



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁRSKA PRÁCA

Erik Mitro

**Periodické riešenia obyčajných
diferenciálnych rovníc**

Katedra numerickej matematiky

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Janovský Vladimír, DrSc.

Študijný program: Matematika

Študijný obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Erik Mitro

Názov práce: Periodické riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc

Autor: Erik Mitro

Katedra: Katedra numerickej matematiky

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Janovský Vladimír, DrSc., Katedra numerickej matematiky

Abstrakt: V práci sa zaoberáme periodickými riešeniami obyčajných diferenciálnych rovníc a skúmaním ich stability. Obmedzujeme sa predovšetkým na skalárne diferenciálne rovnice. Prvá kapitola je venovaná stabilite periodických riešení, ktorá súvisí s Poincareho mapou. Cieľom je rozhodnúť o asymptotickej stabilite/nestabilite pevného bodu Poincareho mapy. K tomu potrebujeme vypočítať prvú deriváciu Poncareho mapy, poprípade derivácie vyšších rádov. V druhej kapitole si zadefinujeme pojem bifurkácia a preskúmame populačný model. V tretej kapitole sa krátko zmienime o Van der Polovom oscilátore tj. systéme dvoch rovníc. Celú teóriu ilustrujeme na príkladoch.

Kľúčové slová: ODR, periodické riešenia, závislosť na parametroch, bifurkácia

Title: Periodic solutions of ordinary differential equations

Author: Erik Mitro

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Janovský Vladimír, DrSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The thesis deals with periodic solutions of ordinary differential equations and examining of their stability. We are mainly limited to scalar differential equations. The first chapter is devoted to the stability of periodic solutions that is related to the Poincaré map. The aim is to decide on the asymptotic stability/instability of the fixed point of this map. To this end we need to compute derivatives of the Poincaré map of the first order or, possibly, of the higher orders. In the second chapter we introduce the concept of bifurcation and we examine the population model. In the third chapter we briefly mention the Van der Pol oscillator i.e the system of two equations. We illustrate the theory by examples.

Keywords: ODE, periodic solutions, parameter dependence, bifurcation

Chcel by som sa poďakovať pánu prof. Vladimírovi Janovskému za vzácne rady a trpezlivosť a taktiež mojej rodine a priateľke za podporu.

Obsah

Úvod	2
1 Skalárne diferenciálne rovnice	4
1.1 Periodické riešenie	5
1.2 Stabilita periodických riešení	7
1.3 Rovnica vo variáciách	10
1.4 Príklady	12
1.5 Derivácie Poincareho mapy vyšších rádov	14
2 Bifurkácia	18
2.1 Perturbácia	18
2.2 Populačný model	20
3 2-dimensionálne vektorové pole	24
3.1 Van der Pol	25
3.2 Poincareho mapa pre Van der Polov oscilátor	28
Záver	34
Literatúra	35

Úvod

V úvode pripomenieme základné tvrdenia týkajúce sa počiatkovej úlohy pre sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Definícia 1. Uvažujme zobrazenie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; (t, x) \mapsto f(t, x)$. Predpokladajme, že $f \in \mathcal{C}(I \times G, \mathbb{R}^n)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna otvorená množina a $I \subset \mathbb{R}$ otvorený interval. Potom rovnicu tvaru

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1)$$

nazývame neautonómnou skalárnou diferenciálnou rovnicou.

Uvažujme navyše počiatkovú podmienku $x(t_0) = x_0 \in G$, kde $t_0 \in I$. Počiatkovou úlohou rozumieme úlohu

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Definícia 2 (Riešenie diferenciálnej rovnice). Nech $f \in \mathcal{C}(I \times G, \mathbb{R}^n)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdna otvorená množina a $I \subset \mathbb{R}$ otvorený interval obsahujúci bod t_0 . Nech funkcia $x : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ má spojitú prvú deriváciu na otvorenom intervale J tj. $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$. Nech platí

$$\dot{x} = f(t, x), \forall t \in I$$

a nech je splnená počiatková podmienka

$$x(t_0) = x_0$$

Potom funkciu $x(t)$ nazývame riešením počiatkovej úlohy (2) na intervale $J \subset \mathbb{R}$.

Ak je funkcia $x(t)$ riešením diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ na intervale $J \subset \mathbb{R}$, potom nutne $x \in \mathcal{C}^1(J)$. Ak sú funkcie $x(t)$ a $f(t, x)$ spojité, potom zobrazenie $t \mapsto f(t, x)$ je spojité na intervale J a teda aj $\dot{x}(t)$ je spojitá funkcia na intervale J , viď [4].

Pozrime sa na jednoznačnosť a existenciu riešenia počiatkovej úlohy (2). Predpokladajme, že

$$f \in \mathcal{C}(I \times G, \mathbb{R}^n), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(I \times G, \mathbb{R}^n), i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

Za týchto predpokladoch potom platí veta o lokálnej existencii a jednoznačnosti riešenia, viď [2] Veta 1.1, Poznámka 1.2.

Riešenie počiatkovej úlohy (2) ide rozšíriť na maximálny interval existencie, viď [2] Veta 1.2, Definícia 1.6. Je to otvorený interval, ktorý budeme značiť $\mathcal{J}(t_0, x_0)$. Na základe týchto tvrdení platí nasledujúca veta

Veta 1 (Riešiaci operátor). Uvažujme počiatkovú úlohu (2). Za predpokladu (3) existuje operátor

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \in \mathcal{J}(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in I \times G &\mapsto \varphi(t; t_0, x_0) = x(t) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ktorý priradzuje trojici $(t; t_0, x_0)$ vektor riešenia $x(t)$ počiatkovej úlohy (2) v čase $t \in \mathcal{J}(t_0, x_0)$. Operátor φ nazývame riešiacou funkciou.

Zakladným predpokladom našej analýzy je periodicita pravej strany diferenciálnej rovnice (1): Existuje $T > 0$ také, že

$$f(t + T, x) = f(t, x), \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

V prvej kapitole budeme uvažovať skalárne diferenciálne rovnice, tj. $n = 1$. V druhej kapitole našu analýzu rozšírime na parametricky závislé skalárne diferenciálne rovnice a v tretej kapitole uvedieme príklad sústavy, kde $n = 2$.

1. Skalárne diferenciálne rovnice

V prvej kapitole si definujeme pojem periodického riešenia skalárnej diferenciálnej rovnice. Budeme rozoznávať stabilné a nestabilné periodické riešenia. Stabilitu budeme skúmať pomocou Poincareho mapy.

Uvažujme počiatočnú úlohu pre skalárnu diferenciálnu rovnicu:

Nech

$$\dot{x}(t) = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je pravá strana rovnice a $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ je počiatočná podmienka. Za predpokladu, že

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.2)$$

existuje riešiaci operátor $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{J}(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \varphi(t; t_0, x_0) = x(t) \in \mathbb{R}$, kde $\mathcal{J}(t_0, x_0)$ je maximálny interval existencie, viď Veta (1). Budeme predpokladať, že pravá strana $f = f(t, x)$ je T-periodická:

Definícia 3 (T-periodická funkcia). *Povieme, že funkcia $f = f(t, x)$ je T-periodická v premennej t , pokiaľ existuje $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ také, že platí*

$$f(t + T, x) = f(t, x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Z vlastnosti riešiacej funkcie potom vyplýva, že

$$\varphi(t + T; t_0 + 1, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0) \quad (1.4)$$

$$\varphi(t + T; t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, \varphi(t_0 + T; t_0, x_0)). \quad (1.5)$$

Budeme hovoriť, že rovnica (1) je T-periodická, pokiaľ je funkcia $f(t, x)$ T-periodická v premennej t . Ak periodická funkcia $f(t, x)$ nie je 1-periodická v premennej t , môžeme danú funkciu stále preškálovať tak, že sa z nej stane 1-periodická funkcia.

Príklad 1. *Uvažujme funkciu $f(t, x) = x \cos(t)$. Perióda funkcie f je zrejme 2π . Definujme funkciu $g(t, x) = f(\frac{t}{2\pi}, x)$. Potom funkcia g je 1-periodická a vznikla preškálovaním funkcie f .*

Ak nebude explicitne povedané inak, budeme predpokladať, že funkcia f je 1-periodická funkcia v premennej t .

Ak $f(t + \tau, x) \neq f(t, x)$ pre nejaké $0 < \tau < T$, potom T je minimálna perióda. Budeme preto uvažovať periódu T v zmysle minimálnej periódy.

1.1 Periodické riešenie

Uvažujme 1-periodickú diferenciálnu rovnicu $\dot{x} = f(t, x)$ s počiatočnou podmienkou $x(t_0) = x_0$. V tejto sekcii sa pozrieme na periodičnosť riešiacej funkcie 1-periodickej rovnice a položíme nutnú a zároveň postačujúcu podmienku pre 1-periodičnosť riešiacej funkcie. Periodické riešenie budeme konštruovať numericky pomocou iteračných techník.

Zadefinujme si najskôr pojem T -periodickej riešiacej funkcie.

Definícia 4 (T -periodická riešiacia funkcia). *Uvažujme počiatočnú úlohu (1.1). Nech platí (1.2) a predpoklad periodicity (1.3). Nech $\varphi(t; t_0, x_0)$ je riešiacia funkcia počiatočnej úlohy (1.1). Povieme, že riešiacia funkcia $\varphi(t; t_0, x_0)$ je T -periodická v premennej $t \in \mathbb{R}$, pokiaľ platí*

$$\varphi(t + T; t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Potom hovoríme, že $\varphi(t; t_0, x_0) = x(t)$ je T -periodické riešenie počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3).

Uvažujme riešiacu funkciu $\varphi(t; t_0, x_0)$ 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3). Chceme zistiť, kedy je riešiacia funkcia φ 1-periodická. K tomu nám pomôže geometrická ilustrácia vzťahu (1.5) predvedená na nasledujúcom príklade.

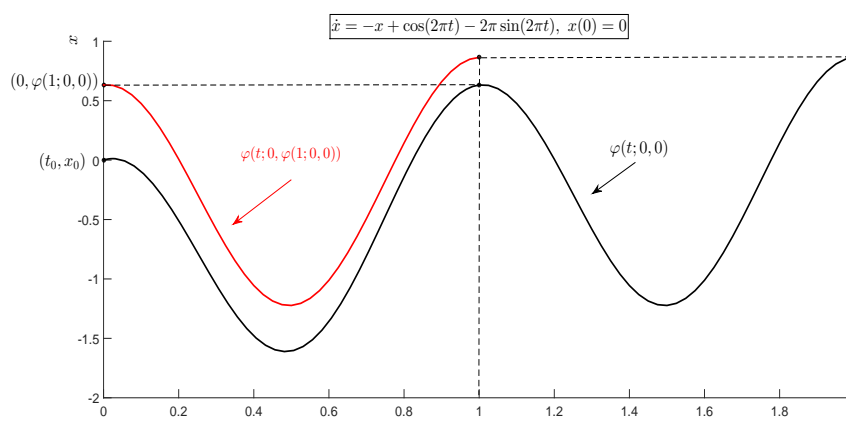
Príklad 2. *Uvažujme 1-periodickú počiatočnú úlohu*

$$\dot{x} = -x + \cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t) \quad (1.6)$$

$$x(0) = 0 \quad (1.7)$$

s riešiacou funkciou $\varphi(t; 0, 0)$ na intervale $[0, 2]$. Chceme zistiť, či je riešiacia funkcia φ 1-periodická.

Predpokladajme, že φ je 1-periodická. Ak túto riešiaciu funkciu horizontálne posunieme z intervalu $[1, 2]$ na interval $[0, 1]$, potom toto riešenie reprezentované riešiacou funkciou $\varphi(t; 0, 0)$ je rovné riešeniu $\varphi(t; 0, \varphi(1; 0, 0))$ na intervale $[0, 1]$ - vid' obrázok nižšie.



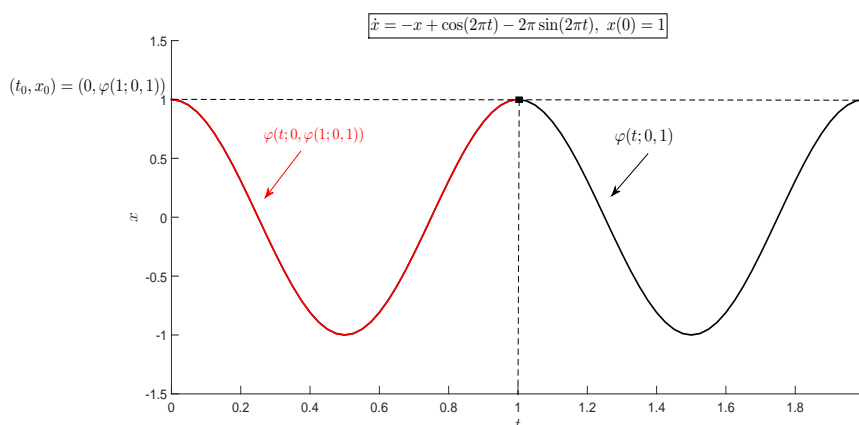
Obr. 1.1: Horizontálny posun riešiacej funkcie $\varphi(t; 0, 0)$ 1-periodickej rovnice (1.6) s počiatočnou podmienkou (1.7) na intervale $[0, 2]$.

