracování výsledků simulace je principiálně stejné jako ve statistice.

K přesnému odhadu dané pravděpodobnostní charakteristiky potřebujeme obvykle velmi mnoho pokusů, aby jsme docílili požadované hodnoty chyby e .

$$e = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \quad (1.29)$$

V převážné většině metod Monte Carlo se postupuje tak, že se hledá taková náhodná veličina X , aby její střední hodnota $E(X)$ byla rovna hledané hodnotě a . Tedy abychom byli schopni přibližně určit skalární veličinu a . Existuje nekonečně mnoho náhodných veličin X splňujících podmínku $E(X) = a$. Jestliže vypočteme n nezávislých realizací náhodné veličiny X , pak můžeme odhadnout a pomocí aritmetického průměru. Chyba tohoto odhadu je vyjádřena vzorcem (1.29) a vychází ze vztahu mezi směrodatnou odchylkou a rozptylem tzv. Čebiševovou nerovností.

Obvykle se nejdříve generují hodnoty náhodné veličiny Y rovnoměrně rozdělené na intervalu $(0, 1)$ a ty se pak transformují transformací (1.30)

$$x_i = f(y_1, y_{i-1}, \dots) \quad (1.30)$$

kde f je vhodně zvolená funkce. Z toho vyplývá, že jde vlastně o problém vhodného generování náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$ a nalezení příslušné transformační funkce. Postup metody Monte Carlo lze tedy zhruba shrnout do čtyř kroků.

- a) Generování náhodných čísel y_i s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0, 1)$.
- b) Transformace y_i na čísla z_i , která mají některé ze složitějších rozdělení.
- c) Pokud $z_i = x_i$ pak lze spočítat odhady charakteristik veličiny X . Jinak je potřeba vhodným algoritmem dopočítat hodnoty x_i a následně odhady jejich charakteristik.
- d) Statistické vyhodnocení výsledků Monte Carlo.

Podmínkou úspěchu je možnost takovouto jednu realizaci metody Monte Carlo mnohokrát opakovat, aby se snížila chyba odhadu střední hodnoty podle (1.30). Pro splnění této podmínky je nutné mít vždy k dispozici dostatečný počet náhodných čísel. Z předchozího textu vyplývá, že není nutné generovat náhodná čísla s různými typy distribuční funkce. Vystačíme tedy jen s jediným generátorem náhodných čísel pro $R(0, 1)$.

Je mnoho možností jak generovat náhodná čísla. Nejprve je důležité připomenout co rozumíme pod pojmy náhodné číslice a náhodná čísla. Pod pojmem *náhodné číslice* rozumíme konečnou posloupnost číslic, kterou lze považovat za posloupnost realizací nezávislých náhodných veličin z diskrétního rozdělení. Náhodné číslice takto zavedené jsou vlastně dekadické náhodné číslice. Zcela analogicky však můžeme zavést pojem

náhodných číslic o jiném číselném základu, např. binární náhodné číslice (Dřímál et al. 2006).

$$P(X = i) = 10^{-1} \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.31)$$

Náhodná čísla je konečná posloupnost čísel z intervalu $(0, 1)$, kterou lze považovat za posloupnost realizací nezávislých náhodných veličin z rovnoměrného rozdělení $R(0, 1)$. Lze dokázat, že je v podstatě jedno, zda máme k dispozici náhodná čísla či náhodné číslice. Jelikož suma posloupnosti (1.31) je náhodná veličina Y a má rovnoměrné rozdělení $R(0, 1)$, platí to i naopak.

Samotné generování náhodných čísel z rozdělení $R(0, M)$ lze provádět mnoha způsoby. V praxi a pro mou další práci je nejpodstatnější generování pseudonáhodných čísel (slovo náhodné je ponecháno opravdu náhodným fyzikálním jevům jako je např. délka časového intervalu mezi kliknutím Geigerova měřiče u radioaktivní látky) tzv. *kongruenčními generátory*. Posloupnost pseudonáhodných čísel z intervalu $(0, M)$ je dána rekurentním vztahem

$$x_{n+1} = a_0 + \dots + a_k x_{n-k} + b \quad (1.32)$$

x_0, \dots, x_k jsou počáteční podmínky a a_0, \dots, a_k vhodně zvolené konstanty. Kongruencí je míněn zbytek po dělení, číslo x_{n+1} je tedy zbytkem po dělení čísla $a_0 + \dots + a_k x_{n-k} + b$ číslem M . Náhodná čísla Y_i z intervalu $(0, 1)$ pak dostaneme dělením čísla x_i číslem M (Dřímál et al. 2006).

$$y_i = x_i/M \quad (1.33)$$

Vlastnosti generátoru náhodných čísel závisí právě na volbě počátečních hodnot a konstant. Pro speciální hodnoty konstant a_j a b mají generátory zvláštní názvy, např. aditivní nebo multiplikativní generátor. Spojením těchto dvou dostaneme *kongruenční smíšenou metodu* (1.34), která je dále v práci použita jako základ pro generování náhodných polí.

$$x_{n+1} = a_{x_n} + b \quad (1.34)$$

Kapitola 2

Využití pravděpodobnostních metod v geomechanice

Touto kapitolou si kladu za cíl uvést jen stručný přehled statistických a pravděpodobnostních metod, které nacházejí využití při popisu mechanických vlastností geomateriálů. Metody byly vybrány tak, aby uvedly problematiku, kterou se zabývám v mé práci. Není však nutné uvádět zcela ucelený přehled a popis všech možných postupů a způsobů využití počtu pravděpodobnosti a statistické analýzy v geotechnice.

Výsledky laboratorních nebo polních zkoušek jsou vždy zatíženy chybou, která vzniká měřením a vyhodnocováním dat. Z největší části je ale jejich variabilita způsobena prostorovou polohou místa odběru vzorku pro laboratorní zkoušku. V této práci se nebudu soustředit na jednotlivé příčiny chyb, které vznikají při vyhodnocování laboratorních a polních zkoušek použitím různých metod měření a jejich vlivu na získaná vstupní data do dalších výpočtů.

Geomateriály jako většina přírodních prostředí nejsou nikdy zcela homogenní. Variabilita vstupních dat je největší měrou způsobena přirozeně nerovnoměrným rozmístěním mechanických parametrů v hornině nebo zemině. Cílem níže uvedených metod je využití statistického popisu získaných mechanických parametrů v numerické analýze geotechnických problémů. Je dobré si uvědomit, že v řadě příkladů jde o parametrické studie vlivu různé variability dat na výsledek analýzy. Tyto studie tedy nevycházejí z reálných hodnot získaných v terénu nebo laboratoři. V případě, že jde o reálný problém, tak jsou vstupní data převzatá z předchozích analýz a nejsou v této práci posuzovány metody jejich získávání ani vliv těchto metod na zatížení vstupních dat chybami měření či typem zkoušky.

2.1 Pravděpodobnostní metody

V první části kapitoly 2 se seznámíme s principy jednotlivých metod, tak jak byly již popsány v různých zdrojích. Chci se zde zabývat hlavně metodou *single random variable method* a *random finite-element method*, které jsou náplní mé další práce. Metoda *first order second moment* je zde uvedena pro doplnění přehledu a pro její přímou návaznost na další dvě metody. Tvoří mezistupeň mezi *single random variable method* a *random finite-element method*.

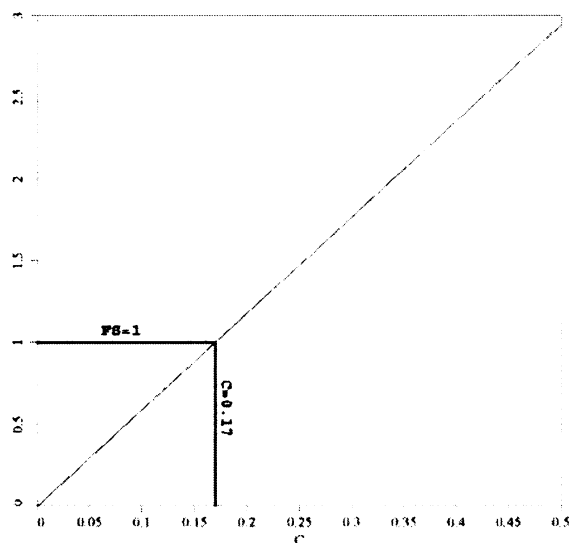
2.1.1 Metoda *single random variable*

V metodě *single random variable* se bere v úvahu variabilita jednoho z parametrů, které vstupují do výpočtu řešené úlohy. Není ovšem uvažována prostorová variabilita, která odpovídá případu kdy $\rho_{X,Y} = 1$. Cílem je nalézt vztah mezi tímto parametrem a řešením úlohy. Pak můžeme definovat závislost chování výsledku této úlohy na změně tohoto parametru. Obvykle můžeme tento parametr popsat nějakým pravděpodobnostním rozdělením, definovaným jeho střední hodnotou a variancí. Pak můžeme říci, že pravděpodobnost konkrétního výsledku úlohy je rovna pravděpodobnosti, že tento parametr nabude z vlastního rozdělení hodnoty, která odpovídá danému řešení.

Například u výpočtu faktoru bezpečnosti svahu FS z jílovité zeminy bude jeho výše závislá na nedrénované smykové pevnosti c_u . Faktoru bezpečnosti $FS = 1$ bude odpovídat konkrétní hodnota c_u . Vztah mezi FS a c_u je pro vzorový příklad v grafu na obr. 2.1 lineární. Graf je pro svah se sklonem 1 : 2 z jílovité zeminy.

Jeli tedy svah stabilní při $FS \geq 1$, pak je nestabilní pro všechny hodnoty c_u , při kterých FS nabývá hodnoty nižší než 1. Pokud je c_u popsán například lognormálním rozdělením, pak pravděpodobnost, že svah spadne je $P[c_u < \tilde{c}_u]$. Smyková pevnost \tilde{c}_u je hodnota při níž je $FS = 1$. Při převodu parametrů rozdělení z $LN(\mu_{c_u}, \sigma_{c_u}) \rightarrow N(\mu_{\ln c_u}, \sigma_{\ln c_u})$ můžeme pravděpodobnost spadnutí svahu p_f určit ze standardních tabulek pro normální rozdělení. Nebo přímo z parametrů, pokud má c_u normální rozdělení.

Více jsem se této metodě věnoval v sekci 3.3, kde je uvedena parametrická studie vlivu variance náhodné vstupní hodnoty na velikost pravděpodobnosti spadnutí svahu. Dále se o této metodě zmiňují Fenton et al. (2003), nebo Griffiths a Fenton (2004).



Obrázek 2.1: Lineární závislost mezi FS a c_u vypočítaná metodou limitní rovnováhy (Griffits 2006).

2.1.2 Metoda *the first order second moment*

Pokud chceme používat více jak jednu náhodnou proměnnou, například při provádění drénované analýzy, musíme použít jinou metodu než *single random variable*. Metoda *the first order second moment* bere v úvahu vliv většího množství náhodných proměnných.

Metoda je nazvána *first order method*, protože využívá pouze prvního členu Taylorova rozvoje uvažované funkce a *second moment method*, protože bere v úvahu varianci (druhý moment) viz. sekce 1.1.1 vstupních hodnot.

Mějme funkci $f(X)$ jedné náhodné proměnné X . První člen Taylorova rozvoje této funkce je pak 2.1.

$$f(X) = f(\mu_X) + (X - \mu_X) \frac{df}{dx} + \dots \quad (2.1)$$

Střední hodnota této funkce $E[f(X)]$ je přibližně rovna funkční hodnotě pro střední hodnotu náhodné veličiny X .

$$E[f(X)] \approx f(\mu_X) \quad (2.2)$$

Varianci lze napsat jako

$$\text{var}[f(X)] \approx \text{var} \left[(X - \mu_X) \frac{df}{dx} \right] = \text{var}[X] \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \quad (2.3)$$

Postup výpočtu variance lze rozšířit na libovolný počet náhodných proměnných $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Varianci této funkce lze napsat jako součet variancí pro jednotlivé náhodné veličiny:

$$\text{var}[f(X_1, X_2, \dots, X_n)] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 \text{var}[X_i] \quad (2.4)$$

Derivace funkce může být vypočítána buď analyticky derivováním funkce nebo numericky. Při analytickém postupu je funkce parciálně derivována s ohledem na jednotlivé náhodné veličiny a pak jsou do ní dosazeny střední hodnoty náhodných veličin.

Při použití numerického postupu se snažíme co nejvíce přiblížit analytické hodnotě derivací pomocí malých přírůstků ΔX_i ke střední hodnotě μ_{X_i} . Střední hodnoty pro ostatní veličiny jsou fixovány.

$$\frac{df}{dX_i} \approx \frac{f(\mu_{X_i} + \Delta X_i, \mu_{X_j}) - f(\mu_{X_i} - \Delta X_i, \mu_{X_j})}{2\Delta X_i} \quad (2.5)$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice pro výpočet variance (2.4) náhodných veličin získáme vztah pro výpočet celkové variance funkce $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Nevýhoda tohoto postupu je ta, že jednotlivé náhodné veličiny jsou vzájemně nekorelované (Griffiths 2006). V části 2.2.1 této kapitoly je uveden příklad výpočtu zemního tlaku kde je použito této metody pro čtyři náhodné veličiny.

2.1.3 Metoda *random finite-element*

Metoda *random finite-element* kombinuje teorii o náhodných polích s elastoplastickou analýzou metodou konečných prvků. Její podstatou je přidělování hodnoty vstupních parametrů do sítě na základě jejich pravděpodobnostního rozdělení. Bere v úvahu střední hodnotu, směrodatnou odchylku a korelační délku vstupních parametrů tak, jak je popsáno v kapitole 1. Materiál s takto rozvrženými parametry je nehomogenní a obsahuje náhodně rozmístěná pevnější a slabší místa. Při simulovaném zatížení pak plocha smykového porušení nemá ideální geometrický tvar (např. logaritmická spirála nebo válcová plocha) jak je uvažováno u konvenčních metod, ale smykové porušení si hledá nejslabší cestu materiálem. Toto chování je daleko bližší přírodním podmínkám.

Vstupní parametry jsou náhodně rozmístěné v jednotlivých středech elementů, tedy v bodech. Pro výpočet metodou konečných prvků je ale nutno hodnoty parametru z těchto bodů rozprostřít do celé plochy elementů a vytvořit tak jednu materiálovou skupinu pro každý element. Toho lze dosáhnout zavedením lokálního zprůměrování (Vanmarcke (1984) a kapitola 3). Lokální zprůměrování zavádí faktor redukce variance, který zredukuje hodnotu vstupních parametrů, směrodatné odchylky a střední hodnoty jejich rozdělení v závislosti na velikosti elementu.

Tím se dosáhne možnosti namapování hodnot náhodných veličin do sítě pro řešení metodou konečných prvků. Zároveň se tím bere v úvahu vliv sítě na vstupní parametry. Pokud je použitá síť jemnější, pak dochází k menší redukci variance hodnot vstupních parametrů a naopak. Podrobněji je tento postup popsán v sekci 3.4.

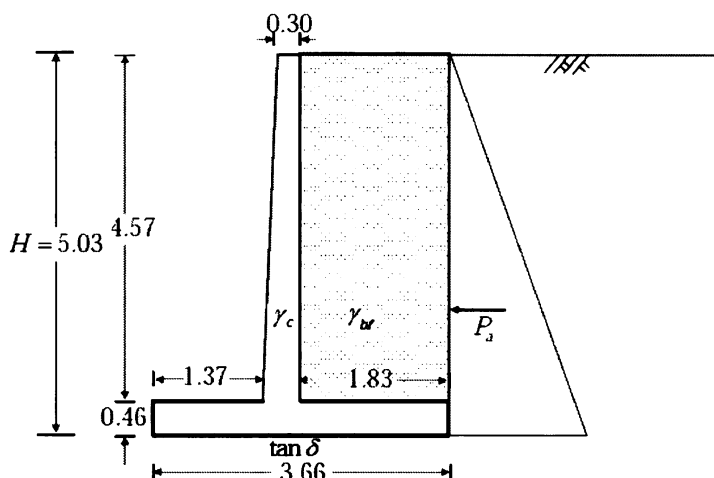
Samotný výpočet je realizován využitím Monte Carlo metody, v rámci níž se stále opakuje výpočet se stejným statistickým rozdělením. Pokaždé znovu se generuje náhodné pole a náhodně rozmístěné veličiny se mapují do sítě a poté proběhne výpočet metodou konečných prvků. Mnohonásobné opakování výpočtu vede ke stabilnímu statistickému popisu řešení a zmenšování chyby odhadu střední hodnoty řešení, ať už pravděpodobnosti spadnutí svahu, nebo například únosnosti plošného základu. Na tuto metodu bylo provedeno mnoho studií, například Griffiths, Fenton, a Tveten (2002), která se zabývá obecněji využitím pravděpodobnosti v geotechnice.

