MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lenka Goduľová

Dvouúrovňové optimalizační modely a jejich využití v úlohách optimalizace portfólia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravdepodobnosť, matematická štatistika a ekonometrie

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Dvouúrovňové optimalizační modely a jejich využití v úlohách optimalizace portfólia

Autor: Lenka Goduľová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt:

Tato práce se zabývá problémem dvouúrovňových úloh. Nejprve připomíná základné poznatky o mean-risk modelech, mírách rizika v jednoúrovňových problémech a stochastické dominanci druhého řádu. Následně představuje základní poznatky o dvou-úrovňových úlohách. Dvouúrovňové problémy mají několik výhod oproti jednoúrovňové. V jednom procesu je možné analyzovat dvě různé nebo dokonce i konfliktní situace. Dvouúrovňová úloha ví lépe podchytit vzájemný vztah mezi dvěma objekty. Hlavním těžištěm práce je formulace různých dvouúrovňových úloh a jejich přepis do nejjednoduššího tvaru. V numerické části jsou řešeny čtyři typy formulovaných dvojúrových problémů na vybraných mírach rizik.

Klíčová slova: Dvouúrovňové problémy, Stochastická dominance druhého řádu, Míry rizika

Title: Bilevel optimization problems and their applications to portfolio selection

Author: Lenka Goduľová

Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstract: This work deals with the problem of bilevel tasks. First, it recalls the basic knowledge of mean-risk models, risk measure in singlelevel problems, and second degree stochastic dominance. Then it presents basic knowledge of bilevel tasks. bilevel problems have several advantages over singlelevel. In one process, it is possible to analyze two different or even conflicting situations. The bilevel role can better capture the relationship between the two objects. The main focus of the thesis is the formulation of various bilevel tasks and their reformulation into the simplest form. The numerical part deals with four types of formulated bilevel problems at selected risk measures.

Keywords: Bilevel problems, Second degree stochastic dominance, Risk measures

Název práce: Dvojúrovňové optimalizačné modely a ich využitie v úlohách optimalizácie portfólia

Autor: Lenka Goduľová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt:

Táto práca sa zaoberá problémom dvojúrovňových úloh. Naprv pripomína základné poznatky o mean-risk modeloch, mierach rizika v jednoúrovňových problémoch a stochastickej dominancii druhého rádu. Potom predstavuje základné poznatky o dvojúrovňových úlohách. Dvojúrovňové problémy majú niekoľko výhod oproti jednoúrovňovým. V jednom procese je možné analyzovať dve rôzne alebo dokonca aj konfliktné situácie. Dvojúrovňová úloha vie lepšie podchytiť vzájomný vzťah medzi dvoma objektami. Hlavným ťažiskom práce je formulácia rôznych dvojúrovňových úloh a ich prepis do najjednoduchšieho tvaru. V numerickej časti sú riešené štyri typy formulovaných dvojúrových problémov na vybraných mierach rizika.

Klúčové slová: Dvojúrovňové problémy, Stochastická dominancia druhého rádu, Miery rizika

Hlavné poďakovanie patrí RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D., za trpezlivosť, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri vypracovaní diplomovej práce. Ďakujem mojej rodine za morálnu podporu. Taktiež ďakujem môjmu tatikovi za všetko, čo pre mňa urobil. V poslednom rade sa chcem poďakovať môjmu priateľovi za morálnu a finančnú podporu.

Obsah

Úvod

V tejto práci sa budeme venovať dvojúrovňovým optimalizačným úlohám. V rôznych odvetviach ekonómie, či priemyslu je tento typ úloh aplikovaný na problémy s hierarchickým usporiadaním. Rozhodnutia medzi levelmi sú nezávislé a rozhodujeme sa postupne. Bežne je táto metóda využívaná v manažmente, energetike, či v ekonomickom planovaní. Vhodným príkladom je vzťah investora a sprostredkovateľov, kde sprostredkovateľ sa snaží maximalizovať celkový poplatok za sprostredkovanie a investor nemusí byť ochotný zaplatiť viac ako určité percento investície. V tomto prípade sa jednotlivé strany dostanú do konfliktu. Pri dvojúrovňovom probléme sprostredkovateľ najprv stanoví poplatky a investor ako následník investuje samozrejme tak, aby dostal eficientné portfólio. V prípade logistiky môžeme pomocou dvojúrovňového problému nájsť optimálnu polohu pre logistické centrá. V hornej úrovni budeme hľadať optimálne umiestnenie centier, pričom minimalizujeme náklady firmy, a na dolnej úrovni nás zaujíma rovnomerné rozdelenie dopytu, kde minimalizujeme náklady zákazníkov.

Dvojúrovňový problém bol prvýkrát sformulovaný v roku 1973 J. Brackenom a J. McGillom [6]. Až W. Candler a R. Norton [7] v roku 1977 prvýkrát použili termín dvojúrovňové resp. viacúrovňové programovanie. Opätovne sa dvojúrovňové programovanie dostalo dopopredia v osemdesiatych rokoch vďaka teórii hier vytvorenej H. Stackelbergom. Prehľad teórie dvojúrovňových úloh aj s aplikáciou na jednoduchých príkladoch lineárneho alebo kvadratického dvojúrovňového programovania je možné nájsť v [4]. V dvojúrovňových úlohách sa stretávame s parametrickým programovaním. Na porozumenie teórie doporučujeme [16]. Úlohy sa komlikujú, ak v dvojúrovňovom probléme je celočíselná úloha. V [15] nájdeme dvojúrovňový problém s celočíselnou úlohou a kvadratickou účelovou funkciou. Dvojúrovňové optimalizačné modely tvoria podmnožinu optimalizačných úloh s dvoma optimalizačnými požiadavkami. Klasické metódy na zvládnutie týchto typov úloh vyžadujú podmienky linearity či konvexity. Základnými prístupmi sú : hľadanie extremálnych bodov, transformačný prístup alebo využitie penalizačných funkcii, či heuristiky. Evolučné prístupy alebo prístup vnútorného bodu sú založené na novších vývojoch. My sa budeme venovať len dvojúrovňovým modelom. V prípade väčšieho záujmu o viacúrovňové modely a pre objasnenie základných princípov doporučujeme pozrieť [7]. V našej práci budeme pracovať s mierami rizika. Prehľad známych formulácii mier rizika v jednoúrovňovom prípade nájdeme v [25]. Podrobnejšie popísané vlastnosti môžeme nájsť v [1, 14, 18, 20, 33]. Najmodernejším prístupom k miere rizika je stochastická dominancia. V našom prípade používame stochastickú dominanciu druhého rádu, avšak v praxi nie je vylučené použiť aj stochastickú dominanciu prvého rádu. Teóriou stochastickej dominancie sa zaoberá H. Levy [28]. Táto teória je vyvýjaná prostredníctvom úžitkových funckií. Základy teórie úžitkových funkcií rozoberá

M.Černý, M.Vlach a K. Zimmernann [10]. Spôsob využitia stochastickej dominancie druhého rádu je možné nájsť v [22, 23, 24].

V prvej kapitole sa budeme venovať mieram rizika. Formulujeme jednoúrovňové mean-risk modely a definujeme pojem stochastická dominancia druhého rádu. V druhej kapitole definujeme dvojúrovňové optimalizačné problémy. Celkovo budeme pracovať so štyroma rôznymi dvojúrovňovými problémami. Prvé dva dvojúrovňové problémy formulujeme pomocou mean-risk modelov. Použijeme práve dva mean-risk modely. Prvá formulácia bude s obmedzením na očakávaný výnos a v druhom prípade budeme pracovať s agregáciou očakávaného výnosu a rizika. V treťom type dvojúrovňového problému budeme maximalizovať out of sample výnos. V poslednej formulácii dvojúrovňového problému použijeme stochastickú dominanciu druhého rádu a mean-risk model. Následne dané problémy prepíšeme do čo najjednoduchších tvarov. V poslednej kapitole sa budeme venovať výpočtovej časti. Na dáta aplikujeme vybrané dvojúrovňové problémy a budeme diskutovať o výsledkoch.

Kapitola 1

Mean-risk modely

V celej práci budeme uvažovať náhodné veličiny na merateľnom priestore $(\Omega,\mathcal{A})$ s hodnotami v $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega,\mathcal{A}, \mathrm{P})$. Náhodná veličina $L(\omega)$ bude reprezentovať straty pre $\omega \in \Omega$. Pre jednoduchosť bude argument ω vynechávaný. Ďalej budeme predpokladať len zprava spojité distribučné funkcie. Uvedieme rôzne miery rizika. Rovnako predstavíme najmodernejší prístup k riziku, konkrétne prostredníctvom stochastickej domnancie. Jednotlivé rizikové miery popíšeme a uvedieme ich základné vlastnosti. Tieto miery rizika nakoniec využijeme pri formulovaní matematických problémov.

1.1 Rizikové miery

Základnou mierou rizika je rozptyl. Túto mieru rizika využíval aj Harry Markowitz v jeho inovatívnej práci [29] kvôli výpočtovej jednoduchosti. Jej nevýhodou je symetria, tj. rovnako penalizované rizikové aktívum s veľkou potenciálnou stratou aj s veľkým potenciálnym ziskom. Uvedieme štyri ďalšie miery. Prvou je semivariancia, ktorú už v tom čase navrhoval Markowitz ako vhodnejšiu mieru rizika než rozptyl. Druhá je stredná absolútna odchýlka a posledné dve VaR a CVaR.

Definícia 1. *[1] Mierou rizika je zobrazenie $r : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{V}$ je množina reálnych náhodných veličín s konečnou strednou hodnotou.*

Definícia 2. *[25] Nech $\alpha \in (0,1)$ je hladina spoľahlivosti a náhodná veličina $L \in \mathcal{V}$ vyjadruje stratu portfólia. Potom definujeme 4 miery rizika následovne:*
Hodnota semivariancie je

$$r_s(L) = E[max(0, L - EL)^2],$$

Hodnota absolútnej odchýlky je

$$r_a(L) = E \mid L - EL \mid,$$

Hodnota VaR je

$$VaR_\alpha(L) = inf\{l \in \mathbb{R}, P(L > l) \leq 1 - \alpha\},$$

Hodnota podmienenej VaR je

$$CVaR_\alpha(L) = inf\{a \in \mathbb{R}, a + \frac{1}{1-\alpha} E[max(0, L - a)]\}.$$

Hodnotu v riziku (VaR) možeme interpretovať ako maximálnu možnú stratu portfólia za dané obdobie pri zvolenej konfidenčnej hladine α. Konfidenčnú hladinu volíme blízko 1, tj. doporučuje sa 0,95 alebo 0,99. Hodnota v riziku má ale nedostatok. Nezohľadňuje výšky strát, ktoré sú väčšie ako VaR. Tento nedostatok VaR motivuje zavedenie podmienenej hodnoty v riziku. Pod pojmom podmienená hodnota v riziku rozumieme priemernú stratu z 100(1- α)% najvyšších strat portfólia. Túto mieru je možné pre absolutne spojité rozdelenie vyjadriť následovne:

$$CVaR_\alpha(L) = E[L \mid L > VaR_\alpha(L)]. \tag{1.1}$$

Odvodenie vzťahu (1.1) môžeme nájsť v [33].

1.2 Koherentná miera rizika

Najprv uvedieme podmienky, za ktorých budeme mieru považovať za koherentnú.

Definícia 3. *[1] Mieru rizika r nazveme koherentnou, ak sú splnené 4 podmienky:*
(P1) Pre každú náhodnú veličinu L a $\forall\ c \in \mathbb{R}$ platí

$$r(L + c) = r(L) + c$$

(P2) Pre každé dve náhodné veličiny L_1 a L_2 platí

$$r(L_1 + L_2) \leq r(L_1) + r(L_2)$$

(P3) Pre každú náhodnú veličinu L a $\forall\ \lambda \geq 0$ platí

$$r(\lambda L) = \lambda r(L)$$

(P4) Pre každé dve náhodné veličiny L_1 a L_2 také, že $L_1(\omega) \leq L_2(\omega)\ \forall\ \omega \in \Omega$ platí

$$r(L_1) \leq r(L_2)$$

Poznámka. V podmienke (P1) pridávame bezrizikový kapitál. Vidíme, že o túto hodnotu sa potom zníži množstvo peňazí potrebných na pokrytie straty. (P2) je podmienka subaditivity, tj. diverzifikáciu portfólia sa zníži riziko. V prípade (P3) ide o pozitívnu homogenitu. Ak investujeme λ-krát väčšiu čiastku, tak strata bude λ-krát väčšia. V poslednom prípade pracujeme s podmienkou (P4), kde strata portfólia L_1 je väčšia alebo rovná ako strata portfólia L_2. L_1 je teda rizikovejšie alebo rovnako rizikové.