Ak by φ bola 1-periodická riešiacia funkcia zadanej diferenciálnej rovnice, potom by malo platiť $\varphi(1; 0, 0) = 0$, tj. ak posunieme 1-periodickú riešiacu funkciu o periódu späť (z intervalu $[1, 2]$ na interval $[0, 1]$), dostanem rovnaké riešenie v čase 0. Z ilustrácie posunutia riešiacej funkcie na obrázku vidíme, že tomu tak nie je a preto $\varphi(t; 0, 0)$ nie je 1-periodická riešiacia funkcia zadanej rovnice.

Uvažujme počiatočnú podmienku

$$x(0) = 1. \quad (1.8)$$

Potom z obrázku nižšie vidíme, že horizontálny posun riešiacej funkcie $\varphi(t; 0, 1)$ z intervalu $[1, 2]$ na interval $[0, 1]$ splyva s riešiacou funkciou $\varphi(t; 0, \varphi(1; 0, 1))$ na intervale $[0, 1]$.



Obr. 1.2: Horizontálny posun riešiacej funkcie $\varphi(t; 0, 1)$ 1-periodickej rovnice (1.6) s počiatočnou podmienkou (1.8) na intervale $[0, 2]$.

Z geometrickej interpretácie plynie nasledujúca veta, ktorá nám charakterizuje 1-periodické riešenie 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3) pri horizontálnom posúvaní riešiacej funkcie.

Veta 2 (Periodické riešenie). *Riešenie $\varphi(t; t_0, x_0)$ 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3) je 1-periodické práve vtedy, keď $\varphi(t_0 + 1; t_0, x_0) = x_0$.*

Dôkaz. Nech riešenie $\varphi(t; t_0, x_0)$ je 1-periodické. Potom platí $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t + 1; t_0, x_0)$. Vyčíslením riešiacej funkcie v čase $t = t_0$ dostávame $\varphi(t_0 + 1; t_0, x_0) = x_0$. Dokazujme opačnú implikáciu. Nech $\varphi(t_0 + 1; t_0, x_0) = x_0$. Potom zo vzťahu (1.5) dostávame $\varphi(t + 1; t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, \varphi(t_0 + 1; t_0, x_0)) = \varphi(t; t_0, x_0)$. \square

Z tejto vety je ihneď zrejmé, že riešenie 1-periodickej počiatočnej úlohy $\dot{x} = -x + \cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t)$, $x(0) = 0$ nie je 1-periodické, pretože zrejme neplatí $\varphi(t_0 + 1; t_0, x_0) = x_0$. Na druhej strane riešiacia funkcia 1-periodickej počiatočnej úlohy $\dot{x} = -x + \cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t)$, $x(0) = 1$ je 1-periodická, pretože platí $\varphi(1; 0, 1) = 1$.

1.2 Stabilita periodických riešení

V tejto sekcii objasníme pojem stability periodických riešení. Zadefinujeme si dôležitý aparát Poincareho mapy, pomocou ktorého budeme riešiť stabilitu riešenia 1-periodickej diferenciálnej rovnice. Pozornosť budeme venovať aj rovniciam vo variáciách, ktoré súvisia s deriváciou riešiacej funkcie podľa počiatkovej podmienky.

V úvode si zadefinujeme pojem stability riešenia 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3).

Definícia 5 (Stabilita riešenia). *Povieme, že riešenie $\varphi(t; t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je stabilné, pokiaľ platí*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y_0 \in \mathbb{R} : |x_0 - y_0| < \delta \implies |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| < \epsilon$$

pričom $\varphi(t; t_0, \cdot)$ je riešením 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) prechádzajúce bodmi $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ v čase $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definícia 6 (Asymptotická stabilita). *Povieme, že riešenie $\varphi(t; t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je asymptoticky stabilné, pokiaľ je toto riešenie stabilné a navyše existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ také, že pre každé riešenie $y_0 \in \mathbb{R}$ danej 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) splňujúce $|x_0 - y_0| < r$ platí*

$$|\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| \rightarrow 0,$$

pre $t \rightarrow \infty$.

Definícia 7 (Nestabilné riešenie). *Povieme, že riešenie $\varphi(t; t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je nestabilné, pokiaľ nie je stabilné.*

Pozrime sa na stabilitu 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3). Nech $t_0 = 0$. Budeme študovať asymptotickú stabilitu riešiacej funkcie $\varphi(t; t_0, x_0)$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) na intervale $[0, 1]$ pomocou postupnosti funkcií

$$\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definovaných na intervale $[0, 1]$ predpisom

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \varphi(t; 0, x_0) \\ \phi_1(t) &= \varphi(t + 1; 0, x_0) \\ &\vdots \\ \phi_k(t) &= \varphi(t + k; 0, x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

pre $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ a $t \in [0, 1]$. Z vety o lokálnej existencii a jednoznačnosti riešenia (viď [2] Veta 1.1, Poznámka 1.2) a 1-periodicity počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) plynie, že postupnosť funkcií ϕ_k je monotónna, a preto, ak platí $\phi_1(0) \geq \phi_0(0) = x_0$, tak potom $\phi_{k+1}(0) \geq \phi_k(0)$, alebo platia opačné nerovnosti.

To nám implikuje, že pokiaľ je postupnosť funkcií ϕ_k obmedzená, potom nutne existuje limitná funkcia $\Phi(t)$ taká, že $\phi_k(t) \rightarrow \Phi(t)$ monotónne pre $k \rightarrow \infty$.

Špeciálne teda platí, že $\phi_k(0) \rightarrow \Phi(0)$ monotónne pre $k \rightarrow \infty$. Vieme, že riešiacia funkcia $\varphi(t; 0, x_0)$ je spojitá v t_0, x_0 . Zo vzťahu (1.5) dostávame rovnosť $\phi_k(t) = \varphi(t; 0, \phi_k(0))$. Z tejto rovnosti a spojitosti riešiackej funkcie dostávame existenciu $\varphi(t; 0, \Phi(0))$ pre $t \in [0, 1]$ a vzťah pre limitnú riešiacu funkciu $\Phi(t) = \varphi(t; 0, \Phi(0))$.

$\Phi(t)$ je teda riešiacia funkcia 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) na intervale $[0, 1]$. Navyše, z (1.5) máme

$$\Phi(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(1; 0, \phi_k(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{k+1}(0) = \Phi(0).$$

Odtiaľ, a z vety o lokálnej existencii a jednoznačnosti (viď [2] Veta 1.1, Poznámka 1.2) plynie, že riešenie 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) prechádzajúce $\Phi(0)$ v čase $t_0 = 0$ je 1-periodické.

Analogicky by sme študovali asymptotickú stabilitu riešenia $\varphi(t; 0, x_0)$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) pre $t \rightarrow -\infty$. V tomto prípade by sme uvažovali postupnosť funkcií $\psi_k(t) = \varphi(t - k; 0, x_0)$. Ak je táto postupnosť obmedzená, potom existuje limitná funkcia $\psi(t)$ taká, že $\psi_k(t) \rightarrow \psi(t)$ pre $k \rightarrow \infty$ a $\psi(1) = \psi(0)$. Celé naše pozorovanie zhrnieme do nasledujúcej vety.

Veta 3 (Limitná riešiacia funkcia I). *Nech $\varphi(t; 0, x_0)$ je 1-periodické riešenie 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3), ktoré je obmedzené pre $t \geq 0$. Potom existuje 1-periodické riešenie $\Phi(t)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) také, že*

$$\varphi(t + k; 0, x_0) \rightarrow \Phi(t), k \rightarrow \infty$$

uniformne a monotónne pre $0 \leq t \leq 1$.

Analogická veta platí i v prípade, že riešiacia funkcia $\varphi(t; 0, x_0)$ je obmedzená pre $t \leq 0$:

Veta 4 (Limitná riešiacia funkcia II). *Nech $\varphi(t; 0, x_0)$ je 1-periodické riešenie 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3), ktoré je obmedzené pre $t \leq 0$. Potom existuje 1-periodické riešenie $\Psi(t)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) také, že*

$$\varphi(t - k; 0, x_0) \rightarrow \Psi(t), k \rightarrow \infty$$

uniformne a monotónne pre $0 \leq t \leq 1$.

Ak máme 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3), potom je jeho limita vždy 1-periodickým riešením tejto počiatkovej úlohy.

Pracovali sme s postupnosťou funkcií $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré sme definovali ako $\phi_k(t) = \varphi(t + k; 0, x_0)$ pre $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ a $t \in [0, 1]$. Pozornosť sme venovali predovšetkým postupnosti bodov $\phi_k(0) = \varphi(k; 0, x_0)$. Na tieto body sa môžeme dívať ako na body tvoriace orbitu skalárnej funkcie na osy x v rovine (t, x) . To nám umožňuje definovať pojem Poincareho mapy.

Definícia 8 (Poincareho mapa). *Uvažujme 1-periodickú počiatočnú úlohu (1.1)-(1.3). Potom zobrazenie*

$$\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definované predpisom

$$x_0 \mapsto \varphi(1; 0, x_0)$$

nazývame Poincareho mapou danej 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3).

Z definície Poincareho mapy plynie, že bod x_0 je počiatočnou hodnotou 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3) práve vtedy, keď x_0 je pevným bodom Poincareho mapy, teda $\Pi(x_0) = x_0$. Úloha stability 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3) je teda rovnaká, ako úloha stability pre odpovedajúci pevný bod Poincareho mapy.

Poincareho mapa počiatočnej hodnote x_0 v čase t_0 priradí riešenie v čase $t = 1$. Pre k -tu iteráciu potom máme $\Pi^k(x_0) = \varphi(k; 0, x_0)$, $k \in \mathbb{N}$. Pretože bod $\Pi^k(x_0)$ je totožný bodu $\phi_k(0)$, je Poincareho mapa monotónna funkcia. Poincareho mapa je navyše diferencovateľná funkcia, ktorá má nezápornú deriváciu.

Ukážeme si aplikáciu Poincareho mapy pri riešení stability diferenciálnych rovníc. Vopred prezradíme (v ďalšej sekcii si to dokážeme), že 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ 1-periodickej počiatočnej úlohy (1.1)-(1.3) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď $\frac{d\Pi}{dx_0} < 1$.

Príklad 3. *Riešme stabilitu diferenciálne rovnice*

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x + 2\pi \sin(2\pi t),$$

s počiatočnou podmienkou $x(0) = x_0$

Riešenie

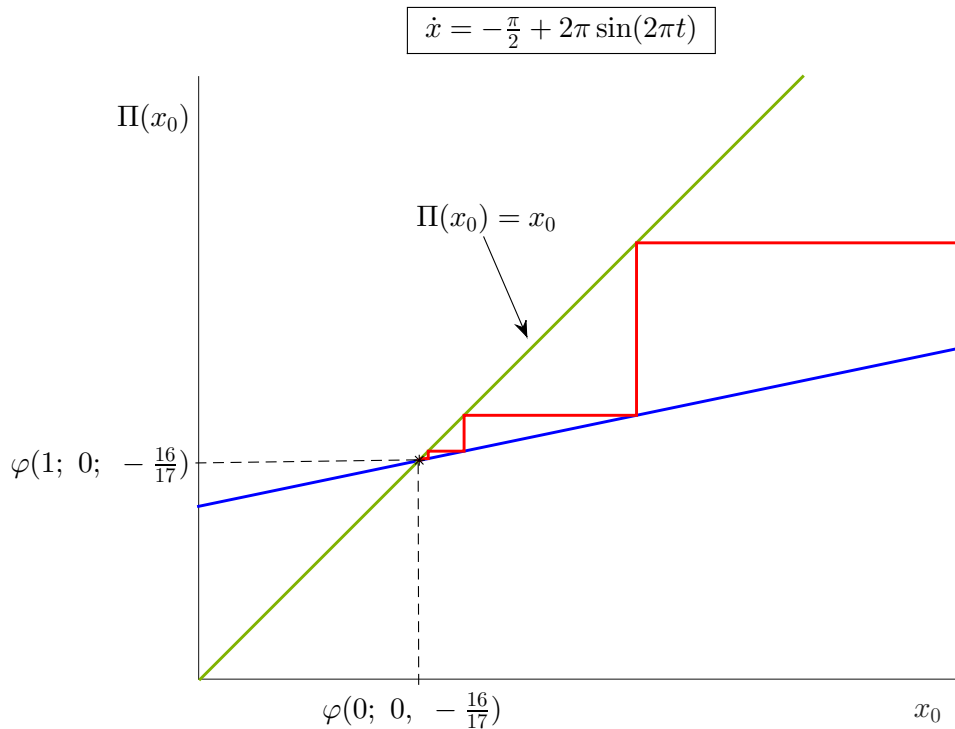
Pomocou metódy variácie konštant dostávame riešenie

$$\begin{aligned} \varphi(t; 0, x_0) &= e^{\int_0^t (-\frac{\pi}{2}) du} [x_0 + \int_0^t e^{\int_0^s \frac{\pi}{2} du} 2\pi \sin(2\pi s) ds] = \\ &= x_0 e^{-\frac{\pi}{2}t} - 4e^{-\frac{\pi t}{2}} \frac{[4 \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)] - 4}{17} \end{aligned}$$

Z Poincareho mapy dostávame

$$\Pi(x_0) = \varphi(1; 0, x_0) = x_0 e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{16}{17} e^{-\frac{\pi}{2}} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

Jediný pevný bod Poincareho mapy je $x_0 = -\frac{16}{17}$, ktorý odpovedá 1-periodickému riešeniu $\varphi(t; 0, -\frac{16}{17}) = \frac{8 \cos(2\pi t) - 4 \sin(2\pi t)}{17}$. Pretože $\frac{d\Pi}{dx_0} = e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$ je toto 1-periodické riešenie asymptoticky stabilné. Tento výsledok si aj graficky ilustrujeme pomocou obrázku nižšie.