2.2 Aplikace teorie pravděpodobnosti

V této části kapitoly uvedu typické příklady, ve kterých je možné využít výhod pravděpodobnostních metod. Ukázky příkladů jsou z detailně zpracovaných studií provedených již dříve a typických pro geotechnickou praxi. Vybral jsem propustnost horninového prostředí, únosnost plošného základu a stabilitu svahu. Řešení stability svahu je zde prezentováno tak, aby uvedlo problematiku k dalším částem práce, které se zabývají tímto problémem detailněji. Samozřejmě to není přehled všech možností využití metod *single random variable*, nebo *random finites elements*.

2.2.1 Výpočet zemního tlaku metodou *the first order second moment*

Při výpočtu zemního tlaku působícího na konstrukci z obrázku 2.2 musíme nejprve zjistit funkční vztah, ze kterého vyplývá řešení při použití konstantních vstupních parametrů. Zemina je nesoudržná s $c = 0$ a úhlem vnitřního tření ϕ . Griffiths (2006) zvolil Rankinovu teorii pro výpočet aktivního zemního tlaku na zvolenou konstrukci. Nejprve vypočetl koeficient tlaku $K_a = \tan^2(45 + \phi/2)$ a potom aktivní zemní tlak



Obrázek 2.2: Geometrie příkladu pro výpočet zemního tlaku na konstrukci opěrné stěny (Griffits 2006).

P_a podle Rankinovy teorie, platí

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{2} \gamma_{bf} H^2 K_a = 12.65 \gamma_{bf} K_a \\ W &= W_c + W_{bf} \\ &= 3.42 \gamma_c + 8.36 \gamma_{bf} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hledané řešení je faktor bezpečnosti svahu s opěrnou stěnou. Je dán funkcí (2.7), definovanou pro konstantní parametry.

$$FS_{sl} = \frac{(3.42 \gamma_c + 8.36 \gamma_{bf}) \tan \delta}{12.65 \gamma_{bf} K_a} \quad (2.7)$$

Cílem výpočtu bylo ale zohlednit variabilitu všech čtyř vstupních parametrů. Tím se stává funkce FS_{sl} funkcí čtyř náhodných proměnných $FS_{sl} = f(\gamma_c, \gamma_{bf}, K_a, \tan \delta)$. Jednotlivé náhodné veličiny mají parametry uvedené v tabulce 2.1.

Takto definovaný faktor bezpečnosti lze pak řešit metodou *the first order second moment*, jak bylo popsáno v sekci 2.1.2. Střední hodnotu $E[FS_{sl}]$ lze podle (2.2) vypočítat dosazením středních hodnot náhodných veličin vstupujících do rovnice (2.7). Výpočtem ze zadaných parametrů vychází střední hodnota faktoru bezpečnosti $\mu_{FS_{sl}} = 1.5$.

veličina	μ	σ
γ_c	23.58	0.31
γ_{bf}	18.87	1.1
K_a	0.333	0.033
$\tan \delta$	0.5	0.05

Tabulka 2.1: Parametry vstupních veličin pro výpočet zemního tlaku.

Varianci jak vyplývá ze vztahu (2.3) můžeme získat po parciálním zderivování prvního členu Taylorova rozvoje funkce FS_{sl} . V tomto příkladě je $\text{var}[FS_{sl}] = 0.046$. Tím jsme získali kompletní informace o pravděpodobnostním rozdělení faktoru bezpečnosti a můžeme snadno dopočítat směrodatnou odchylku a koeficient variance.

Pokud budeme předpokládat, že faktor bezpečnosti má lognormální rozdělení, můžeme dopočítat podle vztahů 1.10 uvedených v části 1.1.3 i parametry podléhajícího normálního rozdělení $\mu_{\ln FS_{sl}}$ a $\sigma_{\ln FS_{sl}}$. Shrnující přehled informací o parametrech faktoru bezpečnosti je v tabulce 2.2.

$\mu_{FS_{sl}}$	=	1.5
$\sigma_{FS_{sl}}$	=	0.21
$\mu_{\ln FS_{sl}}$	=	0.4
$\sigma_{\ln FS_{sl}}$	=	0.14

Tabulka 2.2: Výsledky výpočtu metodou *The first order second moment*

Nyní lze definovat pravděpodobnost spadnutí svahu pf jako pravděpodobnost, že stupeň stability FS_{sl} nabude z daného rozdělení hodnoty nižší než 1, tedy $P[FS_{sl} < 1]$. S ohledem na podléhající normální rozdělení ji můžeme vypočítat numerickou integrací funkce hustoty pravděpodobnosti viz (1.8) na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro zadanou úlohu je výsledná hodnota $pf = 0,02\%$. Kdybychom uvažovali, že stupeň stability bude mít namísto lognormálního rozdělení normální, pak je pravděpodobnost značně vyšší ($pf = 0,9\%$).

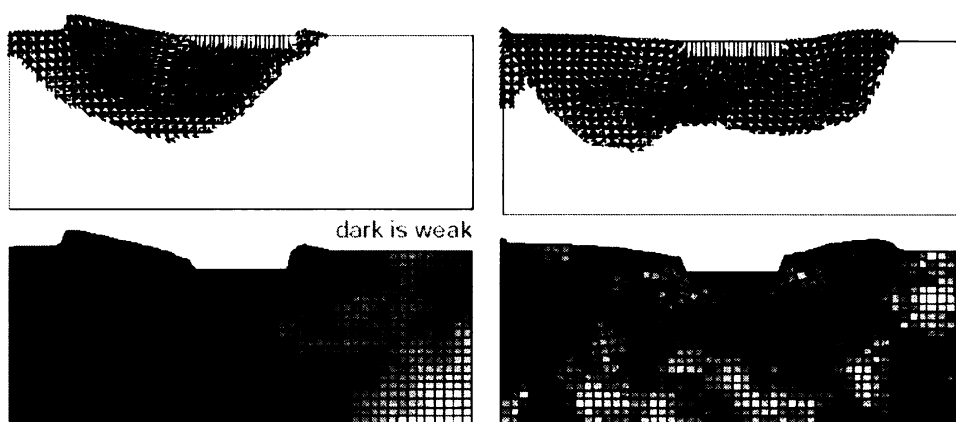
Úlohu lze samozřejmě řešit ještě druhým způsobem popsáním v sekci 2.1.2, tedy numerickou diferenciací. Tento způsob je ale vhodnější použít na komplikované problémy, kde je složitá funkce náhodných proměnných (zde funkce FS_{sl}) a její analytická derivace je obtížná. Postup řešení zde nebudu dále rozvádět pro jeho zdlouhavost a malý přínos pro další části mé práce. Pro další studium této metody mohu odkázat například na Griffiths (2006), nebo řešení pomocí metody *random finite elements* v Fenton a Tveten (2005).

2.2.2 Sedání plošného základu

Při aplikaci pravděpodobnostních metod na řešení únosnosti plošného základu je opět využívána teorie o náhodných polích. Například Fenton a Griffiths (2003) provádějí studii metodou *random finite elements*, kde jsou pevnostní charakteristiky zeminy náhodně rozmístěny ve výpočetní síti, a poté se provede výpočet metodou konečných prvků. Popisují prostorovou variabilitu zemin dvěma náhodnými poli (viz sekce 1.3). Zvláště pro úhel vnitřního tření ϕ a zvláště pro smykovou pevnost c .

Predikce únosnosti plošného základu jsou tradičně založeny na teorii plasticity, kdy zatlačujeme rigidní základ do měkkého materiálu. Tato teorie předpokládá homogenní materiál v podloží základu. Většina teorií pro výpočet únosnosti, například Prandtlova teorie, předpokládají smykovou plochu ve tvaru logaritmické spirály.

V praxi je ale smykový mechanismus daleko složitější než jednoduchá logaritmická spirála. Prostorová variabilita zemin predisponuje smykový mechanismus tak, že prochází nejslabším místem zeminy. Na obrázku 2.3 můžeme vidět plochu smykového porušení procházející zeminou s náhodně rozmístěnými pevnostními parametry. Tmavější místa mají nižší smykovou pevnost c a nižší úhel vnitřního tření ϕ .



Obrázek 2.3: Plocha smykového porušení pod plošným základem v zemině s náhodně rozmístěnými pevnostními parametry (Fenton a Griffiths 2003).

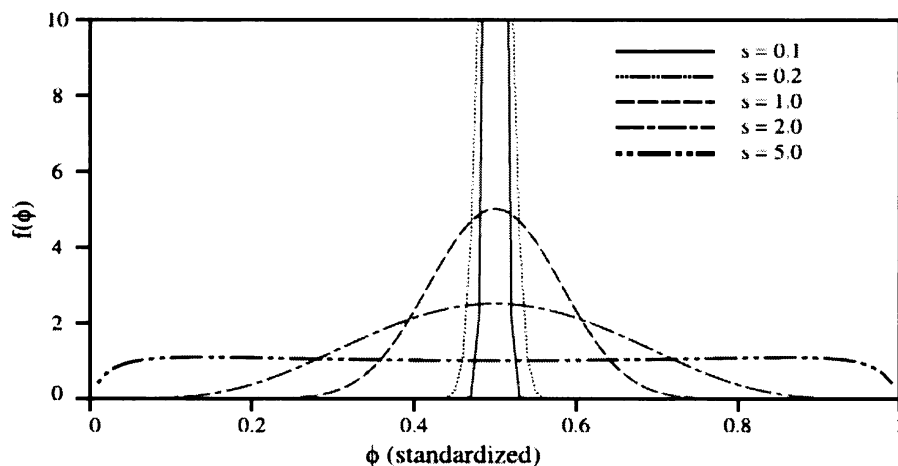
Reálné zeminy mají náhodně rozmístěné oba tyto parametry c i ϕ . V této studii bylo pro popis mechanických vlastností zeminy přijaté lognormální rozdělení $LN(\mu_c, \sigma_c)$. Bylo vybráno, protože dobře reprezentuje mechanické parametry, které neobsahují záporné hodnoty, a také pro jeho snadný převodní vztah na normální rozdělení.

Při popisu úhlu vnitřního tření ϕ lze předpokládat, že bude omezen spodní ϕ_{min} a horní hranicí ϕ_{max} , proto nelze použít přímo lognormálního ani normálního rozdělení.

Pro popis takto omezených náhodných veličin se často používá beta rozdělení (Weissstein 2003). Simulace využívající náhodné pole s veličinami, které mají beta rozdělení, jsou však numericky velmi náročné a těžkopádné (Fenton a Griffiths 2003). S ohledem na toto omezení autoři článku zvolili rozdělení

$$\phi(\tilde{x}) = \phi_{min} + \frac{1}{2}(\phi_{max} - \phi_{min}) \left[1 + \tanh \left(\frac{sG_{\phi}(\tilde{x})}{2\pi} \right) \right] \quad (2.8)$$

kde parametr s ovládá variabilitu úhlu vnitřního tření mezi spodní a horní hranicí. Tento efekt velikosti parametru s je znázorněn v grafu na obrázku 2.4, úhel vnitřního tření je zde standardizován a rozdělní má průběh v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro $s = 5$ je rozdělení podobné rovnoměrnému rozdělení a pro $s = 1$ již vypadá jako standardní normální rozdělení.



Obrázek 2.4: Ochraničené rozdělení úhlu vnitřního tření ϕ normalizované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (Griffiths a Fenton 2004).

Použití hodnoty parametru $s > 5$ vede k U - tvaru rozdělení, což je považováno za nerealistické. Změny parametru s mezi hodnotami 0,1 a 5 vedou k velkému množství různých typů pravděpodobnostního chování (Fenton a Griffiths 2003).

Prostorová korelace náhodných veličin je popsána Markovovou funkcí (1.19). Pomocí ní je vypočten korelační koeficient v závislosti na vzájemné vzdálenosti dvou náhodných veličin. Funkce také zavádí parametr korelační délky θ , což je maximální vzdálenost těchto dvou náhodných veličin v prostoru, na kterou mohou vykazovat vzájemnou závislost, tedy $\rho_{ij} \neq 0$. V tomto případě je prostorem dvourozměrná síť pro výpočet metody konečných prvků.

Z přírodních vlastností zemin je důvodné se domnívat, že jak úhel vnitřního tření, tak smyková pevnost budou mít podobné korelační délky. V této studii použili Fenton a

Griffiths (2003) shodné korelační délky.

$$\theta_\phi = \theta_{nc} \quad (2.9)$$

Otázkou zůstává vzájemná korelace mezi dvěma náhodnými poli pro c a ϕ . Lze očekávat, že konkrétní hodnoty jedné z charakteristik budou doprovázeny odpovídající hodnotou té druhé v podobném prostorovém uspořádání. Vzájemná korelace dvou náhodných polí (pro c a ϕ) je řešená dekompozicí kovarianční matice (Fenton 1994) obdobně jak je uvedeno v sekci 3.1.1 při popisu činnosti programu *random field*.

Další postup (Fenton a Griffiths 2003) byl výpočet parametrické studie metodou Monte Carlo (viz sekce 1.4). Pro výpočet metodou konečných prvků autoři použili ideálně plastického Mohr-Coulombova modelu. Model vyžaduje pět vstupních parametrů. Reálné by bylo simulovat všech pět vstupních parametrů jako náhodná pole. V parametrické studii provedené Fenton a Griffiths (2003) byly první tři parametry z tabulky 2.3 ponechány konstantními.

ν	=	k
E	=	k
ψ	=	k
c	=	$NL(\mu_c, \sigma_c)$
ϕ	=	$N(\mu_\phi, \sigma_\phi)$

Tabulka 2.3: Vstupní parametry Mohr-Coulombova modelu.

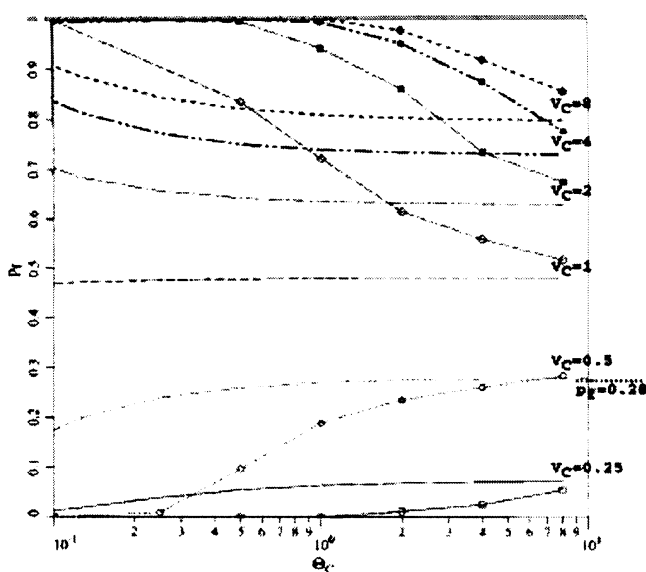
Výsledkem této parametrické studie byly grafy závislosti střední hodnoty únosnosti plošného základu na středních hodnotách μ_c, μ_ϕ a směrodatných odchylkách σ_c, σ_ϕ . Tyto grafy jsou otištěné v článku Fenton a Griffiths (2003) a nebudu je zde uvádět.

Pro další studium této problematiky bych dále doporučil článek Fenton a Griffiths (2001), kde autoři provedli srovnání Prandtlovy metody na výpočet únosnosti a metody *random finite elements*. Ve studii byla uvažována nedrénovaná jílovitá zemina s $\mu_{c_u} = 100$ kPa a $\sigma_{c_u} = 50$ kPa. Náhodným polem byla rozdělena pouze nedrénovaná smyková pevnost c_u .

Jedním z výsledků studie byl histogram faktoru únosnosti N_c obdržený numerickou analýzou společně s využitím Monte Carlo metody, kterým je proloženo výsledné rozdělení N_c a porovnáno s hodnotou obdrženou výpočtem podle Prandtlova vztahu. Vliv prostorové variability mechanických parametrů zemin na sedání plošného základu je zpracováno také v Fenton a Griffiths (2002).

2.2.3 Stabilita svahu

Aplikaci metody *random finite elements* uvedu na příkladu řešení stability svahu. Příklad je převzat z parametrické studie Griffiths a Fenton (2004) a je shodný s příkladem v mé další práci při testování programu *random field*. Vzor geometrie je na obrázku 3.2. Jde o svah z jílovité zeminy s nedrénovanou smykovou pevností c_u . Prostorová variabilita zeminy byla demonstrována náhodným polem generovaným ze smykové pevnosti c_u .

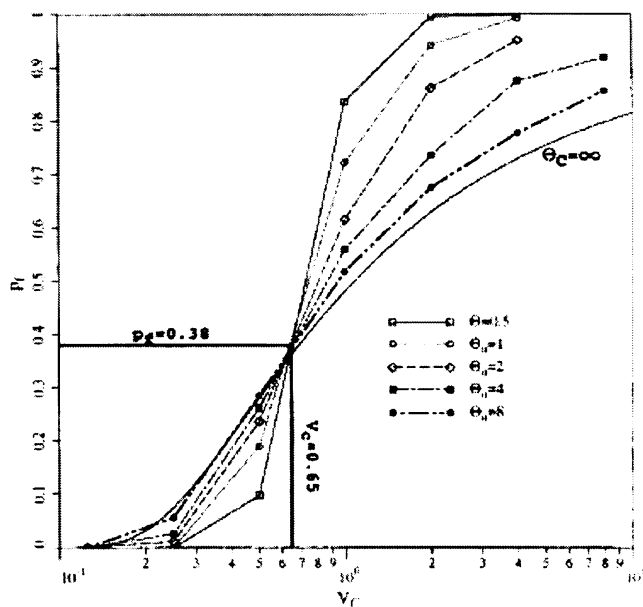


Obrázek 2.5: Závislost pravděpodobnosti pf na korelační délce Θ_C pro různé koeficienty variace V_C . Použito z Griffiths a Fenton (2004).