Bez dodatočných podmienok je jedine podmienená hodnota v riziku koherentnou mierou. Vo financiách sa veľmi často používajú eliptické rozdelenia. Definíciu eliptického rozdelenia je možné napríklad nájsť v [25]. Hodnota v riziku všeobecne nespĺňa len podmienku subaditivity. Podmienka subaditivity je pre hodnotu v riziku ale splnená pre eliptické rozdelenia. Táto skutočnosť je dokázaná v [14]. Hodnota absolútnej odchýlky, nespĺňa vlastnosť (P1) a vlastnosť (P4). Rozptyl a semivariancia nespĺňajú ani jednu z podmienok koherencie.

Tvrdenie 1. *[32] Nech r je pozitívne homogénna riziková miera. Potom miera r je konvexná práve vtedy keď splňa podmienku subaditivity.*

Dôkaz je jednoduchý. Plynie z definície subaditivity a pozitívnej homogenity. Teda podmienená hodnota v riziku a hodnota v riziku pre eliptické rozdelenia sú konvexné rizikové miery.

V optimalizácii portfólia je z hľadiska výpočtového najjednoduchšia formulácia úlohy lineárneho programovania. Optimalizačné problémy,žiaľ, nie je vždy možné formulovať alebo previesť do tohto tvaru.

1.3 Jednoúrovňové modely

Vyćhádzame z klasického modelu podľa Markowitza. Poznatky budeme čerpať z [13]. Predpokladajme, že máme portfólio s J akciami, ktoré je charakterizované váhami $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_J)^T$, kde $\sum_{i=1}^{J} x_i = 1$. V celej práci budeme predpokladať, že krátke pozície sú zakázané. Náhodný výnos danej akcie je ρ_j a $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_J)^T$. Výnos portfólia potom je:

$$R(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{x})$$

a riziko portfólia, ak predpokladáme rozptyl uvažujeme vo forme:

$$r(\boldsymbol{x}) = var(\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{x}).$$

Tieto dve kritériá budeme skúmať simultánne. Ide o špeciálny prípad úlohy viackriteriálnej optimalizácie. V našom prípade budeme pracovať s dvojkriteriálnou úlohou, ktorá je známa ako mean-risk model. Riešením takejto úlohy sú eficientné portfólia.

Definícia 4. *[13] Portfólio s J akciami a váhami x_i pre i = 1,..., J nazveme eficientným vzhľadom k výnosu a riziku, ak neexistujú iné váhy $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_J^*)$ také, že $\sum_{i=1}^{J} x_i^* = 1$ a sučastne platí, že $R(\boldsymbol{x}^*) \geq R(\boldsymbol{x})$ a $r(\boldsymbol{x}^*) \leq r(\boldsymbol{x})$, kde aspoň jedna z nerozností je ostrá.*

Poznámka. Ak existuje také $\boldsymbol{x}^*$, tak potom hovoríme, že $\boldsymbol{x}^*$ dominuje $\boldsymbol{x}$.

V praxi môžeme eficientné riešenia hľadať troma spôsobmi. Prvou a najčastejšie používanou formuláciou je minimalizácia rizika s obmedzením na požadovaný očakávaný výnos. V druhom prípade môžeme maximalizovať očakávaný výnos a pracovať s rizikom v obmedzení. Poslednou možnosťou je agregovaný prístup. Formulácia, kde minimalizujeme riziko a obmedzenie kladieme na požadovaný očakávaný výnos, vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & r(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & R(\boldsymbol{x}) \geq \mu, \\ & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ďalšou možnosťou definovania mean-risk modelu, ktorý budeme používať, je agregovaný prístup. Nech je $\lambda \in [0,1]$, potom agregovanou úlohou bude:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & \lambda R(\boldsymbol{x}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, J \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tieto dve formulácie budeme používať pri riešení v praktickej časti tejto práce. Keďže sme zakázali krátke pozície, zabezpečili sme si, že optimálne riešenie bude existovať. Tento fakt je veľmi dôležitý pri skúmaní dvojúrovňových úloh. Pre úplnosť uvedieme aj poslednú alternatívu definovania mean-risk modelu. Týmto prístupom sa v našej práci zaoberať nebudeme, takže oboznámime čitateľa len so všeobecnou definíciou. Ide znova o úlohu s obmedzením, kde teraz maximalizujeme výnos a obmedzenie kladieme na riziko. Matematicky túto úlohu môžeme napísať takto:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & R(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & r(\boldsymbol{x}) \leq \sigma^2, \\ & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, J, \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde σ^2 je maximálna hodnota, ktorú môže riziko nadobúdať.

Tvrdenie 2. *[26] Ak $R(\boldsymbol{x})$ je konkávna, $r(\boldsymbol{x})$ je konvexná na konvexnej prípustnej množine, tak tri úlohy 1.2, 1.3 a 1.4 generujú rovnakú eficientnú množinu optimálnych riešení.*

Dôkaz tohto tvrdenia môžeme nájsť v [26]. Uvidieme ešte jedno Lemma, ktoré je využité pri dôkaze Tvrdenia 2.

Lemma 3. *[26] Nech $\boldsymbol{x}^*$ je optimálne riešenie úlohy 1.3, potom $\boldsymbol{x}^*$ je optimálne riešenie úlohy 1.2 s parametrom $\mu_{min} = R(\boldsymbol{x}^*)$.*

Ďalšou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). Pozrieme sa na všeobecnejší prístup. V tomto prípade budeme uvažovať portfólio s viacerými dátovými súbormi. Predpokladajme, že máme k dispozícii K datových súborov. Teda budeme pracovať s K rôznymi náhodnými vektormi výnosov. Musíme vyriešiť K úloh a tým sa snažíme nájsť K optimálnych riešení. Nech x_j^k je váha j-tej akcie v k-tej úlohe pre $k = 1, \ldots, K$ a $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_J^k)^T$. Ďalej nech $\boldsymbol{\rho}^k = (\rho_1^k, \ldots, \rho_J^k)^T$ je vektor náhodných výnosov prislúchajúcich k-tej úlohe. Rovnako ako na začiatku tejto podkapitoly analogicky dostaneme výnos a riziko portfólia prisluchajúce k-tej úlohe. Označíme ich $\mathrm{R}(\boldsymbol{x}^k)$ a $\mathrm{r}(\boldsymbol{x}^k)$. Výnos portfólia prislúchajúci k-tej úlohe pre $k = 1, \ldots, K$ potom je:

$$R(\boldsymbol{x}^k) = E((\boldsymbol{\rho}^k)^T \boldsymbol{x}^k)$$

a riziko portfólia prislúchajúce k-tej úlohe pre $k = 1, \ldots, K$, ak predpokladáme podmienenú hodnotu v riziku uvažujeme vo forme:

$$r(\boldsymbol{x}^k) = CVaR(-(\boldsymbol{\rho}^k)^T \boldsymbol{x}^k).$$

Všebecne môžeme túto úlohu napísať nasledovne:

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}^k} & \lambda R(\boldsymbol{x}^k) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^k) \\ \text{za podmienok} & \sum_{j=1}^J x_j^k = 1, \\ & x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J, \end{array}\right\} \quad k = 1, \ldots, K \tag{1.5}$$

Nech vektor $\boldsymbol{\rho}^n$ pre $n \in \{1, \ldots, N\}$ je J-rozmerný náhodný vektor. Jeho zložky budeme značiť ρ_j^n pre $j \in \{1, \ldots, J\}$ a $n \in \{1, \ldots, N\}$. Predpokladajme, že vektory náhodných výnosov majú diskretne rozdelenie a to je dané realizáciami, ktoré nazveme scenáre. Potom s_j^n je n-tý scenár výnosu j-tej akcie. Tieto scenáre sa budú nadobúdať s rovnakou pravdepodobnosťou. Ďalej nech $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ je J-rozmerný výberový priemer scenárov, ktorý označíme nasledovne:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}^n, \tag{1.6}$$

kde $\boldsymbol{s}^n = (s_1^n, \ldots, s_J^n)$ a $\hat{V}$ je výberová kovariančná matica scenárov:

$$\hat{V} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (\boldsymbol{s}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\boldsymbol{s}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \tag{1.7}$$

Teraz formulujeme jednoúrovňové modely pre jednotlivé miery rizika v prípade vybraných typov formulácii mean-risk modelov.

1.3.1 Rozptyl

Najprv analogicky na základe (1.6) a (1.7) vypočítame $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ a $\hat{V}$, kde $\hat{V}$ je regulárna matica. Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\ \text{za podmienok} & \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\ & \sum\limits_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J \end{array} \tag{1.8}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\boldsymbol{x}} & \lambda \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\ \text{za podmienok} & \sum\limits_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J \end{array} \tag{1.9}$$

1.3.2 Semivariancia

V prípade semivariancie pri formulácii s obmedzením minimalizujeme funkciu:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(max(0,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n)^2)$$

Úlohu s odhadom semivariancie v účelovej funkcii vieme prepísať na úlohu kvadratického programovania tým, že n-tú zložku výrazu v sume nahradíme premennou z^n. Dostaneme účelovú funkciu, ktorá je zospodu obmedzená nulou. Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n=1,\ldots,N \\
& z^n \geq 0, \quad n=1,\ldots,N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J}x_j=1 \\
& x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,J.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n-(1-\lambda)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n=1,\ldots,N \\
& z^n \geq 0, \quad n=1,\ldots,N \\
& \sum_{j=1}^{J}x_j=1 \\
& x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,J.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{x^k}} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{20}\sum_{n=k}^{k+19}(z_k^n)^2 \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad z_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{20}\sum_{t=k}^{k+19}(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k,\dots,k+19 \\
&\qquad z_k^n \geq 0, \quad n = k,\dots,k+19 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad x_j^k \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1,\dots,K$$

1.3.3 Absolútna odchýlka

Ďalšou mierou rizika je absolútna odchýlka. V tomto prípade minimalizujeme nasledujúci výraz:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n\right|$$

Úlohu s absolútnou odchýlkou v účelovej funkcii vieme prepísať na úlohu lineárneho programovania. N-tú zložku výrazu v absolútnej hodnote nahradíme n-tou premennou z^n. Ďalej taktiež využijeme tento prepis výrazu v absolútnej hodnote:

$$\begin{aligned} |z| &\geq z \\ |z| &\geq -z \end{aligned} \tag{1.12}$$

Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z^n \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^k, \quad n = 1,\dots,N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x}, z^n} \quad & \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z^n \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \ldots, N \\
& z^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$\left.\begin{aligned}
& \max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{20} \sum_{n=k}^{k+19} z_k^n \\
& \text{za podmienok} \\
& \qquad z_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{20} \sum_{t=k}^{k+19} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
& \qquad z_k^n \geq \sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - \frac{1}{20} \sum_{t=k}^{k+19} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
& \qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, K$$

1.3.4 Hodnota v riziku

V prípade hodnoty v riziku pri formulácii s obmedzením minimalizujeme $\mathrm{VaR}_\alpha(\boldsymbol{x})$. Úlohu vieme prepísať na úlohu lineárneho celočíselného programovania. Túto formuláciu môžeme nájsť napríklad v [22]. Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & a \\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \leq a + Mz^n, \quad n = 1,\dots,N \\
& \sum_{n=1}^{N} z^n = \lfloor (1-\alpha)N \rfloor \\
& z^n \in \{0,1\}, \quad n = 1,\dots,N \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min} \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \; j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x a M je dostatočne veľká konštanta, tj.