Obr. 1.3: Schodovitý graf Poincareho mapy s pevným bodom $x_0 = -\frac{16}{17}$ diferenciálnej rovnice $\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x + 2\pi \sin(2\pi t)$ hovoriaci o asymptotickej stabilite 1-periodického riešenia $\varphi(t; 0, -\frac{16}{17}) = \frac{8 \cos(2\pi t) - 4 \sin(2\pi t)}{17}$.

1.3 Rovnica vo variáciách

Zadefinovali sme si pojem Poincareho mapy Π . Zistili sme, že 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ odpovedá pevnému bodu x_0 Poincareho mapy. V predošlej sekcii sme si taktiež rozmysleli, že skúmať stabilitu 1-periodického riešenia je úloha rovnaká ako úloha skúmať stabilitu odpovedajúceho pevného bodu Poincareho mapy. Pripomeňme si ešte postup hľadania predpisu Poincareho mapy. Pre zistenie presného predpisu Poincareho mapy sme museli riešiť príslušnú diferenciálnu rovnicu s predpísanou počiatočnou podmienkou v čase $t_0 = 0$, určili sme jej riešiacu funkciu a vyčíslili ju v čase $t = 1$.

V tejto sekcii sa zameriame na využitie Poincareho mapy. Konkrétne sa pozrieme na prvú deriváciu Poincareho mapy, pomocou ktorej rozhodneme o stabilite 1-periodického riešenia, ktoré odpovedá pevnému bodu Poincareho mapy. Nie však vždy budeme môcť na základe prvej derivácie Poincareho mapy rozhodnúť o stabilite, či nestabilite príslušného riešenia diferenciálnej rovnice. Kedy to bude možné sa dozvieme v tejto sekcii.

Aby sme sa dopracovali až k prvej derivácii Poincareho mapy, pozrieme sa najskôr na rovnicu vo variáciách, na základe ktorej potom odvodíme podmienku pre stabilitu 1-periodického riešenia $\varphi(t; 0, x_0)$.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu s počiatočnou podmienkou

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.9)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.10)$$

Nech $\varphi(t; t_0, x_0)$ je riešiacia funkcia tejto rovnice. Vieme, že φ je dobre definovaná, jej definičným oborom celé \mathbb{R}^3 (obecne nejaká podmnožina v \mathbb{R}^3) a že φ je spojitá závislá na t, t_0 a x_0 . Chceme zistiť, či $\varphi(t; t_0, x_0)$ je diferencovateľná. O tom nám hovorí nasledujúca obecná veta pre funkciu f definovanú v priestore \mathbb{R}^{n+1} s hodnotami v \mathbb{R}^n .

Veta 5 (Obecná rovnica vo variáciách). *Uvažujme rovnicu (1.9) s počiatočnou podmienkou (1.10). Nech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia triedy $\mathcal{C}_x^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Nech $\varphi(t; t_0, x_0) : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je riešiacia funkcia danej rovnice, nech $(t; t_0, x_0) \in G$ a $w \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje derivácia φ v bode $(t; t_0, x_0)$ podľa x_0 v smere vektora w tj. $D_{x_0, w} \varphi(t; t_0, x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t; t_0, x_0 + hw) - \varphi(t; t_0, x_0)}{h}$. Navyše pre pevné t_0, x_0 , ak je $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ a $u(t) = D_{x_0, w} \varphi(t; t_0, x_0)$, potom $u(t)$ je riešením rovnice s počiatočnou podmienkou*

$$\dot{u}(t) = [\nabla_x f(t, x)]u(t), \quad u(t_0) = w. \quad (1.11)$$

Poznámka Rovnicu (1.11) nazývame rovnicou vo variáciách.

My budeme uvažovať funkciu f definovanú v dvojrozmernom priestore \mathbb{R}^2 s hodnotami v \mathbb{R} . Potom túto vetu môžeme preformulovať takto:

Veta 6. *Uvažujme rovnicu (1.9) s počiatočnou podmienkou (1.10), kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia triedy $\mathcal{C}_x^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Nech $\varphi(t; 0, x_0)$ je 1-periodické riešenie tejto rovnice. Potom $\frac{\partial \varphi(t; 0, x_0)}{\partial x_0}$ je riešenie úlohy s počiatočnou podmienkou*

$$\dot{u}(t) = \left[\frac{\partial f(t, \varphi(t; 0, x_0))}{\partial x} \right] u(t), \quad u(0) = 1, \quad (1.12)$$

príčom toto riešenie splňuje

$$\frac{\partial \varphi(t; 0, x_0)}{\partial x_0} = \exp \left[\int_0^t \frac{\partial f(s, \varphi(s; 0, x_0))}{\partial x} ds \right]. \quad (1.13)$$

Dôkaz. Dôkaz môžeme nájsť napr. v [1], strana 129. □

Uvažujme posunutie $u(t)$ riešenia $\varphi(t; 0, x_0)$ tj. $x(t) = \varphi(t; 0, x_0) + u(t)$. Zderivovaním a dosadením $x(t)$ do $f(t, x)$ dostávame $\dot{u}(t) = f(t, \varphi(t; 0, x_0) + u(t)) - f(t, \varphi(t; 0, x_0))$. Použitím Taylorovho rozvoja funkcie $\dot{u}(t)$ a uvážením iba jeho prvého člena dostávame rovnicu (1.12) tj. rovnicu vo variáciách.

Teraz sformulujeme a dokážeme vetu, ktorá nám dáva vzorec pre výpočet prvej derivácie Poincareho mapy v príslušnom pevnom bode, ktorý odpovedá nejakému periodickému riešeniu. Na základe tohto vzťahu budeme môcť rozhodnúť o stabilite príslušného 1-periodického riešenia odpovedajúceho danému pevnému bodu Poincareho mapy.

Veta 7 (Prvá derivácia Poincareho mapy). *Uvažujem 1-periodickú rovnicu*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia triedy $\mathcal{C}_x^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Nech $\varphi(t; 0, x_0)$ je 1-periodické riešenie tejto rovnice splňujúce $\varphi(0; 0, x_0) = x_0$ a nech Π je Poincareho mapa. Potom prvá derivácia Poincareho mapy je daná vzorcom

$$\Pi'(x_0) = \frac{\partial \varphi(1; 0, x_0)}{\partial x_0} = \exp \left[\int_0^1 \frac{\partial f(t, \varphi(t; 0, x_0))}{\partial x} dt \right]. \quad (1.14)$$

Položme

$$a_0 = \int_0^1 \frac{\partial f(t, \varphi(t; 0, x_0))}{\partial x} dt. \quad (1.15)$$

Potom 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ je asymptoticky stabilné, pokiaľ $a_0 < 0$ a nestabilné, pokiaľ $a_0 > 0$.

Dôkaz. Máme $\Pi(x_0) = \varphi(1; 0, x_0)$ z definície Poincareho mapy. Zderivovaním oboch strán podľa počiatočnej podmienky x_0 dostávame s využitím predošlej vety požadovaný vzorec. Pretože $\varphi(t; 0, x_0)$ je 1-periodické riešenie danej rovnice, je preto x_0 pevným bodom odpovedajúcej Poincareho mapy. Použitím dokázaného vzorca dostávame $\Pi'(x_0) = e^{a_0}$. Teda $e^{a_0} < 1$, pokiaľ $a_0 < 0$ a $e^{a_0} > 1$, pokiaľ $a_0 > 0$. Odtiaľ a z teórie stability plynie záver tvrdenia. \square

Veta nám hovorí o stabilite 1-periodického riešenia danej 1-periodickej rovnice v prípade, pokiaľ $a_0 > 0$ alebo pokiaľ $a_0 < 0$. V prípade, že $a_0 = 0$ nevieme o stabilite daného pevného bodu a teda ani o stabilite 1-periodického riešenia nič povedať.

Definícia 9 (Hyperbolické riešenie). *Povieme, že 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ je hyperbolické, pokiaľ platí $\Pi'(x_0) \neq 1$ tj. $a_0 \neq 0$.*

Ak po prvej derivácii Poincareho mapy zistíme, že 1-periodické riešenie odpovedajúce pevnému bodu Poincareho mapy nie je hyperbolické, nevieme o stabilite daného riešenia nič povedať. K určeniu stability preto budeme potrebovať derivácie Poincareho mapy vyšších rádov. Tomuto problému sa budeme venovať na konci tejto kapitoly.

V nasledujúcej sekcii sa pozrieme na pár príkladov, na ktorých ilustrujeme teóriu prvej kapitoly a precvičíme si prácu s Poincareho mapou a jej deriváciou.

1.4 Príklady

Príklad 4. *Je daná 1/2-periodická diferenciálna rovnica*

$$\dot{x} = 4\pi \cos(4\pi t) + (x - \sin(4\pi t)) \sin(2\pi t)$$

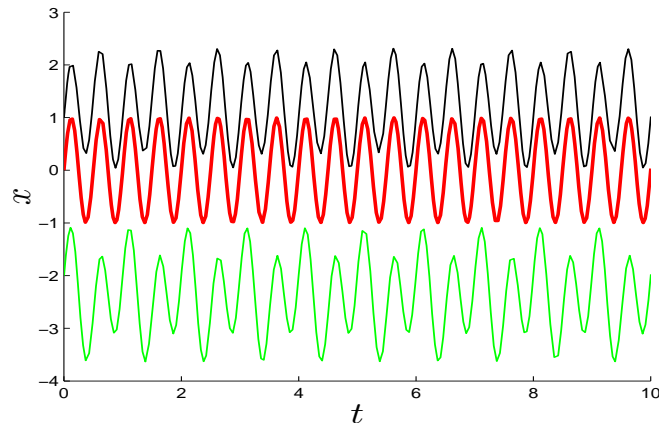
s počiatočnou podmienkou $x(0) = x_0$. Ukážme, že táto rovnica má periodické riešenie a vyriešme stabilitu tohto riešenia.

Riešenie

Máme rovnicu $\dot{x} = 4\pi \cos(4\pi t) + (x - \sin(4\pi t)) \sin(2\pi t)$. To je lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu. Položme $K(t) = \int_0^t \sin(2\pi u) du$. Riešiacia funkcia má tvar

$$\begin{aligned} \varphi(t; 0, x_0) &= e^{K(t)} \left[x_0 + \int_0^t e^{-K(s)} (4\pi \cos(4\pi s) - \sin(4\pi s) \sin(2\pi t)) ds \right] \\ &= x_0 e^{-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}} + \sin(4\pi t) \end{aligned}$$

Dostali sme teda 1/2-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0) = x_0 e^{-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}} + \sin(4\pi t)$.



Obr. 1.4: Riešiacia funkcia $\varphi(t; 0, x_0)$ na intervale $[0, 10]$ s počiatočnými podmienkami $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ a $x_0 = 1$.

V ďalšom kroku vyšetríme stabilitu riešenia. Z Poincareho mapy dostávame

$$\Pi(x_0) = \varphi(1; 0, x_0) = x_0 e^{-\frac{1}{2\pi}}$$

Existuje iba jeden pevný bod Poincareho mapy $x_0 = 0$, ktorý odpovedá jedinému 1/2-periodickému riešeniu $\varphi(t; 0, 0) = \sin(4\pi t)$. Ďalej platí $\frac{d\Pi}{dx_0} = e^{-\frac{1}{2\pi}} < 1$ a preto 1/2-periodické riešenie $\varphi(t; 0, 0) = \sin(4\pi t)$ je asymptotický stabilné.

Príklad 5. Uvažujme logistickú rovnicu

$$\dot{x} = r(t)x \left[1 - \frac{x}{k(t)} \right] - h(t)x$$

kde $h(t)$ je spojité, nezáporná, 1-periodická funkcia a $r(t)$, $k(t)$ sú spojité, kladné, 1-periodické funkcie, pričom navyše platí $r(t) - h(t) > 0$ - populácia nevymrie. Ukážme, že existuje 1-periodické riešenie tejto diferenciálnej rovnice.