Smyková pevnost byla popsána lognormálním rozdělením a převedena do bezrozměrného koeficientu $C = c_u/(\gamma_{sat}H)$ kde H je výška svahu. V následujících parametrických studiích byla fixována střední hodnota $C = 0.25$ a byl zkoumán vliv variance smykové pevnosti na hodnotu řešení. Byla brána v úvahu také korelační délka θ_c opět v podobě bezrozměrného koeficientu $\Theta_c = \theta_c/H$.

Výsledky těchto studií můžeme vidět na obrázcích 2.5 a 2.6, kde je vidět vliv velikosti korelační délky Θ_C a variance hodnot na pravděpodobnost spadnutí svahu. Jednotlivé křivky byly obdrženy simulacemi metodou *random finite elements*. Podrobný popis obrázků je v sekci 3.4, kde jsou vysvětlené jednotlivé příčiny průběhu křivek. Tyto grafy zde uvádím hlavně z důvodu porovnání výsledků s obrázky 3.11 a 3.14, kde jsou výsledky simulací získané programem *random field* a *Tochnog*.

Při náhodném rozmístění pevnostních parametrů si mechanismus smykového porušení hledá nejslabší cestu materiálem. Toto chování způsobuje vyšší pravděpodobnost



Obrázek 2.6: Závislost pravděpodobnosti p_f koeficientu variance V_C pro různé hodnoty Θ_C . Použito z Griffiths a Fenton (2004)

spadnutí. Tradiční metody limitní rovnováhy, kde jsou zeminy isotropní s perfektní korelací, mohou vést k nadhodnocení pravděpodobnosti spadnutí svahu. Tento efekt je zřejmý z grafu na obrázku 2.5, kde pro zeminy s velkou variabilitou mechanických parametrů vzrůstá pravděpodobnost spadnutí p_f s klesající korelační délkou Θ_C .

Kapitola 3

Řešení stability svahu

V kapitole 3 budu popisovat postup řešení stability svahu s využitím teorie o náhodných polích. Jako osnovu pro postup studie jsem použil článek Griffiths a Fenton (2004). Z tohoto článku jsem převzal vstupní parametry výpočtů. To mi umožní jeden z cílů mé práce, jímž je vyhodnocení správnosti programů, které využívám pro numerické výpočty.

Autoři článku použili pro generování náhodných polí a výpočet metody konečných prvků vlastní software psaný v jazyce Fortran F95. Všechny tyto programy jsou volně šiřitelné bez nároků na autorská práva a je možno je stáhnout ve formě zdrojových kódů na internetových stránkách *Colorado school of mines*.

V mé práci byly pro výpočet použity dva programy. Pro generování náhodných polí program *random field*, jehož činnost bude popsána dále v textu. Pro výpočet metody konečných prvků program *Tochnog* (<http://tochnog.sourceforge.net/>), nebo v upravené podobě pro řešení geotechnických problémů na (www.natur.cuni.cz/uhi-gug/masin/tochnog/tochnog.html). Za pomoci těchto programů byla provedena parametrická studie na ukázkovém svahu. Byl zjišťován vliv hustoty sítě a korelační délky na výsledek analýzy. Je zde srovnání *random finite element method (RFEM)* a jednodušší pravděpodobnostní metody *single random variable (SFEM)*. V závěru této kapitoly je porovnání výsledků mých výpočtů s výsledky v Griffiths a Fenton (2004). Tím se prokáže nakolik použitý postup poskytuje spolehlivá řešení.

3.1 Program *random field*

Všechna náhodná pole využívaná v této práci jsou generované programem *random-field* (Mašín 2006). Tento program je napsán v jazyce C++. Postup, jakým dochází k vygenerování stacionárního pole a korelaci náhodných veličin vychází z článku

Kasama et al. (2006) a bude popsán v sekci 3.1.1. Program přímo spolupracuje s programem *Tochnog* pro výpočet MKP tím, že ovlivňuje jeho konfigurační a vstupní soubor v části pro materiálové skupiny, jak bude vysvětleno později.

Generování náhodného pole má více možností a podrobně se touto problematikou zabýval například Vanmarcke (1984).

3.1.1 Činnost programu.

Úkolem programu je náhodné vygenerování a přiřazení materiálových vlastností jednotlivým elementům sítě pro metodu konečných prvků tak, aby odpovídaly předem zvolenému pravděpodobnostnímu rozdělení.

Nejprve je nutné vygenerovat vektor náhodných čísel se standardizovaným normálním rozdělením. V programu je použitý generátor náhodných čísel podle Press et al. (1993) s názvem *ran1*. Jde o typ kongruentního generátoru obsahující navíc algoritmus, který promíchává výstupní náhodná čísla. Tento generátor vyhovuje většině obvyklých statistických testů na periodicitu a korelaci mezi výslednými náhodnými čísly, až do celkového počtu 10^8 členů posloupnosti náhodných číslic. Počet členů je v tomto případě závislý na náročnosti analyzovaného problému od kterého se odvíjí počet elementů v síti n . Pokud by bylo nutné získat posloupnost s větším počtem členů tak podle Press et al. (1993) je možné použít buď kombinace dvou generátorů a nebo některý ze složitějších generátorů. Například *ran2*, který je schopen vygenerovat náhodná čísla s periodou $m < 2 \times 10^8$.

Dále je nutné podle kap. 1.4 převést takto získaná náhodná čísla na posloupnost se standardizovaným normálním rozložením (1.8). Pro tuto transformaci byla použita *Box-Mullerova* metoda. V ní jsou definovány funkce (3.1), které transformují veličiny y_1, y_2 mající dvourozměrné rovnoměrné rozdělení z intervalu $(0, 1)$ na veličiny normálně rozdělené x_1, x_2 s $\sigma = 1$ a $\mu = 0$. Výpočtem Jakobiánu funkcí pro y_1, y_2 se můžeme přesvědčit, že náhodná čísla x_1, x_2 mají normální rozdělení.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2 \ln y_1} \cos 2\pi y_2 & \Rightarrow & y_1 = \left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right] \\ x_2 &= \sqrt{-2 \ln y_1} \sin 2\pi y_2 & \Rightarrow & y_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dalším užitečným postupem pro aplikaci (3.1) je, že nemusíme generovat dvě posloupnosti náhodných čísel y_1, y_2 , ale můžeme využít čísel v_1, v_2 . Ty obdržíme jako souřadnice náhodného bodu uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku souřadnic. Součet jejich čtverců $R^2 = v_1^2 + v_2^2$ má také rovnoměrné rozdělení a může být použit pro vyjádření vzdálenosti y_1 od počátku os. Druhou souřadnicí x_1 v

polárních souřadnicích je náhodný úhel $2\pi y_2$, který můžeme definovat s respektem na souřadnici v_1 . Cosinus a sinus z (3.1) můžeme nyní psát jako $v_1/\sqrt{R^2}$ a $v_2/\sqrt{R^2}$ (Press et al. 1993).

Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je vektorem statisticky nezávislých náhodných čísel s rozdělením $N(0, 1)$ (viz. část 1.4) obdrženy transformací funkcí (3.1) z čísel (y_1, y_2, \dots, y_n) majících rovnoměrné rozdělení.

Vektor náhodných proměnných \mathbf{g} se složkami g_1, g_2, \dots, g_n , (n je celkový počet elementů v síti) tvoří náhodnou komponentu v rovnici (3.5). Tento vektor obdržíme jako produkt násobení dolní trojúhelníkové matice \mathbf{S}^T s vektorem \mathbf{x} .

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}^T \mathbf{x} \quad (3.2)$$

Vzhledem k vlastnostem korelační matice \mathbf{K} , které jsou uvedené v kapitole 1.2 jako (1.16), je možné korelační matici rozložit Choleskyho dekompozicí (3.3) na dolní trojúhelníkovou matici \mathbf{S}^T a horní trojúhelníkovou matici \mathbf{S} .

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{K} \quad (3.3)$$

Jak názorně vyplývá z popisu korelační tabulky 1.1 je dolní trojúhelníková část korelační matice schopna dát informaci o korelačním koeficientu pro všechny elementy v síti.

Korelační koeficient mezi jednotlivými elementy je počítán pomocí markovovy funkce (1.19) na základě vzdálenosti jejich středů

$$x_{ij} = | \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j | \quad (3.4)$$

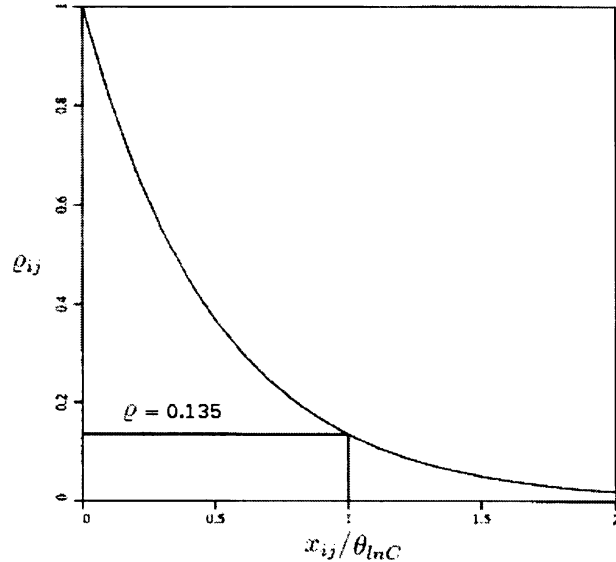
kde \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j jsou vektory jejich polohy. Průběh markovovy funkce můžeme vidět na obrázku 3.1. Je zde patrný exponenciální pokles korelačního koeficientu ρ v závislosti na rostoucí velikosti poměru vzdáleností mezi elementy x_{ij} a korelační délkou θ_{lnC} .

Touto funkcí je tedy generována korelační matice, která reprezentuje korelační koeficient mezi každým z elementů sítě a ρ_{ij} je korelační koeficient mezi elementy i a j .

Do jednotlivých elementů dané sítě pro výpočet analýzy jsou dosazeny parametry c_i (soudržnost c i -tého elementu) podle (3.5).

$$c_i = \exp(\mu_{lnC} + \sigma_{lnC} g_i) \quad (3.5)$$

Kde μ_{lnC} a σ_{lnC} jsou parametry podléhajícího normálního rozdělení (viz. (1.10) a (1.12)). Rovnice (3.5) do tohoto rozdělení zahrnuje náhodnou komponentu a zároveň



Obrázek 3.1: Průběh Markovovy funkce. Upraveno podle Griffiths a Fenton (2004).

transformuje normální rozdělení do lognormálního rozdělení pro c . Hodnoty g_i jsou komponenty vektoru \mathbf{g} , který je výsledkem Choleskyho dekompozice (3.3) korelační matice \mathbf{K} , viz (1.17).

Konkrétní parametry definující rozdělení jednotlivých náhodných proměnných si program *random field* načítá z konfiguračního souboru `param.txt`. Zde je uveden příklad souboru:

```
group_materi_plasti_mohrcoul  0 0 10    25 25 10    0 0 10
```

```
keep_fixed
group_type index -materi
group_materi_memory index -updated
group_materi_elasti_young index 10000
group_materi_elasti_poisson index 0.4
group_materi_density index 2.
```

Soubor lze rozdělit na dvě části. V první části nad příkazem `keep_fixed` jsou parametry ze kterých bude generováno náhodné pole. Pod příkazem `keep_fixed` jsou zbylé materiálové charakteristiky, které chceme ponechat jako konstantní. Každá charakteristika je označena proměnnou `index`, která se automaticky zaměňuje za konkrétní číslo materiálové skupiny (elementu). Každý parametr, ze kterého je generováno náhodné pole, (parametry nad `keep_fixed`, v tomto případě parametry

mohr - coulombovy obálky pevnosti) v pořadí úhel vnitřního tření ϕ , smyková pevnost c a úhel dilatance ψ), musí být udán třemi hodnotami. V pořadí zleva doprava jsou to střední hodnota μ , směrodatná odchylka σ a korelační délka θ . Konkrétně zde jsou např. pro soudržnost c udány hodnoty $\mu_c = 25$, $\sigma_c = 25$ a $\theta_c = 10$. Náhodné pole lze vytvořit i z jakékoli veličiny ležící pod příkazem `keep_fixed`. Stačí jen řádek přesunout do horní části souboru a správně definovat parametry rozdělení náhodné veličiny. Program *random field* sám roypozná počet parametrů modelu podle počtu zadaných trojic μ, σ, θ . Soubor pak bude mít tvar například:

```
group_materi_plasti_mohrcoul  0 0 10   25 25 10   0 0 10
group_materi_elasti_poisson  0.4 0.1 15
```

```
keep_fixed
```

```
...
```

Dalším vstupním souborem je `mesh.txt`. Zde je definována síť, používaná k výpočtu ve formátu obvyklém pro výpočet programem *Tochnog*. Na základě sítě definované v tomto souboru program *random field* sestaví korelační matici obsahující korelační koeficienty mezi každým z elementů. Je důležité poznamenat, že program si pro výpočet faktoru γ (viz sekce 1.3.3) v rámci výpočtu lokálně zprůměrovaných parametrů bere geometrii a velikost elementu s číslem 1. Vzhledem k tomu je tedy nutné, aby takto definovaný element neměl geometrii a rozměry nějakým způsobem deformované oproti ostatním elementům sítě. Při využití programu *random field* je nutno využít pravidelnou čtvercovou síť. Je to z toho důvodu, že faktor γ je počítán pro čtvercové elementy, pro něž je výpočet dvojného integrálu podle obr. 1.8 přímočarý. Výstupní soubory budou popsány v následující části.

3.1.2 Spolupráce programů *random_field* a *Tochnog*.

Jak už bylo dříve řečeno program *random_field* ovlivňuje vstupní soubor programu *Tochnog* v části, ve které jsou uvedeny materiálové charakteristiky. Výstupem programu je soubor `output.txt`, který obsahuje celou část týkající se materiálových charakteristik. Příklad souboru `output.txt` je následující:

```

element_group 1 1
group_materi_plasti_mohrcoul 1 0 18.8297 0

group_type 1 -materi
group_materi_memory 1 -updated
group_materi_elasti_young 1 10000
group_materi_elasti_poisson 1 0.4
group_materi_density 1 2.

element_group 2 2
group_materi_plasti_mohrcoul 2 0 15.8799 0

group_type 2 -materi
group_materi_memory 2 -updated
...
end_data

```

V prvním řádku je číslo materiálové skupiny (pro každý element sítě je vytvořena jedna materiálová skupina). Druhý řádek obsahuje zadání parametru Mohr Coulombova modelu ve stejném pořadí (ϕ, c, ψ) jako v souboru `param.txt`, nikoliv už jako trojici čísel kde je definováno μ, σ, θ , ale v syntaxi obvyklé pro program *Tochnog*. Jde už o konkrétní hodnotu náhodné veličiny v tomto příkladě $c_1 = 18.827, c_2 = 15.8799, \dots$. Obsah tohoto souboru je výsledkem parametrů zadaných v předchozím příkladě souboru `param.txt`. Z toho vyplývá, že $\phi = 0$ a $\psi = 0$, jelikož pro oba tyto parametry byla zadána nulová střední hodnota a směrodatná odchylka. Každý soubor `output.txt` končí heslem `end_data`, jež v programu *Tochnog* ukončuje datovou část vstupního souboru.

Dalším výstupním souborem je `mesh.res`, kde jsou pod sebou uspořádané vektory náhodných veličin společně s vektorem pořadových čísel uzlů (jednotlivá náhodná pole). Tento soubor lze využít k prohlížení výsledků výpočtu v post procesorovém programu *GiD*. Zde je nutno ještě vytvořit soubor s informacemi o síti `mesh.msh` ve formátu srozumitelném pro *GiD*. Nejjednodušším způsobem jak získat soubor `mesh.msh` je zkopírování souboru `*.flavia.msh` do souboru `mesh.msh`. Soubor `*.flavia.msh` vznikne jako jeden z produktů výpočtu MKP programem *Tochnog* a slouží jako informace o síti pro zobrazení výsledků analýzy v *GiD*.

Je dobré si uvědomit, že náhodné pole generované programem *random field* přiřazuje hodnotu náhodných veličin jednotlivým středům elementů sítě, viz předchozí část tak jak je vyžaduje Program *Tochnog*. Při prohlížení výsledků v *postprocessingu* programem *GiD* jsou hodnoty převedeny do uzlů sítě. Do konkrétního uzlu se vždy přidělí průměrná hodnota z okolních elementů. Program pak vytvoří izolinie hodnot

náhodných veličin v poli, při čemž dochází k určitému "zhlazení" náhodného pole jak je můžeme vidět na ukázce dvou svahů na obrázku 3.9.