$$M \geq \max_{j,n} \quad s_j^n - \min_{j,n} \quad s_j^n.$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)a \\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \leq a + Mz^n, \quad n = 1,\dots,N \\
& \sum_{n=1}^{N} z^n = \lfloor (1-\alpha)N \rfloor \\
& z^n \in \{0,1\}, \quad n = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \; j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)a_k\\
&\text{za podmienok}\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n \leq a_k + M z_k^n, \quad n = k,\dots,k+19\\
&\qquad \sum_{n=1}^{k} z_k^n = \lfloor(1-\alpha)20\rfloor\\
&\qquad z_k^n \in \{0,1\}, \quad n = k,\dots,k+19\\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1,\\
&\qquad x_j^k \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}\right\}\quad k = 1,\dots,K$$

1.3.5 Podmienená hodnota v riziku

V prípade podmienej hodnoty v riziku pri formulácii s obmedzením budeme postupovať podobne ako v hodnote v riziku. Úlohu vieme prepísať na úlohu lineárneho programovania. Túto formuláciu môžeme nájsť napríklad v [34]. Úloha (1.2) je v tomto prípade:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} z^n\\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1,\dots,N\\
& z^n \geq 0, \quad n = 1,\dots,N\\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}\\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1\\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}\tag{1.17}$$

Úloha (1.3) je v tomto prípade:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x},a,z^n} \quad & \lambda\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} z^n) \\
\text{za podmienok} \quad & z^n \geq -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1,\dots,N \\
& z^n \geq 0, \quad n = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Úloha (1.5) je v tomto prípade:

$$
\left.
\begin{aligned}
& \max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)(a_k + \frac{1}{(1-\alpha)20}\sum_{n=k}^{k+19} z_k^n) \\
& \text{za podmienok} \\
& \qquad z_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - a_k, \quad n = k,\dots,k+19 \\
& \qquad z_k^n \geq 0, \quad n = k,\dots,k+19 \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
& \qquad x_j^k \geq 0,\ j = 1,\dots,J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1,\dots,K
$$

1.4 Stochastická dominancia druhého rádu

Ďalšou možnosťou popísania rizika je prístup stochastickej dominancie využitím úžitkových funkcii. Táto teória je založená na porovnnaní náhodnych veličín za určitých preferencií. V tomto prípade prevedieme dvojkriteriálnu úlohu na jednokriteriálnu, kde maximalizujeme úžitok. Základné informácie o úžitkových funkciách môžeme nájsť v [10]. Teraz sa pozrieme bližšie na stochasticku dominanciu. Ide o najmodernejší prístup k teórii úžitku. Všeobecne má stochastická dominancia určitý rád. V našej práci sme sa rozhodli používať dominanciu druhého rádu. Bližšie informácie o stochastickej dominancii iných rádov je možné nájsť v [28]. Ďalej v našej práci budeme predpokladať, že pracujeme s kardinálnou úžitkovou funkciou za rizika.

Definícia 5. *[22] Povieme, že u: $I \to \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ je kardinálna úžitková funkcia, pokiaľ je spojitá a neklesajúca.*

Poznámka. Namiesto spojitej funkcie môžeme uvažovať taktiež po častiach skokovitú. Predpoklad neklesajúcej funkcie vyjadruje predpoklad nenasýtenosti investora.

Definícia 6. *[22] Nech A a B sú náhodné veličiny, potom A strikne dominuje B vzhľadom k stochastickej dominancii 2. rádu (SSD), ak Eu(A) $\geq$ Eu(B) pre všetky konkávne úžitkové funkcie také, že existujú stredné hodnoty a existuje konkávna úžitková funkcia u_0 taká, že Eu$_0$(A) $>$ Eu$_0$(B). Túto striktnú dominanciu označíme $A \succ_{SSD} B$.*

Poznámka. Existuje aj slabá verzia definície 6(A $\succsim_{SSD}$ B), kde dominancia druhého radu nie je striktná. V tomto prípade predpoklad o existencii úžitkovej funkcie u_0 splňujúci ostrú nerovnosť nie je vyžadovaný. Skratka SSD je z anglického termínu "second-order stochastic dominance".

Poznámka. Nech A $\succ_{SSD}$ B potom žiadni rizikovo averzní investori nepreferujú B pred A.

Poznámka. Množina všetkých konkávnych úžitkových funkcii je jeden z mnoha typov generátorov. Iným príkladom môže byť množina všetkých úžitkových funkcii.

Príklad. [28] Uvedieme príklad stochastickej dominancie druhého rádu pre normálne a diskrétne rozdelenie náhodných veličín A a B.

- Nech máme náhodné veličiny $A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$, $B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$, kde stredné hodnoty $(\mu_A, \mu_B) \in (-\infty, \infty)$ a $(\sigma_A^2, \sigma_B^2) \in (0, \infty)$. Potom platí:

$$\text{A} \succsim_{SSD} \text{B} \Leftrightarrow \mu_A \geq \mu_B \ \& \ \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$$

- Nech náhodná veličina A nadobúda hodnoty $a_1, \ldots, a_N$ s rovnakou pravdepodobnosťou 1/N a $a_1 \leq \ldots \leq a_N$. Nech náhodná veličina B nadobúda hodnoty $b_1, \ldots, b_N$ s rovnakou pravdepodobnosťou 1/N a $b_1 \leq \ldots \leq b_N$. Potom platí:

$$\text{A} \succsim_{SSD} \text{B} \Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i \quad pre \quad n = 1, \ldots, N$$

Definícia 7. *[12] Funkciu $F_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanú vzťahom $F_A(s) = P[A \leq s]$ nazveme distribučnou funkciou náhodnej veličiny A.*

Definícia 8. *[12] Nech F_A je distribučná funkcia náhodnej veličiny A. Funkcia $F_A^{(-1)}(v) = inf\{s : F_A(s) \geq v\}$, $v \in$ (0,1) nazývame kvantilovou funkciou náhodnej veličiny A.*

Definícia 9. *[23] Hovoríme, že kumulovaná distribučná funkcia je plocha pod distribučnou funkciou $F_A(s)$ do bodu t*

$$F_A^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_A(s)ds,$$

a kumulovaná kvantilová funkcia

$$\begin{aligned} F_A^{(-2)}(p) &= \int_0^p F_A^{(-1)}(q)dq, \quad p \in (0, 1] \\ &= 0, \quad p = 0 \\ &= \infty, \quad inak. \end{aligned}$$

Veta 4. *[23] Nutná a postačujúca podmienka pre SSD*

- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow F_A^{(2)}(t) \leq F_B^{(2)}(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ *a existuje* $t_0 \in \mathbb{R}$ *také, že* $F_A^{(2)}(t_0) \ < \ F_B^{(2)}(t_0)$
- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow F_A^{(-2)}(p) \geq F_B^{(-2)}(p)\ \forall\ p \in$ *(0,1] a existuje* $p_0 \in$ *(0,1] také, že* $F_A^{(2)}(p_0) \ > \ F_B^{(2)}(p_0)$
- $A \succ_{SSD} B \Leftrightarrow CVaR_\alpha$ *(-A)* $\leq CVaR_\alpha$ *(-B)* $\forall\alpha \in$ *[0,1] a existuje* $\alpha_0 \in$ *[0,1] také, že* $CVaR_{\alpha_0}$ *(-A)* $< CVaR_{\alpha_0}$ *(-B) kde A a B sú nahodné výnosy s konečnými absolútnymi prvými momentmi.*

Uvedieme, kedy je portfólio SSD eficientné.

Definícia 10. *[23] Hovoríme, že portfólio* $\boldsymbol{x}$ *je SSD neeficientné, keď existuje portfólio* $\boldsymbol{y}$ *také, že* $\boldsymbol{y}$ *striktne dominuje* $\boldsymbol{x}$ *v zmysle SSD. Inak je portfólio* $\boldsymbol{x}$ *SSD eficientné.*

Nutnou a postačujúcou podmienkou na posúdenie portfólia, či je SSD eficientné je nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 5. *[24] Dané portfólio* $\boldsymbol{y}$ *je SSD eficientné vtedy a len vtedy keď* $\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) \ = 0$*, kde* $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}^T$ *a*

$$\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r$$

$$\begin{aligned} \text{za podmienok} \quad & -N^{-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1}d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\ & \leq -N^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1,\ldots,N \\ & \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & x_j^k \geq 0,\ j = 1,\ldots,J \\ & -v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1,\ldots,N \\ & -d_r \leq 0, \quad r = 1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ak $\xi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) \ > 0$ *potom optimálne riešenie* $\boldsymbol{x}^*$ *úlohy* 1.19 *je SSD eficientné a striktne dominuje* $\boldsymbol{y}$ *v zmysle SSD.*

Kapitola 2

Dvojúrovňové optimalizačné problémy

V rôznych odvetiach je tento typ úlohy aplikovaný na problémy s hierarchickým usporiadaním do dvoch rozhodovacích levelov. Bežne je využívaný v manažmente, energetike, či v ekonomickom planovaní. My sa budeme zaoberať optimalizáciou portfólií. V tejto kapitole sa budeme venovať formulovaniu rôznych dvojúrovňových modelov. Využijeme štyri definované miery rizika a taktiež aj stochastickú dominanciu druhého rádu. Najprv uvedieme všeobecné formulácie a v jednotlivých podkapitolách rozpíšeme dané modely podrobnejšie.

2.1 Všeobecná formulácia

Dvojúrovňové optimalizačné problémy tvoria podmnožinu optimalizačných úloh s dvoma optimalizačnými požiadavkami. Od klasickej optimalizačnej úlohy sa líši tým, že v podmienkach riešeného problému sa nachádza optimalizačný problém inej úlohy. Ide o takzvanú vnorenú úlohu. Hlavným (vonkajším) riešeným problémom rozumieme hornú úroveň úlohy a vnorený problém tvorí dolnú úroveň úlohy. Vychádzali sme z definície v [4] a [9].

Definícia 11. *Všeobecnou formuláciou dvojúrovňového optimalizačného problému rozumieme*

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}\boldsymbol{y}\in\mathbb{Y}} \quad & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
\textit{za podmienok} \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0, \\
& \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \\
& f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{z}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \\
& \textit{za podmienok} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq{}& 0, \\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) ={}& 0. \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset R^{n_1}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *sú premenné hornej úrovne a* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *dolnej úrovne. Podobne funkcia* $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *je účelová funkcia hornej úrovne a* $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ *je účelová funkcia dolnej úrovne. Vektorové funkcie* $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$ *a* $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_1}$ *sú podmienky hornej úrovne. Poslednými vektorovými funkciami* $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ *a* $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l2}$ *sú podmienky dolnej úrovne.*

Poznámka. V prípade, že budeme pracovať v dolnej úrovni s I optimalizačnými úlohami, tak formulácia sa zmení nasledovne

$$
\begin{array}{rl}
\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}\boldsymbol{y_i}\in\mathbb{Y}} & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) \\
\text{za podmienok} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) \leq 0, \\
& \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) = 0 \\
& \left.\begin{array}{l} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_i}) = \min\limits_{\boldsymbol{z_i}\in\mathbb{Y}} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) \\ \text{za podmienok} \quad \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) \leq 0, \\ \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{h_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z_i}) = 0, \end{array}\right\} \quad pre \quad i = 1,\dots,I
\end{array}
\tag{2.2}
$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset R^{n_1}$, $\boldsymbol{y_i} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ sú premenné hornej úrovne a $\boldsymbol{z_i} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ dolnej úrovne. Podobne funkcia $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ je účelová funkcia hornej úrovne a $f_i : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ pre $i = 1,\dots,I$ sú účelové funkcie dolnej úrovne. Vektorové funkcie $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$ a $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_1}$ sú podmienky hornej úrovne. Poslednými vektorovými funkciami $\boldsymbol{g_i} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ a $\boldsymbol{h_i} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{l_2}$ pre $i = 1,\dots,I$ sú podmienky dolnej úrovne.