Riešenie

Rovnicu si môžeme prepísať do tvaru

$$\dot{x} = [r(t) - h(t)]x \left[1 - \frac{x}{\frac{r(t)-h(t)}{r(t)}k(t)} \right]$$

Označme $a(t) = r(t) - h(t)$ a $b(t) = \frac{r(t)-h(t)}{r(t)}k(t)$. Potom dostávame rovnicu

$$\dot{x} = a(t)x \left[1 - \frac{x}{b(t)} \right]$$

Položme $x = \frac{1}{y}$. Potom platí $\dot{x} = -\frac{\dot{y}}{y^2}$. Použitím substitúcie $x = \frac{1}{y}$ dostávame rovnicu

$$\dot{y} + a(t)y = \frac{a(t)}{b(t)} \quad (1.16)$$

To je lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu a jej riešenie je tvaru

$$y = e^{-\int_0^t (a(u)) du} \left[y_0 + \int_0^t e^{\int_0^s a(u) du} \frac{a(s)}{b(s)} ds \right].$$

Ak položíme $A(t) = \int_0^t (a(s)) ds$, potom má riešenie tvar

$$y = e^{-A(t)} \left[y_0 + \int_0^t \frac{a(s)}{b(s)} e^{-A(s)} ds \right]. \quad (1.17)$$

Chceme, aby naše riešenie $y(t)$ bolo 1-periodické, potom musí platiť $y(0) = y(1) = y_0$. Potom z (1.17) dostávame

$$y_0 = \frac{\int_0^1 \frac{a(s)}{b(s)} e^{-A(s)} ds}{e^{A(1)} - 1}.$$

Jediný kandidát na 1-periodické riešenie je preto tvaru

$$y_0(t) = \frac{\int_0^1 \frac{a(s)}{b(s)} e^{-A(s)} ds}{e^{A(1)} - 1} e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t \frac{a(s)}{b(s)} e^{A(s)} ds.$$

Z 1-periodicity funkcií $a(t)$ a $b(t)$ máme $A(t+1) = A(t) + A(1)$ a taktiež

$$\int_1^{t+1} \frac{a(s)}{b(s)} e^{-A(s)} ds = e^{A(t)} \int_0^t \frac{a(s)}{b(s)} e^{-A(s)} ds.$$

Odtiaľ plynie vzťah $y_0(t) = y_0(t+1)$ pre každé t a preto je riešenie $y_0(t)$ 1-periodické. Pretože každé riešenie rovnice (1.16) má tvar $y(t) = y_0(t) + Ce^{-A(t)}$, pre nejakú konštantu $C \in \mathbb{R}$, je 1-periodické riešenie $y_0(t)$ globálne asymptoticky stabilné za predpokladu, že $A(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Tento predpoklad je splnený vďaka tomu, že $\int_0^1 a(s) ds = \int_1^{t+1} r(s) - h(s) ds > 0$. Ak teda platí $y_0(t) > 0$ pre každé t , potom $x_0(t) = 1/y_0(t)$ je 1-periodickým riešením zadanej úlohy.

1.5 Derivácie Poincareho mapy vyšších rádov

Pokiaľ 1-periodické riešenie 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je hyperbolické, potom na základe Poincareho mapy môžeme rozhodnúť o stabilite tohto riešenia. Pokiaľ však 1-periodické riešenie nie je hyperbolické, potom z Poincareho mapy nevieme o stabilite nič povedať. V tomto prípade potrebujeme určiť deriváciu vyšších rádov Poincareho mapy v pevnom bode, ktorý odpovedá nejakému periodickému riešeniu.

Nech $z(t)$ je výchylka riešenia $\varphi(t; 0, x_0)$ 1-periodickej počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) taká, že platí

$$x(t) = \varphi(t; 0, x_0) + z(t). \quad (1.18)$$

Derivovaním vzťahu (1.18) podľa času dostávame

$$\dot{z}(t) = \dot{x} - \frac{\partial \varphi(t; 0, x_0)}{\partial t}.$$

Z definície riešiacej funkcie a dosadením za $x(t)$ dostávame rovnosť

$$\dot{z}(t) = f(t, \varphi(t; 0, x_0) + z(t)) - f(t, \varphi(t; 0, x_0)). \quad (1.19)$$

Použitím Taylorovho rozvoja pre (1.19) obdržíme

$$\dot{z}(t) = b(t)z + \tilde{c}(t)z^2 + \tilde{d}(t)z^3 + o(z^4), \quad (1.20)$$

kde $b(t)$, $\tilde{c}(t)$, $\tilde{d}(t)$ sú 1-periodické funkcie. Predpokladajme, že 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) nie je hyperbolické, teda, že platí $\Pi'(0) = 1$, čo je ekvivalentné vzťahu $\int_0^1 b(s) ds = 0$. Položme $y(t) = \int_0^1 b(s) ds$. Potom $y(t)$ je 1-periodická funkcia v premennej t , pretože platí $y(t+1) - y(t) = \int_t^{t+1} b(s) ds = \int_0^1 b(s) ds = 0$ (pretože integral cez periódu prediodickej funkcie je invariantný voči posunutiu).

Uvažujme 1-periodickú substitúciu $z(t) = e^{\int_0^1 b(s) ds} u(t)$. Potom rovnica (1.19) v novej premennej $u(t)$ bude tvaru

$$\dot{u}(t) = c(t)u^2 + d(t)u^3 + o(u^4), \quad (1.21)$$

kde $c(t)$, $d(t)$ sú 1-periodické funkcie, ktoré sú dané predpisom

$$c(t) = e^{\int_0^1 b(s) ds}(t), \quad (1.22)$$

$$d(t) = e^{2 \int_0^1 b(s) ds}(t). \quad (1.23)$$

Na základe týchto odvodení a vzťahov môžeme skĺbiť naše poznatky do nasledujúcej vety.

Veta 8 (Poincareho mapa a hyperbolické riešenie). *Uvažujme 1-periodickú počiatkovú úlohu (1.1)-(1.3). Nech $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Poincareho mapa tejto rovnice a nech x_0 je pevný bod Poincareho mapy, tj. $\Pi(x_0) = x_0$. Potom platí:*

a)

$$\Pi''(x_0) = 2 \int_0^1 c(t) dt = 2c_0, \quad (1.24)$$

kde $c(t)$ je 1-periodická funkcia definovaná ako v rovnosti (1.22). Ak je $c_0 \neq 0$, potom pevný bod x_0 odpovedajúci periodickému riešeniu $\varphi(t, 0, x_0)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je nestabilný.

b) Pokiaľ je $c_0 = 0$, potom pre tretiu deriváciu Poincareho mapy v pevnom bode x_0 platí vzťah

$$\Pi'''(x_0) = 6 \int_0^1 d(t) dt = 6d_0, \quad (1.25)$$

kde $d(t)$ je 1-periodická funkcia definovaná ako v rovnosti (1.23). Ak je $d_0 > 0$, potom pevný bod x_0 odpovedajúci periodickému riešeniu $\varphi(t, 0, x_0)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) je nestabilný. Pokiaľ $d_0 < 0$, potom je pevný bod x_0 odpovedajúci periodickému riešeniu $\varphi(t, 0, x_0)$ počiatkovej úlohy (1.1)-(1.3) asymptoticky stabilný.

Dôkaz. Dôkaz môžeme nájsť napr. v [1]. str. 137. □

Na nasledujúcom príklade ukážeme aplikáciu tejto vety.

Príklad 6. Uvažujme 1-periodickú rovnicu

$$\dot{x} = -x^3 + \frac{3}{2}x + \sin^3(2\pi t) - \frac{3}{2}\sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)$$

Overíme, že $\varphi(t, 0, 0) = \sin(2\pi t)$ je 1-periodické riešenie tejto rovnice a vyšetříme jeho stabilitu.

Riešenie

Dosadením do pôvodnej rovnice ihneď dostávame, že $\varphi(t, 0, 0) = \sin(2\pi t)$ je riešením tejto rovnice. Z predpisu je toto riešenie 1-periodické. Overili sme, že $\varphi(t, 0, 0) = \sin(2\pi t)$ je 1-periodické riešenie zadanej rovnice.

Teraz vyšetříme jeho stabilitu. Položme $x(t) = \sin(2\pi t) + z(t)$. Označme $f(t, x) = -x^3 + \frac{3}{2}x + \sin^3(2\pi t) - \frac{3}{2}\sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)$. Zderivovaním funkcie $f(t, x)$ podľa stavovej premennej x dostávame

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + \frac{3}{2}$$

Rovnica vo variáciách pôvodnej rovnice po dosadení $x(t) = \sin(2\pi t) + z(t)$ do $\frac{\partial f}{\partial x}$ má tvar

$$\dot{z} = \left(-3 \sin^2(2\pi t) + \frac{3}{2}\right)z + 6 \sin(2\pi t)z^2 - 3z^3 \quad (1.26)$$

Ďalej máme $\int_0^t -3 \sin^2(2\pi s) + \frac{3}{2} ds = \frac{3 \sin(4\pi t)}{8\pi}$. Definujme preto novú premennú $u(t)$ ako $z(t) = e^{\left(\frac{3 \sin(4\pi t)}{8\pi}\right)} u(t)$. Potom rovnica (1.26) v novej premennej s využitím vzťahov (1.22), (1.23) má tvar

$$\dot{u} = e^{\frac{3 \sin(4\pi t)}{8\pi}} 6 \sin(2\pi t) u^2 - 3e^{\frac{6 \sin(4\pi t)}{8\pi}} u^3$$

Spočítajme ešte a_0 , ktoré sme definovali vo vete (7). Podľa vzťahu (1.15) je

$$a_0 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \sin(2\pi t)) ds = 0$$

a teda zo vzťahu (1.14) konečne dostávame

$$\Pi'(0) = e^{a_0} = e^0 = 1$$

Potom riešenie $\sin(2\pi t)$ odpovedajúce pevnému bodu $x_0 = 0$ nie je hyperbolické a o stabilite 1-periodického riešenia $\varphi(t, 0, 0)$ nevieme nič povedať. K vyšetreniu stability preto použijeme vyššiu deriváciu Poincareho mapy. Konkrétne aplikujeme vetu (8) vzorec (1.24). Dostávame tak

$$\Pi''(0) = 2 \int_0^1 e^{\frac{3 \sin(4\pi t)}{8\pi}} 6 \sin(2\pi t) dt = 0$$

Podľa vety (8) nevieme o stabilite nič povedať. Pozrime sa ešte na tretiu deriváciu Poincareho mapy. Aplikáciou vety (8) vzorca (1.25) dostávame

$$\Pi'''(0) = 6 \int_0^1 -3e^{\frac{3 \sin(4\pi t)}{8\pi}} dt < 0$$

Podľa vety (8) je preto 1-periodické riešie $\varphi(t, 0, 0) = \sin(2\pi t)$ pôvodnej rovnice asymptoticky stabilné.

2. Bifurkácia

V prvej kapitole sme si zadefinovali periodické diferenciálne rovnice, periodické riešiace funkcie a venovali sme sa stabilite týchto riešení pomocou Poincareho mapy. Úlohu stability periodického riešenia sme previedli na úlohu určenia hodnoty prvej derivácie Poincareho mapy v pevnom bode. Ak riešenie nebolo hyperbolické, potom sme museli určiť derivácie vyšších rádov Poincareho mapy, na základe ktorých sme rozhodli o stabilite daného riešenia.

Druhá kapitola bude zameraná na perturbované diferenciálne rovnice - diferenciálne rovnice závisle na parametre. Teóriu perturbovaných rovníc si na konci kapitoly ilustrujeme na príklade populačného modelu. Na úvod kapitoly sa zoznámime s pojmom bifurkácia.

Definícia 10 (Bifurkácia). *Uvažujme diferenciálnu rovnicu*

$$\dot{x} = f(\lambda, t, x). \quad (2.1)$$

Bifurkáciou nazývame bod (λ_0, t_0, x_0) , v ktorom v závislosti na zmene parametru λ nastáva zásadna zmena chovania riešenia rovnice 2.1 na okolí bodu x_0 v čase t_0 .

Bifurkácia nám teda určuje "zlomový" bod, v ktorom sa riešenie radikálne zmení. Môžeme si to jednoducho predstaviť ako kotúľanie guľičky po stole - guľička sa kotúľa po stole až sa dokotúľa ku kraju stola (bifurkácia) a spadne z neho dole na zem. Miesto, v ktorom guľička opustí stôl a začne padať je presne to miesto, v ktorom kotúľanie sa guľičky zmení chovanie.

Poznáme viacero typov bifurkácií ako napr. vidličkovitú alebo typ sedlo-uzol. Viac o bifurkácií a jej praktickom uplatnení si ukážeme na konci kapitoly v príklade populačného modelu.

2.1 Perturbácia

Doposiaľ sme sa venovali neautonómnym skalárnym diferenciálnym rovniciam, vyšetrovali sme stabilitu ich riešení pomocou Poincareho mapy. Čo sa stane, ak do našej periodickej rovnice pridáme parameter? Otázkou skalárnych periodických diferenciálnych rovníc so skalárnym parametrom sa budeme venovať v tejto sekcii.

Definícia 11 (Perturovaná periodická diferenciálna rovnica). *Perturovanou 1-periodickou diferenciálnou rovnicou od rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ nazývame rovnicu tvaru*

$$\dot{x} = F(\lambda, t, x), \quad (2.2)$$

kde funkcia $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, t, x) \mapsto F(\lambda, t, x)$ splňuje podmienky

$$\begin{aligned} F(0, t, x) &= f(t, x) \\ F(\lambda, t, x + 1) &= F(\lambda, t, x). \end{aligned}$$

Perturbovanou diferenciálnou rovnicou teda rozuieme diferenciálnu rovnicu závislú na skalárnom parametre.