Ukázka ze souboru `mesh.res`:

```
field 0          1 0 1 1 1
1 0
2 0
3 0
...
...
891 0
field 1          1 0 1 1 1
1 18.8297
2 18.8297
3 18.8297
...
...
891 53.3278
```

Vstupní soubor pro výpočet programem *Tochnog* je tedy rozdělen na dva soubory. První soubor obsahuje inicializační část společně s částí datovou, ve které chybí konstanty materiálového modelu. Druhým souborem je `output.txt` popsáný výše v textu. Celý postup výpočtu jedné realizace metody Monte Carlo se provádí v pořadí:

- a) Načtení parametrů rozdělení náhodných veličin ze souboru `param.txt` a získání informací o použité síti ze souboru `mesh.txt` (program *random field* provede tuto část automaticky a není ji nutno ručně definovat).
- b) Generování náhodného pole programem *random field* a vytvoření souborů `output.txt` a `mesh.res`.
- c) Spojení první částí vstupního souboru programu *Tochnog* s `output.txt` a vytvoření vstupního souboru pro *Tochnog*,*.dat s následným spuštěním výpočtu.

Výpočet metody Monte Carlo spočívá v opakování dostatečného počtu realizací, aby bylo dosaženo požadované přesnosti odhadu hledaného čísla jak bylo uvedeno v kap. 1.4. Je tedy nutné postup mnohonásobně opakovat a zaznamenat výsledky jednotlivých analýz. V této kapitole se budu zabývat výpočtem stability svahu. Konkrétně pro zaznamenávání výsledků této úlohy jsem použil program *final_time* (Mašín 2006). Program *final_time* čte čas výpočtu z prvního sloupce souboru `tn.dvd`. Z toho důvodu je nutné mít nastavené zapisování výsledku výpočtu ve vstupním souboru pro *Tochnog* v odpovídajícím formátu. Tedy čas se musí zapisovat do prvního sloupce.

Program *final_time* pak zaznamená délku času výpočtu do prvního sloupce souboru `final_time.txt`. V druhém sloupci je celkový počet simulací v posledním třetím

sloupci je počet nestabilních (spadlých) svahů. Pro výpočet různých geotechnických problémů je třeba pokaždé použít jiný způsob zaznamenávání výsledků výpočtu.

```
#!/bin/bash

c=0
while [ $c -lt 500 ]; do

    random_field
    cat slope_noparam.dat output.txt > slope_randomcalc.dat
    tochnog slope_randomcalc.dat
    final_time

    let c=c+1
done
```

Toto je ukázka jednoho z možných způsobů jak zautomatizovat výpočet metody Monte Carlo v prostředí unixového operačního systému. Bylo použito programování příkazového interpretu `bash`. V podstatě jsou zde ve smyčce obsaženy všechny kroky uvedené výše včetně zápisu výsledků výpočtu programem `final_time`.

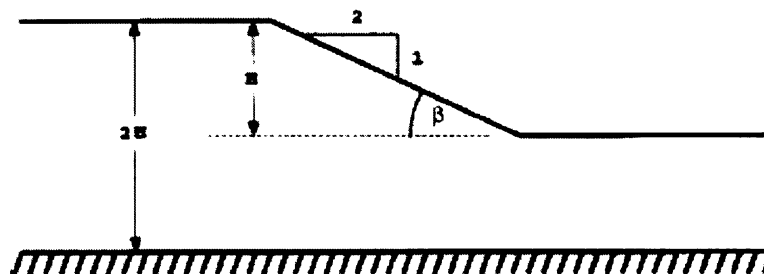
3.2 Zadání parametrů

Geometrie analyzovaného svahu je na obr 3.2. Je dána parametry β a H . Sklon svahu je zvolen 1 : 2, což reprezentuje úhel $\beta = 26.6^\circ$. Materiálem je nedrénovaný jíl se smykovými parametry $\phi_u = 0$ a c_u . Satureovaná hustota γ_{sat} je ponechána konstantou. V článku Griffiths a Fenton (2004) je nedrénovaná smyková pevnost c_u definována v podobě bezrozměrného 3.6 koeficientu C jako náhodná proměnná.

$$C = \frac{c_u}{\gamma_{sat}H} \quad (3.6)$$

Ve svých výpočtech jsem použil přímo smykovou pevnost c_u . Hodnota $\gamma_{sat} = 2 \text{ g/cm}^3$. Úhel vnitřního tření je pro nedrénovanou smykovou pevnost roven 0. Výška svahu je $H = 5 \text{ m}$.

Třetím parametrem je korelační délka θ_{lnC} . Ve studii je sice použito pole s lognormálním rozdělením, ale stále lze uvažovat podléhající normální (Gaussovo) rozdělení, viz sekce 1.1.3. Korelační délka je stanovena se zřetelem na $\ln C$. Má stejné vlastnosti jak již bylo uvedeno v sekci 1.3.2 a stanovuje tedy maximální vzdálenost na kterou jsou náhodné proměnné ovlivněné korelací v podléhajícím normálním



Obrázek 3.2: Znázornění geometrie svahu použitého v analýze. Upraveno podle Griffiths a Fenton (2004).

rozdělení. Reálně je většinou velmi malý rozdíl mezi θ_C pro původní rozdělení a θ_{lnC} . Z toho důvodu se často zaměňují (Griffiths a Fenton 2004). Zde je podle výše zmíněného článku korelační délka převedena na bezrozměrný parametr Θ_C vydělením výškou svahu H .

$$\Theta_C = \frac{\theta_{lnC}}{H} \quad (3.7)$$

Dalším krokem byla volba vhodné sítě. První výpočty jsem realizoval s trojúhelníkovými elementy se třemi integračními body. To se ukázalo jako nevhodné řešení v důsledku numerické komplikovanosti při výpočtu faktoru γ z dvojného integrálu, viz obrázek 1.8. Pro zjednodušení výpočtu faktoru γ byl uvažován na místo trojúhelníkového elementu element čtvercový o stejné ploše. Tento postup však vedl k značným nepřesnostem při stanovování korelační délky a odhadu pravděpodobnosti v parametrické studii.

Proto jsem zvolil čtvercový element s devíti integračními body. Jedinou nevýhodou této volby je, že čas výpočtu se oproti trojúhelníkovému elementu značně prodloužil. Při velkém počtu simulací tak může jedna analýza trvat týdny.

Zjištění kvality (hustoty) sítě jsem provedl na základě údajů v článku Griffiths a Fenton (2004). Na základě *single random variable* metody popsané již v části 2.1.1 a Taylorovo proužkové metody, nebo metody limitní rovnováhy byla sestavena tabulka 3.1, která udává lineární vztah mezi faktorem bezpečnosti a velikostí c_u (při použití všech ostatních parametrů jak již byly zadány v předchozí sekci).

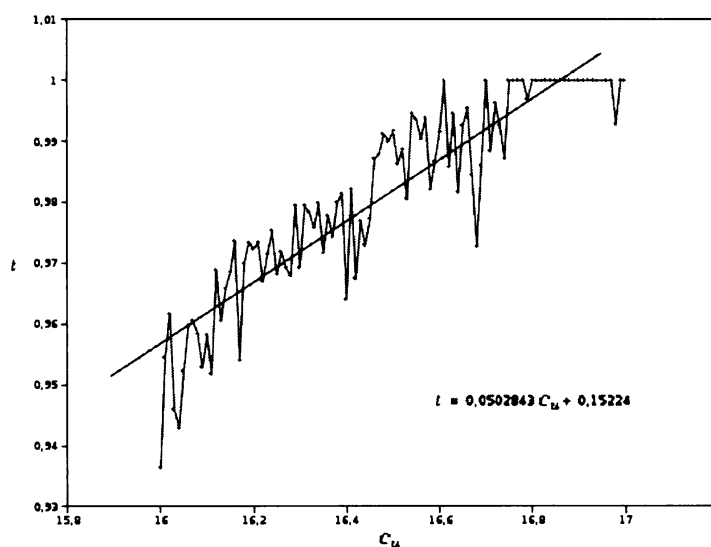
Z tabulky je vidět logické vzrůstání faktoru bezpečnosti v závislosti na rostoucím c_u a $c_u = 17$ kPa odpovídá hodnota faktoru bezpečnosti 1. Z toho můžeme usoudit, že pravděpodobnost spadnutí experimentálního svahu je pro *single random variable* metodu rovna pravděpodobnosti, že c_u nabude hodnoty $c_u < 17$ z daného rozdělení (v tomto případě lognormální rozdělení). Lze tedy říct, že svah s $c_u \geq 17$ nespadne.

c_u [kPa]	FS
15	0.88
17	1.00
20	1.18
25	1.47
30	1.77

Tabulka 3.1: Lineární vztah mezi faktorem bezpečnosti a c_u podle Griffiths a Fenton (2004)

Pokud tedy provedeme analýzu s danou sítí pro různé hodnoty c_u postupně se blíží k $c_u = 17$ obdržíme pro určitou hodnotu \tilde{c}_u pravděpodobnost spadnutí svahu $p_f \cong 0$ tak nízkou aby jsme mohly říct, že svah je stabilní. Čím kvalitnější bude zvolená síť, tím se hodnota \tilde{c}_u bude blížit teoretické hodnotě $c_u = 17$.

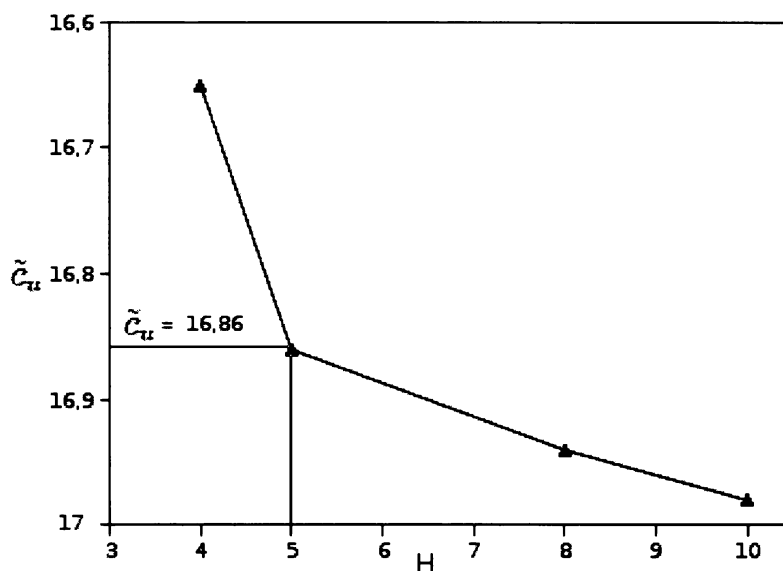
Pro testování kvality sítě jsem tedy zvolil postup provedení analýz na intervalu $c_u = \langle 16, 17 \rangle$ s krokem $\Delta c_u = 0.01$. Výsledek tohoto experimentu pro síť o hustotě $H = 5$ můžeme vidět na obrázku 3.3. Na ose t je výpočtový čas kterého dosáhla analýza před překročením maximální iterační chyby. Pokud nebyla iterační chyba překročena až do $t = 1$ analýza je ukončena a svah je prohlášen za stabilní.



Obrázek 3.3: Stanovení hodnoty \tilde{c}_u pro síť $H = 5$.

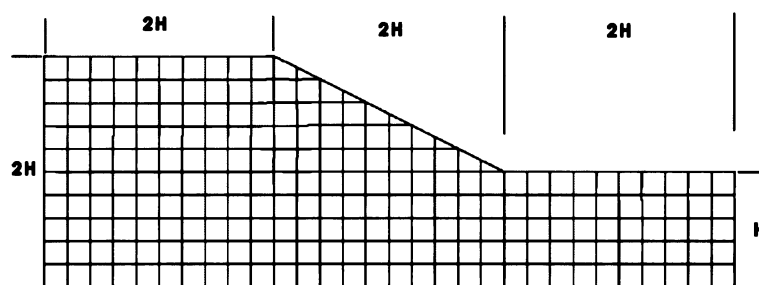
Hodnotu \tilde{c}_u jsem definoval jako průsečík lineární regrese proložené body grafu t versus c_u (obr. 3.3) s přímkou $t = 1$. Výpočtem z rovnic $t = 1$ a rovnice regrese obdržíme hodnotu $\tilde{c}_u \cong 16,86$. Tuto hodnotu jsem uznal jako dostatečně přesnou a síť jsem

využil k dalším výpočtům.



Obrázek 3.4: Efekt různých hodnot H sítí na přesnost výpočtu.

Z obrázku 3.4 je patrné, jak se zvyšující se H hodnota \tilde{c}_u konverguje k $\tilde{c}_u = 17$. Je třeba ale brát v úvahu značně se zvyšující čas nutný k výpočtu jedné realizace Monte Carlo. Pokud se například doba výpočtu u jedné realizace prodlouží o 70% pak to může znamenat neúměrné nároky na čas potřebný pro dokončení všech realizací (například více než 1000 simulací).



Obrázek 3.5: Znárodnění sítě použité ve výpočtech.

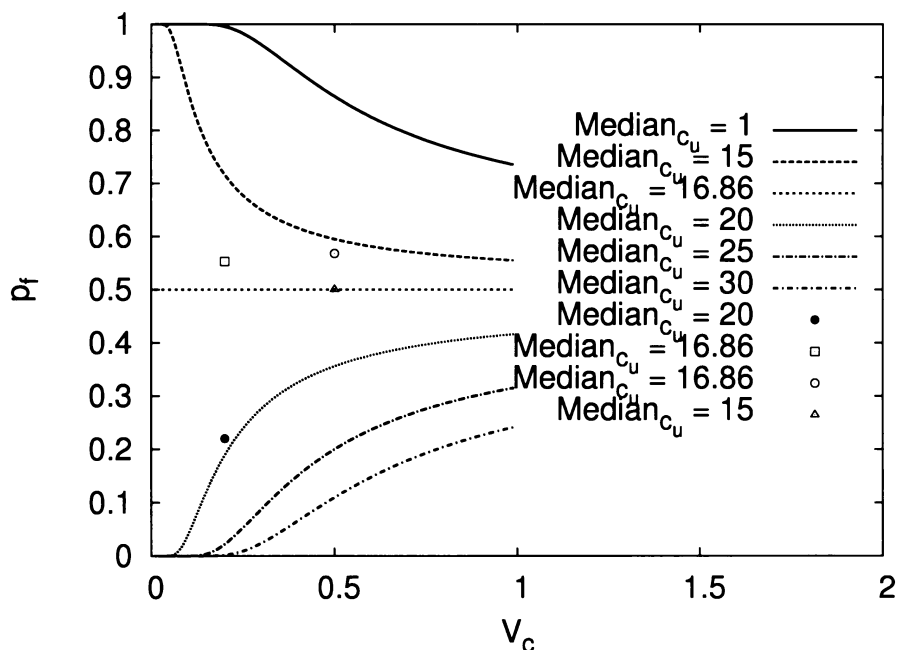
Na obrázku 3.5 je konečná podoba sítě kterou používám ve všech následujících výpočtech v sekcích 3.3 a 3.4. Síť jsem zvolil na základě analýzy přesnosti výpočtu v předchozím textu a zvažování časové náročnosti vzhledem k potřebě velkého počtu

analýz metodou Monte Carlo. Parametr H má velikost $H = 5$ a rozměr společně s geometrickým tvarem sítě vychází ze svahu na obrázku 3.2, který je převzat z článku Griffiths a Fenton (2004).

3.3 Studie single random variable

Single random variable metoda zde bude prezentována jako generování homogenních svahů $\theta_{\ln C} \rightarrow \infty$, kde každá z realizací má přidělenou náhodnou hodnotu c_u . Pravděpodobnost p_f , že svah spadne je tedy v tomto případě rovna $P[c_u < 16.86]$ pro jakékoliv zvolené parametry lognormálního rozdělení (1.9).

Podle článku Griffiths a Fenton (2004) jsem provedl studii vlivu V_{c_u} na pravděpodobnost spadnutí svahu p_f . Výsledky jsou zobrazeny na obrázku 3.6. Grafu z tohoto obrázku jsem dosáhl postupnou numerickou integrací při měnícím se V_{c_u} s malým ΔV_{c_u} a jednotlivých hodnotách $median_{c_u}$ (1.12). Je zde vidět trend, kdy při klesajícím V_{c_u} dochází k velkým změnám pravděpodobnosti spadnutí svahu p_f .



Obrázek 3.6: Teoreticky vypočtená p_f při různém V_{c_u} pro rozdílné hodnoty $median_{c_u}$ a reálné simulace metodou *single random variable*

Můžeme si všimnout, že pokud hodnota medianu překročí hranici $median_{c_u} = 16.86$ pravděpodobnost spadnutí svahu p_f rychle roste s klesajícím V_{c_u} a naopak. Toto chování jsem již vysvětlil v sekci 2.1.1 a proto ho zde nebudu již více rozvádět.