Budeme pracovať s nasledujúcimi množinami.
Množiny prípustných riešení :

$$S(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq 0, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\}$$

$$S_U = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\}$$

Množina optimálnych riešení dolnej úrovne :

$$P(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in argmin(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})\}$$

Indukovaná oblasť je posledná množina, ktorú budeme využívať. Ide o množinu prípustných riešení pre dvojúrovňovú optimalizačnú úlohu. Matematicky ju môžeme vyjadriť takto:

$$IR = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \text{ je prípusté riešenie hornej úrovne}, \boldsymbol{y} \in P(\boldsymbol{x})\}$$

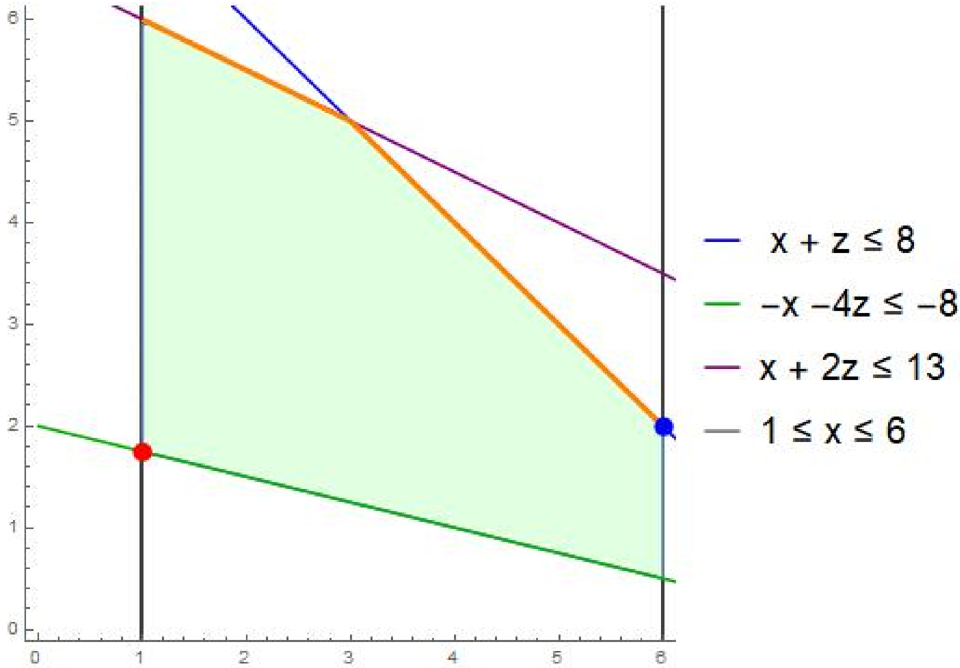
Ďalej budeme predpokladať, že $S(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ a $P(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$.

Príklad. Uvedieme elementárny príklad dvojúrovňovej úlohy. Pre jednoduchosť predpokladajme, že riešime lineárny dvojúrovňový problém so spojitými premennými, tj. $x \in R^1$, $y \in R^1$, $z \in R^1$ a $\mathbb{X} = \{x \geq 0\}$, $\mathbb{Y} = \{z \geq 0\}$

$$
\begin{array}{rlll}
\min\limits_{x\in\mathbb{X}} & x + 3y & & \\
\text{za podmienky} & -y = \min\limits_{z\in\mathbb{Y}} & -z & \\
& \text{za podmienky} & -x - 4z \leq & -8 \\
& & x + z \leq & 8 \\
& & x + 2z \leq & 13 \\
& & 1 \leq x \leq & 6
\end{array}
$$

$P(x)$ je množina optimálnych riešení pre dolnú úroveň. V našom príklade vyzerá nasledovne: $P(x) = \{(x-13)/2, x-8\}$ a keďže nemáme žiadne podmienky

Obr. 2.1: Indukovateľná oblasť.



v hornej úrovni, tak je to zároveň aj indukovateľná oblasť, ktorú môžeme vidieť na Obrázku (2.1) naznačenou oranžovou farbou. Červenou farbou je naznačený bod, ktorý by bol optimom, ak by šlo len o jednoúrovňový problém a modrou farbou je naznačené optimum dvojúrovňovej úlohy.

Využitím piatich mier rizika a stochastickej dominancie druhého rádu uvedieme všeobecné formulácie modelov. Stále budeme pracovať s J akciami, kde budeme mať k dispozícii N scenárov. V prvých dvoch formuláciách bude naším cieľom nájsť portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k mean-risk modelu. Tieto dve formulácie sa líšia spôsobom formulácie podmienky eficiencie. Na dolnej úrovni budeme pracovať s premennou $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^J$. Optimálne riešenia $\boldsymbol{x}$ dolnej úrovne označíme ako $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^J$. Tieto riešenia sa týmto krokom stanú premennými hornej úrovne. Prvým skúmaným modelom bude dvojúrovňová úloha, kde na dolnej úrovni budeme pracovať s úlohou (1.2). Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\mu_{min}, \boldsymbol{x}^*} \quad & \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\| \\ \text{za podmienok} \quad & \mu_{min} \geq 0 \\ & r(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x}} r(\boldsymbol{x}) \\ & \text{za podmienok} \quad R(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{min}, \\ & \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\ & \qquad\qquad\qquad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Druhým skúmaným modelom bude dvojúrovňová úloha, kde na dolnej úrovni budeme pracovať s úlohou (1.3). Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, \boldsymbol{x}^*} \quad & \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\| \\
\text{za podmienok} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda R(\boldsymbol{x}^*) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^*) = \max_{\boldsymbol{x}} \lambda R(\boldsymbol{x}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}) \\
& \text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

V treťom type modelu využijeme úlohu (1.5). V dolnej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení pre $k = 1, \ldots, K$. Nech $\boldsymbol{x}^{*k} \in \mathbb{R}^J$ sú optimálne riešenia dolnej úrovne premennej $\boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^J$. Na dolnej úrovni budeme pracovať s desiatimi skupinami výnosov. V jednej skupine bude dvadsať výnosov. Tieto skupiny tvoria in-sample. V hornej úrovni sa zameráme na maximum out-of sample výnosov. Out-of-sample výnos pre k-tu skupinu označíme $\boldsymbol{s}^{k+20}$. Celkovo v tomto type úlohy budeme pracovať s tridsiatimi výnosmi. Táto úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\max_{\lambda, \boldsymbol{x}^{*k}} \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{s}^{k+20})^T \boldsymbol{x}^{*k}
\tag{2.5}
$$

za podmienok

$$
\left.
\begin{aligned}
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda R(\boldsymbol{x}^{*k}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^{*k}) = \max_{\boldsymbol{x}^k} \lambda R(\boldsymbol{x}^k) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{x}^k) \\
& \text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_i^k = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \ldots, K
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Podľa Tvrdenia 2 je jedno aký mean-risk model použijeme. Vyberieme práve jeden. Budeme pracovať s agregovaným typom mean-risk modelu. Teraz najprv nájdeme SSD množinu eficientných riešeni a na tejto množine budeme hľadať optimálne riešenie mean-risk modelu pre dané riziko. Túto úlohu dostaneme kombináciou úloh 2.1 a jednoúrovňových modelov, ktoré sme definovali v prvej kapitole. Na dolnej úrovni hľadáme SSD eficientnú množinu, teda chceme množinu takých $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_J)^T$, ktoré žiadne $\boldsymbol{x}$ nedominuje. Podľa Tvrdenia 5 dané portfólio je eficientné, ak účelová funkcia je rovná 0.

Ďalej nech d_r^* je optimálne riešenie úlohy 1.19, tak úloha bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}} \quad & \lambda R(\boldsymbol{\xi}) - (1-\lambda) r(\boldsymbol{\xi}) \\
\text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1, \\
& 0 \leq \lambda \leq 1, \\
& \xi_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad -N^{-1} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad\qquad\qquad \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad -v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad -d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Vo formuláciách úloh podobných 2.6 pre jednotlivé riziká budeme až do konca práce uvažovať $\lambda = 1/2$

2.2 Lineárna dvojúrovňová optimalizačná úloha

Úpravou všeobecnej definície uvedieme explicitne ako lineárna dvojúrovňová úloha (BLPP) vyzerá.

Definícia 12. *Predpokladajme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$, $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$, $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{b_1} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{b_2} \in \mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{A_1} \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $\boldsymbol{B_1} \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, $\boldsymbol{A_2} \in \mathbb{R}^{q \times n_1}, \boldsymbol{B_2} \in \mathbb{R}^{q \times n_2}$ a $B^n = \{0,1\}^n$ resp. $B^m\{0,1\}^m$. Potom dvojúrovňovú lineárnu úlohu môžeme napísať nasledovne:*

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}}{min} \quad & \boldsymbol{c_1 x} + \boldsymbol{d_1 y} \\
\textit{za podmienok} \quad & \boldsymbol{A_1 x} + \boldsymbol{B_1 y} \leq \boldsymbol{b_1}, \\
& \boldsymbol{c_2 x} + \boldsymbol{d_2 y} = \min_{\boldsymbol{z} \in Y} \boldsymbol{c_2 x} + \boldsymbol{d_2 z} \\
& \textit{za podmienok} \quad \boldsymbol{A_2 x} + \boldsymbol{B_2 z} \leq \boldsymbol{b_2},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Poznámka. Definícia 12 je definovaná pre spojité premenné (L-BLPP). Ak predpokladáme $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ a $\mathbb{Y} \subset B^{n_2}$ resp. $\mathbb{X} \subset B^{n_1}$ a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ tak ide o spojito-dikrétnu resp. diskrétno-spojitú lineárnu dvojúrovňovú úlohu (CDL-BLPP resp.

(DCL-BLPP)). Ak budeme pracovať s $X \subset B^{n_1}$ a $Y \subset B^{n_2}$, tak ide o diskrétnu lineárnu dvojúrovňovú úlohu (D-BLPP).

Teraz podrobne popíšeme mean-risk modely s obmedzením na očakávaný výnos (1.2) a agregované modely (1.3). Pomocou nich budeme formulovať dvojúrovňový problém. Ako sme už popísali vyššie, naším cieľom je nájsť portfólio, ktoré bude najbližšie k známemu portfóliu y a zároveň maen-risk eficientné vzhľadom k danej miere rizika. Na lineárnu dvojúrovňovú úlohu vieme prepísať tri zo skúmaných rizikových mier, tj. hodnota v riziku, podmienená hodnota z riziku a absolútnu odchýlku. Kde v prípade hodnoty v riziku ide o spojito-diskrétnu lineárnu dvojúrovovú úlohu a vo zvyšných dvoch budeme pracovať so spojitou lineárnou dvojúrovňovou úlohou. Budeme pracovať s J akciami, kde budeme mať k dispozícii N scerárov. Optimálne riešenia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^J$ dolnej úrovne označíme ako $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^J$.