V predošlej kapitole sme odvodili vzťahy pre výpočet derivácií vyšších rádov Poincareho mapy a definovali sme si pojem hyperbolického riešenia.

Teraz sa budeme zaoberať lokálnou bifurkáciou nehyperbolických 1-periodických riešení. Nehyperbolické 1-periodické riešenie je také 1-periodické riešenie, ktoré nie je hyperbolické tj. hodnota prvej derivácia Poincareho mapy v pevnom bode je rovná 1.

Uvažujme 1-periodickú perturbovanú rovnicu

$$\dot{x} = F(\lambda, t, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

takú, že $F(0, t, x) = f(t, x)$. Predpokladajme, že

$$\Pi(0, x_0) = x_0, \quad \Pi'(0, x_0) = 1, \quad \Pi''(0, x_0) = 2c_0 \neq 0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

a že neperturovaná 1-periodická rovnica má nehyperbolické 1-periodické riešenie $\varphi(t; 0, x_0)$.

Nás bude zaujímať lokálna bifurkácia nehyperbolického riešenia perturbovanej rovnice (2.3) - budeme skúmať správanie riešenia perturbovanej rovnice na okolí pevného bodu x_0 a $\lambda = 0$. K tomu využijeme Poincareho mapu $\Pi(\lambda, x_0)$ perturbovanej rovnice.

Uvažujme transformáciu rovnice (2.3) takú, že jej Taylorov rozvoj je tvaru

$$\dot{y}(t) = A(\lambda, t) + B(\lambda, t)y(t) + C(\lambda, t)y^2(t) + o(y^3(t)), \quad y(0) = y_0, \quad (2.4)$$

pre 1-periodické funkcie $A(\lambda, t)$, $B(\lambda, t)$, $C(\lambda, t)$ splňujúce $A(0, t) = B(0, t) = 0$ a $C(0, t) \neq c_0$.

Potom príslušná Poincareho mapa tejto rovnice ma tvar

$$\Pi(\lambda, y_0) = y_0 + \tilde{A}(\lambda) + \tilde{B}(\lambda, t)y_0 + \tilde{C}(\lambda)y_0^2 + o(y_0^3), \quad (2.5)$$

kde $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda) = 0$, $\tilde{C}(\lambda) = c_0 \neq 0$.

Počet pevných bodov Poincareho mapy $\Pi(\lambda, y_0)$ závisí na správaní funkcií $\tilde{A}(\lambda)$, $\tilde{B}(\lambda)$, $\tilde{C}(\lambda)$ na okolí $\lambda = 0$. Potrebujeme preto vedieť približné hodnoty týchto funkcií na tomto okolí.

Ukazuje sa, že platí

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}(0, 0) = A_0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda \partial y_0}(0, 0) = B_0.$$

Odvodenie týchto vzťahov môžeme nájsť napr. v [1] na strane 142-143. Pre Taylorov rozvoj Poincareho mapy na okolí $\lambda = 0$ potom dostávame vzťah

$$\Pi(\lambda, y_0) = y_0 + c_0 y_0^2 + A_0 \lambda + o(\lambda^2) + \frac{1}{2} B_0 y_0 \lambda + o(\lambda^2) y_0 + o(\lambda^2) y_0^2 + o(y_0^3)$$

kde A_0 , B_0 sú konštanty. Tento vzťah môžeme upraviť na tvar

$$\Pi(\lambda, y_0) = A_0 \lambda + [1 + \frac{1}{2} B_0 \lambda + o(\lambda^2)] y_0 + [c_0 + o(\lambda)] y_0^2 + o(\lambda^2) + o(y_0^3) \quad (2.6)$$

Zo vzťahu (2.6) dostávame nasledujúcu vetu, ktorá nám dáva existenciu 1-periodických riešení na okolí $\lambda = 0$.

Veta 9 (Bifurkácia sedlo-uzol pre 1-periodické diferenciálne rovnice). *Nech A_0 a c_0 sú definované ako vyššie. Nech $A_0c_0 \neq 0$. Potom perturbovaná diferenciálna rovnica (2.3) na okolí $\lambda = 0$ má*

- a) *dve 1-periodické riešenia, pokiaľ je $\lambda A_0c_0 < 0$*
- b) *jedno 1-periodické riešenie, pokiaľ je $\lambda A_0c_0 = 0$*
- c) *žiadne 1-periodické riešenie, pokiaľ je $\lambda A_0c_0 > 0$*

Na základe tejto vety môžeme po určení koeficientov A_0, c_0 rozhodnúť, koľko má perturbovaná rovnica na okolí $\lambda = 0$ periodických riešení.

2.2 Populačný model

V prvej kapitole v početnej časti sme sa v jednom z príkladov venovali populačnej rovnici. Tento populačný model sme uvažovali s periodickým úbytkom tj. periodic harvesting. Celý model sme rozobrali a odvodili jeho všeobecné riešenie. Teraz v tejto sekcii sa budeme zaoberať populačným modelom, ktorý popisuje vývoj populácie rýb v rybníku. Na tomto príklade si ilustrujeme teóriu 2. kapitoli. Na základe výpočtov s konkrétnymi údajmi zistíme, pri akom počte rýb sa vývoj populácie dramaticky mení - bifurkuje. Tento populačný model budeme uvažovať s periodickým úbytkom (s periodickým rybolovom).

Budeme sa venovať vývoju populácie rýb Tilapia žijúcich v rybníku. Použité dáta sú prebrané z Katedry rybolovu v Malajzii, viď [5].

Uvažujme rybník s plochou $156\,100\text{ m}^2$. Predpokladáme, že tento rybník dokáže užiť 5 rýb druhu Tilapia na 1 m^2 . Odtiaľ máme, že celková kapacita rýb, ktorú tento rybník dokáže užiť je 780 500. U rýb druhu Tilapia vieme, že čas potrebný k dosiahnutiu dospelosti je 6 mesiacov. Ďalej predpokladáme, že až 80 % rýb sa dožije dospelosti. Populačný model, ktorý uvažujeme pri skúmaní vývoja tejto populácie rýb v rybníku má tvar

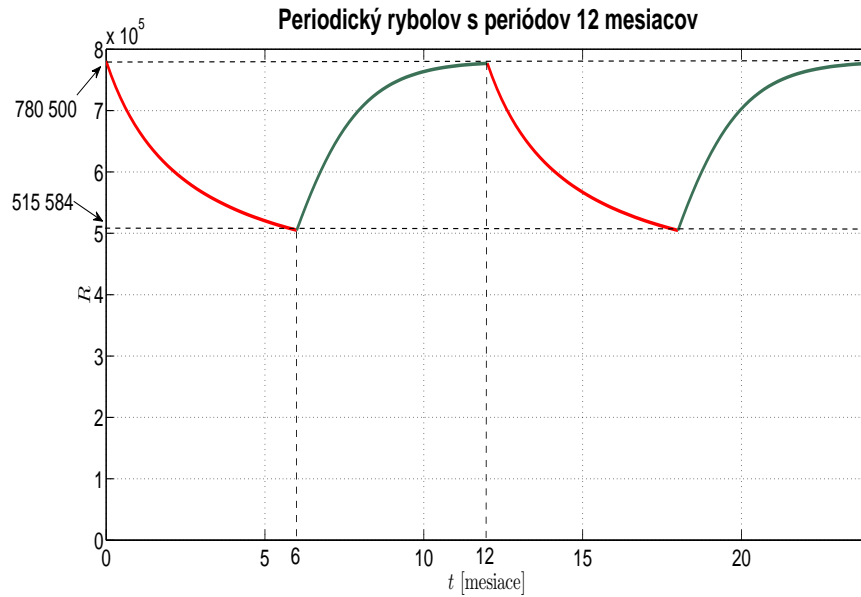
$$\frac{dR(t)}{dt} = pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t)$$

kde \mathbf{K} je počet rýb, ktoré rybník dokáže užiť, \mathbf{p} udáva mieru rýb, ktoré sa dožijú dospelosti, $\mathbf{R}(t)$ je počet rýb žijúcich v rybníku v čase t a funkcia $\mathbf{H}(t)$ reprezentuje úbytok (v našom prípade rybolov). Rozlišujeme 2 prípady funkcie H a to prípad, kedy je funkcia H konštantná a kedy je funkcia H periodická (periodický sa opakujúci rybolov (harvesting)). Funkcia H pre periodický rybolov je definovaná nasledovne

$$H(t) = 156\,100, \quad t \leq 6, \quad H(t) = 0, \quad t > 6$$

$$H(t + 12) = H(t)$$

Vidíme, že funkcia H je periodická a má periódu 1 rok. Populácia rýb preto nevyhynie v dôsledku rybolovu. Následujúci obrázok nám ilustruje populačný model s periodickým rybolovom.



Obr. 2.1: Populačný model s periodickým rybolovom H s periódov 12 mesiacov. *Rast* populácie, *Pokles* populácie. Populácia dosahuje svojho minima 515 584 po prvých 6 mesiacov a potom periodicky každý rok, a svojho maxima 785 500 na začiatku tj. počiatkový počet populácie a potom periodicky každý rok.

Teraz sa pokúsime nájsť rovnovážny bod populačného modelu bez rybolovu (harvesting). Tento rovnovážny bod nám určuje množstvo rýb, pri ktorom populácia rýb ostane nezmenená. Chceme teda zistiť, kedy rovnica populačného modelu bez rybolovu má obe strany nulové.

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t) = 0 \\ pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t) &= 0 \\ 0.8R &= 0 \quad \vee \quad 1 - \frac{R}{780\,500} = 0 \\ R &= 0 \quad \vee \quad R = 780\,500 \end{aligned}$$

Našli sme teda 2 rovnovážne body populačného modelu bez rybolovu a to pre $R = 0$ a $R = 780\,500$. V týchto 2 rovnovážnych bodov sa populácia rýb nezmení. Rovnovážny bod $R = 0$ je nestabilným bodom, pretože ak bude na začiatku populácia rýb blízko bodu $R = 0$, potom sa populácia bude zväčšovať respk. znižovať, teda riešenia populačnej rovnice bez rybolovu blízko bodu $R = 0$ sa budú od tohto bodu odrážať (na intervale $(0, 780\,500)$ budú rásť, na intervale $(0, -\infty)$ klesať).

Rovnovážny bod $R = 780\,500$ je stabilným bodom. Riešenia populačnej rovnice bez rybolovu sa budú k tomuto bodu približovať. Ak teda bude populácia na začiatku väčšia respk. menšia ako 780 500 rýb, potom populácia začne klesať respk. rásť k bodu 780 500 (na intervale $(0, 780\,500)$ bude rásť, na intervale $(780\,500, \infty)$ bude klesať).

Teraz sa budeme zaoberať populačným modelom s konštantným rybolom. Naj-

skôr nájdeme bifurkačný bod tohto modelu a následne rozoberieme a ilustrujeme všetky možnosti v závislosti na tomto bifurkačnom bode.

Nájdenie bifurkačného bodu: Uvažujeme model

$$\frac{dR(t)}{dt} = pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t)$$

kde $H(t)$ je konštantná funkcia. Dosadením získaných dát dostávame vzťah

$$0 = 0,8R \left[1 - \frac{R}{780\,500} \right] - H$$

To je kvadratická rovnica. Hľadáme bifurkačný bod a preto nás zaujíma, kedy je diskriminant tejto rovnice nulový. Diskriminant rovnice je daný vzťahom

$$D = 0,8^2 - 4 \frac{1}{780\,500} H$$

a je nulový práve vtedy, keď

$$0 = 0,8^2 - 4 \frac{1}{780\,500} H$$

Odtiaľ dostávame, že $H = \frac{0,8^2}{4 \frac{1}{780\,500}} \approx 156\,100$. Našli sme bifurkačný bod $H = 156\,100$ populačného modelu s konštantným rybolov. Rozlíšime preto 3 možnosti, ktoré môžu nastať.

