

Posudek na habilitační práci Martina Tancera

On the interplay of combinatorics, geometry, topology and computational complexity

Habilitační práce je souborem devíti článků, jichž je Martin Tancer autorem nebo spoluautorem, a dvacetistránkového úvodu, v němž jsou články rozděleny podle témat do čtyř skupin, stručně popsána jejich motivace, hlavní výsledky a souvislosti. Práce je velice rozsáhlá, má více než 300 stran. Jde vesměs o práce z poslední doby. Osm jich bylo publikováno v nějaké formě v letech 2014 až 2016, jedna je preprintem v arXivu. Pět prací bylo přijato k prezentaci na informatických konferencích, čtyři na International Symposium on Computational Geometry (SoCG), jedna na International Symposium on Graph Drawings and Network Visualization (GD). Jedná se o špičkové konference ve svém oboru. Časopisy, v nichž byly články, případně úplné verze konferenčních příspěvků publikovány nebo prozatím jen přijaty do tisku, jsou vesměs kvalitní impaktované časopisy: Israel Journal of Mathematics, Journal of ACM, Journal of Algebraic Combinatorics and Discrete and Computational Geometry.

Jak napovídá název habilitační práce, spektrum témat jednotlivých článků je široké. Pohybuje se od teoretické informatiky a kombinatoriky ke geometrii a topologii. Podívejme se nyní blíže na některá témata detailněji. Jejich výběr je dán poněkud subjektivně odborným zaměřením autora tohoto posudku.

Prvním okruhem jsou otázky spojené s vnořitelností simplicialních komplexů. V roce 2011 J. Matoušek, M. Tancer a U. Wagner publikovali článek o tom, zda lze algoritmicky rozhodnout o vnořitelnosti simplicialního komplexu dimenze k do \mathbb{R}^d a o výpočetní složitosti takového algoritmu. Tím navázali na předchozí práce o planárních grafech (případ $k = 1$ a $d = 2$) a výsledky pro $k = d = 2$ a $d = 2k$. V práci ukázali, že problém je NP-těžký pro $(2d - 2)/3 \leq k \leq d$ a dokonce nerozhodnutelný pro $k \geq d - 1 \geq 4$. Později bylo pomocí homotopické teorie ukázáno, že případ $k < (2d - 3)/3$ je algoritmicky řešitelný v polynomiálním čase pro pevné d . Posledním příspěvkem v tomto směru pro $k = 2, 3$ a $d = 3$ je práce [6] v habilitační práci. Hlavní výsledek říká, že problém vnořitelnosti je pro tyto dimenze algoritmicky rozhodnutelný. Idea důkazu spočívá v tom, že se prvně zjistí, zda lze daný 2-dimenzionální simplicialní komplex K po částech lineárně do nějaké 3-dimenzionální PL-variety vůbec vnořit. K tomu lze použít již známý algoritmus, který rovněž klasifikuje regulární okolí vnořeného komplexu K . Existence vnoření K do \mathbb{R}^3 je ekvivalentní s existencí vnoření nějakého regulárního okolí (jde o 3-dimenzionální varietu s hranicí) do 3-dimenzionální sféry. Na základě hlubokých výsledků z topologie 3-dimenzionálních variet, pak autoři vytvoří algoritmus, který zjišťuje, zda se daná triangulovatelná orientovatelná 3-dimenzionální varieta s hranicí dá vnořit do S^3 . Osobně považuji tento výsledek za vynikající. O myšlenkové i technické náročnosti důkazu vypovídá rovněž délka článku přes 50 stran.

V práci [3] M. Tancer a jeho spoluautoři zkoumají pojem almost embedding. To je oslabení pojmu vnoření simplexu do topologického prostoru, které má však tu výhodu, že se s ním pracuje v jistém smyslu lépe než s pojmem vnoření. Hlavním výsledkem článku je podmínka na Bettiho čísla (v $\mathbb{Z}/2$ -homologiích) variety M nutná k tomu,

aby existovalo toto slabé vnoření k -skeletonu n -simplexu do variety M . To je jakási varianta Kuhnelovy hypotézy, která při slabších předpokladech dává slabší výsledek.

Stejný pojem je s úspěchem využit i v článku [4]. V něm je dokázána nová topologická verze Hellyho věty. Hellyho číslo nějakého konečného souboru množin v \mathbb{R}^d , který má prázdný průnik, je dán počtem prvků největšího podsouboru s prázdným průnikem, jehož každý vlastní podsoubor má neprázdný průnik. (Přitom Hellyho číslo souboru s neprázdným průnikem bereme rovno 1.) Klassická Hellyho věta říká, že každý konečný soubor konvexních množin má Hellyho číslo nejvýše $d + 1$. V článku je dokázána věta, která říká, že pro každý konečný soubor podmnožin v \mathbb{R}^d a každé číslo b existuje číslo $h(b, d)$ takové, že je-li velikost $\mathbb{Z}/2$ -homologii všech možných průniků množin daného souboru v jistém smyslu omezena číslem b , pak Hellyho číslo je nejvýše $h(b, d)$. Speciálně je ukázáno, že pro $b = 0$ je $h(0, d) = d + 1$, což dává klasickou větu se souborem konvexních množin.

V článku [9] na pomezí kombinatorické topologie a výpočetní složitosti dokazuje autor, že rozhodnout, zda je simplicialní komplex jistým přesně popsáním způsobem (posloupností elementárních kolapsů) stažitelný do bodu je NP-úplný problém. V článku [8] zkoumá pojem “shellability” jistých speciálních simplicialních komplexů, což znamená možnost vytvořit tyto komplexy z bodu přesně popsáním postupem. Má-li komplex tuto vlastnost, je homotopicky ekvivalentní sjednocení souboru sfér s jedním společným bodem.

Práce [1] se zabývá asymptotickým růstem (v závislosti na n) Bettiho čísel klikových komplexů jednoduchých grafů s nejvýše n vrcholy, které jako podgraf neobsahují daný jednoduchý konečný graf.

Je známo, že každý planární graf může být vnořen do roviny tak, že jeho hrany jsou realizovány úsečkami. Tento problém lze zobecnit: existuje na daném povrchu S metrika taková, že každý graf vnořitelný do S lze do S vnořit tak, že hrany jsou nejkratší spojnice vrcholů? V práci [5] podávají autoři pozitivní odpověď pro dvourozměrnou sféru, torus a projektivní rovinu.

V článku [7] zkoumají autoři rozmotávací číslo souboru m a n křivek na dvourozměrném povrchu genu g s hranicí tvořenou h kružnicemi. Hlavním výsledkem je horní odhad na toto číslo v závislosti na m a n .

Předchozí stručný přehled problematiky, kterou se Martin Tancer zabýval, ukazuje šíři jeho odborných zájmů a znalostí. Výsledky prací sdružených do habilitační práce považuji vesměs za velice kvalitní. Z úvodu habilitační práce a z článků [8] a [9] je vidět, že autor píše velice kultivovaně. Jeho text se dobře čte, neboť srozumitelně vysvětlí zkoumaný problém, zmíní motivaci a souvislosti a před samotnými mnohdy technicky náročnými důkazy vysvětlí jejich ideu a postup.

Závěrem mohu konstatovat, že předložená práce splňuje všechny požadavky na habilitační práci a přesvědčivě ukazuje autorovu způsobilost ke špičkové vědecké práci v matematice a teoretické informatice.

Martin Čadek

V Brně dne 25. května 2017