2.2.1 Podmienená hodnota v riziku

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je podmienená hodnota v riziku. Potom dvojúrovňová úloha (2.3) bude vyzerať nasledovne:

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{\mu_{min},\boldsymbol{x}^*} & \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\| & \\
\text{za podmienok} & \mu_{min} \geq 0 & \\
& CVaR(-\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x}} CVaR(-\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}) & \\
& \text{za podmienok} \quad R(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{min}, & \\
& \qquad\qquad\qquad \sum\limits_{j=1}^{J} x_j = 1 & \\
& \qquad\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J. &
\end{array}
\tag{2.8}
$$

Normou v účelovej funkcii budeme v celej práci rozumieť absolútnu hodnotu:

$$
\sum_{j=1}^{J} \left| y_j - x_j^* \right| \tag{2.9}
$$

Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.17). Absolútnu hodnotu v účelovej funkcii hornej úlohy prepíšeme pomocou (1.12). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& a^* + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \min_{\boldsymbol{x}, a, l^n} a + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \ldots, N \\
& l^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, J. \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je podmienená hodnota v riziku. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.18). Absolútnu hodnotu v účelovej funkcii hornej úlohy prepíšeme pomocou (1.12). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a^* + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n}) = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, a, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda)(a + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{n=1}^{N} l^n) \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - a, \quad n = 1, \ldots, N \\
& l^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, J. \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade podmienenej hodnoty v riziku je:

$$\begin{aligned}
&\max_{\lambda, x^{*k}} \quad \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{s}^{k+20})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
&\text{za podmienok} \\
&\quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda)(a_k^* + \frac{1}{(1-\alpha)20}\sum_{n=k}^{k+19} l_k^{*n}) = \\
&\quad = \max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda)(a_k + \frac{1}{(1-\alpha)20}\sum_{n=k}^{k+19} l_k^n) \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad l_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - a_k, \quad n = k, \dots, k+19 \\
&\qquad l_k^n \geq 0, \quad n = k, \dots, k+19 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad x_j^k \geq 0, \; j = 1, \dots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \dots, K$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade podmienenej hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi},a,l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{s}^n - (a + \frac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{n=1}^{N} l^n) \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{s}^n - a,\ n = 1,\dots,N \\
& l^n \geq 0,\ n = 1,\dots,N \\
& \sum_{j=1}^{J}\xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0,\ j = 1,\dots,J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad -N^{-1}\boldsymbol{x^T}\boldsymbol{s^t} + r^{-1}d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad \leq -N^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{\xi^T}\boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad -v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1,\dots,N \\
& \qquad -d_r \leq 0, \quad r = 1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

2.2.2 Absolútna odchýlka

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je absolútna odchýlka. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.13). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \min_{\boldsymbol{x}, l^n} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je absolútna odchýlka. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.14). Celkovo dostaneme lineárnu formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^{*n} = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l^n \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade absolútnej odchýlky je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda, x^{*k}} \quad & \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{s}^{k+20})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
& \text{za podmienok} \\
& \quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{20}\sum_{n=k}^{k+19} l_k^{*n} = \\
&\quad = \max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^{k} s_j^n - (1-\lambda)\frac{1}{20}\sum_{n=k}^{k+19} l_k^{n} \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad l_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{20}\sum_{t=k}^{k+19} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
&\qquad l_k^n \geq \sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n - \frac{1}{20}\sum_{t=k}^{k+19} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, K$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade absolútnej odchýlky je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}, l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} l^n \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad - N^{-1} \boldsymbol{x^T} \boldsymbol{s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad\qquad\qquad \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T} \boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad - d_r \leq 0, \quad r = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

2.2.3 Hodnota v riziku

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je hodnota v riziku. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na celočíselnú lineárnu úlohu ako sme už ukázali v (1.15). Celkovo dostaneme formuláciu úlohy (2.3), ktorá je lineárna a celočíselná. Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& a^* = \min_{\boldsymbol{x}, a, l^n} a \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \leq a + M l^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = \lfloor (1-\alpha) N \rfloor \\
& l^n \in \{0,1\}, \quad n = 1, \ldots, N, \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, J. \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x a M je dostatočne veľká konštanta.

Po využití znalostí z (1.16) a (1.12), ak predpokladáme, že v dolnej úrovni je úloha (1.3) bude formulácia pre hodnotu v riziku nasledovná:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) a^* = \max_{\boldsymbol{x}, a, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) a \\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \leq a + M l^n, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = \lfloor (1-\alpha) N \rfloor \\
& l^n \in \{0,1\}, \quad n = 1, \ldots, N, \\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, J. \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, x^{*k}} \quad \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{s}^{k+20})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad 0 \le \lambda \le 1 \\
&\left.\begin{aligned}
&\lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda)a_k^* = \\
&\quad = \max_{\boldsymbol{x}^k} \quad \lambda\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=k}^{k+19} x_j^{k} s_j^n - (1-\lambda)a_k \\
&\text{za podmienok} \\
&\qquad\qquad -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n \le a_k + M z_k^n, \quad n = k, \dots, k+19 \\
&\qquad\qquad \sum_{n=1}^{k} z_k^n = \lfloor (1-\alpha)20 \rfloor \\
&\qquad\qquad z_k^n \in \{0,1\}, \quad n = k, \dots, k+19 \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
&\qquad\qquad x_j^k \ge 0, \ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade hodnoty v riziku je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi},a,l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{s}^n - a\\
\text{za podmienok} \quad & -\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{s}^n \le a + Ml^n,\ n = 1,\dots,N\\
& \sum_{n=1}^{N} l^n = \lfloor (1-\alpha)N \rfloor\\
& l^n \in \{0,1\}, \quad n = 1,\dots,N,\\
& \sum_{j=1}^{J}\xi_j = 1\\
& \xi_j \ge 0,\ j = 1,\dots,J\\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0\\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r,v_{t,r},\boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r\\
& \text{za podmienok} \quad \begin{aligned}[t] & -N^{-1}\boldsymbol{x^T}\boldsymbol{s^t} + r^{-1}d_r - v_{t,r} + r^{-1}\sum_{k=1}^{N} v_{k,r}\\
& \le -N^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{\xi^T}\boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1,\dots,N\\
& \sum_{j=1}^{J} x_j = 1\\
& x_j^k \ge 0\\
& -v_{t,r} \le 0, \quad t,r = 1,\dots,N\\
& -d_r \le 0, \quad r = 1,\dots,N.
\end{aligned}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

2.3 Konvexná dvojúrovňová optimalizačná úloha

Konvexnú verziu dvojúrovňovej úlohy definovanej v 2.1 dostaneme, ak budeme predpokladať F, f , $\boldsymbol{G}$ resp. $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{g}$ resp. $\boldsymbol{f}$ sú spojité a dvakrát diferencovateľné a konvexné funkcie. Aj napriek označeniu konvexná dvojúrovňová optimalizačná úloha, táto úloha môže mať nekonvexnú indukovanú množinu, ktorá môže byť dokonca aj prázdna kvôli prítomnosti podmienok horného levelu. Mean-risk model, ak za riziko budeme predpokladať rozptylu alebo semivariancie, je možné prepísať na úlohu konvexného programovania.

2.3.1 Semivariancia

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je semivariancia. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.10). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^{*n})^2 = \min_{\boldsymbol{x}, l^n} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad l^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je semivariancia. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.11). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{*T} \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^{*n})^2 = \\
& \quad = \max_{\boldsymbol{x}, l^n} \lambda \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n - (1-\lambda) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
& \text{za podmienok} \quad l^n \geq -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad l^n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Treťou formuláciou je modifikovaná úloha (1.3). V druhej úrovni budeme hľadať K optimálnych riešení a na prvej úrovni budeme maximalizovať out-of sample výnos. Formulácia dvojúrovňovej úlohy (2.5) v prípade semivariancie je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda, x^{*k}} \quad & \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{s}^{k+20})^T \boldsymbol{x}^{*k} \\
& \text{za podmienok} \\
& \quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& \lambda \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=k}^{k+19} x_j^{*k} s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{20} \sum_{n=k}^{k+19} (l_k^{*n})^2 = \\
& \quad \max_{\boldsymbol{x^k}} \quad \lambda \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=k}^{k+19} x_j^k s_j^n - (1-\lambda) \frac{1}{20} \sum_{n=k}^{k+19} (l_k^n)^2 \\
& \text{za podmienok} \\
& \qquad l_k^n \geq -\sum_{j=1}^{J} x_j^k s_j^n + \frac{1}{20} \sum_{t=k}^{k+19} (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{s}^t, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
& \qquad l_k^n \geq 0, \quad n = k, \ldots, k+19 \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j^k = 1, \\
& \qquad x_j^k \geq 0, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\right\} \quad k = 1, \ldots, K
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade semivariancie je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}, l^n} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (l^n)^2 \\
\text{za podmienok} \quad & l^n \geq -\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^n + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{s}^k, \quad n = 1, \dots, N \\
& l^n \geq 0, \; n = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \; j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad -N^{-1} \boldsymbol{x^T} \boldsymbol{s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T} \boldsymbol{s^k}, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad - v_{t,r} \leq 0, \quad t,r = 1, \dots, N \\
& \qquad - d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

2.3.2 Rozptyl

Nech úloha (1.2) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je rozptyl. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.8). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.3). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& \boldsymbol{x}^{*T} \hat{V} \boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\
& \text{za podmienok} \quad \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Nech úloha (1.3) sa nachádza v dolnej úrovni a mierou rizika je rozptyl. Formuláciu úlohy v druhej úrovni je možné prepísať na konvexnú úlohu ako sme už ukázali v (1.9). Celkovo dostaneme konvexnú formuláciu úlohy (2.4). Túto úlohu zapíšeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda, m^j, \boldsymbol{x}^*} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j^* \\
& m^j \geq x_j^* - y_j \\
& 0 \leq \lambda \leq 1 \\
& \lambda \boldsymbol{x}^{*T} \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^{*T} \hat{V} \boldsymbol{x}^* = \max_{\boldsymbol{x}} \lambda \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - (1-\lambda) \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} \\
& \text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Posledným formulovaným typom úlohy je kombinácia mean-risk modelu a stochastickej dominancie druhého rádu. Formulácia (2.6) v prípade rozptyl je:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\xi}} \quad & \boldsymbol{\xi}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\xi}^T \hat{V} \boldsymbol{\xi} \\
\text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{J} \xi_j = 1 \\
& \xi_j \geq 0, \ j = 1, \dots, J \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = 0 \\
& \sum_{r=1}^{N} w_r d_r^* = \max_{d_r, v_{t,r}, \boldsymbol{x}} \quad \sum_{r=1}^{N} w_r d_r \\
& \text{za podmienok} \quad - N^{-1} \boldsymbol{x^T s^t} + r^{-1} d_r - v_{t,r} + r^{-1} \sum_{k=1}^{N} v_{k,r} \\
& \qquad\qquad\qquad \leq -N^{-1} r^{-1} \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\xi^T s^k}, \quad t{,}r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad x_j^k \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad - v_{t,r} \leq 0, \quad t{,}r = 1, \dots, N \\
& \qquad\qquad\qquad - d_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

2.4 Existencia riešenia a algoritmy dvojúrovňového problému

Vnorená štruktúra problému si vyžaduje existenciu optimálneho riešenia dolnej úrovne a potrebujeme pracovať s rozumnou indukovanou oblasťou. Kvôli týmto podmienkam sú dvojúrovňové optimalizačné problémy ťažšie riešiteľné. Úlohy dvojúrovňového problému môžeme tak ako v prípade jednoúrovňových problémov riešiť globálne, lokálne alebo môžeme použiť stacionárne body respektíve heuristiky. Prehľad článkov, kde sa tieto jednotlivé algoritmy nachádzajú, môžeme nájsť v [11]. Obsiahle metódy riešenia dvoúrovňových problémov nájdeme v [4]. Vybrané metódy a postupy z tejto knihy popíšeme v ďalšej časti kapitoly. Najrozšírenejšou teóriou v tejto oblasti je konvexný prípad dvojúrovňových problémov. V literatúre nájdeme rôzne reformulačné techniky, ktoré sa snažia dostať k stacionárnemu bodu a overiť KKT podmienky optimality. Výhodou konvexnej dvojúrovňovej úlohy je, že je možné prepísať dolnú úroveň pomocou Karush-Kuhn-Tuckerových podmienok, čím dostaneme jednoúrovňový problém. Zavedenie pojmu konvexná dvojúrovňová úloha je ale mätúca. Aj napriek tomu, že pracujeme s konvexnými problémami v dolnej aj hornej úrovni, celkovo dvojúrovňový problém konvexný nemusí byť a aj keď nájdeme riešenie, tak zvyčajne ide o lokálne a nie globálne optimum. Všeobecne sú tieto problémy ťažko riešiteľné pretože ide o NP-hard problémy, tj. problémy, ktoré sa nedajú riešiť v polynomickom čase a ani algoritmus riešenia nie je možné preformulovať na problém riešiteľný v polynomickom čase.