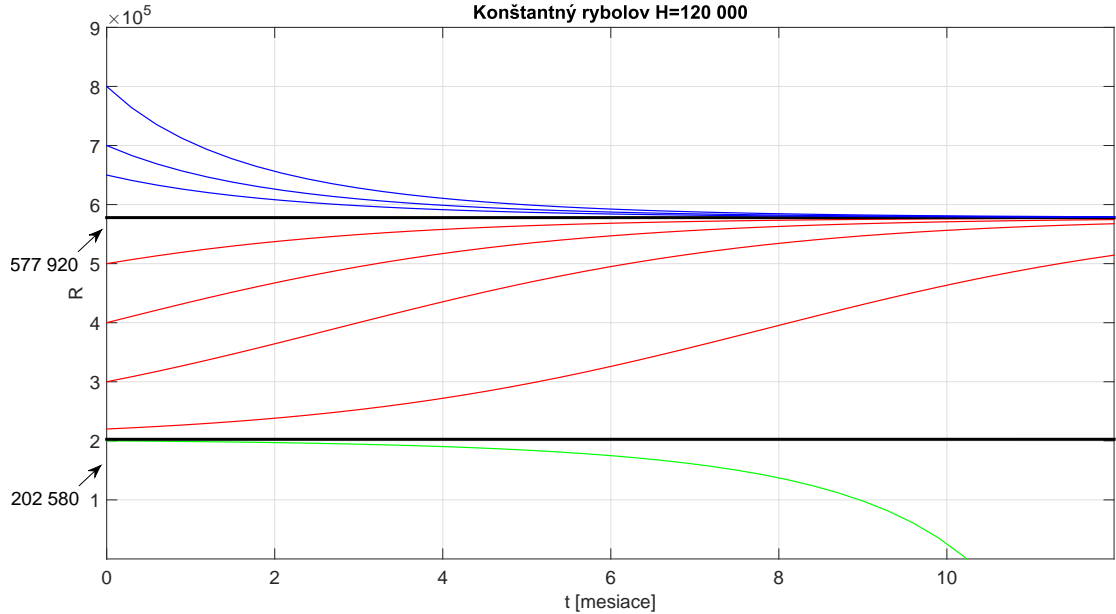
Nech $H < 156\,100$. Uvažujme $H = 120\,000$. Potom dostávame

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t) = 0 \\ 0,8R \left[1 - \frac{R}{780\,500} \right] - 120\,000 &= 0 \\ R = 202\,580 \quad \vee \quad R = 577\,920 \end{aligned}$$

Máme teda 2 pevné body modelu s konštantným rybolovom $H = 120\,000$ a to $R = 202\,580$ a $R = 577\,920$. Dostávame tak, že pre počiatočnú populáciu rýb presahujúcu počet 577 920 dochádza k poklesu, pričom pokles tejto populácie sa blíži k hodnote 577 920. Pokiaľ je počiatočná populácia v rybníku menšia ako $R = 202\,580$, potom dôjde k vyhynutiu. Samozrejme, ak sa počet počiatočnej populácie nachádza v intervale $(202\,580, 577\,920)$, dochádza k rastu populácie.

Nech $H > 156\,100$. Uvažujme $H = 180\,000$. Potom dostávame

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t) = 0 \\ 0,8R \left[1 - \frac{R}{780\,500} \right] - 180\,000 &= 0 \\ D = 0,8^2 - 4 \frac{1}{780\,500} 180\,000 &< 0 \end{aligned}$$



Obr. 2.2: Populačný model s konštantným rybolovom $H=120\,000$. *Vymieranie* populácie, *rast* populácie a *pevne body* $R = 202\,580$, $R = 577\,920$. Populácia medzi týmito pevnými bodmi rastie, inak klesá až vymiera.

Z posledného vzťahu (výpočet diskriminanta) plynie, že žiadna taká reálna hodnota R riešiaci túto kvadratickú rovnicu neexistuje. To znamená, že naša populácia rýb bude vymierať.

Nech $H = 156\,100$. Potom dostávame

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= pR(t) \left[1 - \frac{R(t)}{K} \right] - H(t) = 0 \\ 0.8R \left[1 - \frac{R}{780\,500} \right] - 156\,100 &= 0 \\ R &= 389\,482 \end{aligned}$$

Model s konštantným rybolovom $H = 1560\,100$ má práve jeden pevný bod $R = 389\,482$. Ak teda bude počiatková populácia rýb v rybníku väčšia ako $389\,482$, potom sa táto populácia bude znižovať a blížiť sa hodnote $389\,482$. Ak bude počiatková populácia menšia ako $389\,482$, potom v danom rybníku zaznamenávame vymieranie populácie.

3. 2-dimensionálne vektorové pole

Na úvod tretej kapitoly sa poďme pozrieť do histórie a sveta fyziky. Do méritka si vezmeme nemeckého elektrického inžiniera a fyzika Batlhara van der Pola. Van der Pol sa v 20. rokoch 20 storočia venoval rádiovým vlnám a elektrickým obvodom. Počas jeho výskumu v laboratóriách experimentoval s osciláciami v obvode s elektrónkami, ktoré v tej dobe boli používané na kontrolu toku elektrickej energie v obvode. Všimol si, že všetky počiatočné oscilácie konvergujú k rovnakej prediodickej dráhe s konečnou amplitúdou. Pretože správanie týchto takzvaných vlastných oscilácií bolo rozdielne od správania riešení lineárnych rovníc, navrhol v roku 1927 nelineárnu diferenciálnu rovnicu popisujúcu správanie týchto oscilácií. Van der Polova rovnica popisujúca toto správanie má tvar

$$\ddot{x} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - x, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.1)$$

Výraz $(1 - x^2)\dot{x}$ v rovnici (3.1) nám reprezentuje tlmiacu silu.

Najväčší význam tejto rovnice spočíva v prípade $\varepsilon \gg 1$, kedy Van der Pol objavil relaxačné oscilácie, ktoré zohravajú podstatnú úlohu v teórii geometrických singularit poľa a jeho analýzy. Van der Pol pokračoval vo svojom objave a svojej rovnici dodal člen reprezentujúci silu periodického nútenia $a \sin(\omega t)$ (nútené kmitanie). Jeho rovnica s nútenými kmitmy mala tvar

$$\ddot{x} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + a \sin(\omega t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

kde parameter $a \in \mathbb{R}$ je amplitúda nútiacej sily a $\omega \in \mathbb{R}$ je frekvencia. Van der Pol s jeho kolegom Van der Markom pri vyšetovaní tejto rovnice s periodickými nútenými kmitmy zistili, že počas zmeny frekvencie systému sa objavili subharmonické oscilácie a ako prvý zaznamenali chaotické oscilácie v elektrickom obvode. Neskôr sa Van der Polovou rovnicou s nútenými kmitmy zaoberali Cartwright a Littlewood, ktorý na základe analýzy tejto rovnice položili základy chaotických systémov.

V tejto kapitole sa pozrieme na Van der Polovu rovnicu s nútenými kmitmy - nútený Van der Polov oscilátor, rozoberieme niekoľko prípadov a tie ilustrujeme pomocou obrázkou. Taktiež rozoberieme špeciálny prípad Van der Polovej rovnice bez pôsobiacej sily tj. oscilátor bez nútených kmitov.

Cieľom tejto kapitoly je zoznámiť sa s pojmom limitný cyklus, nahliadnuť do dvojdimenzionálneho sveta diferenciálnych rovníc a v ňom preskúmať Van der Polov oscilátor pomocou príkladov.

Pozrime sa najskôr na samotnú Van der Polovú rovnicu

$$\ddot{x} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - x, \quad \varepsilon > 0$$

Ide o nelineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu so skalárnym parametrom $\varepsilon > 0$. Dvojdimenzionálny tvar tejto rovnice je reprezentovaný systémom

$$\dot{x} = y \quad (3.3)$$

$$\dot{y} = \varepsilon(1 - x^2)y - x, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.4)$$

Stacionárnym bodom tohto systému je bod $[0, 0]$.

Van der Polova rovnica je špeciálnym tvarom Lienhardovej rovnice:

Definícia 12 (Lienhardova rovnica). *Nech $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ také, že f je párna funkcia a g je nepárna funkcia. Potom rovnicu tvaru*

$$\ddot{x} + f\dot{x} + g = 0$$

nazývame Lienhardovou rovnicou.

Z Lienhardovej rovnice dostaneme Van der Polovu rovnicu položením $f = \varepsilon(1 - x^2)$ a $g = x$.

Bez dôkazu napíšeme vetu hovoriacu o jednoznačnosti a existencii limitného cyklu Lienhardovej rovnice, ktorý je stabilný. Dôkaz tejto vety môžeme nájsť v [3]. Predtým si ešte zavedieme definíciu limitného cyklu.

Definícia 13 (Limitný cyklus). *Limitným cyklom definujeme izolovanú uzavretú trajektóriu tj. susediace trajektórie nie sú uzavreté (buď špirálovito smerujú k limitnému cyklu alebo od neho).*

Povieme, že limitný cyklus je stabilný, pokiaľ sa k nemu blížia všetky susedné trajektórie. Stabilný limitný cyklus vykazuje vlastné oscilácie.

Veta 10 (Lienhard). *Nech $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Nech $g(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Označme $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Nech F má koreň $a \in \mathbb{R}^+$ taký, že $F(x) < 0$ pre $0 < x < a$ a $F(x) > 0$ pre $x > a$, pričom $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Potom Lienhardova rovnica má práve jeden stabilný limitný cyklus v okolí bodu 0.*

Lienhardova veta nám zaručuje existenciu práve jedného stabilného limitného cyklu v okolí počiatku pre Van der Polovu rovnicu (3.1). Ukazuje sa, že tento stabilný limitný cyklus pre $\varepsilon \rightarrow 0$ je kružnica so stredom v počiatku a polomerom 2.

3.1 Van der Pol

V úvode sme si uviedli rovnicu Van der Polovho oscilátora tvaru

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad \varepsilon > 0$$

Táto rovnica nám opisuje oscilácie triódy v elektrickom obvode. V špeciálnom prípade pre $\varepsilon = 0$ dostávame rovnicu jednoduchého harmonického kmitania

$$\ddot{x} + x = 0$$

Pre $\varepsilon > 0$ máme v rovnici člen $(1 - x^2)\dot{x}$ reprezentujúci silu závislú na rýchlosti a priestore. Táto sila urýchľuje oscilátor, pokiaľ $x^2 < 1$ a spomaľuje, pokiaľ $x^2 > 1$. Pre $\varepsilon \gg 1$ nám rovnica popisuje relaxačné oscilácie.

Skôr, ako budeme študovať rovnicu Van der Polov oscilátor s nútiacou periodickou silou, pozrime sa na rovnicu Van der Polovu oscilátora bez nútiacej sily.

Uvažujme rovnicu (3.1) (alebo ekvivalentne rovnicu (3.2) s $\lambda = 0$). V prípade, že $\lambda = 0$, potom sme si v úvode rozmysleli, že dvojdimenziálny tvar rovnice (3.1) je reprezentovaný systémom (3.3) tj. má tvar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(1 - x^2)y\end{aligned}$$

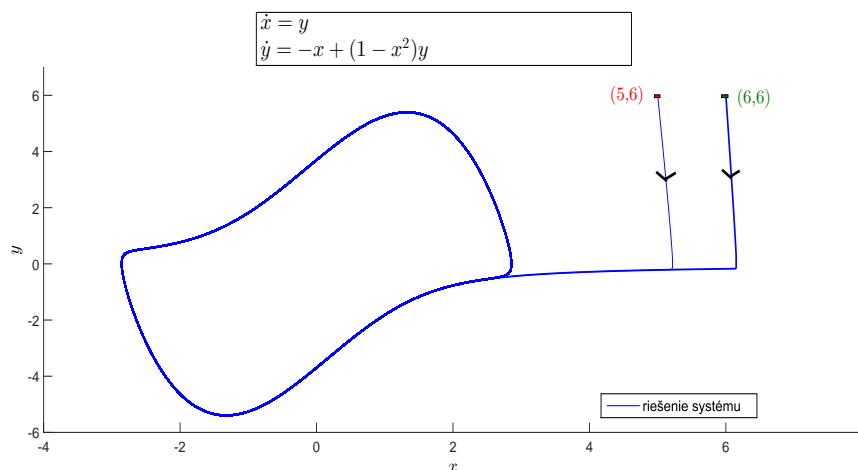
Jacobiho matica tohto systému je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, vlastné čísla Jacobiho matice sú $\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4})$. Odtiaľ dostávame, že stacionárny bod $[0, 0]$ bude pre $\varepsilon < 0$ nestabilný - trajektórie vnútri limitného cyklu opustia limitný cyklus a pôjdu do stacionárneho bodu $[0, 0]$ a trajektórie mimo limitného cyklu opustia limitný cyklus. Pre $\varepsilon \in (0; 2)$ a $\varepsilon \in (2; \infty)$ bude stacionárny bod stabilný - trajektórie opustia stacionárny bod a napoja sa na limitný cyklus. Budeme preto uvažovať $\varepsilon > 0$. Limitným cyklom v tomto prípade bude valec, ktorý je homeomorfný priestoru $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Tento valec je invariantnou varietou v tom zmysle, že každé riešenie, ktoré bude začínať na tomto valci, ostane na tomto valci (bude sa na valec "namotávať"). Riešenia blízko valca budú k nemu priťahované a budú na sa valec namotávať - vytvoria stenu valca. Ilustrujememe si tento prípad pre $\varepsilon = 1$ v \mathbb{R}^2 .

Príklad 7. Uvažujme systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (1 - x^2)y\end{aligned}$$

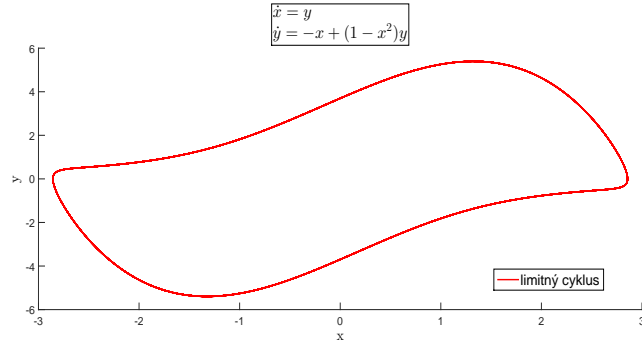
Vykreslíme 2 riešenia tohto systému - prvé riešenie splňuje počiatočné podmienky $[x(0); y(0)] = [5; 6]$ a druhé $[x(0); y(0)] = [6; 6]$.