V programu *random field* při zadávání korelační délky nelze zadat přímo $\theta_C = \infty$. Nicméně můžeme zadat nějaké vysoké číslo jako θ_C a tím dosáhnout stejného efektu tzn. (korelační koeficient mezi elementy je vždy na zanedbatelné hodnotě v porovnání s přesností výpočtu). V případě, že je zadané číslo příliš vysoké, pak korelační matice obsahuje jen jednotky. Determinant korelační matice $|\mathbf{K}| = 0$ a vlastní čísla $\lambda \neq 0$. Z toho vyplývá, že matice není pozitivně definitní a nelze ji rozložit Choleskyho dekompozicí, viz (3.3). V tomto případě program *random field* vypíše následující chybové hlášení:

```
DCHDC returned INFO = 1
This means the matrix is not positive definite.
```

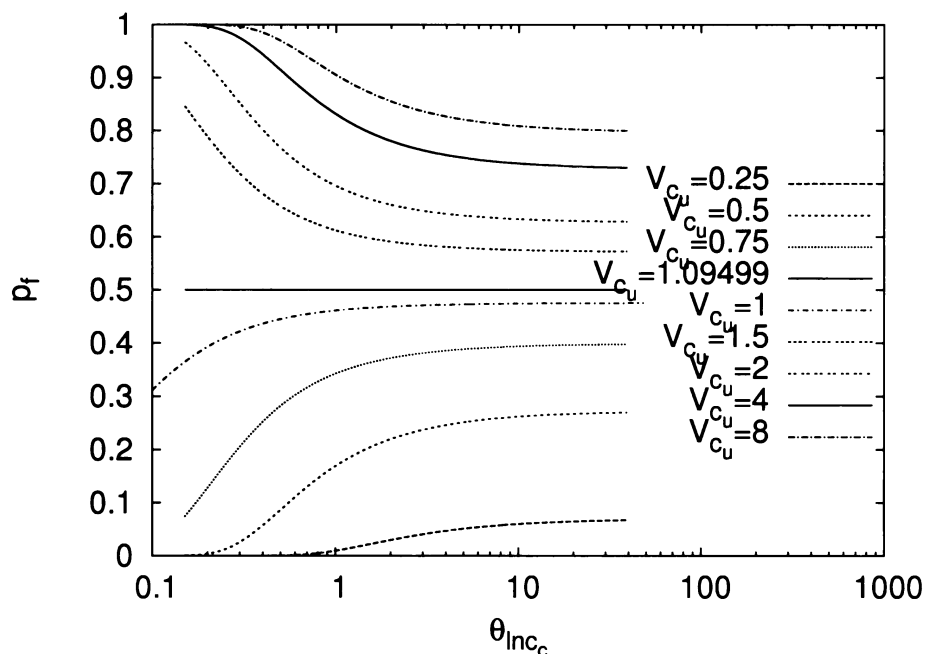
Tyto teoretické předpoklady poskytly dobrou možnost k otestování programu *random field* před složitějšími výpočty metodou *random finite element*. V grafu na obrázku 3.6 je také vidět porovnání výsledků praktických analýz s teoretickým výpočtem numerickou integrací obr. 3.6. Lze říci, že bylo dosaženo relativně přesných odhadů pravděpodobnosti p_f metodou Monte Carlo. Nepřesnosti ve výsledcích jsou přirozeným jevem z důvodu nedostatečného počtu simulací m a chybou vzniklou oscilací výsledků vzhledem k použité síti (obr. 3.3). Při $m \rightarrow \infty$ by se odhadovaná p_f stále více blížila teoretické hodnotě.

3.4 Metoda *random finite-element*

Během této práce jsem již využíval všechny teoretické předpoklady o náhodných polích, jak byly popsány v úvodu této kapitoly a v průběhu sekce 1.3. Prostorová variabilita mechanických vlastností jílovité zeminy byla pro tyto analýzy popsána jako náhodné pole generované pro nedrénovanou smykovou pevnost c_u .

Teoretické křivky na obrázku 3.7 ukazují pravděpodobnost spadnutí svahu p_f jako funkci $\theta_{\ln c_u}$. Byl uplatněn přístup metody *single random variable* s lokálně zprůměrovanými parametry. Lokální zprůměrování parametrů lognormálního rozdělení bylo provedeno shodně s postupem uvedeným v sekci 1.3.3. Pravděpodobnost spadnutí svahu je definována stejně jako v předchozím případě tzn. $P[c_u < 17]$ pro použitou síť $P[c_u < 16, 86]$. Numerická integrace funkce byla provedena úpravou programu *random_field*, který byl poté schopen integrovat funkci hustoty pravděpodobnosti (1.9) lognormálního rozdělení v závislosti na změně $\theta_{\ln c_u}$.

Tento postup byl aplikován pro různé hodnoty V_{c_u} . Speciální hodnotou koeficientu variace V_{c_u} byla hodnota při které $P[c_u < 16, 86] = 0, 5$. Tuto speciální hodnotu



Obrázek 3.7: Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na korelační délce $\theta_{\ln c_u}$ s fixovanou střední hodnotou $\mu_{c_u} = 25$.

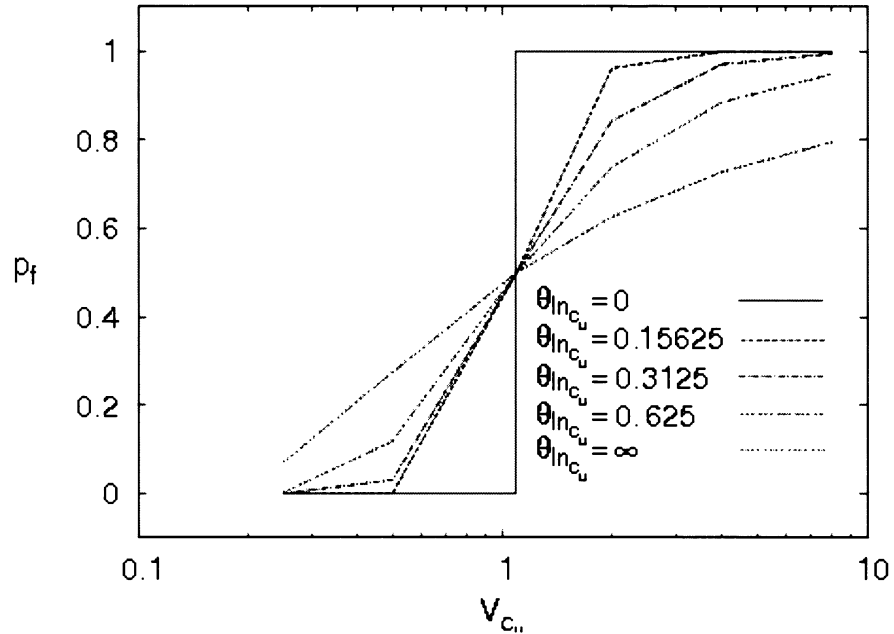
$$V_{c_u} = 1.09499 \quad (3.8)$$

jsem vypočetl ze vztahu (1.12) a inverzních rovnic k rovnicím (1.10) a (1.11). Vychází z hodnoty medianu $median_{c_u} = 16,86$. Můžeme si všimnout, že křivky vykazují podobný trend poklesu nebo nárůstu p_f jako na obrázku 3.6. Vyšší hodnoty V_{c_u} než speciální hodnota $V_{c_u} = 1.09499$ vedly k tomu, že pravděpodobnost $p_f \rightarrow 1$ a nižší hodnoty V_{c_u} vedly ke snižování $p_f \rightarrow 0$.

Obrázek 3.8 názorně ukazuje vliv prostorové korelace v rozmezí $0 \leq \theta_{\ln c_u} \leq \infty$. Jde o data z obrázku 3.7 vytištěná do grafu opačným způsobem. Můžeme zde vidět jak se všechny křivky protínají v bodě $V_{c_u} = 1.09499$, $p_f = 0,5$. Pro $\theta_{\ln c_u} \rightarrow 0$ si můžeme všimnout náhlého nárůstu pravděpodobnosti z $0 \rightarrow 1$. Ještě bych znovu podotknul, že výsledky prezentované v těchto grafech byly získány na základě lokálně zprůměrovaných parametrů pro vzorovou síť (viz obr. 3.5) metodou *single random variable*. Tím byl do numerické integrace funkce hustoty pravděpodobnosti (1.9) zaveden vliv faktoru γ a korelační délky $\theta_{\ln c_u}$.

Při testování programu *random field* jsem opět vycházel z článku Griffiths a Fenton (2004), parametrické studie jsou provedeny při stejných hodnotách μ_{c_u} , V_{c_u} a $\theta_{\ln c_u}$.

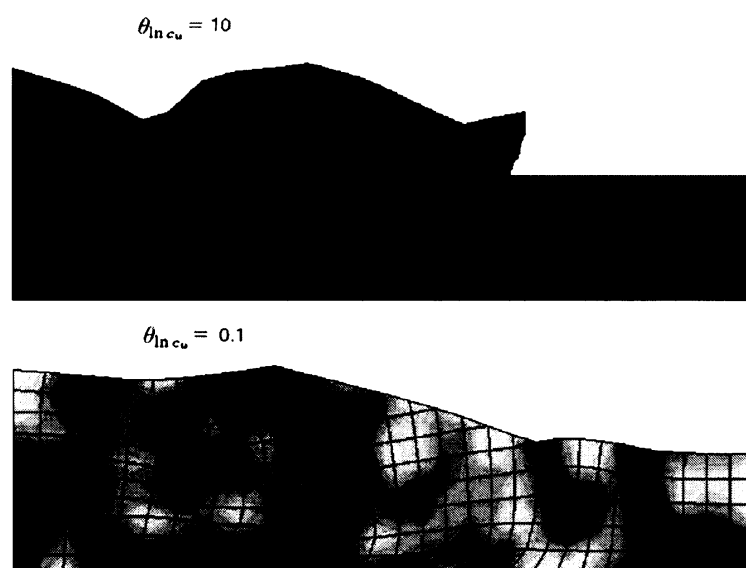
Při samotném výpočtu stability svahu dochází k postupnému zvyšování gravitační



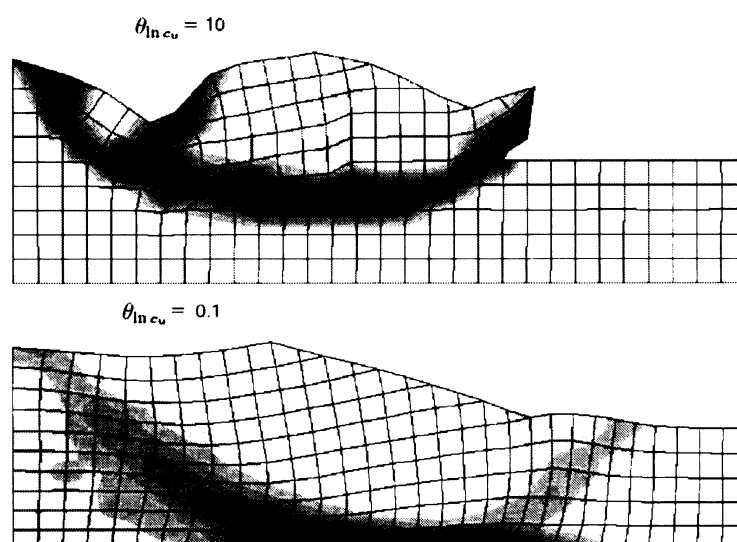
Obrázek 3.8: Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na změně koeficientu variace V_{c_u} při fixované střední hodnotě $\mu_{c_u} = 25$.

ho zrychlení až do hodnoty $a_g = 10 \text{ ms}^{-2}$. Během tohoto kroku se nevytváří smyková plocha v klasickém slova smyslu, kterou by bylo možno popsat např. nějakou vhodnou funkcí. Dochází k tomu, že si smyková plocha hledá nejslabší cestu skrze zeminu podobně jako je tomu v přírodních podmínkách. Tento jev je demonstrován na obrázcích 3.9 a 3.10 při dvou různých velikostech korelační délky $\theta_{lnc_u} = 0.1$ a $\theta_{lnc_u} = 10$. Na obrázku 3.9 je zřetelně vidět vliv korelační délky na celkovou "uhlazenost" nebo "drsnot" náhodného pole jak bylo popisováno v sekci 1.3.3. Jsou zde dva náhodné svahy vygenerované při při různé veliké korelační délce θ_{lnc_u} . Následně na obrázku 3.10 je zobrazena míra plastických přetvoření κ , která ukazuje různý průběh smykové plochy. Můžeme si všimnout, že při nižší korelační délce je smyková plocha méně výrazná a k zplastizování materiálu došlo pozvolně v daleko větší ploše. Naproti tomu při vyšší korelační délce je smyková plocha podstatně více nucena si hledat nejslabší cestu skrz materiál, z toho důvodu je ostřeji omezena.

Díky tomu poskytuje analýza metodou *random finites elements* daleko kvalitnější popis zeminy než tradiční metody limitní rovnováhy, nebo metoda ϕ - c redukce. Pokud bereme v ohledu ještě mnohanásobné opakování jednotlivých realizací v rámci metody Monte Carlo, pak v podstatě analyzujeme velké množství variant smykových ploch, které nelze konvenčními metodami nikdy zcela vystihnout. Dva příklady spadlých svahů jsou na obrázku 3.9. Můžeme si všimnout, že na každém z těchto dvou



Obrázek 3.9: Ukázka dvou spadlých svahů při různé korelační délce. Tmavé barvy místa znamenají nižší smykovou pevnost, deformace sítě je násobena faktorem 10.

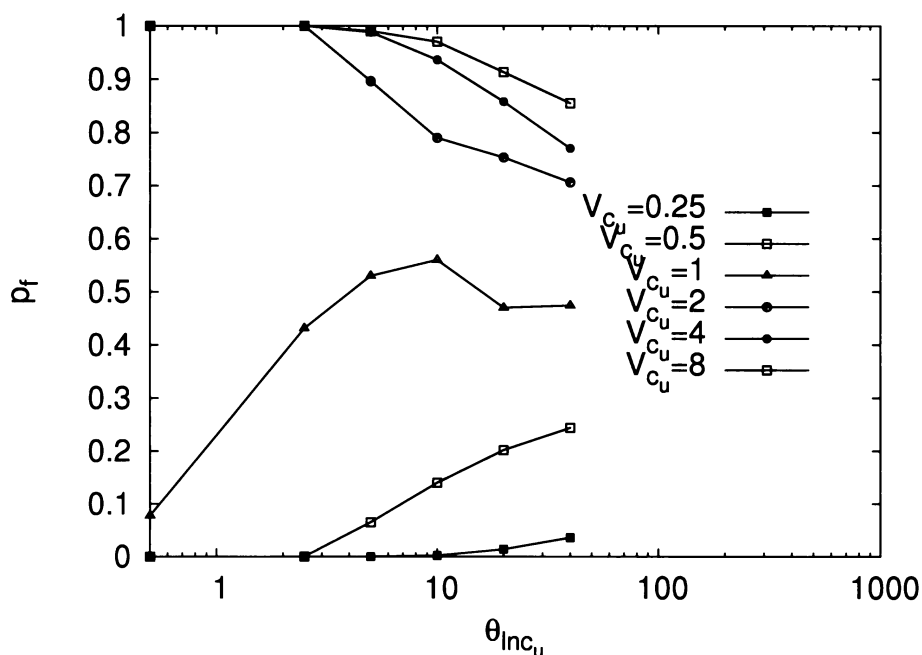


Obrázek 3.10: Svahy z obrázku 3.9, s zobrazením míry plastických přetvoření κ . Tmavé barvy znamenají místa kde došlo k plastickému přetvoření materiálu.

svahů je vyvinutá jiná smyková plocha a lze tedy říci, že během simulací Monte Carlo vystihneme většinu možných případů tvaru smykové plochy. V závěru této kapitoly

na obrázku 3.15 jsou zobrazeny 3 svahy s náhodně rozmístěnou smykovou pevností a následně s deformacemi, které vznikly gravitačním přitížením. Střední hodnota, směrodatná odchylka a korelační délka je u všech třech stejná, jedná se pouze o tři vybrané realizace z velkého množství realizací metody Monte Carlo. Různé tvary smykového porušení vznikají pouze jako důsledek náhodného rozmístění smykové pevnosti.

V článku Griffiths a Fenton (2004) byly provedeny parametrické studie vlivu korelační délky $\theta_{\ln c_u}$ a koeficientu variace V_{c_u} na pravděpodobnost spadnutí svahu a v sekci 3.4 je obecný popis metody *random finites elements*, který mimo jiné čerpá také z tohoto článku. Zde se omezím jen na vlastní výpočty a výsledky. Při všech těchto studiích byla fixována střední hodnota $\mu_{c_u} = 25$.