2.4.1 Existencia riešenia dvojúrovňového problému

Úlohy definované v tejto kapitole obsahujú parameter $\mu_{min} \geq 0$ a $\lambda \in$ [0,1]. Do hornej úlohy sa posunú len tie hodnoty μmin, λ, pre ktoré existuje optimálne riešenie dolnej úlohy. Ide o parametrickú optimalizačnú úlohu. Základné princípy a vlastnisti spojené s parametrickým programovaním je možné najsť v [16]. Bard a Falk v [5] predstavili 4 kroky, ktorými sa dopracovali k globálnemu riešeniu v troch špeciálnych prípadoch. Prvé dva prípady disponujú v hornej úrovni lineárnou úlohou a treťom prípade kvadratickou. V druhej úrovni je len v prvom prípade lineárny problém a v druhom resp. treťom prípade je kvadratickým problém. Prehľad metód riešení môžeme nájsť v tabuľke 1 v[3].

- 1.KROK: Preformulovať vnútorný problém ako multiparametrický problém s parametrami premenných hornej úlohy
- 2.KROK: Riešenie vnútorného problému vhodným algoritmom, čím dostaneme množinu optimálnych riešení dolnej úrovne.
- 3.KROK: Doplnenie K riešení dolnej úrovne do úlohy hornej úrovne a formulovanie K jednoúrovňových optimalizačných problémov.
- 4.KROK. Výber najlepšieho riešenia

V [4] vnorený problém je už formulovaný pomocou premenných v hornej úrovni a existenciu optimálnych riešení štyroch definovaných problémov v poznámke pod definíciou 12 popisuje nasledovne. Existencia optimálneho riešenia závisí na podmienkach hornej úrovne, tj. $S_U = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{A_1 x} + \boldsymbol{B_1 y} \leq \boldsymbol{b_1}\}$

Tvrdenie 6. *Ak $S_U = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ potom IR nie je prázdna množina ak $S \neq \emptyset$. Ak $S_U \neq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ potom IR nie je prázdna množina, ak existuje $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ také, že $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in S_U$.*

Tvrdenie 7. *Indukované množiny diskrétno-spojitej a diskrétnej lineárnej dvojrovňovej úlohy sú zahrnuté v lineárnej a spojito-diskrétnej lineárnej dvojúrovňovej úlohe.*

Demoštratívny príklad je možné nájsť v [4].

Tvrdenie 8. *V probléme CDL-BLPP, kde $S_u = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ a $S \neq \emptyset$. Potom IR pozostáva z konečného zjednotenia kvazi-polyedrických množín, tj. množina, ktorej uzáver je polyhedrálna množina.*

Dôkaz tochto tvrdenia môžeme nájsť v [4]. Teraz uvedieme vetu o existencii optimálneho riešenia.

Tvrdenie 9. *Nech L-BLPP má ohraničenú množinu S. Ak $S_u = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ potom L-BLPP, DL-BLPP a DCL-BLPP majú optimálne riešenie ak $S \neq \emptyset$. Ak $S_U \neq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ potom L-BLPP, DL-BLPP a DCL-BLPP majú optimálne riešenie ak $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ také, že $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in S_U$.*

Ako sme už naznačili v úvode, tak v úlohe dvojurovňoveho problému vieme indukovanú množinu zapísať explicitne pomocou KKT podmienok. Pozrieme na dvojúrovňovú optimizačnú úlohu definovanú v (11) za nasledujúcich predpokladov:

- f, $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{h}$ sú dvakrát diferencovateľné v $\boldsymbol{y}$ pre $\forall \boldsymbol{y} \in S(\boldsymbol{x})$,

- f je konvexná v$\boldsymbol{y}$ pre $\forall \boldsymbol{y} \in S(\boldsymbol{x})$,

- S($\boldsymbol{x}$) je kompaktná konvexná množina,

- F je spojitá a konvexná v $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.

Z prvých troch predpokladov plynie, že $P(\boldsymbol{x})$ spojitá a uzatvorená. Keďže $P(\boldsymbol{x})$ je uzatvorená, tak indukovaná oblasť je kompaktná. Posledná podmienka implikuje, že účelová funkcia na prvej úrovni je spojitá. Teda v druhej úrovni minimalizujeme spojitú funkciu cez kompaktnú množinu a vieme, že pre takýto problém jednoznačne existuje riešenie. V tomto prípade je možné úlohu definovanú v definícii 11 prepísať na jednoúrovňový problém s využitím KKT podmienok, tj.

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}} & F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \text{za podmienok} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{y}) \leq 0 \\ & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\mathbf{y}) = 0 \\ & \nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}^T \nabla_y \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{l}^T \nabla_y \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0 \\ & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ & \boldsymbol{u} \geq 0 \\ , & \end{array} \tag{2.29}$$

kde $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m_2}$ a $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{l_2}$ sú vektory KKT multiplikátorov s podproblémom pre fixované $\boldsymbol{x}$.

Dvojúrovňový problém s obmedzením v prípade, ak za riziko považujeme rozptyl, môžeme prepísať na jednoúrovňový problém použitím Kuhn-Tuckerových podmienok. V takomto tvare úloha 2.26 bola počítaná v použitom softvére GAMS.

$$
\begin{aligned}
\min_{\mu_{min}, m^j, \boldsymbol{z}} \quad & \sum_{j=1}^{J} m^j \\
\text{za podmienok} \quad & m^j \geq y_j - x_j \\
& m^j \geq x_j - y_j \\
& \mu_{min} \geq 0 \\
& \nabla_x \boldsymbol{x}^T \hat{V} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}^T \nabla_x (\mathbf{1}^T \boldsymbol{x} - 1) + \boldsymbol{u}^T \nabla_x (\mu_{min} - \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \\
& \boldsymbol{u}^T (\mu_{min} - \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \\
& \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1 \\
& \boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \mu_{min}, \\
& \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \\
& x_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, J.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Podľa [37], [2] postačujúce KKT podmienky pre konvexné programovanie sú zároveň aj nutné podmienky. Ďalej ak všetky obmezujúce funkcie sú afinné, potom nutná podmienka optimality KKT platí bez akýchkoľvek ďalších obmedzení.

2.4.2 Algoritmy lineárneho dvojúrovňového problému

V tejto podkapitole predstavíme dva algoritmy. Prvým je K-tý najlepší algoritmus a druhým je Kuhn-Tuckerov prístup. Prvý algoritmus predstavili Bialas a Karwan. Za podmienok, že indukovaná množina je ohraničená a $P(\boldsymbol{x})$ nadobúda jednu hodnotu pre všetky $\boldsymbol{x}$, potom je možné nájsť globálne optimum úlohy definovanej v (12).

Nech $(\boldsymbol{x}_{[i]},\boldsymbol{y}_{[i]})$ pre i =1 ,..., N je N zoradených základných prípustných riešení lineárneho problému min $\{\boldsymbol{c_1 x} + \boldsymbol{d_1 y}$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in$ S$\}$, kde S je množina všetkých podmienok, také, že $\boldsymbol{c_1 x_{[i]}} + \boldsymbol{d_1 y_{[i]}} \leq \boldsymbol{c_1 x_{[i+1]}} + \boldsymbol{d_1 y_{[i+1]}}$ pre i= 1,..., N-1. Potom riešenie problému (2.7) je ekvivalentné k hľadaniu indexu

$$K^* = min\ \{\ i\ \in\ \{1,...,N\} : (\boldsymbol{x}_{[i]},\boldsymbol{y}_{[i]}) \in IR\}. \ (2.31)$$

Hľadáme K^*-té najlepšie riešenie pomocou algoritmu, ktorý prebieha v štyroch krokoch:

- 1. Krok: nech i ← 1. Vyrieš problém min $\{\boldsymbol{c_1 x} + \boldsymbol{d_1 y}$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in$ S$\}$ siplexovou metódou a dosiahnuté optimálne riešenie označíme $(\boldsymbol{x}_{[1]},\boldsymbol{y}_{[1]})$. Nech W = $\{(\boldsymbol{x}_{[1]},\boldsymbol{y}_{[1]})\}$ a T= $\emptyset$.
- 2. Krok: Vyrieš dolnú úroveň úlohy a skontroluj, či daný bod patrí do $P(\boldsymbol{x_{[i]}})$. Nech $\hat{\boldsymbol{y}}$ je optimálne riešenie úlohy min $\{\boldsymbol{d_2 y} : \boldsymbol{y} \in P(\boldsymbol{x_{[i]}})\}$. Ak $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y_{[i]}}$, STOP; $(\boldsymbol{x}_{[i]},\boldsymbol{y}_{[i]})$ je globálne optimum úlohy (2.7) s K^*= i. Inak pokračuj na krok tri.

- 3. Krok: Nech $W_{[i]}$ je množina súsedných bodov extrémov ($\boldsymbol{x}_{[i]}$,$\boldsymbol{y}_{[i]}$) také, že pre ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$) $\in W_{[i]}$ platí $\boldsymbol{c_1 x_{[i]}} + \boldsymbol{c_2 y_{[i]}} \leq \boldsymbol{c_1 x} + \boldsymbol{c_2 y}$. Nech T=T$\cup$ $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$ a W = (W $\cup W_{[i]}$)/T.

- 4. Krok: Nastav i $\leftarrow$ i+1 a vyber ($\boldsymbol{x}_{[i]}$,$\boldsymbol{y}_{[i]}$) také, že $\boldsymbol{c_1 x_{[i]}} + \boldsymbol{d_1 y_{[i]}} = min\{\boldsymbol{c_1 x} + \boldsymbol{d_1 y}$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in$ W$\}$. Pokračuj na 2. Krok

Druhým algortimom je Kuhn-Tuckerov prístup. V (2.29) je jedna podmienka, ktorá nie je lineárna. Bard a Falk [5] prepísali tú to podmienku ako sumu po kúskoch lineárnych funkcií:

$$\sum_{i=1}^{q+n_2}(min\{0,w_i\} + u_i) = 0 \quad w_i - g_i + u_i = 0, \quad pre \quad i = 1, \ldots, q + n_2 \qquad (2.32)$$

Ďalej nech W = $\{1, ..., q + n_2\}$ je množina indexov pre (2.32), $\vec{F}$ je horná hranica účelovaj funkcie hornej úlohy. K-tý level prehľadávajúceho stromu definujeme podmnožinou indexov $W_k \subset W$ a cestu P_k zodpovedajúcu buď $u_i = 0$ alebo $g_i = 0$ pre i $\in W_k$. Budeme pracovať s troma množinami. $S_k^+ = \{i : i \in W_k \quad \mathrm{a}_i = 0\}$, $S_k^- = \{i : i \in W_k \quad \mathrm{a}_i = 0\}$, $S_k^0 = \{i : i \notin W_k\}$. Pre všetky $i \in S_k^0$ predpokladáme u_i a g_i sú kladné pre úlohu definovanú v (2.29) okrem podmienky s kvadratickým členom. Algoritmus prebieha v šiestich krokoch:

- 0. Krok: (Inicializácia) Natavíme k=0, $S_k^+ = \emptyset$, $S_k^- = \emptyset$, $S_k^0 = \{1,...,q + n_2\}$ a $\vec{F} = \infty$

- 1. Krok: nech $u_i = 0$ pre i $\in S_k^+$ a $g_i = 0$ pre i $\in S_k^-$. Pokúsime sa vyriešiť úlohu definovanú (2.29) bez kvadratickej podmienky. Ak nie je možné nájsť riešenie, tak prejdi na 5.Krok, inak k $\leftarrow$ k+1 a označíme riešenie $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{u}^k)$

- 2. Krok: ak F$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k) \geq \vec{F}$, choď na 5. Krok

- 3.Krok: Ak $u_i^k g_i(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)$= 0, $i = 1, \ldots$,$q + n_2$, choď na 5. Krok inak vyber i pre, ktoré $u_i^k g_i(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)$= 0 je väčšie a označíme i_1. Položíme $S_k^+ \leftarrow S_k^+ \bigcup\{i_1\}$, $S_k^0 \leftarrow S_k^0\{i_1\}$, $S_k^- \leftarrow S_k^-$ pripojíme i_1 k P_k a pokračuj 1. Krokom

- 4. Krok: $\vec{F} = F(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)$.