Riešenie



Obr. 3.1: Dve riešenia nenúteného Van der Polovho oscilátora pre parameter $\varepsilon = 1$ s počiatočnými podmienkami $[x(0); y(0)] = [5; 6]$ a $[x(0); y(0)] = [6; 6]$.

Vidíme, že oba riešenia sú priťahované k limitnému cyklu-valcu. Valec je tvorený periodickými riešeniami, ktoré sa naň namotávajú. Samotný valec je vykreslený na nasledujúcom obrázku:



Obr. 3.2: Limitný cyklus

Týmto príkladom opustíme rovnicu Van der Polovho oscilátora bez nútiacej sily a začneme za zaoberať rovnicou Van der Polovho oscilátora s nútiacou periodickou silou.

V úvode tejto kapitoly sme pre Van der Polov oscilátor uvažovali nútiacu periodickú silu $\sin(\omega t)$ s amplitúdou $a \in \mathbb{R}$. My budeme uvažovať obecnú T -periodickú silu f s amplitúdou $\lambda \in \mathbb{R}$. Rovnica Van der Polovovho oscilátor s nútiacou silou má potom tvar

$$\ddot{x} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + \lambda f(t), \quad \varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

kde $f(t)$ je T -periodická sila nútenia.

Ak si túto rovnicu prevedieme do dvojdimenzionálneho tvaru, dostaneme systém

$$\dot{x} = y \quad (3.6)$$

$$\dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y + \lambda f(t). \quad (3.7)$$

Špeciálny prípad $\lambda = 0$ sme si už ilustrovali. Teraz sa pozrieme na prípad, kedy je amplitúda $|\lambda|$ nenulová a dostatočne malá.

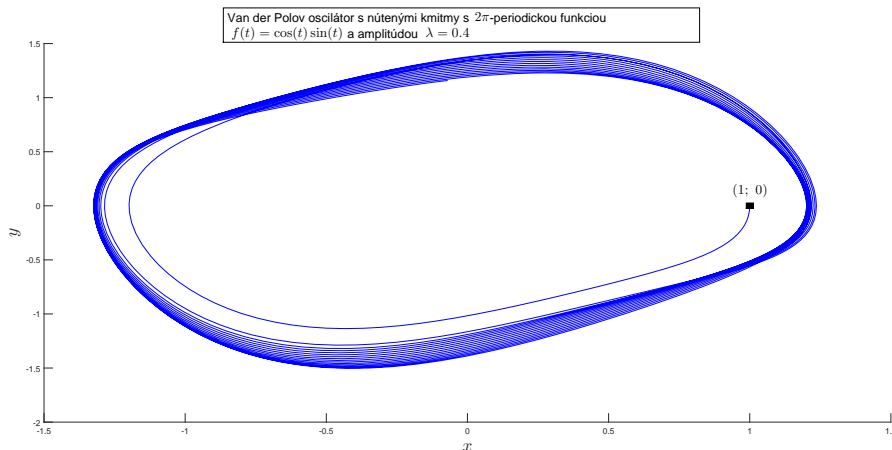
Limitným cyklom aj v tomto prípade bude valec v priestore $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ uzavretý na invariantné valce nenúteného oscilátora, ktorý bude priťahovať všetky blízke riešenia nášeho skúmaného systému. Tento valec je invariantnou varietou.

Pozrime sa na príklad rovnice Van der Polovho oscilátora s 2π -periodickou nútiacou silou.

Príklad 8. Uvažujme rovnicu Van der Polovho oscilátora (3.5) s parametramy $\varepsilon = 1$ a $\lambda = 0,002$. Nech nútiaca sila je reprezentovaná 2π -periodickou funkciou $f(t) = \cos(t)\sin(t)$. Vykreslime riešenie Van der Polovho oscilátora s nútiacou silou pre danú počiatočnú podmienku.

Riešenie

Riešenia s danými počiatočnými podmienkami sú priťahované do valca - limitného cyklu ako na obrázku. V nútenéom Van der Polovom oscilátore je tok na valci iný ako tok na valci nenúteného oscilátora. Na valci nenúteného oscilátora sme zaznamenali paralelný tok, v prípade núteného oscilátora to neplatí.



Obr. 3.3: Riešenia Van der Polovho oscilátora s nútenými kmitmi. Pôsobiacia sila na oscilátor je $f(t) = \cos(t) \sin(t)$. Počiatočná podmienka je $[x(0); y(0)] = [1; 0]$.

3.2 Poincareho mapa pre Van der Polov oscilátor

Doposiaľ sme ešte stále nevyužili periodicitu nútiacej sily. Uvažujem T -periodickú nútiacu silu $f(t)$. Riešenie rovnice Van der Polovho oscilátora s T -periodickou nútiacou silou je potom translačne invariatné v čase t o periodu T . Môžeme teda stotožniť čas $t = 0$ s časom $t = T$. Vďaka tomuto pozorovaniu môžeme riešenie ilustrovať v priestore $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, kde priestor $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nazývame kružnica. To nám umožňuje zapísať rovnicu Van der Polovho oscilátora ako systém

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.8}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + \lambda f(x_3), \quad \varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

$$\dot{x}_3 = 1 \text{ mod } T \tag{3.10}$$

kde T je perióda funkcie f . Limitný cyklus tohto systému je difeomorfný torusu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Tento torus je invariantnou varietou núteného Van der Polovho oscilátora a priťahuje všetky blízke riešenia. V prípade malej amplitúdy $|\lambda|$ prúdenie na tore nie je paralelné a môže obsahovať asymptoticky stabilné a nestabilné periodické orbity.

Na tento systém sa pozrieme pomocou Poincareho mapy. Poincareho mapu pre 1-periodickú diferenciálnu rovnicu sme si definovali ako zobrazenie

$$\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definované predpisom

$$x_0 \mapsto \varphi(1; 0, x_0).$$

Uvažujem rovinu R tvorenú bodmi $(x_1, x_2, 0)$. Táto rovina je rezom, ktorým riešenia prechádzajú priečne vzhľadom na poslednú zložku systému (3.8). To nám umožňuje definovať Poincareho mapu Π systému (3.8) ako zobrazenie

$$\Pi : R \rightarrow R$$

definované predpisom

$$(x_1, x_2, 0) \mapsto (\varphi(T; x_1, x_2, 0), 0)$$

kde $\varphi(T; x_1, x_2, 0)$ je riešenie systému (3.8) prechádzajúce bodom $(x_1, x_2, 0)$ v čase $t = 0$.

Pre malú amplitúdu $|\lambda|$ zisťujeme, že počiatok - rovnovážny bod systému, je nestabilným pevným bodom Poincareho mapy Π . Iterácie ostatných bodov Poincareho mapy konvergujú k invariantnej uzavretej krivke, ktorá obklopuje tento nestabilný pevný bod Poincareho mapy. O tejto problematike sa môžeme viac dozvedieť v teórii \mathbb{S}^1 grup.

Prejdime z teórie do praxe. Aplikujeme a ilustrujeme danú teóriu na príkladoch. Ukážeme zvlášť výsledky pre nenútený a nútený Van der Polov oscilátor v priestore $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ a v priestore $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

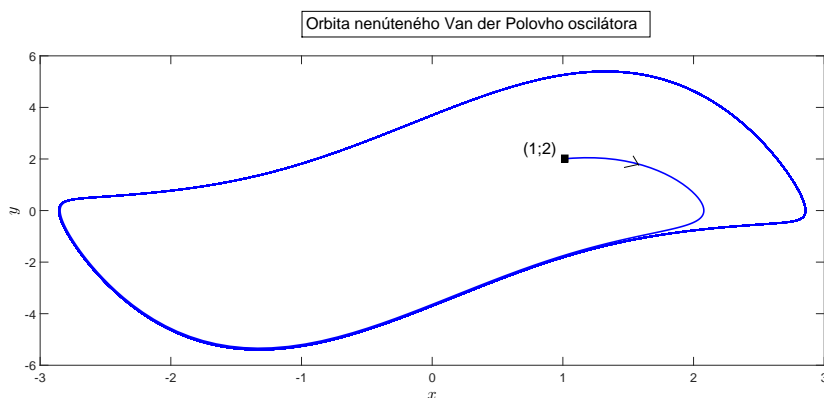
Príklad 9. Uvažujme rovnicu nenúteného Van der Polovho oscilátora pre $\epsilon = 1$ reprezentovanú systémom

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (1 - x^2)y\end{aligned}$$

Uvažujme počiatočnú podmienku $[x(0); y(0)] = [1; 2]$. Nájdite orbitu a jej Poincareho rovinu. Vykreslite riešenie.

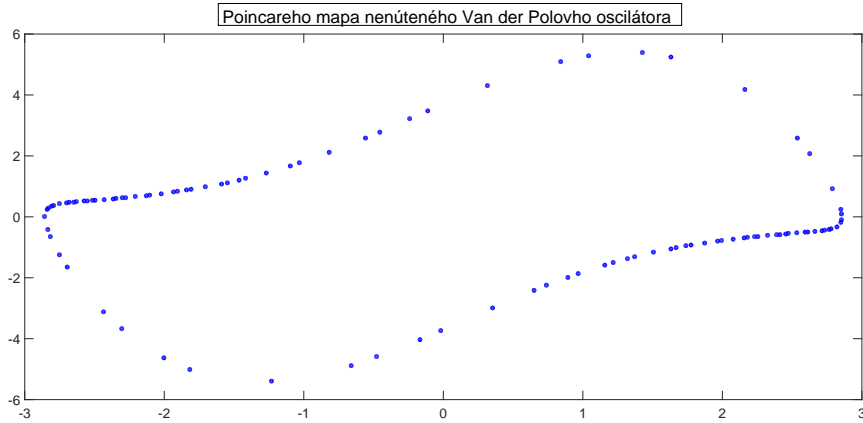
Riešenie

Najskôr sa pozrieme na orbitu nenúteného Van der Polovho oscilátora. Po numerickom výpočte v prostredí MATLAB dostávame nasledujúcu orbitu

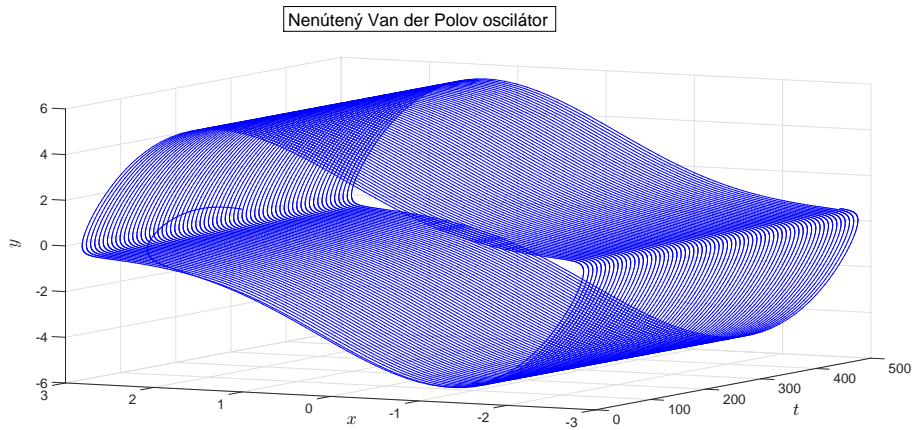


Obr. 3.4: Orbita nenúteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [1; 2]$.

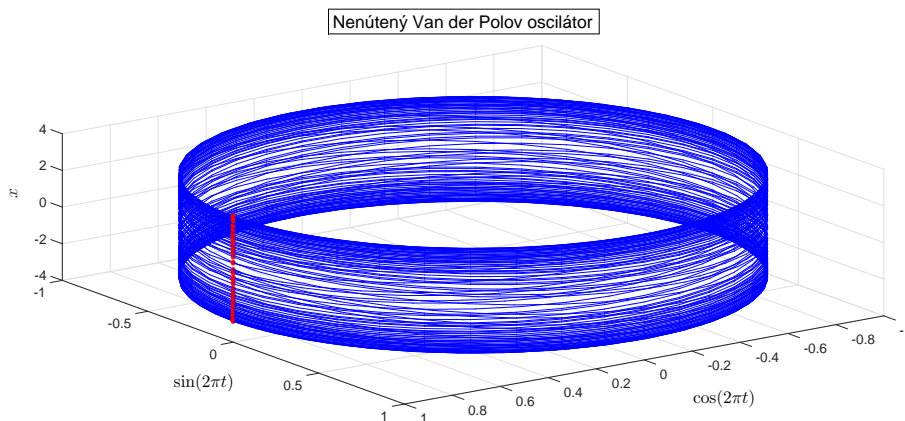
Poincareho rovina tejto orbity je vyobrazená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 3.5: Poincareho mapa nenúteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [1; 2]$.



Obr. 3.6: Riešenie nenúteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [1; 2]$.



Obr. 3.7: Riešenie nenúteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [1; 2]$ a *Poincareho rovina* .

Z obrázka Obr. 3.4 vidíme, že limitný cyklus priťahuje riešenie nenúteného oscilátora s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [1; 2]$ a toto riešenie sa na limitný cyklus namotáva. Z Obr. 3.5 vidíme, že body Poincareho mapy konvergujú k invariantnej uzavrenej krivke, ktorá neobklopuje žiaden bod Poincareho mapy. Obr. 3.6 nám interpretuje paralelný tok na valci a Obr. 3.7 nám reprezentuje "namotávanie" riešenia na valec.

V ďalšom príklade ilustrujeme teóriu pre nútený Van der Polov oscilátor. Budeme uvažovať malú kladnú amplitúdu T -periodickej nútiacej sily. Tak ako v predošlom príklade, aj v tomto príklade výsledok ilustrujeme v priestore $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ a v priestore $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Príklad 10. Uvažujme rovnicu nenúteného Van der Polovho oscilátora tvaru

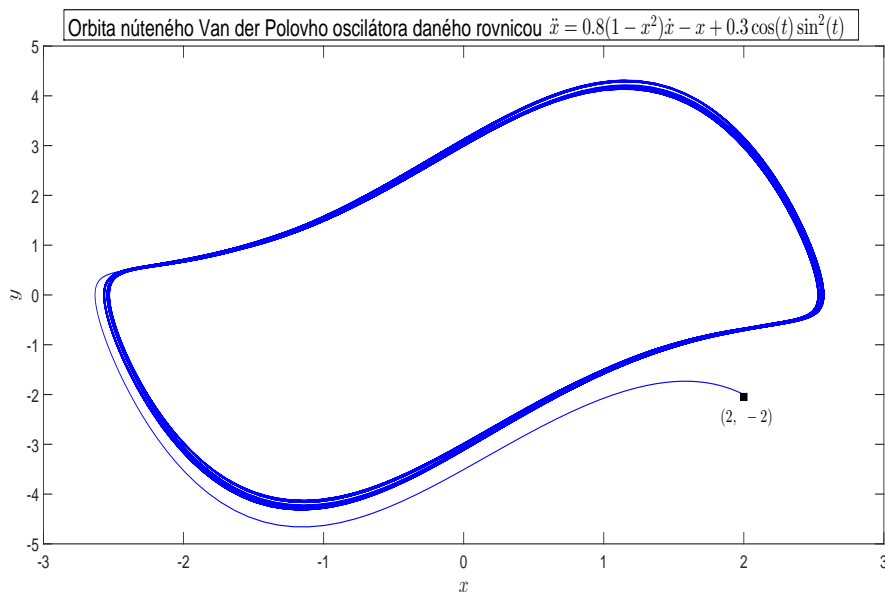
$$\ddot{x} = 0,8(1 - x^2)\dot{x} - x + 0,3 \cos(t) \sin^2(t)$$

Túto rovnicu môžeme prepísať do systému rovníc tvaru

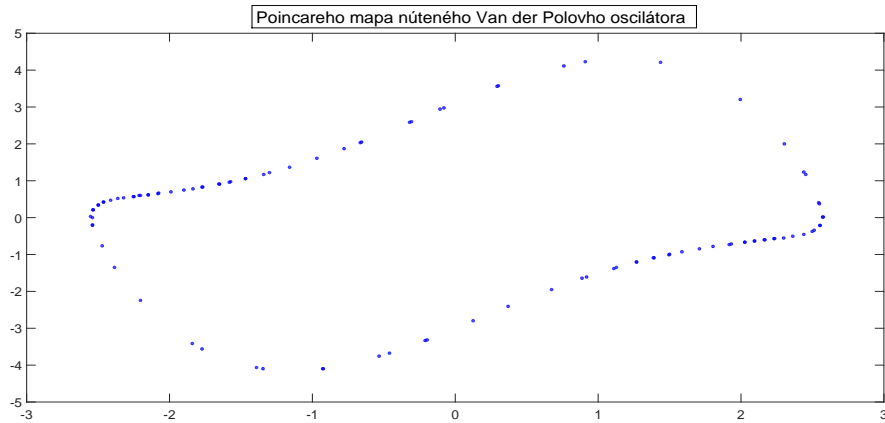
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + 0,8(1 - x^2)y + 0,3 \cos(t) \sin^2(t) \end{aligned}$$

Uvažujeme teda prípad $\lambda = 0,3$, $\epsilon = 0,8$ s nútiacou 1-periodickou silou $f(t) = \cos(t) \sin^2(t)$. Nech $[x(0); y(0)] = [2; -2]$ sú počiatočné podmienky tohto systému. Nájdime orbitu a jej Poincareho rovinu. Vykreslime riešenie.

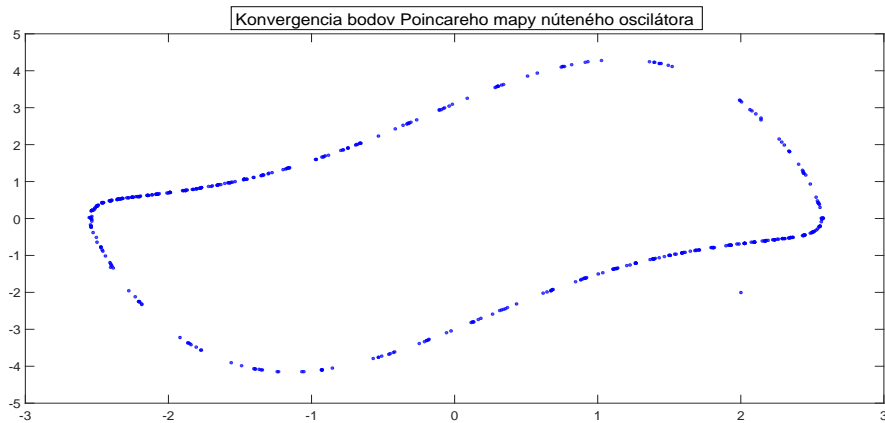
Riešenie



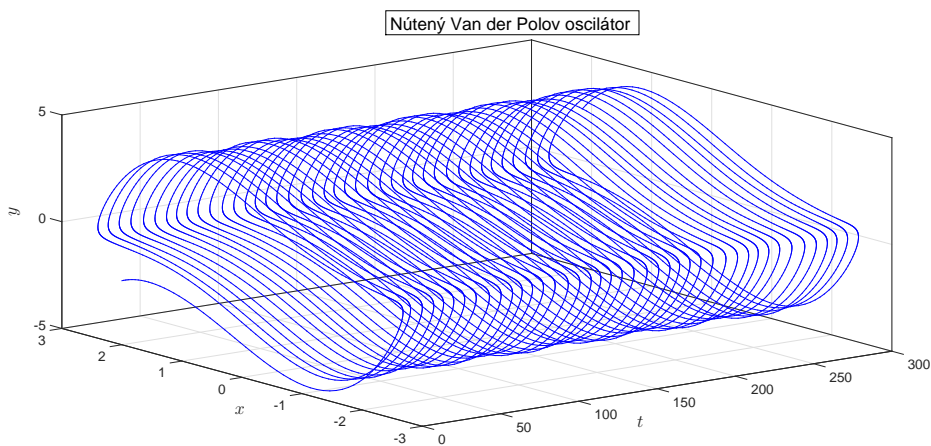
Obr. 3.8: Orbita núteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s nútiacou 2π -periodickou silou $f(t) = \cos(t) \sin^2(t)$ a s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [2; -2]$.



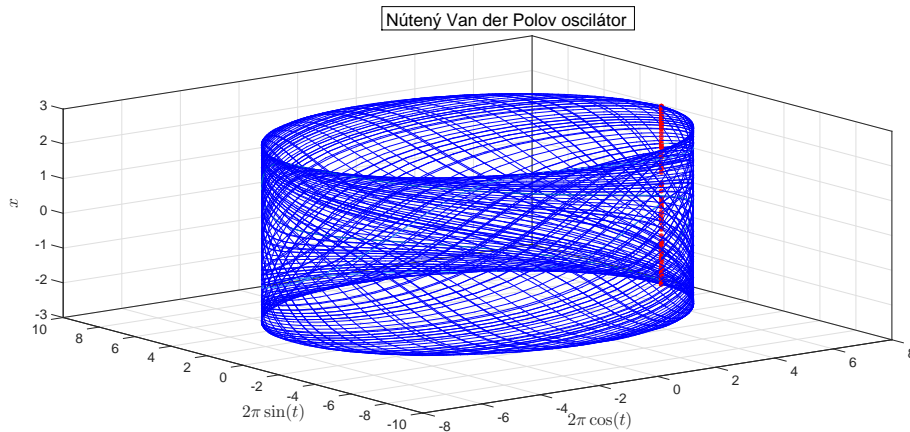
Obr. 3.9: Poincareho mapa núteného Van der Polovho oscilátora $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s nútiacou 2π -periodickou silou $f(t) = \cos(t)\sin^2(t)$ a s počiatocnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [2; -2]$.



Obr. 3.10: Konvergencia bodov Poincareho mapy núteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s nútiacou 2π -periodickou silou $f(t) = \cos(t)\sin^2(t)$ a s počiatocnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [2; -2]$.



Obr. 3.11: Riešenie núteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ s nútiacou 2π -periodickou silou $f(t) = \cos(t)\sin^2(t)$ a s počiatocnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [2; -2]$.



Obr. 3.12: Riešenie núteného Van der Polovho oscilátora v $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ s nútia-
cou 2π -periodickou silou $f(t) = \cos(t)\sin^2(t)$ a s počiatočnou podmienkou
 $[x(0); y(0)] = [2; -2]$ a *Poincareho rovina*.

Z obrázka Obr. 3.8 vidíme, že limitný cyklus priťahuje riešenie núteného osci-
látora s počiatočnou podmienkou $[x(0); y(0)] = [2; -2]$. Z Obr. 3.10 vidíme, že
body Poincareho mapy konvergujú k invariantnej uzavrenej krivke, ktorá neoklo-
puje žiaden bod Poincareho mapy. Riešenie je stabilné. Obr. 3.11 nám interpre-
tuje paralelný tok na valci a Obr. 3.12 nám reprezentuje "namotávanie" riešenia
na valec.

Záver

Cieľom práce sa bolo zoznámiť s periodickými riešeniami obyčajných diferenciálnych rovníc a teóriu ilustrovať na príkladoch. Práca nebola zameraná na dokazovanie teórie, ale na aplikáciu teórie. Vďaka týmto preferenciám práca obsahuje viac príkladov zameraných na periodické riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc.

V prvej kapitole sa analyzujú skalárne diferenciálne rovnice, ktoré sú periodické v čase (pravá strana rovnice je periodická). Hľadáme periodické riešenia (veta (2)) alebo ekvivalentne pevné body Poincareho mapy (definícia (8)), na základe ktorých rozhodujeme o stabilite, nestabilite a asymptotickej stabilite.

Z prvej kapitoly dostávame nasledujúce výsledky: a) Periodické riešenia je možné konštruovať numericky (vety (4) a (4)) ako iterácie Poincareho mapy (viď obr. 1.3). Príslušný software je v práci testovaný na rade príkladov. b) Alternatívou k rozhodovaniu o asymptotickej stabilite/nestabilite je analytický výpočet prvej derivácie Poincareho mapy v pevnom bode (veta (7)). V sekcii 1.4 sme riešili dve (v [1] neriešené) príklady tohoto výpočtu. Ide o príklady hyperbolických pevných bodov (viď definícia (9)).

O stabilite nehyperbolických pevných bodov rozhodujú derivácie Poincareho mapy vyšších rádov (veta (8)). V [1] je uvedený príklad nehyperbolického pevného bodu, ktorý je asymptoticky stabilný. V mojej práci je tento príklad uvedený ako Príklad 6 - je spravená podrobná analýza tohoto príkladu vrátane výpočtu príslušných derivácií vyšších rádov.

Na rozdiel od 1. kapitoly, uvažujeme v 2. kapitole parametrickú závislosť skalárnych diferenciálnych rovníc s periodickou pravou stranou v čase. Opierame sa o teóriu (veta (9)), ktorá vedie k vzniku až dvoch periodických riešení v závislosti na hodnote bifurkačného parametru.

Prínosom mojej práce je numerická analýza konkrétneho populačného modelu [5].

V poslednej kapitole je uvedený príklad dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc s periodickou pravou stranou (Van der Polov oscilátor). Je naznačená teória modelu. Hlavným výsledkom tejto kapitoly je parametrické štúdium atraktorou a príslušný simulačný model.

Verím, že všetky tri kapitoly boli napísané zrozumiteľne a pomohli čitateľovi získať predstavu o využití periodických riešení obyčajných diferenciálnych rovníc a ich aplikácií v rôznych oblastiach. Práca nemohla pokryť všetky detaily a súvisiacu teóriu, napríklad tretia kapitola je hrubým obrazom modelu Van der Polovho oscilátora.

Literatúra

- [1] Jack K. Hale and Hüseyin Koçak. *Dynamics and bifurcations*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] V. Janovský. Numerické řešení ODR. <https://vjanovsky.wixsite.com/vjanovsky/about-me>.
- [3] O. Knill. Lienhard systems. http://www.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/handouts/lienard.pdf, 2005.
- [4] J. Kurzweil. *Obyčejné diferenciální rovnice*. SNTL, nakl. technické literatury, 1978.
- [5] I. S. Laham, M. F. Krishnarajah and J. M. Shariff. *Fish Harvesting Management Strategies Using Logistic Growth Model*. Sains Malaysiana, 2012.