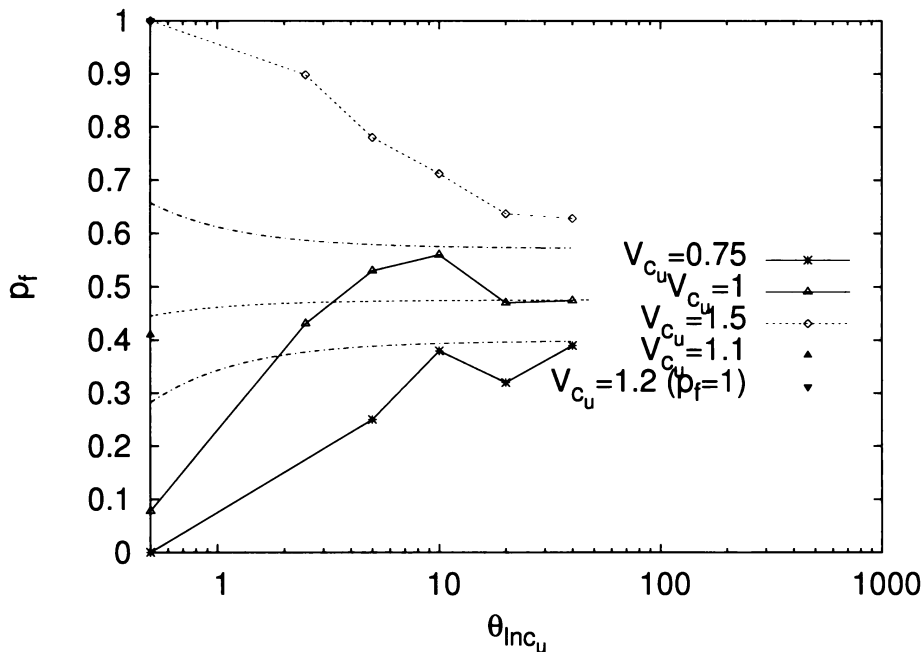
Obrázek 3.11: Monte Carlo analýzy provedené programem *random field* podle hodnot z článku Griffiths a Fenton (2004).

Na obrázku 3.11 jsou body jednotlivých simulací vypočtené metodou Monte Carlo při daných parametrech V_{c_u} a $\theta_{\ln c_u}$. Chování jednotlivých simulací opět vykazuje dva aspekty. Pokud roste V_{c_u} pak $p_f \rightarrow 1$ a pokud V_{c_u} klesá pak $p_f \rightarrow 0$, což je podobné chování jako u teoretických křivek obdržných metodou *single random variable* při použití lokálně zprůměrovaných parametrů (na obrázku 3.7 a v souladu s pozorováním, které popsal Griffiths a Fenton (2004), viz sekce 3.4).

Pokud srovnáme obrázky 2.5 a 3.11 můžeme si všimnout, že křivka pro $V_{c_u} = 1$ vykazuje značné odchylky oproti výpočtům v článku. Je to dáno tím, že hodnota

koeficientu variace je blízká speciální hodnotě pro moji síť (viz. (3.8)) a projevuje se zde vysoká citlivost na hodnoty zadaných vstupních parametrů.

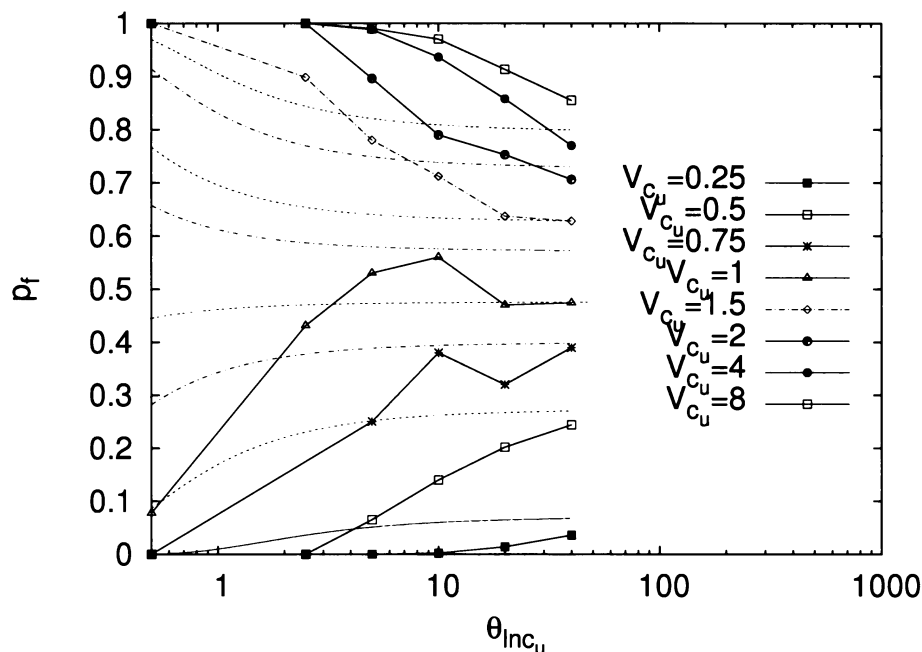
Z toho důvodu jsem ještě provedl parametrickou studii pro další dvě hodnoty koeficientu variance $V_{c_u} = 0,75$ a $V_{c_u} = 1,5$. Tak aby nižší, nebo vyšší hodnota prokazatelně držela trend se snižujícím se $\theta_{\ln c_u}$ i snižující se pravděpodobností p_f a naopak, bez nepravidelností ve svém průběhu jak je tomu pro $V_{c_u} = 1$. Pro lepší zjištění citlivosti jsem dále vypočetl vždy jednu simulaci pro $\theta_{\ln c_u} = 0,1$ s $V_{c_u} = 1,1$ a $V_{c_u} = 1,2$, které jsou na grafu z obrázku 3.12 zobrazeny jako body na vertikální ose p_f . Podle polohy těchto bodů a bodů křivek pro $V_{c_u} = 1,1$ a $V_{c_u} = 1,2$ pro $\theta_{\ln c_u} = 0,1$ je dobře patrné jakým způsobem se mění p_f při $\theta_{\ln c_u} \rightarrow 0$.



Obrázek 3.12: Vliv citlivosti p_f spadnutí na vstupní parametry blízkí se $V_{c_u} = 1.09499$.

Dále můžeme pozorovat "vyhlazení" průběhu křivek ve srovnání s $V_{c_u} = 1$. To je způsobeno právě nižší citlivostí na vstupní hodnoty, která klesá čím více se V_{c_u} liší od $V_{c_u,spec}$. Do jisté míry ale také tím, že náhodné hodnoty c_u jsou při všech simulacích více vzdálené hodnotě $V_{c_u,spec}$. Tím se při nižším počtu simulací m dosáhne jednoznačnějšího a přesnějšího odhadu p_f .

Pro všechny příklady V_{c_u} , můžeme pozorovat konvergenci *random finite elements* metody k metodě *single random variable* s lokálně zprůměrovanými parametry pro rostoucí korelační délku $\theta_{\ln c_u}$. Obrázek 3.13 ukazuje přímé porovnání mezi obrázky 3.8 a 3.11. Konvergence je na něm dobře patrná a pro $\theta_{\ln c_u} = \infty$ koresponduje tato



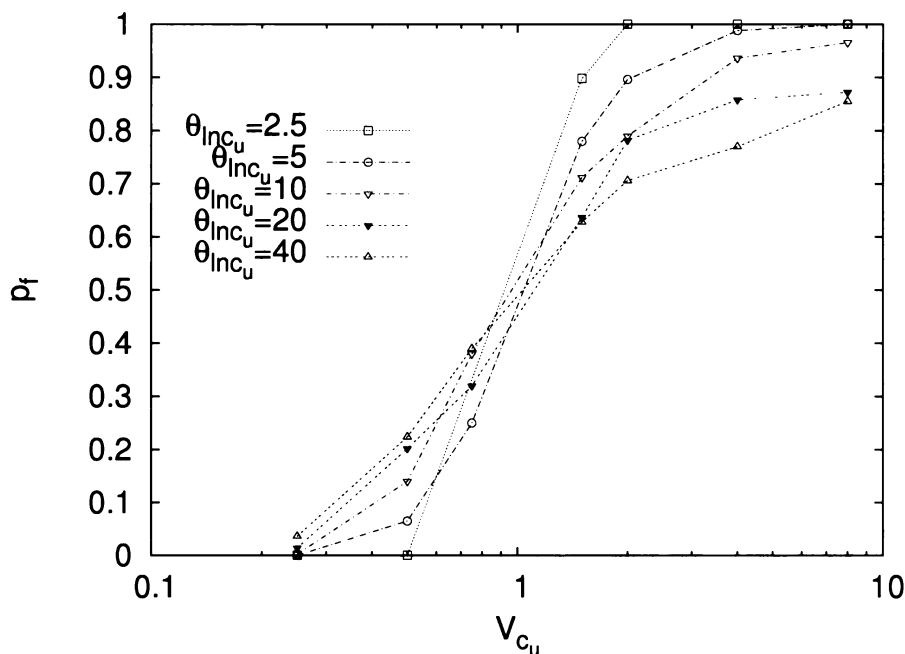
Obrázek 3.13: Celkový přehled výsledků všech simulací programem *random field*, a porovnání s výsledky metody *single random variable* s lokálně zprůměrovanými parametry, viz obrázek 3.7.

metoda s metodou *single random variable* bez lokálního zprůměrování parametrů, viz sekce 3.3. Vzrůstající nepřesnost konvergence pro rostoucí hodnoty V_{c_u} je v souladu s definováním výpočtu chyby v metodě Monte Carlo, viz sekce 1.4 (1.29). Chyba odhadu se zvyšuje s rostoucí variancí náhodné veličiny při nezvyšování celkového počtu simulací.

Můžeme si také všimnout, jak už bylo dříve popsáno, že vyšší koeficient variace V_{c_u} má za následek vyšší pravděpodobnost spadnutí svahu. Tento jev lze vysvětlit tím, že ve svahu dominují slabší elementy s nižší hodnotou c_u a smykové porušení si snáze nalezne nejslabší cestu materiálem (Griffiths a Fenton 2004).

Na obrázku 3.14 můžeme ve srovnání se stejným grafem z článku Griffiths a Fenton (2004) (viz. obrázek 2.6 v sekci 3.4) vidět daleko větší rozptyl průsečíků křivek vypočtených *random finite elements method*, který je zapříčiněn nižší přesností výpočtů než provedli Griffiths a Fenton (2004). Z důvodu nutného vysokého počtu simulací a byla zvolena hrubší síť a snížen počet simulací m v metodě Monte Carlo. Porovnání je v tabulce 3.2.

Tím bylo sice dosaženo přijatelného času potřebného k realizaci všech výpočtů, ale byla také snížena přesnost, jak vyplývá z porovnání obou obrázků 3.14 a 2.6.



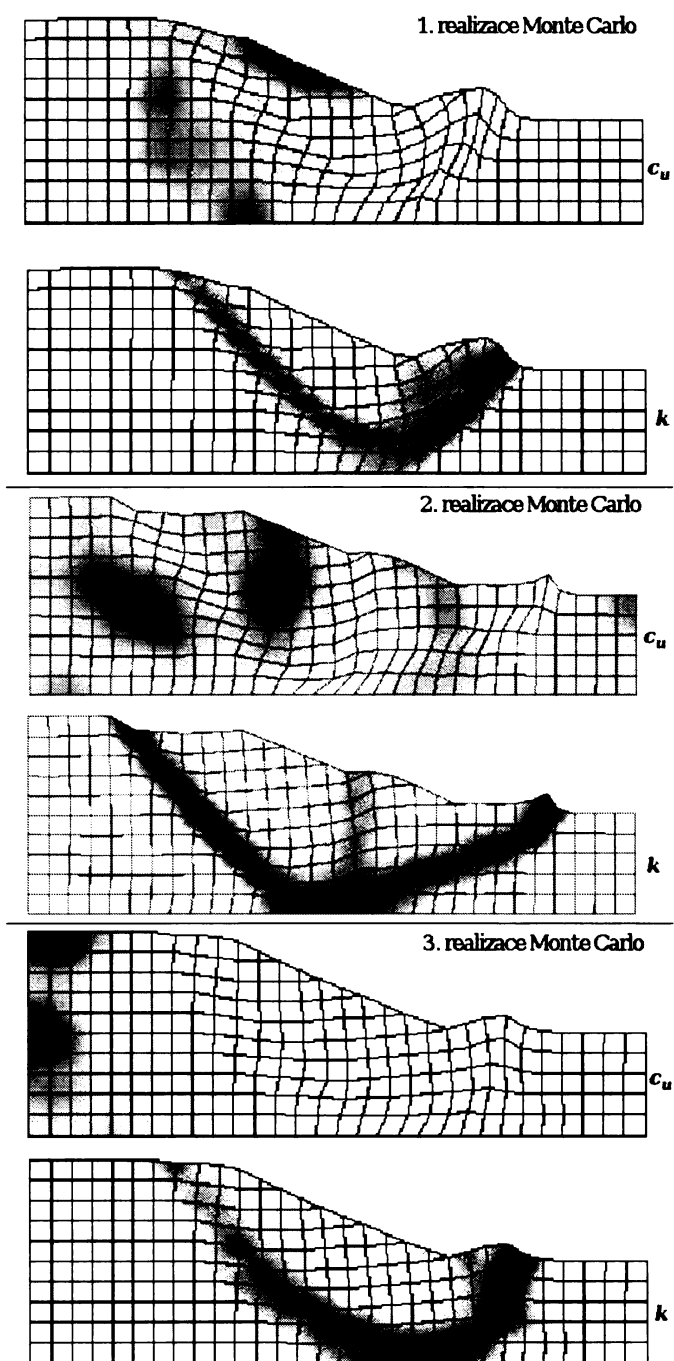
Obrázek 3.14: Pravděpodobnost spadnutí svahu p_f v závislosti na koeficientu variance V_{c_u} při $\mu_{c_u} = 25$.

	počet m simulací Monte Carlo	hrubost sítěH
Griffiths a Fenton (2004)	1000	10
Simulace v mé práci	500	5

Tabulka 3.2: Srovnání použitých parametrů v mé práci s článkem Griffiths a Fenton (2004).

V ideálním případě by se křivky pro všechny hodnoty korelační délky θ_{inc_u} protínaly v jednom bodě. Průsečík všech křivek definuje nejslabší bod, kdy si pro daný problém a vstupní parametry najde smykové porušení nejsnáze cestu skrz materiál. Tedy nejpesimističtější možné konstelace parametrů řešené úlohy.

Další věcí, která vyplývá z grafu na obrázku 3.14 je také to, že odhad metodou Monte Carlo pro nízké hodnoty p_f vyžaduje zvýšení počtu simulací m pro dodržení požadované přesnosti podle (1.29). Podle tvaru a chování křivek a porovnání všech výsledků s výsledky v článku Griffiths a Fenton (2004) lze usoudit na správnou funkci programu *random field* a začít jej využívat při řešení reálných problémů.



Obrázek 3.15: Ukázka tří realizací Monte Carlo metody. Všechny svahy mají shodné parametry pravděpodobnostního rozdělení c_u . Světlá místa vyznačují partie materiálu s nižšími hodnotami c_u a následně tmavá místa vyšší plastické přetvořením k .

Kapitola 4

Sesuv v Lodalenu

Pro vyzkoušení metody *random finites elements* jsem zvolil sesuv z roku 1954 v norském Lodalenu, který leží poblíž železnice vedoucí do Osla. Tento problém jsem zvolil z důvodu jeho jednoduché geologické stavby, velké prozkoumanosti území a dostupnosti výsledků z většího počtu zkoušek. A také proto, že jsou známy výsledky z výpočtů faktoru bezpečnosti při použití konvenčních metod viz Sevaldson (1956). Dále na něm byla již provedena pravděpodobnostní studie (El-Ramly et al. 2006). Tato studie však byla realizována pouze konvenční metodou limitní rovnováhy v kombinaci s metodou *first oder second moment* metody, která je rozepsána v sekci 2.1.2 a může sloužit jako příklad pro srovnání metod. Na konci této kapitoly uvedu srovnání výsledků z aplikace všech těchto metod.

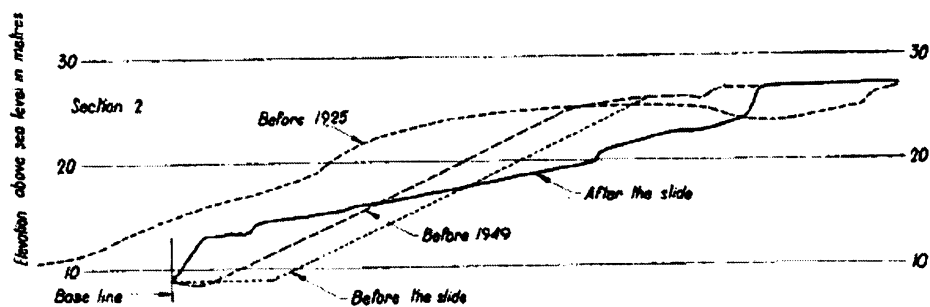
4.1 Celková situace a geologie sesuvu.

Sesuv se nachází na svazích břehu řeky Lo, jejíž koryto bylo z důvodu výstavby seřaďovacího nádraží přesunuto do tunelu pod masivem Ekeberg. Svahy jílovitých zemin kolem původního řečiště byly formovány sedimentací a erozí. Na těchto svazích již došlo několika sesuvům dříve.

Z důvodu výstavby seřaďovacího nádraží byly okolní svahy upraveny a právě v těchto místech pak začal větší výskyt sesuvů. Svahy měly původní sklon průměrně 1 : 2, 5. Při zásahu do terénu byly oddáleny o 5-6 m a upraveny na strmější sklon 1 : 2. O několik let později bylo pro rozšíření nádraží odkopáno dalších 2,5 m, přičemž sklon svahu byl ponechán na 1 : 2.

K sesuvu došlo 6. října 1954. Čelo sesuvu se posunulo o 10 m směrem k nádraží a poškodilo koleje a železniční vozy. Šířka sesuvu byla průměrně 40 - 50 m. Šlo o rotační sesuv s hladkou odlučnou plochou v marinních jílech. Při průzkumu sesuvu

byly vypracovány 3 podélné řezy, ve kterých je znázorněna i postupná úprava svahu (Sevaldson 1956). Z těchto tří řezů jsem vybral řez procházející středem sesuvu jako reprezentativní svah pro 2D analýzu. Řez je znázorněn na obrázku 4.1. Tímto profilem byl také veden největší počet průzkumných vrtů.



Obrázek 4.1: Geometrie svahu se znázorněním jednotlivých úprav (Sevaldson 1956).

Při průzkumu sesuvu bylo realizováno 7 vrtů průměrně do hloubky 8 - 10 m. Vrty byly situovány jak na ploše sesuvu tak v jeho blízkosti. Do 4 vrtů, třech na území sesuvu a jednom mimo sesuv, byly instalovány piezometry pro měření pórového tlaku. Podrobné vyhodnocení těchto zkoušek uvádí Sevaldson (1956). Zde se omezím jen na přehled výsledků, které byly použity jako vstupní parametry v mé studii. Hodnoty parametrů jsou v následující tabulce 4.1

č. vrtu	hloubka [m]	c [kPa]	ϕ °
1	8	10	27.5
	13	8	24.9
2	7	10	28.1
	11	10	27.7
	15	8	26.6
	19	13	24
3	3	10	26.3
	9	7	29.4
5	9	12	27.2
7	4	14	29.2

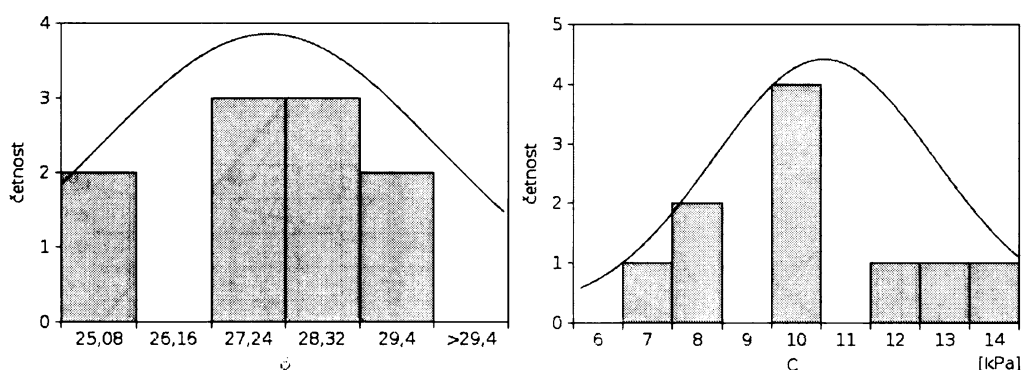
Tabulka 4.1: Mechanické charakteristiky sesuvu. Hodnoty jsou převzaté z Sevaldson (1956).

Výsledky z měření ze čtyř piezometrů v hloubkách 2, 4, 6, 8, 10 m byly vyneseny do grafu pórového tlaku vs. hloubka, čímž byla zjištěna napjatá hladina podzemní

vody. Na tuto skutečnost ukazoval vyšší přírůstek pórového tlaku s hloubkou než by odpovídal hydrostatickému rozdělení napětí.

4.2 Vyhodnocení vstupních parametrů

Z parametrů v tabulce 4.1 jsem sestavil histogramy pro úhel vnitřního tření ϕ a smykovou pevnost c . Statistickou analýzou byla stanovena průměrná hodnota a rozptyl dat.



Obrázek 4.2: Histogramy mechanických parametrů jílu s proloženým normálním rozdělením.

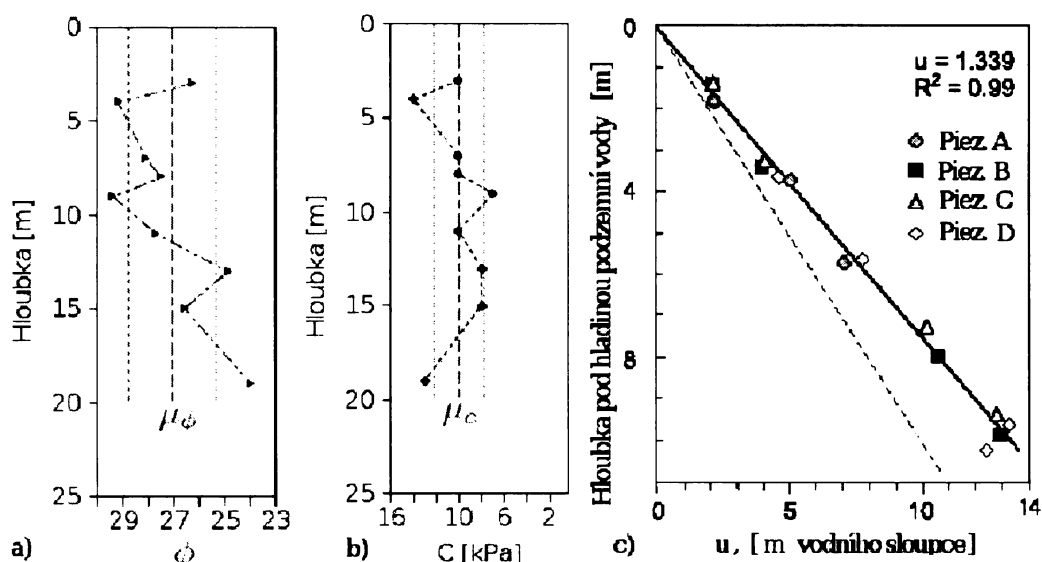
Z tvaru histogramů obr. 4.2 je vidět, že obě veličiny vykazují tvar normálního rozdělení. Pro vyjádření těchto parametrů jako náhodných veličin jsem tedy použil normálního rozdělení s charakteristikami odpovídající ekvivalentům popisné statistiky. Tedy střední hodnotu jako ekvivalent aritmetického průměru a varianci, která je pravděpodobnostním ekvivalentem rozptylu. Zvolené hodnoty jsou v tabulce 4.2.

	c [kPa]	ϕ°
μ	10	27.09
σ	2.25	1.718

Tabulka 4.2: Parametry pravděpodobnostního rozdělení mechanických parametrů jílu v Lodalenu.

Úhel vnitřního tření ani smyková pevnost nevykazovaly žádný trend se zvyšující se hloubkou viz. obr. 4.3 a) a b). Hodnota korelačního koeficientu mezi ϕ a c byla $\rho_{\phi,c} = -0.0719$. Z toho vyplývá, že mezi datovými soubory není téměř žádná závislost.

Jak můžeme vidět na obrázku 4.3 c), data s piezometrů vykazovala vyšší přírůstek hydrostatického tlaku, než odpovídá hydrostatickému rozdělení napětí. Směrnice přímkou proložená jednotlivými body naměřených hodnot je $t = 1,339$ oproti typické $t = 1$ pro vodu. Tento jev byl simulován v matematickém modelu použitím kapaliny o vyšší hustotě než voda, s hodnotou $\rho_w = 1,339 \text{ g cm}^{-2}$. Oproti studii El-Ramly et al. (2006) jsem nepopsal pórový tlak jako náhodnou proměnnou. Data naměřená v piezometrech vykazovala zřetelný lineární průběh a přímka proložená těmito daty měla regresní koeficient $R^2 = 0.99$, což vyjadřuje poměrně vysoký stupeň lineární závislosti.



Obrázek 4.3: Zobrazení dat jílu, a) úhel vnitřního tření ϕ , b) smyková pevnost c , c) výsledky měření pórového tlaku (upraveno podle El-Ramly et. al. (2006)).

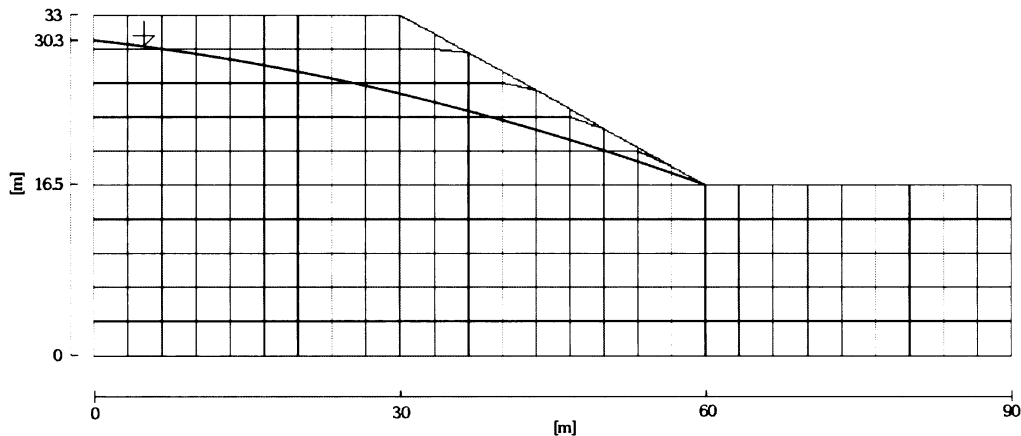
4.3 Analýza metodou $\phi - c$ redukce

Pro uskutečnění analýzy metodou $\phi - c$ redukce bylo nutné nejprve popsat geometrii svahu vhodnou sítí. Síť jsem volil tak, aby byla použitelná i na následující pravděpodobnostní analýzu. Sklon svahu vychází z obrázku 4.1. V popisu sesuvu se uvádí, že finální úpravou svahu před sesuvem, byl vytvořen sklon 1:2. Profil 4.1, který prochází středem sesuvu, má sklon 9:5, což je mírně strmější. Použil jsem čtvercové elementy s devíti integračními body z důvodu nutného výpočtu faktoru redukce variance γ , viz sekce 1.3.3. Hustota sítě $H = 5$ byla zvolna na tak, že přibližně odpovídala hustotě použité v předešlých studiích. Znázornění sítě je na obrázku 4.4.

Dalším krokem bylo popsání hladiny podzemní vody. Podle práce Sevaldson (1956), kde jsou uvedené jednotlivé hladiny zastížené vrty, jsem převzal jejich hloubku h a vodorovnou vzdálenost l od paty svahu. Těmito body jsem proložil polynomem druhého stupně (4.1) který vystihuje průběh hladiny podzemní vody.

$$h = 30.3 - 0.11314 l - 0.00200646 l^2 \quad (4.1)$$

Jako parametry zeminy do lineárně elasto-plastického mohr-coulombova modelu jsem použil střední hodnoty normálních rozdělání pro smykovou pevnost μ_c a úhel vnitřního tření μ_ϕ . Hustota jílu byla podle hmotnostního obsahu vody $w = 0.31$ (Sevaldson 1956) a hustoty skeletu typické pro jílovité minerály $\rho_s = 2.65 \text{ g cm}^{-2}$ stanovena na $\rho_t = 1.9 \text{ g cm}^{-2}$. Vyšší gradient pórového tlaku, jak jsem již výše uvedl, byl simulován zvýšením hustoty vody na $\rho_w = 1,339 \text{ g cm}^{-2}$.



Obrázek 4.4: Geometrie sítě použité pro výpočet společně se znázorněním úrovně hladiny podzemní vody.

Výpočet metodu konečných prvků jsem provedl programem *Tochnog* ve dvou fázích. V první fázi proběhlo gravitační přitížení svahu, čímž se vygenerovaly pórové tlaky odpovídající zvýšené hustotě vody a efektivní napětí. Poté bylo nutné zresetovat všechny vzniklé deformace ve všech integračních bodech. Dalším krokem bylo postupné snižování smykové pevnosti společně s tangentou úhlu vnitřního tření.

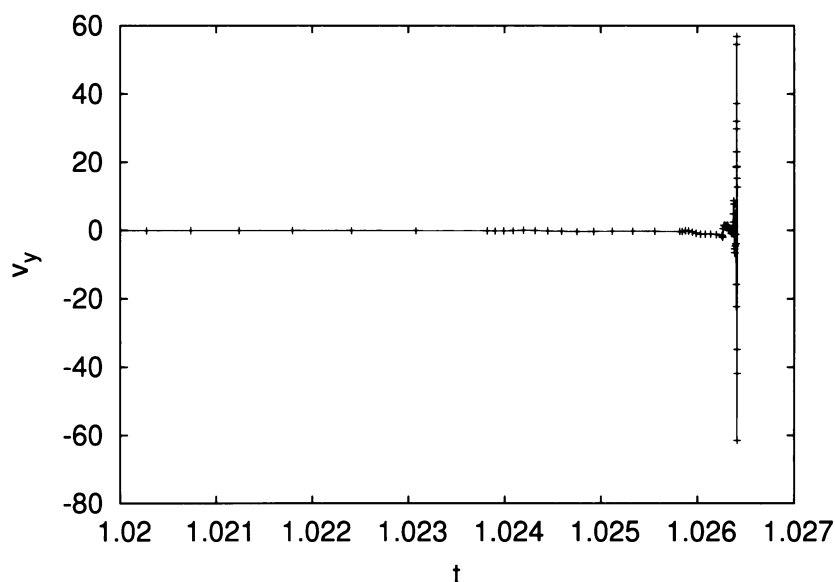
Parametry $\tan \phi$ a c byly v průběhu výpočtu snižovány lineárně v závislosti na čase. Faktor FS bezpečnosti je při výpočtu metodou $\phi - c$ redukce definovaný jako poměr tangenty reálného úhlu vnitřního tření a hodnotou tangenty úhlu v čase spadnutí svahu.

$$FS = \frac{\tan \mu_\phi}{\tan \phi(t_f)} \quad (4.2)$$

Výpočet dosáhl času $t_f = 1.0264$, jak je patrné z grafu na obrázku 4.5, kde je zobrazená rychlost ve směru y při patě svahu a v čase t_f je patrný její prudký nárůst. To odpovídá úhlu vnitřního tření $\phi(t_f) = 26.48^\circ$. Faktor bezpečnosti vypočítaný podle 4.2 má tedy hodnotu $FS = 1,02$. Takto nízká hodnota FS indikuje, že svah se nachází na hranici stability. Vypočítaná hodnota dobře koresponduje s hodnotami faktoru bezpečnosti získanými použitím proužkových metod s kruhovou smykovou plochou zveřejněnými v práci Sevaldson (1956). Ten provedl výpočty na třech podélných řezech sesuvem několika konvenčními metodami. Pro střední řez, který používám, vypočetl s použitím Bishopovo proužkové metody hodnotu faktoru bezpečnosti $FS = 1$.

4.4 Pravděpodobnostní analýza

Při zahrnutí variability vstupních dat lze očekávat větší pravděpodobnost sesuvu, tedy nižší faktor bezpečnosti, než pokud je svah homogenní. Tento jev můžeme pozorovat i ve studii kterou provedl El-Ramly et al. (2006), kteří do konvenčních proužkových metod zavedl vliv variability mechanických parametrů na kruhové smykové ploše. Tím se značně snížila střední hodnota faktoru bezpečnosti pod $FS = 1$.



Obrázek 4.5: Výsledek ϕ - c redukce sesuvu v Lodalenu.

4.4.1 Analýza $\theta_c, \theta_\phi = \infty$

V této analýze jsem neuvažoval vliv prostorové korelace na variabilitu náhodných proměnných. Princip spočíval v použití metody *single random variable* na dvě náhodné proměnné. Spustil jsem tedy metodu Monte Carlo, kdy v každé její realizaci byl generován homogenní svah s náhodnou hodnotou parametrů ϕ a c . Vzhledem ke korelačnímu koeficientu mezi naměřenými daty $\rho_{\phi,c} = -0.0719$ jsem nepoužil žádnou korelaci mezi náhodnými veličinami, které popisují ϕ a c .

Jako horní mez počtu simulací m jsem stanovil $m = 1000$. Očekávaná pravděpodobnost spadnutí svahu byla nižší než při použití metody *random finite elements*, protože zde nefunguje princip porušování podle nejslabších míst v materiálu. Ze srovnání výsledků v grafu na obrázku 4.6 je to patrné, vypočítaná pravděpodobnost spadnutí svahu je 0,795.

4.4.2 *Random finite elements* analýza

Zde bylo nutné nejprve stanovit vhodnou korelační délku, která by adekvátně popisovala prostorové rozmístění mechanických parametrů v jílu. Pro stanovení konkrétní korelační délky by bylo nutné vypočítat korelační koeficient naměřených dat ve vertikálním a horizontálním směru. V horizontálním směru nejlépe pro jednotlivé úrovně hloubek, ze kterých pocházejí jednotlivá měření ve všech vrtech. Ve vertikálním směru mezi daty z různých hloubek pro každý vrt. To předpokládá, že známe polohu vrtů v terénu, tedy nadmořskou výšku a zeměpisné souřadnice.

Pro takovou to analýzu však neexistuje potřebné množství publikovaných dat z tohoto sesuvu. Z deseti měření dostupných ze všech vrtů by bylo stanovování korelačního koeficientu značně nepřesné. V mé práci jsem tedy vycházel z El-Ramly et al. (2006), kteří použili korelaci typickou pro tento druh jílu s marinní sedimentací.

Tyto jíly se vyznačují pravidelným horizontálním zvrstvením a lze tedy předpokládat, že korelační koeficient ve vertikálním směru bude podstatně nižší než v horizontálním. El-Ramly et al. (2006) uvádí hodnotu korelačních vzdáleností, ty vyplývají z hodnoty korelačního koeficientu a tvaru markovovy funkce (viz (1.19)). Pro popis anizotropního chování zemin se obvykle používá hodnota korelační délky ve vertikálním směru mezi 1 - 3 m a v horizontálním směru 10 - 40 m. Konkrétně u těchto jílu lze však předpokládat intervaly pro vertikální korelační délku 1 - 3 m a horizontální korelační délku 30 - 40 m.

Vystihnout takovéto chování by znamenalo použít anizotropní korelaci náhodného pole. Program *random field* po menší úpravě takovýto postup umožňuje, jedná se o rozepsání markovovy funkce do eliptického tvaru jak jsem již popsal v sekci 1.3.2. Vzhledem k nedostatku publikací a parametrických studiích vlivu anizotropní ko-

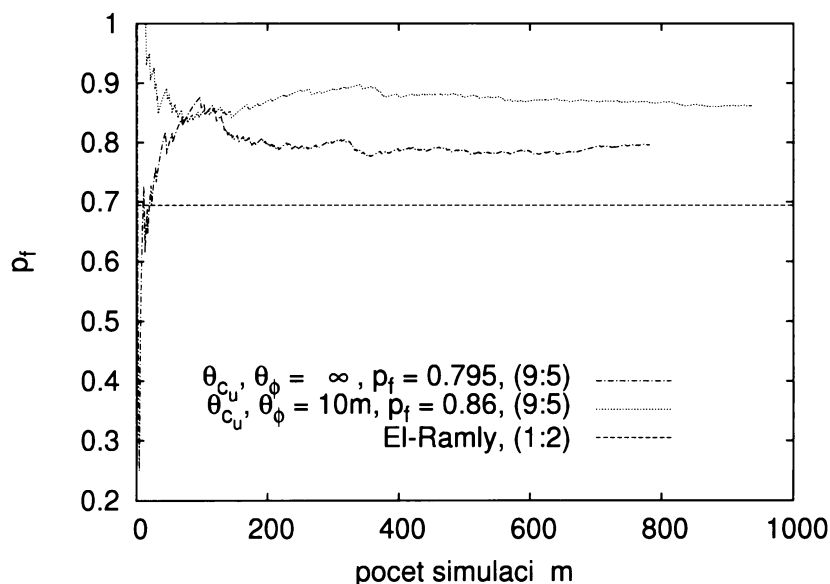
relace na výslednou pravděpodobnost sesunutí svahu by požití anizotropní korelace znamenalo provedení takovýchto studií opět na nějakém vzorovém příkladu a bylo by značně časově náročné. Proto jsem ve svém výpočtu zvolil izotropní korelaci.

Vertikální a horizontální rozsah korelační vzdálenosti jsem nahradil jednotnou korelační délkou. Tento postup jsem zvolil také proto, že ji již použili El-Ramly et al. (2006), aby bylo možné lepší porovnání výsledků. Odhad izotropní korelační délky byl vypočítán podle

$$\theta = (\theta_x \theta_y)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

kde θ_x a θ_y jsou korelační vzdálenosti v horizontálním a vertikálním směru. Podle rovnice (4.3) vychází korelační vzdálenost v rozmezí 5 – 15 m. Pro analýzu byla zvolena hodnota $\theta = 10$ m.

Do samotného výpočtu tedy vstupují dvě náhodné proměnné (ϕ , c). Korelační délka $\theta = 10$ je shodná pro obě tyto proměnné. Pórový tlak byl ponechán jako konstantní a jeho vyšší gradient byl simulován vyšší hodnotou hustoty vody ρ_w . Průběh výpočtu je zcela shodný s výpočty při parametrické studii z kapitoly 3. Tedy postupné zvyšování gravitačního zrychlení až do doby, kdy se překročí časový limit na dosažení dané maximální konvergenční chyby (nestabilní svah), či až dojde k dosažení cílového gravitačního zrychlení (stabilní svah).



Obrázek 4.6: Srovnání výsledků pravděpodobnostních analýz pro ideálně korelovaný svah, svah z korelační délkou $\theta_c, \theta_\phi = 10$ m se sklony 2:1 a 9:5.

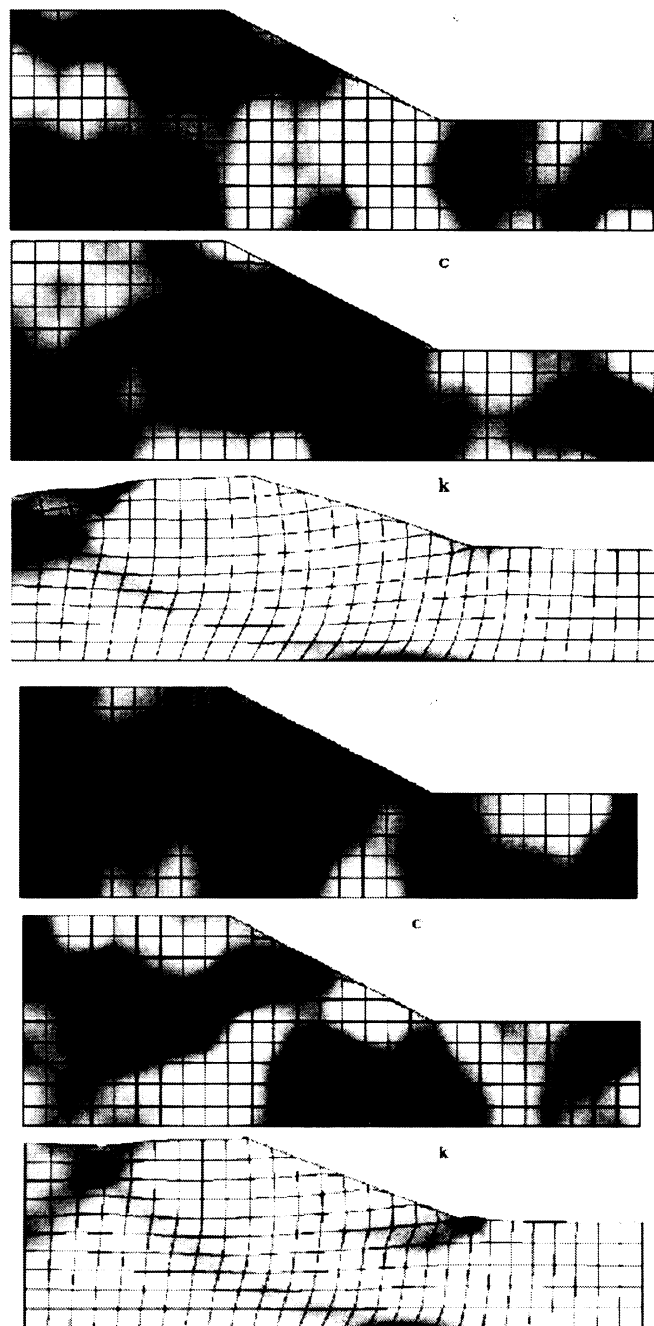
V rámci Monte Carlo metody jsem provedl 1000 simulací. výsledná pravděpodobnost

spadnutí svahu je patrná z grafu na obrázku 4.6. Bylo dosaženo pravděpodobnosti $p_f = 0.86$, což je zatím nejvyšší hodnota ze všech provedených studií.

El-Ramly et al. (2006) provedli výpočet proužkovou metodou limitní rovnováhy s tím, že kruhovou smykovou plochu uvažovali jako jednorozměrné náhodné pole, ve kterém byly náhodně přidělovány tři parametry (ϕ, c, u) . Výsledkem výpočtu byl histogram faktoru bezpečnosti a parametry jeho pravděpodobnostního rozdělení. Střední hodnota $\mu_{FS} = 0.97$, $\sigma_{FS} = 0.061$ z toho vyplývá, že $P[FS < 1] = 0.694$, tedy hodnota nižší než byla získaná metodou *random finite elements*.

Při srovnání výsledků ze všech metod dává nejvíce optimistický výsledek metoda $\phi - c$ redukce kde $FS = 1.02$. Poté proužková metoda s jednorozměrným náhodným polem ve tvaru kruhové smykové plochy. Nejpesimističtější výsledek je jednoznačně z *random finite elements* metody. Tento jev můžeme vysvětlit tak, že tvar smykového porušení není nijak omezen a může si hledat volně cestu nejslabšími místy v materiálu.

Tento jev je dobře patrný na obrázcích 4.7, kde jsou vyobrazené svahy vždy s jednotlivými náhodnými poli pro ϕ a pro c a následně je zobrazená příslušná velikost míry plastických přetvoření κ . Při znázornění náhodných polí tmavší místa znamenají nižší hodnoty smykových parametrů, naopak při zobrazení *kappa* znamenají tmavší místa vyšší stupeň plastického přetvoření. Lze si všimnout že plastické přetvoření přesně nekopíruje nejslabší místa v náhodném poli jako je tomu na obrázcích 3.9 a 3.10, kde je použité jen jedno náhodné pole pro c a materiál je tak oslaben přímo v místech, kde jsou elementy s nižší smykovou pevností. Naproti tomu při použití dvou náhodných polí, které nemají mezi sebou žádnou korelaci, se tak může na stejném místě vygenrovat nízká soudržnost společně s vysokým stupněm vnitřního tření. Výsledné smykové porušení tedy hledá místa, která jsou oslabená nižší hodnotou obou těchto parametrů. Otázka je, nakolik je takovýto stav shodný s přírodními podmínkami, neboť vzhledem k nízkému počtu dat zde nebylo možné posoudit korelaci mezi ϕ a c . Navíc by zavedení takovéto korelace mezi náhodnými poli znamenalo větší úpravu programu *random field*, který zatím umožňuje dvě extrémní hodnoty, a to buď zcela nekorelovaná a nebo zcela korelovaná náhodná pole.



Obrázek 4.7: Ukázka ze dvou simulací sesuvu v Lodalenu se zobrazením náhodných polí pro ϕ a c , následované normou plastického porušení κ znázorněnou na deformované síti. Tmavá místa vyznačují měkčí části materiálu a deformace je zvětšená faktorem 10.

Kapitola 5

Shrnutí

Na začátku diplomové práce, v prvních dvou kapitolách, jsem se snažil uvést celou problematiku využití pravděpodobnostních analýz v geotechnice. K tomu jsem využil dostupné literatury týkající se tohoto problému, ze které jsem zpracoval ucelený přehled nejdůležitějších poznatků týkajících se teorie pravděpodobnosti, teorie o náhodných polích a metody Monte Carlo. Rešerše je koncipována tak, aby na ni navazovala druhá část práce.

Následující dvě kapitoly v druhé části práce obsahují mé vlastní výpočty. V těchto dvou kapitolách bylo nejdůležitější vyzkoušet a popsat funkci nového programu *random field*. Program je koncipován tak, aby byl schopen generovat homogenní stacionární náhodná pole potřebná pro uskutečnění *random finite elements* analýzy. Je schopen generovat takováto náhodná pole jak z lognormálního, tak i z normálního (Gaussova) rozdělení. Z důvodu posouzení správné funkce programu jsem provedl parametrickou studii na vzorovém svahu z jílovité zeminy.

Studie ukazuje vliv charakteristik pravděpodobnostního rozdělení, kterým jsou popsány vstupní hodnoty na výsledek výpočtu metodami *single random variable* a *random finites elements* při řešení stability svahu. Zabývá se také vlivem lokálního zpřůměrování vstupních hodnot, čímž vstupuje do výpočtu hrubost použité sítě. Při studii prováděné metodou *random finites elements*, kde dochází ke generování náhodných polí, se zabývá vlivem korelační délky.

Výsledkem těchto studií bylo porovnání výsledků z jednotlivých realizací metod *single random variable* a *random finites elements* s výsledky obdrženy analytickým způsobem. Další kontrolou správné činnosti programu bylo porovnání mých výsledků s výsledky v Griffiths a Fenton (2004), kde autoři provedli obdobné výpočty. V závěru lze říci že program *random field* pracuje správně a všechny parametrické studie proběhly v souladu se současnými publikovanými znalostmi.

Dalším krokem bylo vyzkoušení programu při řešení reálného problému. Vzhledem k

předchozím parametrickým studiím, které jsem provedl na výpočtu stability svahu, jsem vybral sesuv z roku 1954 v norském Lodalenu. Aby bylo možné provést srovnání výsledků, provedl jsem výpočet několika metodami. První výpočet, který zároveň sloužil ke kompozici a vyzkoušení vstupního souboru použitého i v dalších výpočtech, jsem provedl metodu $\phi - c$ redukce. Pak následovala pravděpodobnostní analýza, ve které byly uvažovány dva z mechanických parametrů jako náhodné proměnné, ale materiál svahu byl stále homogenní.

Posledním krokem byla analýza metodou *random finites elements*, kdy byla nejprve stanovena vhodná korelační délka pro daný typ zeminy, a poté proveden samotný výpočet s využitím metody Monte Carlo. Z výsledků se ukázal předpokládaný jev, kdy pravděpodobnost spadnutí svahu narůstala postupně s použitím pokročilejších metod výpočtu. Podrobnější popisy výsledků jsou uvedeny vždy v závěrech jednotlivých kapitol.

Reference

- Dřimal, J., Trunec, D., a Brablec, A. 2006. Úvod do metody Monte Carlo. Technical report, Masarykova univerzita, Brno.
- El-Ramly, H., Morgenstern, N. R., a Cruden, D. M. 2006. Lodalen slide: a probabilistic assessment. *Canadian Geotechnical Journal*, **43**(9): 956–968.
- Fenton, G. A. Griffiths, D. V. a Tveten, D. E. 2005. Probabilistic passive earth pressure analysis by the random finite element method. pp. 235–249.
- Fenton, G. A. 1994. Error evaluation of three random field generators. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, **120**(12): 2478–2497.
- Fenton, G. A. 2006. Lecture notes from CISM course: Probabilistic methods in geotechnical engineering.
- Fenton, G. A. a Griffiths, D. V. 2001. Bearing capacity of spatially random soil: the undrained clay prandtl problem revisited. *Géotechnique*, (51): 351–359.
- Fenton, G. A. a Griffiths, D. V. 2002. Probabilistic foundation settlement on a spatially random soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **18**(5): 381–390.
- Fenton, G. A. a Griffiths, D. V. 2003. Bearing capacity prediction of spatially random $c - \phi$ soils. *Canadian Geotechnical Journal*, **40**(1): 54–65.
- Fenton, G. A., Griffiths, D. V., a Urquhart, A. 2003. A slope stability model for spatially random soils. pp. 1–7. *Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*, San Francisco.
- Griffiths, D. V. 2006. Lecture notes from CISM course: Probabilistic methods in geotechnical engineering.
- Griffiths, D. V. a Fenton, G. A. 2004. Probabilistic slope stability analysis by finite elements. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **130**: 507–518.
- Griffiths, D. V., Fenton, G. A., a Tveten, D. E. 2002. Probabilistic geotechnical analysis: How difficult does it need to be? Volume 17. *Proc. of the Internatio-*

- nal Conference on Probabilistics in Geotechnics: Technical and Economic Risk Estimation.
- Hebák, P. a Kahounová, J. 1988. Počet pravděpodobnosti v příkladech. Polytechnická knihovna SNTL.
- Kasama, K., Zen, K., a Whittle, A. J. 2006. Effects of spatial variability of cement-treated soil on un drained bearing capacity. pp. 305-313.
- Mašín, D. 2006. Software *random field*. <http://www.natur.cuni.cz/~masin>.
- Press, H., Teukolsky, S., et al. 1993. Numerical recipes in C: The art of scientific computing. Cambridge University Press.
- Rektorys, K. et al. 1995. Přehled užití matematiky II, Chapter 33 Teorie pravděpodobnosti, a 34 Matematická statistika. Prometheus s.r.o.
- Sevaldson, R. A. 1956. The slide in Lodalen, october 6th, 1954. *Géotechnique*, (6): 167-182.
- Vanmarcke, E. H. 1984. Random fields: Analysis and synthesis. Cambridge: MIT Press. <http://www.princeton.edu/~wilding/rbs/vanmEZ01.htm>.
- Weisstein, E. W. 2003. "Beta Distribution." From MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/BetaDistribution.html>.