- 5. Krok: Ak neexistuje uzol, tak pokračuj 6.Krokom inak vytvor novú vetvu a obnov S_k^+, S_k^-, S_k^0 a P_k. Backtrakom nájdeme uzol, ktorý sa nachádza najviac vpravo a nie je to podčiarknutá komponenta P_k, podčiakneme ju a vymažeme všetky vstupy zprava. Novo pridaný vstup vymažeme z S_k^+ a pridáme do S_k^- a vymazané vstupy z S_k^- pridáme k S_k^0.

- 6. Krok: Ak $\vec{F} = \infty$, potom neexistuje žiadne prípustné riešenie. Inak tá to množina obsahuje prípustné riešenie.

Tvrdenie 10. *Pri práve jednom riešení v množine P($\boldsymbol{x}$), tento algoritmus nájde globálne optimum (2.7).*

Ďalšie metódy, ktoré môžu byť použité k nájdeniu optimálneho riešenia je "Branch and Bound", "Cutting plane", metóda eliminácie premennej alebo pomocou prístupu komplementarity. Prvé dve metódy spolu s Kuhn-Tucker prístupom je možné využiť aj pri lineárne- kvadratickej úlohe, tj. v prípade, že F, G a g sú lineárne funkcie a f je kvadritická, striktne konvexná. V prípade celočíselnej úlohy sa najčastejšie využíva metóda "Branch and Bound". Zvyšné algoritmy sú dostupné v [4]

Kapitola 3

Praktická časť

V praktickej časti sa budeme zaoberať niekoľkými typmi úloh. Najprv naším cieľom bude nájsť portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k mean-risk modelu. Použijeme dve formulácie mean-risk modelu a to agregovaný prístup (1.3) a formulaciu s obmedzenim na očakávaný výnos (1.2). V druhom type úloh využijeme úlohu (1.5). V dolnej úlohe budeme hľadať K optimálnych riešení. V hornej úrovni sa zameráme na maximum out-of sample očakávaných výnosov. V poslednom type úlohy budeme hľadať optimáne portfólio, ktoré bude stochasticky dominantné druhého rádu. Podľa Tvrdenia 2 je jedno aký mean-risk model použijeme, takže si vyberieme práve jeden. Budeme pracovať s agregovaným typom mean-risk modelu. Najprv na dolnej úrovni nájdeme SSD množinu eficientných riešeni a na tejto množine budeme na hornej úrovni hľadať optimálne riešenie mean-risk modelu pre dané riziko. Túto úlohu dostaneme kombináciou úloh 2.1 a jednoúrovňových modelov, ktoré sme definovali v prvej kapitole. Úlohy sú počítané v softvéri GAMS a Wolfram Mathematica.

3.1 Všeobecná formulácia

Vybrali sme päť akcií spoločností, ktoré sú voľne dostupné na internete. My sme použili https://finance.yahoo.com. Budeme pracovať už s upravenými cenami. Tieto úpravy zohľadňujú všetky uplatniteľné rozdelenia a rozdelenia dividend. Údaje na tejto stránke sa upravujú pomocou vhodných multiplikátorov rozdelených a dividend, ktoré sú v súlade s normami CRSP (Center for Research on Security Prices).

- Apple Inc. (AAPL) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD
- Amazon.com, Inc. (AMZN) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD
- Caterpillar Inc. (CAT) New York Stock Exchange Consolidated Issue - New York Stock Exchange Consolidated Issue Delayed Price. Currency in USD
- The Coca-Cola Company (KO) New York Stock Exchange Consolidated Issue - New York Stock Exchange Consolidated

- Tesla, Inc. (TSLA) NASDAQ Global Select - NASDAQ Global Select Delayed Price. Currency in USD

Budeme pracovať s mesačnými cenami od augusta 2010 do júna 2017. Mesačné ceny akcii sme prepočítali pomocou vzorca:

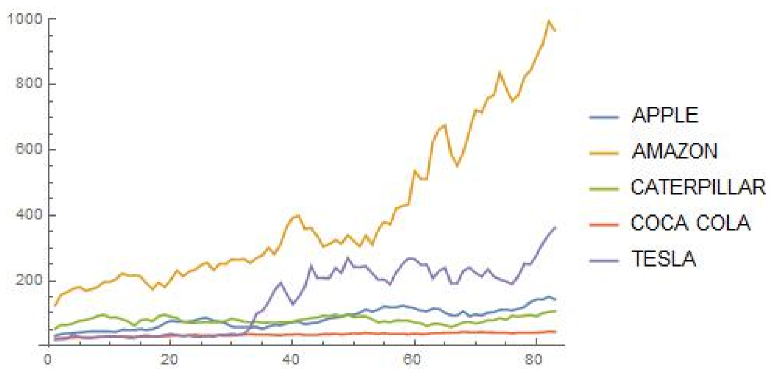
$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

kde P_t je cena v čase t a R_t je výnos v čase t. Tento vzorec nájdeme napríklad v [8]. Prehľad popisných štatistík výnosov sú popísané v Tabuľke 3.1. Ak by sme sa rozhodovali len na základe očakávaného výnosu, tak by sme mohli všetko investovať do Tesly alebo v opatrnejšom prípade by sme mohli investíciu rozdeliť v nejakom pomere medzi Amazon a Teslu.

Tabuľka 3.1: Popisná štatistika výnosov vybraných firiem.

Firma	**1Q**	**3Q**	**Medián**	**Priemer**	**var**	**SD**
AAPL	-0.0188	0.0653	0.0169	0.0212	0.0050	0.0704
AMZN	-0.0327	0.0753	0.0253	0.0283	0.0062	0.0790
CAT	-0.0386	0.0513	0.0094	0.0115	0.0064	0.0797
KO	-0.0136	0.0388	0.0117	0.0090	0.0014	0.0375
TSLA	-0.0642	0.1147	0.0147	0.0479	0.0277	0.1663

Obr. 3.1: Ceny akcií vybraných firiem



Pripomenieme si premenné, s ktorými budeme pracovať v praktickej časti. λ nadobúda hodnoty od [0,1], $\mu \geq 0$ a $\boldsymbol{y}$ je známe portfólio. V rámci praktickej časti sme predpokladali, že $\boldsymbol{y}$ je rovnomerne rozdelené, tj. $\boldsymbol{y} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. V praxi je napríklad možné uvažovať, že známe porfólio je to, čo bolo použité v minulom období. Hodnotu α sme pri podmienej hodnote v riziku nestavili na 0.95. Ďalej nech $r(\boldsymbol{x})$ búdu postupne všetky rizikové miery podľa toho ako sme ich definovali v prvej kapitole.

3.1.1 Riešenie dvojúrovňovej optimalizačnej úlohy

Teraz uvedieme výsledky formulácii dvojúrovňových problémov, ak v dolnej úrovni dvojúrovňovej úlohy pracujeme s obmedzením na očakávaný výnos resp.

agregáciu očakávaného výnosu a rizika. Všeobecné formulácie sú (2.3) a (2.4). Najprv sa pozrieme na dvojúrovňovú úlohu, kde v množine prípustných riešení v dolnej úrovni je obmedzenie na očakávaný výnos. Tu nastáva otázka akým spôsobom obmedziť očakávaný výnos. V praxi sa bežne používa buď celkový priemer očakávaných výnosov alebo benchmark. My sa v tejto praci ale pozrieme na najnižší očakávaný výnos, ktorý môžeme dostať v sledovanom portfóliu. Druhou formuláciou dvojúrovňovej úlohy je formulácia s agregovaným prístupom v dolnej úrovni. Parameter lambda v tomto prípade vyjadruje vzťah investora k riziku a očakávanému výnosu. Ak parameter bude nulový, tak investora extrémne zaujíma maximalny výnos. V ostatných prípadoch je to už jasné.

Uvedieme prehľadnú tabuľku výsledkov zo softvéru GAMS úloch, ktoré sme definovali v druhej kapitole. H1 je hodnota účelovej funkcie hornej úrovne. Hodnota účelovej funcie v dolnej úrovni v oboch prípadoch je rovnaká, čo je dôsledok Tvrdenia 2. Hodnotu účelovej funkcie v dolnej úrovni pri formulácii s obmedzením na očávaný výnos označíme $H2_{OB}$. Hodnotu účelovej funkcie v dolnej úrovni v agregovanom prípade označíme $H2_{AG}$.

Tabuľka 3.2: Hodnoty účelových funkcií a parametrov úloh (2.3) a (2.4).

Riziko	**H1**	$\mathbf{H2}_{OB}$	$\mathbf{H2}_{AG}$	μ_{min}	λ
Rozptyl	0.547	0.002	0.001	0.021	0.122
Semivariancia	0.400	0.001	0.001	0.024	0.085
Absolútna odchýlka	0.983	0.028	-0.023	0.013	0.121
Podmienená hodnota v riziku	0.678	0.060	-0.010	0.021	0.619

V druhej tabuľke ukážeme váhy, do ktorých by sme mali investovať, aby sme dostali portfólio, ktoré je najbližšie k známemu portfóliu $\boldsymbol{y}$ a zároveň eficientné vzhľadom k daným mean-risk modelom.

Tabuľka 3.3: Rozdelenie portfólia pre dané miery rizika.

Riziko	**AAPL**	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
Rozptyl	0.200	0.225	0.003	0.449	0.123
Semivariancia	0.224	0.200	0.000	0.362	0.214
Absolútna odchýlka	0.066	0.048	0.148	0.692	0.046
Pod. hod. v riziku	0.115	0.270	0.000	0.469	0.146

Momentálne je už len na rozhodnutí investora. Ak mu nevadí, že rovnakou váhou sa pristupuje k akcii s velkou potenciálnou strátou resp. ziskom, tak vyberie rozdelenie investovania portfólia pomocou rozptylu. Ak chce klient zohľadniť výšky strát, ktoré sú väčšie ako hodnota v riziku na určitej hladine, tak sa prikloní k riziku definovanom pomocou podmienenej hodnoty v riziku. Chýbajúcim výstupom v tabuľkách je hodnota v riziku, kde v jednoúrovňvom prípade sa softvér bez problémov dopracoval k riešeniu. V dvojúrovňovom prípade sme nedostali optimálne riešenie. Pri riešení dvojúrovňových úloh je kľúčová duálna úloha. V prípade celočíselných úloh nefunguje silná veta o dualite a tým pádom sa Gams nedopracoval k riešeniu. Bola vyhľadaná teória ohľadom prepisu celočíselného programovania, kde sa používali relaxované formulácie a niekde dokonca sa aj dopracovalo k výsledku [15], no to platí len za určitých podmienok.

Teraz si priblížime formuláciu (2.5). Podľa popisu na začiatku tejto kapitoly budeme pracovať s desiatimi dátovými súbormi. Z našich dát vytvoríme 10 skupín. V každej skupine bude 20 výnosov. Celkovo budeme pracovať s tridsiatimi výnosmi. Z našej vzorky vezmeme posledných 30 výnosov, teda od indexu 53 do indexu 82. Do hornej úrovne posunieme desať optimálnych riešení.

Uvedieme prehľadnú tabuľku výsledkov pre rozšírenú formuláciu s agregáciou v dolnej úlohe zo softvéru GAMS pre podmienenú hodnotu v riziku a semivarianciu. $H1$ je znova účelová funkcia hornej úrovne. Tentokrát budeme mať 10 hodnôt pre účelovú funkciu dolnej úrovne $H2$.

Tabuľka 3.4: Hodnoty daných účelových funkcií dvojúrovňových úloh (2.16) a (2.24) s daným použitým rizikom na dolnej úrovni.

Riziko	**CVAR**	**SEMI**
$H1$	0.024	0.018
$H2_1$	0.036	0.003
$H2_2$	0.033	0.003
$H2_3$	0.028	0.002
$H2_4$	0.038	0.003
$H2_5$	0.037	0.002
$H2_6$	0.034	0.001
$H2_7$	0.040	0.002
$H2_8$	0.041	0.002
$H2_9$	0.047	0.002
$H2_{10}$	0.050	0.003

Tabuľka 3.5: Hodnoty hľadaných parametrov λ dvojúrovňových úloh (2.16) a (2.24) s daným použitým rizikom na dolnej úrovni.

λ	λ_{CVAR}	λ_{SEMI}
	1.000	0.125

V tabuľke (3.5) si môžeme všimnúť ako pridávanie nového pozorovania a odoberanie posledného mení optimálne riešenie. V prípade podmienenej hodnoty v riziku sme sa dopracovali k parametru λ rovnej 1. Teda v mean-risk modeli zanedbávame riziko a pozeráme sa len na očakávanú hodnotu výnosu. V nasledujúcich dvoch tabuľkách ukážeme váhy, desiatich optimálnych portfólii ak použijeme mieru rizik podmienenú hodnotu v riziku a semivarianciu. Indexy optimálnych riešenií v tabuľkách (3.7) a (3.6) hovoria o tom, koľko bolo vynechaných pozorovaní z dátového súboru.

Tabuľka 3.6: Rozdelenie portfólia pre podmienenú hodnotu v riziku.

	AAPL	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
x^1	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^3	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^4	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^6	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^7	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^8	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^9	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
x^{10}	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000

Tabuľka 3.7: Rozdelenie portfólia pre semivarianciu.

	AAPL	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
x^1	0.000	0.581	0.273	0.000	0.146
x^2	0.000	0.000	0.015	0.963	0.023
x^3	0.000	0.000	0.047	0.920	0.033
x^4	0.000	0.000	0.118	0.829	0.053
x^5	0.000	0.627	0.224	0.000	0.149
x^6	0.000	0.612	0.208	0.000	0.180
x^7	0.000	0.611	0.330	0.000	0.059
x^8	0.000	0.797	0.020	0.000	0.185
x^9	0.000	0.839	0.030	0.000	0.113
x^{10}	0.000	0.860	0.000	0.000	0.140

Posledný typ príkladu, ktorému sa budeme venovať bude kombinácia úlohy stochastickej dominancie druhého rádu a zároveň mean-risk modelu. Uvedieme výsledky dvoch úloh. Využijeme mieru rizika CVar a absolútnu odchýlku. Znova H1 bude reprezentovať hodnotu účelovej funkcie hornej úrovne. Hodnota účelovej funcie v dolnej úrovni bude značená H2.

Tabuľka 3.8: Hodnoty účelových funkciíúloh (2.13) a (2.28).

Riziko	**H1**	**H2**
Absolútna odchýlka	-0.027	0.000
Podmienená hodnota v riziku	-0.037	0.000

V tabuľke (3.9) nájdeme výsledky pre riziká podmienenú hodnotu a pre absolútnu odchýlku.

Tabuľka 3.9: Rozdelenie portfólia pre dané miery rizika.

Riziko	**AAPL**	**AMZN**	**CAT**	**KO**	**TSLA**
Absolútna odchýlka	0.045	0.039	0.131	0.743	0.041
Pod. hod. v riziku	0.209	0.000	0.000	0.643	0.148

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali dvojúrovňovým optimalizačným problémom. V porovnaní s jednoúrovňovou úlohou má dvojúrovňová niekoľko výhod. Jednou z najväčších výhod je, že v jednom procese vieme analyzovať dve rôzne alebo dokonca aj konfliktné situácie. Dvojúrovňová úloha vie zároveň lepšie podchytiť vzájomný vzťah medzi objektami napríklad medzi manažmentom podniku a jeho zákazníkmi. My sme sa zaoberali optimalizáciou portfólia pomocou mean-risk modelov, kde sme použili rôzne miery rizika. V prvej úrovni sme hľadali najbližšie riešenie k danému portfóliu a v druhej úrovni sme pracovali s mean-risk modelom s obmedzením, kde do obmedzenia sme zaradili očakávaný výnos. Na miesto celkového priemeru alebo benchmarku, co nám určuje dolnú hranicu očakávaného výnosu sme zaradili do úlohy parameter. Druhým typom úloh boli maen-risk modely, kde agregujeme funkcie. Z toho vyplýva, že pri splnení určitých podmienok nezávisí aký mean risk model použijeme, keďže dostaneme rovnakú množinu eficientných riešení. Nakoniec sme sa zaoberali stochastickou dominanciu druhého rádu. V práci boli použité dva softvéry, tj. GAMS a Wolfram Mathematica. Na výpočet dvojúrovňových úloh sme použili GAMS, konkrétne experimentálne operačné prostredie EMP. Toto prostredie má niekoľko solverov a najpoužívanejším je JAMS. Konštatuleme, že nie všetky nami definované úlohy bol tento softvér schopný vypočítať. Problém sa vyskytol v úlohách, kde v dolnej úrovni minimalizujeme hodnotu v riziku. Tu sme sa teda nedopracovali k výsledku, keďže duálne riešenie dolnej úrovne zohráva dôležitú úlohu v dvoúrovňovom programovaní pri rozhodovaní hornej úrovne a neexistuje žiaden jednoznačný koncept, ak využívame duálnu úlohu a sú prítomné diskrétne premenné. V [9] bola prepísaná jednoúrovňová celočíselná úloha do dvojúrovňovej. Toto sme do diplomovej práce nezahrnuli, keďže by to už bolo nad rámec zadanej úlohy. Týmto krokom dostaneme trojúrovňový problém. V treťom type úlohy sme hľadali na dolnej úrovni K optimálnych riešení, ktoré sme posunuli do hornej úrovne a zaujímali sme sa o maximálny out-of-sample výnos. V poslednom type úlohy sme sa zaoberali stochastickou dominanciou druhého rádu. Na dolnej úrovni sme vytvorili množinu eficientných riešení. Na tejto množine sme následne našli eficietné riešenie vzhľadom k mean-risk modelu, ktorý bol v hornej úrovni.

Samozrejeme, že je možné vytvoriť aj iné formulácie pomocou definovaných mier rizika. Ďalšou a nie jedinou možnou formuláciou úlohy by mohlo byť hľadanie SSD aj CVar eficientnho portfólia v dolnej úrovni a v hornej úrovni by sme minimalizovali transakčné náklady. Rovnako aj generátorov stochastickej dominancie je mnoho. Bolo by teda napr. možné pozorovať zmeny vo výsledkoch, ak by sme použili stochastickú dominanciu prvého rádu. Taktiež sme v celej práci počítali s diskrétnymi scenármi. Bolo by možné uvažovať o tom, že výnosy akcií majú združené mnohorozmerné normálne rozdelenie alebo aj iné eliptické rozdelenie. Ďalšou zaujímavou analýzou by bolo, ak by sme v poslednom type dvojúrovňového problému 2.6 ponechali v účelovej funkcii hornej úrovne parameter λ. Pre parameter λ z intervalu [0,1] by bolo možné vytvoriť ekvidistantné hodnoty. Pre tieto hodnoty by sme postupne mohli vypočítať očakávanú hodnotu a riziko. Výsledkom tejto analýzy by bol najvhodnejší parameter λ, ktorý je možné použiť pri danom dvojúrovňovom probléme.

Literatúra

[1] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eben, J.M. and Heath, D. (1999): *Cohorent measures of risk*. Mathematical Finance, Vol. 9, No.3, pp. 203-228.

[2] Axehill, D. (2008): *Integer Quadratic Programming for Control and Communication*. PhD thesis, Linkoping University, Sweden.

[3] Aryanezhad, M.B. and Roghanian, E. (2008):*A bi-level linear multi-objective decision making model with interval coefficients for supply chain coordination*. IUST International Journal of Engineering Science, Vol. 19, No.1-2, pp. 67-74.

[4] Bard, J.F.(1998): *Practical Bilevel Optimization:Algorithm and Application*. Kluwer, ISBN 978-1-4419-4807-6.

[5] Bard, J.F. and Falk, J.E. (1982): *An Explicit Solution to the Multi-Level Programming Problem*, Computers Operations Research, Vol. 9, No. 1, pp. 77-100.

[6] Bracken, J. and McGill, J.(1973): *An Mathematical programs with optimalization problems in the constrains*, Operations Research, Vol. 22, pp. 37-44.

[7] Candler, W. and Norton, R (1977); : *Multilevel programing*. Technical report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C.

[8] Cipra, T.(2008): *Finanční ekonometrie*. Ekopress, ISBN 978-80-86929-43-9.

[9] Colson, B.; Marcotte, P. and Savard, G. (2007): *An overview of bilevel optimization*, Annals Operations Research, Vol. 153, pp. 235-256.

[10] Černý, M.; Vlach, M. and Zimmermann, K. (1975): *Axiomatická teória úžitku*. Státní pedagogické nakladateľství, n.p., Praha 1, číslo publikace: 1014-9295.

[11] Dempe, S. (2003): *Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints* A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, Vol. 52, pp. 333-359.

[12] Dupač, V. and Hušková, M.(1999): *Pravdepodobnosť a matematická štatistika* Karolinum, Praha, ISBN 978-8-0246-2208-8.

[13] Dupačová, J.; Hurt, J. and Štěpán, L. (2002): *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer, ISBN 1-4020-0840-6.

[14] Embrechts, P.; McNeil, A. and Straumann, D. (2002): *Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. In: Dempster, M. et al. (Eds.), Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176-223.

[15] Faísca, N.P.; Dua, V.; Rustem, B.; Saraiva P.M. and Pistikopoulos E.N. (2007): *An Parametric global optimisation for bilevel programing*, Global Optimization, Vol. 38, pp. 609 - 623.

[16] Fiacco, A.V.(1983): *An Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming*, Operations Research Department,Vol. 165, ISBN 0-12-254450-1.

[17] Flegel, M. L. and Kanzow, C.(2002): *Optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints: Fritz John and Abadie-type approaches*, Technical report, Universitat Wurzburg, Germany.

[18] Gaivoronski, A.A. and Pflug G.(2004): *Value at Risk in Portfolio Optimilization:file:Properties and Computational Approach.* Journal of Risk, Vol. 7, No. 2, pp. 1-31.

[19] Levy, H. (2006): *Stochastic Dominance Investment Decision Making under Uncertainty Second Edition.* Springer, ISBN-10: 0-387-29302-7.

[20] Huang, A. (2006): *A Comparison of Value at Risk Approaches and a New Method with Extreme Value Theory and Kernel Estimator.* City University of New York, working paper.

[21] Jeroslow, R.G. (1985): *The Polynomial Hierarchy and a Simple Model for Competitive Analysis* Mathematical Programming, Vol. 32, pp. 146–164.

[22] Kopa, M.(2006): *Utility functions in portfolio optimization* Disertační práce, Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

[23] Kopa, M. and Chovanec, P.(2008): *A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure* Kybernetika, Vol. 44, No. 2, pp. 243-258.

[24] Kopa, M. and Post, T.(2015): *A general test for SSD portfolio efficiency* OR Spectrum, Vol. 37, No. 3, pp. 703-734.

[25] Kozmík, V.(2010): *Eficience portfolií při spojitém rozdělení výnosu.* Diplomová práce, Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

[26] Krokhmal, P.; Palmquist, J. and Uryasev, S. (2001): *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints.* Journal of risk, Vol.4, Num.2, p.p. 43-68.

[27] Kulich, M (2016): *Základy teorie pravděpodobnosti* skriptá.

[28] Levy, H.(2006): *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty.* Springer Science+Business Media, inc., ISBN-10 : 0-387-29302-8.

[29] Markowitz, H.(1952): *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

[30] Outrata, J.; Kočvara, M. and Zowe, J. (1998).: *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 978-1-4757-2825-5.

[31] Pflug, G. Ch. and Romisch, W.(2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific Publishing Company, ISBN 978-9812707406.

[32] Rockafellar, R. T. (1970): Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey. ISBN: 978-0691015866.

[33] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S.(2002): *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*. Journal of Banking and Finance, Vol. 26, No. 7, pp. 1443-1471.

[34] Uryasev, S. (2002): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-6644-1.

[35] Vincente, L. Calamai, P. (1994): *Geometry And Local Optimality Conditions For Bilevel Programs With Quadratic Strictly Convex Lower Levels*. Technical report 198-O-150294, Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo.

[36] Vincente, L.; Savard, G. and Judice, J. (1994): *Gescent Approaches for Quadratic Bilevel Programming*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 81, pp. 379–399.

[37] Ye, J. J. (2005): *Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 307, pp. 350-369.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek