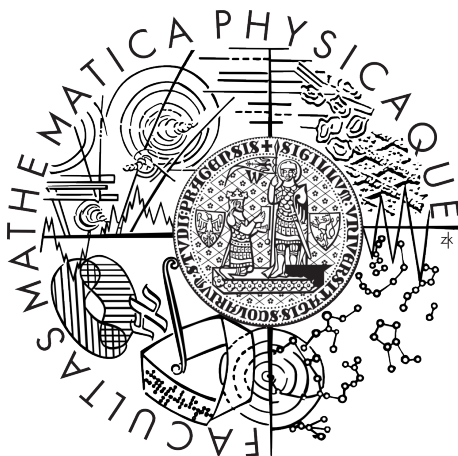


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



David Wagenknecht

## Optická odezva magnetických materiálů

Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Ostatnický, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Optika a optoelektronika

Praha 2014

## Poděkování

Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi pomáhali s vypracováním této diplomové práce a zasloužili se o výsledky, kterých bylo dosaženo. Především moje vděčnost patří školiteli RNDr. Tomáši Ostatnickému, Ph.D. za jeho neutuchající trpělivost a podporu a stejně tak za opakované kontrolování průběžných výsledků s konstruktivně kritickými připomínkami. Poděkování bych dále rád vyjádřil doc. RNDr. Petru Němcovi, Ph.D. a RNDr. Evě Schmoranzové, Ph.D. za konzultace a rady s experimentálním uspořádáním a za možnost teoreticky spočtený jev proměřit.

Stejně tak si vděčnost zaslouží Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze za přístup k tištěné i elektronické literatuře a za licence k software. Dále bych chtěl velmi poděkovat Národní Síťové Infrastruktuře MetaCentrum za poskytnutí výpočetního výkonu a datových úložišť v rámci programu "Projects of Large Infrastructure for Research, Development, and Innovations" (LM2010005).

Nemohu nezmínit vděk své rodině a nejbližšímu okolí za vřelou psychickou podporu a za poskytnutí možnosti studovat a sepsat tuto práci.

David Wagenknecht

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30.6.2014

David Wagenknecht

Název práce: Optická odezva magnetických materiálů

Autor: David Wagenknecht

Katedra: Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Ostatnický, Ph.D., Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta - Katedra chemické fyziky a optiky

Abstrakt: Magnetický polovodič  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  a jiné anizotropní materiály mohou dle teoretických předpovědí vykazovat zajímavé chování v odrazivosti, kterým je její rozdílná velikost pro opačné úhly dopadu. K popsání tohoto efektu jsou odvozeny analytické vztahy týkající se materiálů s nediagonální permitivitou a ty jsou následně použity k numerickým výpočtům optické odezvy konkrétních vzorků. Hlavním předmětem zájmu této práce je transversální Kerrův jev, který vykazuje asymetrii ve stočení roviny polarizace a stejně tak elipticitě kruhově polarizovaného světla, což je způsobeno právě asymetrií v reflektivitě. Kvůli možnému vlivu je studována i magnetizace longitudinální a polární. Výsledky jsou použity k diskuzi podmínek, nutných k pozorovatelnosti asymetrie, a navíc s cílem změřit jev je představeno konkrétní experimentální uspořádání.

Klíčová slova: Magnetooptika, Optika, Magnetismus, Kerrův jev, Přenosová matice,  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ , Anizotropie, Asymetrie

Title: Optical response of magnetic materials

Author: David Wagenknecht

Department: Department of Chemical Physics and Optics

Supervisor: RNDr. Tomáš Ostatnický, Ph.D., Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics - Department of Chemical Physics and Optics

Abstract: Magneto-optical properties of anisotropic semiconductors are studied to describe asymmetry of  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ , because theoretical calculations predict extraordinary behaviour of reflectivity. Analytical formulae to describe materials with non-diagonal permittivity are derived and they are used for the numerical calculations to describe the optical response of the samples available for the measurement. The transversal Kerr effect is calculated and it exhibits asymmetry in both rotation of the plane of polarization and ellipticity of circularly polarized light due to asymmetry in reflectivity. Moreover, longitudinal and polar magnetization are studied because of the influence on the observability of the phenomena. Results are not only used to discuss conditions, which must be satisfied to prove the asymmetry, but also the actual experimental setup is designed to prepare the measurement.

Keywords: Magneto-optics, Optics, Magnetism, Kerr effect, Transfer matrix,  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ , Anisotropy, Asymmetry

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Přehled problematiky v literatuře</b>	<b>4</b>
1.1 Kovové struktury . . . . .	4
1.2 Struktury s mřížkami . . . . .	5
<b>2 Základní pojmy a definice veličin</b>	<b>6</b>
2.1 Základní vztahy . . . . .	6
2.2 Elipsometrické veličiny . . . . .	8
2.3 Model transparentních magnetických materiálů . . . . .	9
2.4 Formalismus přenosové matice . . . . .	10
2.5 Asymetrie v odrazivosti . . . . .	12
<b>3 Transverzální Kerrův jev</b>	<b>13</b>
3.1 Tvar polí pro transversální magnetizaci . . . . .	13
3.2 Přenosová matice pro transversální magnetizaci . . . . .	14
<b>4 Longitudinální a polární Kerrův jev</b>	<b>16</b>
4.1 Předpoklad tvaru polí . . . . .	16
4.2 Longitudinální orientace magnetizace . . . . .	17
4.3 Polární orientace magnetizace . . . . .	22
4.4 Okrajové podmínky na rozhraní . . . . .	23
<b>5 Numerické výpočty</b>	<b>27</b>
5.1 Podmínky a předpoklady numerických výpočtů . . . . .	27
5.2 Transverzální Kerrův jev . . . . .	29
5.3 Longitudinální Kerrův jev . . . . .	36
5.4 Diskuze příspěvků k asymetrii . . . . .	37
5.5 Přesnost a správnost numerických výpočtů . . . . .	39
5.6 Diskuze výpočtů a pozorovatelnosti . . . . .	40
<b>6 Návrh experimentu</b>	<b>43</b>
6.1 Požadavky na experiment . . . . .	43
6.2 Experimentální uspořádání . . . . .	45
6.3 Diskuze experimentálního uspořádání . . . . .	48
<b>Závěr</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>52</b>
<b>Seznam grafů a ilustrací</b>	<b>54</b>
<b>Seznam zkratk a proměnných</b>	<b>56</b>
<b>Přílohy</b>	<b>58</b>
Příloha 1: Elementy přenosové matice . . . . .	58
Příloha 2: Použité hodnoty permitivity a vodivosti . . . . .	63

# Úvod

Polovodiče a jejich chování jsou jednou z hlavních oblastí optického materiálového výzkumu. Tomu vděčí velké variabilitě svých vlastností a především různě širokým zakázaným pásům, díky čemuž mohou některé vlnové délky světla pohlcovat, další odrážet a pro jiné být transparentní. V posledních době se do popředí zájmu dostaly také polovodičové materiály vykazující feromagnetickou nebo antiferomagnetickou povahu. V nich je magnetizace dalším parametrem, který lze uměle ovlivnit a který změní jejich optickou odezvu.

Předmětem této práce jsou především Kerrovy jevy u  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ . Tento polovodič má koncentraci volných děr kolem  $10^{21} \text{ cm}^{-3}$ , přičemž tato hodnota se o řády liší od kovových materiálů. Kvůli tomu má oproti nim plazmovou frekvenci o posunutou také o několik řádů.

Struktury z polovodičů je možné připravit v nanometrových rozměrech, například molekulární epitaxí. Proto může být dosaženo velké přesnosti zvolených parametrů, jak tloušťky vrstev, tak mřížkové konstanty nebo případně množství dopované příměsi. Stejně tak je možné připravit vrstevnaté struktury vykazující zajímavé optické vlastnosti například díky vícenásobným odrazům světla. K popisu takových objektů s různými permitivitami nebo jinými charakteristikami lišícími se vrstvou od vrstvy je vhodné použít přenosovou matici. Tento formalismus se běžně uplatňuje mimo jiné pro vyšetření dielektrických zrcadel, viz např. [1]. Základní myšlenkou přenosové matice je vyjádření šíření světla v každé vrstvě včetně vyřešení okrajových podmínek na rozhraní a zapsání obecného řešení ve tvaru matice. Popis složitějších struktur poté přechází na násobení matic s údaji o konkrétních materiálech. V závislosti na symetrii problému a matematické podobě vztahů plynoucích z okrajových podmínek je možné odvodit přenosovou matici i pro složitější případy, než je první citovaný zdroj, viz [2] a [3].

Tato diplomová práce přímo navazuje na bakalářskou práci [4], ve které byla zkoumána transversální magnetizace v  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  se zaměřením na asymetrii v odrazivosti. Přítomnost magnetizace způsobuje porušení symetrie případu, proto dochází k rozdílné optické odezvě při dopadu světla do identického místa vzorku pod dvěma navzájem opačnými úhly. K tomuto popisu byla použita právě přenosová matice, která kvůli speciálním požadavkům na materiál (některé nenulové mimodiagonální složky vodivosti) byla odvozena. Cílem bylo teoreticky prozkoumat jev a zjistit vhodné podmínky na pozorování asymetrie v odrazivosti, přičemž návaznost na technické parametry experimentu omezovala zkoumání na malé úhly dopadu (do  $10^\circ$ ). Výsledkem bylo zjištění, že jev existuje, ale rozdíl odrazivosti pro opačné úhly dopadu se pohybuje na hranici detekčních možností a s tímto výsledkem ho nebylo možné doporučit k měření. Přestože výsledky nebyly ideální, zůstalo mnoho prostoru pro další zkoumání asymetrie a jiné návrhy experimentální aparatury a bude ukázáno, že se jedná o jev měřitelný.

Na začátku této diplomové práce jsou uvedeny základní vztahy a úvod do problematiky. Kapitola 3: *Transverzální Kerrův jev* se věnuje shrnutí výsledků bakalářské práce [4] kvůli použití dříve odvozeného formalismu. Návaznost se poté ubírá dvěma směry: Jedním z nich je opuštění konceptu pozorování odrazivosti, tedy pozorování asymetrie této veličiny, a přechod k elipsometrickým veličinám – ke stočení roviny polarizace světla a elipticitě. Druhým rozdílem je opuštění úmyslu měřit jev při malých úhlech dopadu,

protože maximum asymetrie by se mělo nacházet kolem Brewsterova úhlu,<sup>1</sup> který se pro zkoumané vzorky nachází kolem  $74^\circ$ . Důležité jsou též partie o longitudinálním a polárním Kerrově jevu, neboť je nutné popsat jejich vliv na zkoumaný efekt.

Další část textu popisuje výsledky teoretických výpočtů a jejich diskuzi vzhledem k měřitelnosti. Kromě žádoucích výsledků pro transversální Kerrův jev jsou uvedeny také výsledky pro longitudinální a komentář k polárnímu kvůli možnému ovlivnění pozorovatelnost jevu. Publikované grafy jsou vybrány s ohledem na relevantnost k experimentu a v tomto duchu jsou též diskutovány.

S pozorovatelností souvisí nutnost návrhu experimentu po geometrické stránce tak, aby bylo možné umístit vzorek do prostorově velmi omezeného kryostatu a nechat na něj dopadat světlo pod vysokým úhlem. Tomuto uspořádání se věnuje kapitola 6 *Experimentální uspořádání*, kde jsou představeny jednotlivé překážky bránící přímočarému měření a navrženy varianty, jak je lze obejít. Samotné měření je plánováno na letní měsíce roku 2014.

---

<sup>1</sup>Více k tomuto tématu a zdůvodnění tohoto tvrzení je v kapitole 5: *Numerické výpočty*.

# 1. Přehled problematiky v literatuře

Předmětem této práce je především asymetrie v odrazivosti plynoucí z magnetizace zkoumaného materiálu. Nelze říci, že by se tímto tématem nikdo dříve nezabýval. Asymetrie jak v odrazivosti, tak v elipsometrických veličinách byla již zkoumána a naměřena, ovšem nikoli na magnetických polovodičích. Dřívější publikace lze rozdělit do dvou až tří hlavních skupin podle druhu materiálu, který popisují: Jedná se o odrazivé plochy založené na mřížkách nebo o zmagnetizované kovové materiály, případně o kovové materiály s vypěstovanou supermřížkou na povrchu, které také mohou být zmagnetizovány.

Kromě experimentálních článků existují samozřejmě i teoretické s analytickými nebo numerickými výpočty. V nich lze nalézt predikce o rozdílu odrazivostí pro opačné úhly až v desítkách procent.

V následujících částech této kapitoly je uveden přehled nejzajímavějších článků zabývajících se právě asymetrickou odrazivostí. Jsou přitom používány kerrovské veličiny zavedené následně v sekci 2.2 *Elipsometrické veličiny*.

## 1.1 Kovové struktury

Nejjednodušším uspořádáním pro pozorování asymetrie je reflexe na jednom rozhraní, tj. situace, kdy světlo dopadá ze vzduchu na zmagnetizovanou kovovou vrstvu. Takový případ lze nalézt v [5], kdy zkoumaný vzorek tvořila kobaltová vrstva tlustá 120 nm na kovovém substrátu. Naměřená asymetrie v odrazivostech byla v řádech desetin procenta, maximální hodnota přitom dosahovala 1.1 %. Autoři měřili též rozdíl fází, přičemž jeho maximální velikost byla zhruba  $0.9^\circ$ . Zkoumáním asymetrie u elipsometrie se ale nezabývali.

Složitější geometrie je uvedena v [6], kde bylo využito mnohonásobného odrazu. Nad zmagnetizovanou kobaltovou vrstvou tlustou 100 nm bylo umístěno zrcátko, přičemž vzduchová vrstva uprostřed sloužila jako vlnovod: po odrazu světla na vzorku došlo k reflexi na zrcadle a směřování paprsku znovu na vzorek. Při jednom odrazu byla pozorována asymetrie shodná s výsledkem z předchozí citace, při vícenásobném odrazu (nejvýše pětinasobném) byl nárůst v rozdílu odrazivostí přibližně čtyřnásobný.

K vícenásobnému odrazu dochází též na vrstevnatých strukturách: V [7] jde konkrétně o diskuzi jevu u sloučenin  $Y_{1-x}Co_x$  a numerické výpočty pro vrstvy sestávající se z kobaltu a mědi nebo železa a mědi. Naměřené výsledky jsou uvedeny pro strukturu s různými tloušťkami vrstev. Nejsignifikantnější je závislost asymetrie v odrazivosti na tloušťce kobaltové vrstvy pro strukturu kobalt-yttrium-sklo. Pro tloušťku yttria 100 nm a kobaltu větší než 40 nm byla pozorována asymetrie dosahující hodnoty až 10 %. Těchto velikostí bylo dosaženo pro velmi velké úhly dopadu přes  $70^\circ$ .

V [8] je uvedeno měření na 35 nm tlustém filmu  $Ni_{80}Fe_{20}$  na substrátu křemíku. Pozorován byl opět rozdíl odrazivostí; v závislosti na natočení linerání polarizace dopadajícího světla byly naměřeny hodnoty až do jednoho procenta. Článek uvádí též vypočtené hodnoty pro kerrovské veličiny, jejichž rozdíl byl měl pro použitý vzorek být v řádech  $10^{-2}$  stupně. Tyto uvedené hodnoty jsou pro pravidelnou vrstvu, zajímavostí článku je ale zkoumání struktury s nanodráty rozmístěnými na povrchu vzorku a tlustými 10 nm (složeny jsou také z  $Ni_{80}Fe_{20}$ ). Zmagnetizování totiž na geometrii závisí a experimentální výsledky pro



ně získané se několikanásobně liší, na druhou stranu jsou ve stejných řádech. Teoretické výpočty rotace a elipticity jsou uvedeny také v [9]. Oproti předcházejícím článkům je zaměřen na supermřížky skládající se z železa (2.5 nm) a molybdenu (tloušťka v rozmezí pěti až třiceti pěti nanometrů). Pro tenké vrstvy molybdenu (do 10 nm) při úhlu dopadu  $44^\circ$  byla pozorována asymetrie v odrazivosti do jednoho procenta. Na rozdíl od předchozích článků je vypočtena kromě úhlové závislosti jevu i spektrální v rozsahu 0.5 – 6.0 eV, která ale ve viditelné oblasti nezmění pozorovatelnost jevu nijak zásadně. Výhodné by naproti tomu bylo měření na vyšších energiích, kde by měl být jev pozorovatelný i pro poloviční úhly dopadu.

Komplexní experimentální uspořádání s několika cívkami určeným k zmagnetizování vzorků je publikováno v článku [10], kde se autoři zabývají kerrovským jevem ve velmi tenkých vrstvách tloušťek jednotek atomových vzdáleností v závislosti na struktuře povrchu vzorku. Měřena je kerrovská rotace, jejíž asymetrie je pozorována v řádech setin stupně.

Tenký film železa vypěstovaný na zlatě s transverzální magnetizací je zkoumán v [11]. Měřena je spektrální závislost v rentgenovém spektru (rozsah 680–750 eV) odrazivosti, nelze tedy mluvit o optickém experimentu. Zajímavá je ale velikost asymetrie, kdy rozdíly v odrazivostech jsou pro úzký rozsah parametrů (rozmezí zhruba 5 eV) v jednotkách procent. Naměřená spektrální závislost se přitom autorům velmi dobře shoduje s vypočtenými teoretickými průběhy.

## 1.2 Struktury s mřížkami

Mřížky mohou být vytvořeny asymetrickým způsobem a v takovém případě lze považovat rozdílné chování pro opačné úhly dopadu za samozřejmé. Stejně tak ale může být vytvořena symetrická mřížka, do které je porušení symetrie vneseno také magnetizací, jako pro předchozí případy kovů. To je publikováno v [12] nebo [13], kde vhodně zvoleným způsobem byla pozorována asymetrie výraznější než u dříve diskutovaných kovových struktur. V prvním z článků je pro transverzální kerrův jev měřena odrazivosti a diskutována účinnost difrakce, přičemž asymetrie v odrazivosti pro různá difrakční maxima byla pozorována v řádech desetin procenta pro přesně zvolený úhel dopadu odpovídající danému difrakčnímu maximu. Druhý z článků se zabývá pravidelnými nanodráty z železa a křemíku (rozměry v řádech mikronů) a je měřena odrazivost a kerrovská rotace. Asymetrie rotací byla pozorována až 15 %, přičemž její maximum se nachází v oblasti minima odrazivosti (odrazivost menší než 5 %). Oba články jsou zaměřeny na diskuzi účinnosti difrakce ve spojitosti s magnetizací.

U tématu mřížek je možné najít i složitější struktury a především výpočty pro ně. V [14] je porovnání experimentu a teoretického výpočtu dvou mřížek na křemíkové podložce. Výrazné hodnoty asymetrie v odrazivosti lze nalézt v teoretickém článku [15], podle kterého by přesně zvolené struktury mohly vykazovat asymetrii až 40 % ve viditelném spektru a ve výpočtech jsou uvažovány i efekty spojené s povrchovými plazmony.

## 2. Základní pojmy a definice veličin

### 2.1 Základní vztahy

Základem pro optické výpočty jsou Maxwellovy rovnice, běžně zapisované ve tvaru

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

V Maxwellových rovnicích jsou pole značena následovně: intenzita elektrického pole je  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  elektrická indukce,  $\mathbf{B}$  magnetická indukce a  $\mathbf{H}$  intenzita magnetického pole. Hustota volného náboje v materiálu je  $\rho_f$  a  $\mathbf{J}_f$  je hustota volného proudu. Parciální derivaci podle času značíme podle konvencí  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Při vyšetřování dopadu světla na vzorek je v této práci vždy uvažována souřadná soustava, kdy osa  $z$  je kolmá na rovinu rozhraní a zbylé dvě osy pravotočivé kartézské soustavy v ní leží. Pro takto definovaný případ bude používána notace, kdy světelná vlna šířící se ve vzduchu leží v rovině  $y - z$  a dopadá pod úhlem  $\theta_i$ , kde úhel je měřen mezi normálou k rozhraní (osa  $z$ ) a směrem šíření. Do druhého prostředí se pak šíří pod úhlem  $\theta_t$  (obr. 2.1). U popisu transversálního Kerrova jevu bude magnetizace rovnoběžná s osou  $x$ , pro tento případ geometrie je transversálně-magnetická polarizace světla znázorněná na schématu 2.1. Pro longitudiální jev bude uvažován stejný směr dopadu světla, ale magnetizace rovnoběžná s osou  $y$ , polární Kerrův jev má magnetizaci ve směru  $z$ . Konkrétní tenzory permitivit jsou uvedeny v sekcích zabývajících se příslušnými jevy.

Dále bude nutné mluvit o dopadu světla pod dvěma navzájem opačnými úhly. Tím je myšleno, že jednou dopadá světlo pod úhlem  $\theta_i$  ve směru osy  $y$  a podruhé ze směru opačného, proti směru  $y$ . Většinou není případy nutné rozlišovat a stačí mluvit o dvou opačných směrech dopadu.

Případ více než dvou rozhraní bude popisován indexy tak, že každý index přísluší vrstvě jednoho materiálu. Obvykle přitom platí:

1. Světlo přichází ze vzduchu nebo vakua, značeno jako nultá vrstva.
2. Prostřední vrstvy jsou značeny horními indexy  $j \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ . K obecnému popsání sousedních vrstev je užito značení  $j - 1$  a  $j + 1$  pro předchozí nebo následující vrstvu.
3. Poslední vrstvou je obvykle substrát, na kterém je vzorek připraven; v souladu s předchozím má index  $N$ .

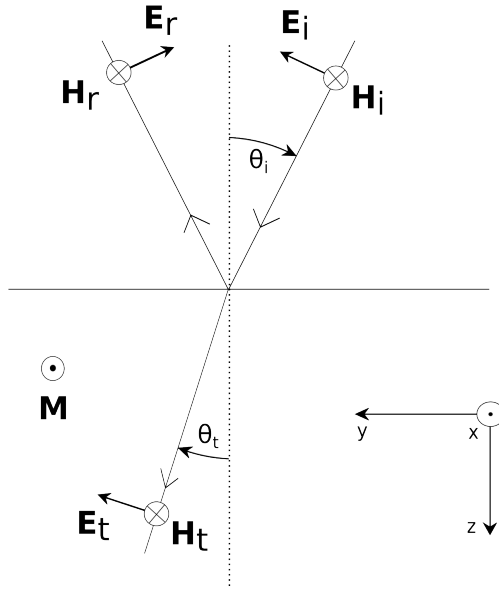


Schéma 2.1: Uvažovaný souřadný systém s TM polarizací a kladným úhlem  $\theta_i$

Amplitudové koeficienty odrazivosti  $r$  a propustnosti  $t$  nechť jsou zavedeny vztahy

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_r}{E_i} \quad (2.5)$$

a

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_t}{E_i} . \quad (2.6)$$

Ty popisují amplitudy a jako takové nejsou pozorovatelné. Fyzikálně měřitelné jsou intenzity

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{\tau-T/2}^{\tau+T/2} |\mathbf{S}| dt , \quad (2.7)$$

kde  $\langle |\mathbf{S}| \rangle_T$  značí časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru  $\mathbf{S}$  přes interval  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . Podle definice přitom

$$\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* , \quad (2.8)$$

přičemž  $\mathbf{H}^*$  udává komplexně sdruženou hodnotu k  $\mathbf{H}$ .

Pro takto zavedené intenzity dopadajícího, odraženého a prošlého záření  $I_i$ ,  $I_r$  a  $I_t$  lze zavést odrazivost (reflektanci)  $R$

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad (2.9)$$

a propustnost (transmitanci)  $T$  jako

$$T = \frac{I_t}{I_i} . \quad (2.10)$$

## 2.2 Elipsometrické veličiny

Kerrovské jevy, které jsou předmětem této práce, mají úzkou souvislost s polarizací světla. Předpokládáme obecnou eliptickou polarizaci a definujeme pro ni [16], [17]:

1. *Stočení roviny polarizace*  $\Theta$ , dále je někdy též nazývaná *rotace* (roviny polarizace).<sup>1</sup> Ta odpovídá úhlu natočení hlavní osy elipsy vzhledem k ose  $x$  (směru, ve kterém leží komponenta  $x$  intenzity elektrického pole).
2. *Elipticitu*  $\psi$  popisující u polarizační elipsy světla vztah mezi velikostí její hlavní a vedlejší osy. Z rozměrového hlediska má také význam úhlu, nikoli přímo poměru velikostí.

Grafický význam rotace a elipticity je znázorněn na schématu 2.2.

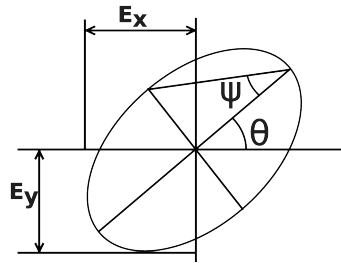


Schéma 2.2: Elipsometrické veličiny: Stočení roviny polarizace  $\Theta$  a elipticita  $\psi$

Na výše zavedené veličiny lze také nahlížet z matematického hlediska ve formalismu Jonesových vektorů. Pokud je  $E_x$  a  $E_y$  intenzita elektrického pole ve směru  $x$  a  $y$ , pak lze Jonesův vektor vyjádřit ve tvaru [16]

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ i \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Definujme poměr komplexních amplitud jako  $\chi$ , potom platí

$$\chi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_y}{E_x} = \frac{\text{tg } \Theta + i \text{tg } \psi}{1 - i \text{tg } \Theta \text{tg } \psi} \quad (2.12)$$

a z toho lze následně vyjádřit [16]

$$\Theta = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2 \text{Re } \chi}{1 - |\chi|^2} \quad (2.13)$$

a

$$\psi = \frac{1}{2} \text{arcsin} \frac{2 \text{Im } \chi}{1 + |\chi|^2}. \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Tento název je použit na základě anglického pojmenování.

## 2.3 Model transparentních magnetických materiálů

V této kapitole bude představen popis magnetických materiálů, založený na efektivní permitivitě (např. [18]; pro transparentní magnetické materiály [19] a [20]). Jedná se přitom o matematické úpravy vztahů a není tím ovlivněno fyzikální chování materiálů. Důsledkem je ale značné zjednodušení úpravy výrazů.

Běžně je uvažován vztah mezi elektrickým polem a indukcí daný permitivitou  $\epsilon_{\text{real}}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_{\text{real}} \mathbf{E} , \quad (2.15)$$

přičemž ve výpočtech bude uvažováno

$$\epsilon_{\text{real}} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = n^2 \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.16)$$

kde  $n$  značí index lomu a  $\epsilon_0$  permitivitu vakua.

V celé této práci jsou uvažovaná slabá elektromagnetická pole, tj. případy, kdy nedochází k nelineárním jevům v materiálu. Z tohoto důvodu je možné použít k popisu optické odezvy vodivost  $\sigma$ , která je oproti permitivitě vhodnější díky svému výpočtu (viz [21] a [22]).

Značení  $\epsilon_{\text{real}}$  je použito, protože rovnice (2.15) vyjadřuje, jak materiál s touto skutečnou permitivitou reaguje na elektrické pole. Efektivní permitivita nechť je zavedena vztahem

$$\epsilon_{\text{eff}} \stackrel{\text{def}}{=} n^2 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \mathbf{1} \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) , \quad (2.17)$$

kde

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = n^2 \quad (2.18)$$

je skalární. Efektivní relativní permitivita  $\epsilon_{\text{eff}}$  se liší od skutečné kvůli nenulové vodivosti. V následujících kapitolách o Kerrových jevech bude uvažován konkrétní tvar tenzoru vodivosti podle symetrie daného problému. Obecně přitom budou složky tenzoru značeny způsobem

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

a dle této podoby vodivosti (2.19) budou uváděny prvky efektivní permitivity notací

$$\epsilon_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} . \quad (2.20)$$

Pro optické aplikace, které jsou předmětem této práce, uvažujme permeabilitu prostředí  $\mu$  izotropní a spektrálně nezávislou, z čehož plyne běžný vztah mezi intenzitou magnetického pole  $\mathbf{H}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (2.21)$$

Dále je pro efektivní permitivitu nutno zavést odpovídající elektrickou indukci vztahem

$$\mathbf{D}_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{eff}} \mathbf{E} . \quad (2.22)$$

Materiály s nediagonálními prvky permitivity nenulovými ( $\epsilon_{yz} \neq 0$ ) budou nazývány *magnetické materiály*.

Na základě výše definovaných veličin můžeme přepsat Maxwellovy rovnice (2.3)–(2.2) pro magnetické materiály ve tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\text{eff}} = 0 , \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}}{\partial t} . \quad (2.26)$$

## 2.4 Formalismus přenosové matice

Přenosová matice se často používá k popisu šíření světla v případě struktur s mnoha vrstvami – a tedy i mnoha rozhraními.

Při obvyklém řešení průchodu světla rozhraním jsou řešeny okrajové podmínky plynoucí z Maxwellových rovnic. Pro větší množství vrstev je zdouhavé a náročné dělat to separátně pro každé rozhraní; místo toho lze ale použít formalismus přenosové matice ([23], [24], [25]). Je také založen na řešení okrajových podmínek pro elektromagnetické vlny, ty jsou ale řešeny pouze jednou a obecně. Šíření světla v každém rozhraní je popsáno maticí, která bere rozhraní do úvahy již při svém odvození a následně, pokud jsou známé materiálové vlastnosti jednotlivých prostředí, redukuje se popis průchodu světla na násobení těchto matic.

Základem pro zde používaný formalismus je ten uvedený např. v [25], kde autor zavádí přenosovou matici k popisu amplitud dvou rovinných vln pohybujících se navzájem opačným směrem. Pokud budou  $E_0$  a  $H_0$  konstanty obsahující vhodné jednotky amplitud,  $\mathbf{x}$  jednotkový vektor ve směru  $x$ ,  $\beta$  je komplexní konstanta šíření a  $\omega$  úhlová frekvence lze pro transversálně-elektrickou (TE) polarizaci uvažovat pole ve tvaru

$$\mathbf{E}(y, z) = E_0 \mathbf{x} m(z) e^{i(\beta y - \omega t)} , \quad (2.27)$$

zatímco pro transversálně-magnetickou (TM) polarizaci má tuto podobu magnetická intenzita:

$$\mathbf{H}(y, z) = H_0 \mathbf{x} m(z) e^{i(\beta y - \omega t)} . \quad (2.28)$$

V (2.27) a (2.28) je  $m(x)$  komplexní amplituda zavedená vztahem

$$m(x) = A^j e^{\alpha^j (x - w^j)} + B^j e^{-\alpha^j (x - w^j)} , \quad (2.29)$$

kde pro  $j$ -tou vrstvu jsou  $A^j$  a  $B^j$  komplexní amplitudové koeficienty a  $w^j$  uvádí pozici rozhraní vrstev  $j$  a  $j + 1$ . Pro vlnový vektor  $\mathbf{k}^j$  je definováno  $\alpha^j = \sqrt{\beta^2 - |\mathbf{k}^j|^2}$ .

Pro tuto notaci lze napsat přenosovou matici  $M^j$  popisující vztah mezi amplitudami v podobě

$$\begin{pmatrix} A^j \\ B^j \end{pmatrix} = M^j \begin{pmatrix} A^{j-1} \\ B^{j-1} \end{pmatrix} , \quad (2.30)$$

kde (v souladu s [25]) je

$$M^j = \frac{1}{2\rho^j} \begin{pmatrix} \left(\rho^j + \frac{\alpha^{j-1}}{\alpha^j}\right) e^{ik_z^j w^j} & \left(\rho^j - \frac{\alpha^{j-1}}{\alpha^j}\right) e^{ik_z^j w^j} \\ \left(\rho^j - \frac{\alpha^{j-1}}{\alpha^j}\right) e^{-ik_z^j w^j} & \left(\rho^j + \frac{\alpha^{j-1}}{\alpha^j}\right) e^{-ik_z^j w^j} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Výše je  $w^j$  tloušťka  $j$ -té vrstvy a

$$\rho^j = \begin{cases} 1 & \text{pro transversálně-elektrickou polarizaci} \\ \frac{(k^{j-1})^2}{(k^j)^2} & \text{pro transversálně-magnetickou polarizaci} \end{cases} \quad (2.32)$$

U přenosové matice je především důležité, že její prvky  $M^j$  jsou bezrozměrné, matice lze pak bez problému násobit a průchod světla několika vrstvami odpovídá součinu. Ten pro výše ukázanou matici (2.31) vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} A^j \\ B^j \end{pmatrix} = M^j \cdot M^{j-1} \dots M^1 \begin{pmatrix} A^0 \\ B^0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

kde je indexem 0 značena první vrstva a poslední má index  $N$ . Je vhodné si uvědomit význam koeficientů  $A$  a  $B$ . Protože  $A_0$  odpovídá poli dopadajícímu na vzorek z nulté vrstvy ( $E_{\text{inc},0}$ ),  $B_n$  je pole dopadající na vzorek z opačného směru na poslední vrstvu ( $E_{\text{inc},n}$ ),  $A_n$  charakterizuje světlo vzorkem prošlé (šířící se dále v poslední vrstvě,  $E_{\text{trans},n}$ ) a  $B_0$  popisuje odražené záření zpět do nulté vrstvy ( $E_{\text{ref},0}$ ), lze vztah (2.33) výše zapsat přehledněji jako

$$\begin{pmatrix} E_{\text{trans}}^j \\ E_{\text{inc}}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^j \\ B^j \end{pmatrix} = M^j \cdot M^{j-1} \dots M^1 \begin{pmatrix} E_{\text{inc}}^0 \\ E_{\text{ref}}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Výše popsáný formalismus přenosové matice není jediný možný, ale jeho zavedení a podoba se liší podle autorů a účelu. Například v [1] je definována přenosová matice svazující dva amplitudové koeficienty, které jsou rozdílné pro elektrické a magnetické pole nebo v [2] a [3] je pro anizotropní materiály zavedena matice  $4 \times 4$ .

Právě v [2] je též rozebrána přenosová matice pro různé magnetizace, přičemž přístup je tam založen nejen na fyzikálních a matematických podmínkách, ze kterých plyne „finální“ přenosová matice coby součin několika dalších. Konkrétně jde o součin tří matic, z nichž dvě jsou tzv. *dynamické* matice pro dvě různá prostředí a jedna *propagační* matice. Z toho plynou elegantní matematické vlastnosti v podobě normování, transformace bází a interpretace jednotlivých částí výpočtů, na druhou stranu obsahuje popis větší počet kroků a pro numerické výpočty je vhodnější používat jednu matici. V této práci proto bude představena jiná přenosová matice uvažující dvě nediagonální složky permitivity nenulové a na diagonále dvě rozdílné hodnoty.

## 2.5 Asymetrie v odrazivosti

Cílem této diplomové práce je především objasnit, popsat a diskutovat asymetrii v elipsometrii pro transversální magnetizaci. Tímto pojmem bude nazýván případ, kdy pro opačné úhly dopadu vykazuje vzorek rozdílnou optickou odezvu.

Na schématu 2.3 dopadají na rozhraní dvě vlny pod opačnými úhly dopadu – jednu (levá ilustrace) pod  $\theta_-$ , podruhé (pravá ilustrace) s úhlem  $\theta_+$ . Základní znalosti optické odezvy materiálů říkají, že pro izotropní prostředí budou reflexní koeficienty stejné. Tak tomu ale nemusí být s magnetizací, která je příčinou anizotropie vzorku a porušuje tak symetrii celého systému.<sup>2</sup> Nejjednodušší případ odpovídá transversálně-magnetické polarizaci světla, tedy intenzita magnetického pole světelné vlny bude rovnoběžná s magnetizací vzorku; podle směru dopadu světla ale mohou tyto dva vektory mířit směrem stejným, nebo opačným. Ve složitějším případě obecné polarizace platí obdobná úvaha pro průměty elektrické a magnetické intenzity.

Odráživost souvisí s okrajovými podmínkami plynoucích z Maxwellových rovnic, do nichž přitom vstupují tečné složky elektrického a magnetického pole. Pokud se tyto komponenty v magnetickém materiálu budou lišit pro opačné úhly dopadu, což na základě přítomnosti magnetizace musí být splněno (nebo ekvivalentně na základě popisu s anizotropní efektivní permitivitou), budou se lišit pro tyto dva případy též koeficienty odrazivosti. Matematicky zapsáno, pokud světlo dopadající pod úhlem  $\theta_+$  bude mít koeficient odrazivosti  $r_+$  a opačný paprsek s  $\theta_-$  popíše  $r_-$  (viz schéma 2.3), bude platit

$$\theta_+ = -\theta_- , \quad (2.35)$$

kde znaménko mínus značí opačnou orientaci úhlu od kolmice, ale odrazivosti obdobnou relaci splňovat nebudou:

$$|r_+| \neq |r_-| . \quad (2.36)$$

Tento efekt splňující pro (2.35) relaci (2.36) dále nazýváme *asymetrií v odrazivostech*, případně obdobně mluvíme o asymetrii v elipsometrických veličinách. Někdy bude jev též označen jen zkráceně jako *asymetrie*.

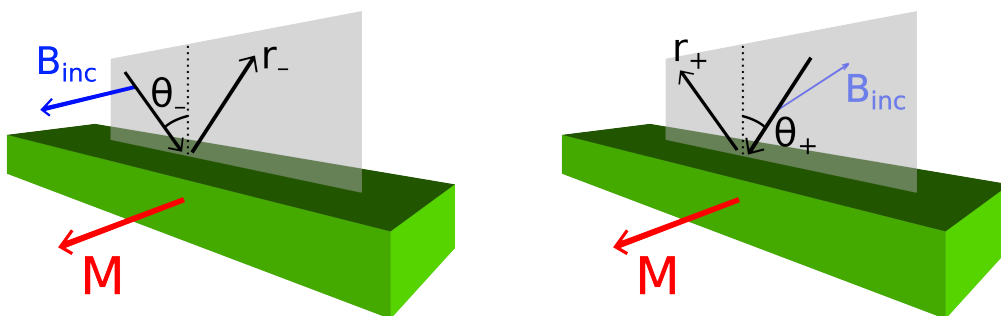


Schéma 2.3: Asymetrická odrazivost pro opačné úhly dopadu  $\theta_+$  a  $\theta_-$

<sup>2</sup>Na ilustraci je transversální orientace magnetizace.



### 3. Transverzální Kerrův jev

Tři nezávislé směry magnetizace vůči vzorku a rovině dopadajícího světla jsou na schématu 3.1. První z nich, příčná orientace, je diskutována v této kapitole, v návaznosti na bakalářskou práci [4], kde pro ní byla představena přenosová matice. Následující sekce se bude věnovat pouze transverzálně magnetické (TM) polarizaci světla; důvodem je, že odrazivost magnetického materiálu pro TE složku se v ničem neliší od běžných případů, tj. nemagnetických materiálů. Naproti tomu, TM polarizace vykazuje v odrazivosti asymetrii. Pod tímto pojmem je přitom myšleno, že dopadají-li na rozhraní do stejného místa dvě vlny pod navzájem opačnými úhly,<sup>1</sup> liší se pro tyto případy reflexní koeficient. Transverzálně elektrické (TE) pole je diskutováno v uvedené citaci; z hlediska asymetrie není zajímavé a jeho význam spočívá jen v zapojení do výpočtů při dopadu obecně polarizovaného světla.

Podélná orientace magnetizace a směr ležící v rovině dopadu světla jsou popsány v kapitole 4: *Longitudinální a polární Kerrův jev*.

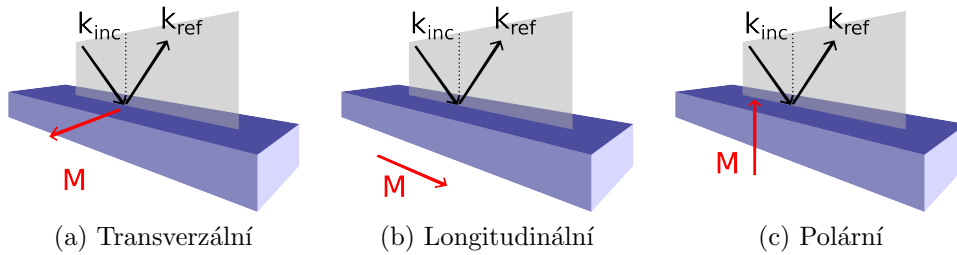


Schéma 3.1: Možné orientace magnetizace (červeně) vzhledem ke vzorku (modře) a rovině dopadu světla (směr šíření světla černě)

#### 3.1 Tvar polí pro transverzální magnetizaci

Příčná magnetizace může být v notaci efektivní permitivity popsána tenzorem, který je proti obecnému případu (2.20) jednodušší:

$$\epsilon_{\text{eff}}^{\text{trans}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ 0 & -\epsilon_{yz} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Kvůli symetrii případu bylo uvažováno pole tvaru

$$\mathbf{B} = \left[ \alpha N_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{zz}z} + \beta N_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \beta e^{-ik_{zz}z} \right] e^{i(k_{yy}y - \omega t)} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Úhel dopadu je měřen od kolmice, přičemž každý z nich na opačnou stranu v rovině dopadu světla.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\omega} \frac{1}{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \left[ \alpha N_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -k_z \epsilon_{yy} - k_y \epsilon_{yz} \\ -k_z \epsilon_{yz} + k_y \epsilon_{yy} \end{pmatrix} e^{ik_z z} + \right. \\ \left. + \beta N_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ k_z \epsilon_{yy} - k_y \epsilon_{yz} \\ k_z \epsilon_{yz} + k_y \epsilon_{yy} \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \right] e^{i(k_y y - \omega t)}. \quad (3.3)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou amplitudové koeficienty vyjadřující intenzitu vlny,  $y, z$ ,  $\omega$  je úhlová frekvence vlny a  $t$  značí čas. Pro normovací konstanty  $N_\alpha$  a  $N_\beta$  platí

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{-k_z \epsilon_{yy} - k_y \epsilon_{yz}}{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \right|^2 + \left| \frac{-k_z \epsilon_{yz} + k_y \epsilon_{yy}}{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \right|^2}} \quad (3.4)$$

a

$$N_\beta = \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{k_z \epsilon_{yy} - k_y \epsilon_{yz}}{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \right|^2 + \left| \frac{k_z \epsilon_{yz} + k_y \epsilon_{yy}}{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2} \right|^2}}. \quad (3.5)$$

Vlnový vektor  $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$  přitom musí splňovat

$$k_z = \sqrt{\mu\omega^2 \left( \epsilon_{yy} + \frac{\epsilon_{yz}^2}{\epsilon_{yy}} \right) - k_y^2} \quad (3.6)$$

a pro zjednodušení je vhodné pro magnetický materiál zavést efektivní index lomu jako

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{\epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{yz}^2}{\epsilon_{yy}}}. \quad (3.7)$$

## 3.2 Přenosová matice pro transversální magnetizaci

Na základě výše uvedených tvarů polí jde sestavit přenosová matice mezi vrstvy  $i$  a  $j$  (tyto horní indexy značí právě pořadí vrstvy, nikoli mocninu veličiny), která svazuje koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$

$$\begin{pmatrix} \alpha^j \\ \beta^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{j-1} \\ \beta^{j-1} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

přičemž maticové elementy nabývají pro jedno rozhraní tvaru [4]

$$m_{11}^j = \left( k_z^j \epsilon_{yy}^j - k_y^j \epsilon_{yz}^j - (-k_z^{j-1} \epsilon_{yy}^{j-1} - k_y^{j-1} \epsilon_{yz}^{j-1}) \frac{(\epsilon_{yy}^j)^2 + \epsilon_{yz,j}^2}{\epsilon_{yy,j-1}^2 + \epsilon_{yz,j-1}^2} \right) \frac{e^{ik_z^j w_j}}{2k_z^j \epsilon_{yy}^j}, \quad (3.9)$$

$$m_{12}^j = \left( k_z^j \epsilon_{yy}^j - k_y^j \epsilon_{yz}^j - (k_z^{j-1} \epsilon_{yy}^{j-1} - k_y^{j-1} \epsilon_{yz}^{j-1}) \frac{(\epsilon_{yy}^j)^2 + \epsilon_{yz,j}^2}{\epsilon_{yy,j-1}^2 + \epsilon_{yz,j-1}^2} \right) \frac{e^{ik_z^j w_j}}{2k_z^j \epsilon_{yy}^j}, \quad (3.10)$$

$$m_{21}^j = \left( k_z^j \epsilon_{yy}^j + k_y^j \epsilon_{yz}^j + (-k_z^{j-1} \epsilon_{yy}^{j-1} - k_y^{j-1} \epsilon_{yz}^{j-1}) \frac{(\epsilon_{yy}^j)^2 + \epsilon_{yz,j}^2}{\epsilon_{yy,j-1}^2 + \epsilon_{yz,j-1}^2} \right) \frac{e^{-ik_z^j w_j}}{2k_z^j \epsilon_{yy}^j} \quad (3.11)$$

a

$$m_{22}^j = \left( k_z^j \epsilon_{yy}^j + k_y^j \epsilon_{yz}^j + (k_z^{j-1} \epsilon_{yy}^{j-1} - k_y^{j-1} \epsilon_{yz}^{j-1}) \frac{(\epsilon_{yy}^j)^2 + \epsilon_{yz,j}^2}{\epsilon_{yy,j-1}^2 + \epsilon_{yz,j-1}^2} \right) \frac{e^{-ik_z^j w_j}}{2k_z^j \epsilon_{yy}^j}. \quad (3.12)$$

**Diskuze asymetrie** Ve vztazích (3.9)–(3.12) vystupuje samozřejmě mimodiagonální permitivita  $\epsilon_{yz}$  popisující magnetizaci. Je vhodné si povšimnout, že v některé části výrazu se vůči ní chovají sudě, jiné liše (nemění nebo mění znaménko při otočení magnetizace  $\epsilon_{yz} \rightarrow -\epsilon_{yz}$  kvůli tomu, že v různých částech součtů se vyskytují různé její mocniny). Na základě toho nejsou tyto maticové elementy jako celek liché ani sudé, což implikuje rozdílné přenosové matice při opačných směrech magnetizace vzhledem k úhlu dopadu. Podrobnější diskuze je uvedena v [4], zde je pro názornost ještě vhodné uvést koeficient odrazivosti pro magnetické pole<sup>2</sup> pro jedno rozhraní  $r^{H,1}$

$$r^{H,1} = \frac{\tilde{n}_i \cos \theta_t - \tilde{n}_t \cos \theta_i + \sin \theta_t \left( \tilde{n}_i \frac{\epsilon_{yz,t}}{\epsilon_{yy,t}} + \frac{\tilde{n}_t^2}{\tilde{n}_i} \frac{\epsilon_{yz,i}}{\epsilon_{yy,i}} \right)}{\tilde{n}_i \cos \theta_t + \tilde{n}_t \cos \theta_i + \sin \theta_t \left( \tilde{n}_i \frac{\epsilon_{yz,t}}{\epsilon_{yy,t}} + \frac{\tilde{n}_t^2}{\tilde{n}_i} \frac{\epsilon_{yz,i}}{\epsilon_{yy,i}} \right)}, \quad (3.13)$$

kde spodní indexy značí prostředí ( $i$  pro rozhraní, odkud světlo dopadá;  $t$  pro materiál za rozhráním),  $\theta_i$  je úhel dopadu a  $\theta_t$  průchodu.

Z (3.13) již je přímo vidět, že se odrazivosti liší při zmíněné záměně  $\epsilon_{yz} \rightarrow -\epsilon_{yz}$ .

---

<sup>2</sup>Pro magnetické pole, protože se jedná o poměr amplitud  $\beta_i/\alpha_i$ . Odrazivost elektrické složky plyne z přenásobení faktory dle (3.3).

# 4. Longitudinální a polární Kerrův jev

## 4.1 Předpoklad tvaru polí

Longitudinální Kerrův jev je případ, kdy magnetizace vzorku leží v rovině dopadu světla; podobně je polární Kerrův jev charakterizován magnetizací ve směru kolmém na rozhraní, viz schéma 3.1. Aby byla dodržena notace zavedená v sekci 3.2 *Přenosová matice pro transversální magnetizaci*, bude uvažována geometrie ve které:

1. Světlo se šíří v rovině  $y$ - $z$ ,
2. povrch vzorku odpovídá rovině  $x$ - $y$  a
3. magnetizace vzorku míří ve směru  $y$  pro longitudinální Kerrův jev a ve směru  $z$  pro polární případ.

Přenosová matice, která bude později odvozena, popíše šíření skrz vrstvy materiálů položenými nad sebou ve směru osy  $z$ .

Každá z možných orientací magnetizace je popsána tenzorem vodivosti (efektivní permitivity) v příslušných tvarech uvedených v následujících kapitolách. Společná ale může být notace amplitud elektrické a magnetické indukce; k nalezení tvarů polí z Maxwellových rovnic se hodí uvažovat intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  intenzitu magnetického pole v podobě

$$\mathbf{E} = \left[ \alpha N_\alpha \begin{pmatrix} A_1 \\ 1 \\ A_5 \end{pmatrix} e^{ik_z z} + \beta N_\beta \begin{pmatrix} A_2 \\ 1 \\ A_6 \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \right] e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (4.1)$$

a

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left[ \alpha N_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \end{pmatrix} e^{ik_z z} + \beta N_\beta \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \\ B_6 \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \right] e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad (4.2)$$

kde  $y$  a  $z$  jsou prostorové souřadnice,  $k_y$  a  $k_z$  vlnová čísla ve směrech dle spodního indexu,  $\omega$  úhlová frekvence světla,  $t$  čas a  $\mu$  permeabilita prostředí. Amplitudové koeficienty  $A_1, A_2, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  a  $B_6$  jsou nezávislé na prostorových souřadnicích a stejně tak  $\alpha$  nebo  $\beta$ , které ale zároveň vyjadřují intenzitu amplitud světla šířící se v kladném, respektive záporném směru osy  $z$ . Velikost  $\alpha$  a  $\beta$  je přitom dána zdrojem světla, nikoli materiálovými parametry a Maxwellovými rovnicemi. Ty lze řešit separátně pro dvě složky šířící se opačnými směry a při znalosti amplitud pro jeden směr šíření lze zbylé jednoduše získat ze záměny  $k_z \rightarrow -k_z$ .

$N_\alpha$  a  $N_\beta$  jsou normovací konstanty elektrického pole a jako takové pro ně platí

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{|A_1|^2 + 1 + |A_5|^2}} \quad (4.3)$$

a

$$N_\beta = \frac{1}{\sqrt{|A_2|^2 + 1 + |A_6|^2}}. \quad (4.4)$$

Koeficienty, které by dle zavedené notace odpovídaly členům  $A_3$  a  $A_4$ , tedy amplitudám  $y$  elektrického pole, jsou položeny rovny jedné. To je možné bez újmy na obecnosti řešení, protože jejich roli převzaly koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  a ničemu nevadí, že zbylé koeficienty  $A$  a  $B$  jsou definovány coby součin s nimi.

Řešení Maxwellových rovnic uvedená v těchto kapitolách jsou obecně platná pro libovolná prostředí s odpovídajícím tenzorem permitivity a netýkají se pouze Kerrova jevu, ale též dalších optických odezev materiálů.

## 4.2 Longitudinální orientace magnetizace

Pro longitudinální Kerrův jev leží magnetizace v rovině dopadu světelné vlny. V souladu se značením (2.20) tomu odpovídá tenzor efektivní permitivity

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & \epsilon_{xz} \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ -\epsilon_{xz} & 0 & \epsilon_{xx} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

kde bylo rovnou na základě symetrie a směru magnetizace provedeno zjednodušení v podobě  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{xx}$  a  $\epsilon_{zx} = -\epsilon_{xz}$ . Pro tento tvar permitivity je třeba najít řešení Maxwellových rovnic (2.23)–(2.26).

Pro přehlednost je vhodné zavést substituce, které zjednoduší následující výrazy

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mu^2 \omega^4 (\epsilon_{xx}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) + \epsilon_{xz}^2)^2 - 2k_y^2 \mu \omega^2 (\epsilon_{xz}^2 (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + \epsilon_{xx}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2) + k_y^4 (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2} \quad (4.6)$$

a

$$K^2 \stackrel{\text{def}}{=} k_y^2 + k_z^2. \quad (4.7)$$

V materiálu se mohou šířit dvě nezávislé polarizace světla, označme je spodními indexy *plus* a *mínus* u příslušných koeficientů, například tedy  $A_{1,+}$ . Při mluvení o konkrétním značení bude použita terminologie  $\zeta_+$  a  $\zeta_-$ ; motivací k tomuto značení je, že tato dvě řešení Maxwellových rovnic se liší členem  $\zeta$ , který se pro jednu z polarizací vyskytuje v amplitudových koeficientech v součtu a podruhé v rozdílu.

Z Maxwellových rovnic plyne pro vlnový vektor

$$k_{z,\pm} = \sqrt{\frac{\pm \zeta + \mu \omega^2 (\epsilon_{xx}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}) + \epsilon_{xz}^2) - k_y^2 (\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx})}{2\epsilon_{xx}}}. \quad (4.8)$$

Koeficienty  $A$  a  $B$  pro polarizace  $\zeta_\pm$  splňují Maxwellovy rovnice s předpokládaným tvarem permitivity právě tehdy, když platí:

$$A_{1,\pm} = \frac{(\pm \zeta + \mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2) - \epsilon_{xx} k_y^2) \epsilon_{xx} K^2 - \epsilon_{yy} \mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 K^2 - 2\epsilon_{xz}^2 k_y^2) + \epsilon_{yy} \epsilon_{xx} k_y^2 K^2}{2\epsilon_{xz} k_y k_z \mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2)}, \quad (4.9)$$

$$A_{2,\pm} = -A_{1,\pm} , \quad (4.10)$$

$$A_{5,\pm} = \frac{(\pm\zeta + \mu\omega^2(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2) - \epsilon_{xx}k_y^2)K^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx}\mu\omega^2(3k_y^2 + k_z^2) + \epsilon_{yy}k_y^2K^2}{2k_yk_z\mu\omega^2(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2)} , \quad (4.11)$$

$$A_{6,\pm} = -A_{5,\pm} , \quad (4.12)$$

$$B_{1,\pm} = -\frac{\epsilon_{yy}\mu\omega}{k_z} , \quad (4.13)$$

$$B_{2,\pm} = -B_{1,\pm} , \quad (4.14)$$

$$B_{3,\pm} = \frac{\pm\zeta + \mu\omega^2(-\epsilon_{yy}\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2) + k_y^2(\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})}{2\epsilon_{xz}k_y\omega} , \quad (4.15)$$

$$B_{4,\pm} = B_{3,\pm} , \quad (4.16)$$

$$B_{5,\pm} = -\frac{\pm\zeta + \mu\omega^2(-\epsilon_{yy}\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2) + k_y^2(\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})}{2\epsilon_{xz}k_z\omega} \quad (4.17)$$

a

$$B_{6,\pm} = -B_{5,\pm} . \quad (4.18)$$

**Diskuze řešení: Longitudinální magnetizace** Z tvarů amplitud představených v předchozí lekci není na první pohled vidět příliš mnoho závislostí. Je proto vhodné podívat se blíže limitu pro prostředí bez magnetizace, což odpovídá případu  $\epsilon_{xz} \rightarrow 0$ . Provedení limity nelze provést prostým dosazením  $\epsilon_{xz} = 0$  do vztahů (4.9)–(4.18). Důvodem je následná divergence některých koeficientů kvůli výrazu tvaru  $1/\epsilon_{xz}$ . Proto je nutné provést úvahu, že v (4.1) a (4.2) bude předpokládáno  $\alpha = \epsilon_{xz}\tilde{\alpha}$ , samozřejmě tedy tak, aby celý výraz měl správné jednotky. Následně, vynásobením koeficientů tímto výrazem, lze dospět k tvarům:

$$\zeta = \pm(\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})(k_y^2 - \mu\omega^2\epsilon_{xx}) \quad (4.19)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} k_{z,\pm} = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu\omega^2\epsilon_{xx} - k_y^2} & \text{pro } \zeta_+ \\ \pm\sqrt{\frac{\epsilon_{xx}(k_y^2 - \epsilon_{yy}\mu\omega^2)}{\epsilon_{yy}}} & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} A_{1,\pm} = \begin{cases} \frac{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})K^2(k_y^2 - \epsilon_{yy}\mu\omega^2)}{\epsilon_{yy}k_yk_z\mu\omega^2} & \text{pro } \zeta_+ \\ 0 & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} A_{3,\pm} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \zeta_+ \\ 1 & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} A_{5,\pm} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \zeta_+ \\ \frac{\epsilon_{yy}\mu\omega^2(k_y^2(\epsilon_{yy}-2\epsilon_{xx})+k_z^2(\epsilon_{yy}-\epsilon_{xx}))+k_y^2(\epsilon_{xx}-\epsilon_{yy})K^2}{\epsilon_{yy}^2 k_y k_z \mu \omega^2} & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.23)$$

$$B_{1,\pm} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \zeta_+ \\ -\frac{\epsilon_{xx}\mu\omega}{k_z} & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} B_3 = \begin{cases} \frac{(\epsilon_{xx}-\epsilon_{yy})(k_y^2-\epsilon_{yy}\mu\omega^2)}{k_y\omega} & \text{pro } \zeta_+ \\ 0 & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} B_5 = \begin{cases} \frac{(\epsilon_{xx}-\epsilon_{yy})(\epsilon_{yy}\mu\omega^2-k_y^2)}{k_z\omega} & \text{pro } \zeta_+ \\ 0 & \text{pro } \zeta_- \end{cases} \quad (4.26)$$

Na základě těchto limit je vidět, že se pro tento případ rozpadne řešení na dvě ortogonální varianty:

1.  $\zeta_+$  má nenulové komponenty  $E_x$ ,  $H_y$  a  $H_z$ .
2.  $\zeta_-$  má nenulové komponenty  $E_y$ ,  $E_z$  a  $H_x$ .

Nyní je na první pohled vidět, že jde o dvě nezávislé složky, které je možné použít jako bázi k popisu světla. Toto je sice ukázáno na limitním případě, ale stejně tak tomu musí být v magnetickém materiálu, kde z matematického hlediska musí existovat dvě nezávislá řešení, přičemž tento počet byl nalezen a je jen problém s jejich interpretací.

Další krok aproximace je případ nemagnetického izotropního prostředí, tedy materiál s permitivitou ve tvaru

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Jak si lze povšimnout, takovou limitu není vhodné provádět z té uvedené výše. Fyzikálně zde nemá význam záměna limit a je třeba je provést v pořadí  $\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} f(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{yz})$ , kde  $f$  je obecná funkce. Pro toto pořadí limit vypadají koeficienty způsobem:

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} k_z = \sqrt{\mu\omega^2\epsilon - k_y^2}, \quad (4.28)$$

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} A_{1,\pm} = \pm i \frac{k_y^2 + k_z^2}{k_z \sqrt{\mu\omega^2\epsilon}}, \quad (4.29)$$

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} A_{5,\pm} = -\frac{k_y}{k_z}, \quad (4.30)$$

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} B_{1,\pm} = -\frac{\epsilon\mu\omega}{k_z}, \quad (4.31)$$

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} B_{3,\pm} = \pm i \sqrt{\mu \epsilon} \quad (4.32)$$

a

$$\lim_{\epsilon_{yz} \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_{xx} \rightarrow \epsilon_{yy}} B_{5,\pm} - \pm i \sqrt{\mu \epsilon} \frac{k_y}{k_z} . \quad (4.33)$$

Limity pro izotropní prostředí jsou důležité kvůli numerickým výpočtům. Ty jsou obvykle prováděny pro případy, kdy je jednou z vrstev i nemagnetický materiál a pro něj je poté nutné použít právě tyto relace. Originální vyjádření, bez limit, jsou sice též „správné“, ale kvůli  $\epsilon_{yz}$  ve jmenovateli divergují. Tato singularita vychází při řešení Maxwellových rovnic z předpokladu, že složka  $y$  elektrického pole je vždy jednotková. Z fyzikálního hlediska to není vždy splněná podmínka, stačí uvažovat dopad TE polarizace ze vzduchu na vzorek.<sup>1</sup> Nastane-li tento případ, z matematického hlediska je konstantní jednotková amplituda kompenzována jinými komponenty jdoucími do nekonečna a následné normování divergenci odstraní a současně vynuluje složku  $y$ . Vzhledem k výpočetní náročnosti symbolických postupů<sup>2</sup> není tento přístup možný a u numerických algoritmů je nutné využít tyto analytické limity.

Druhým problematickým případem je kolmý dopad opět kvůli divergence (ta je v (4.9)–(4.18) způsobena přítomností  $k_y$  ve jmenovateli). Odstranit lze Taylorovým rozvojem při  $k_y \rightarrow 0$  výrazu  $\zeta$ , pro který platí

$$\zeta \approx \mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx}) - k_y^2 \frac{\mu \omega^2 (\epsilon_{xz}^2 (\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}) + \epsilon_{xx} (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})^2)}{\mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} + O(k_y^4) , \quad (4.34)$$

kde notace  $O(k_y^4)$  značí zanedbaný výraz v řádu  $k_y^4$ . Následně po dosazení do složek vlnového vektoru a amplitud a po vynásobení touto problematickou komponentou<sup>3</sup> vyjdou limity pro kolmé šíření v anizotropním materiálu:

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} k_{z,+} = \frac{\mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2)}{\epsilon_{xx}} - k_y^2 \left( 1 + \frac{\epsilon_{yy} \epsilon_{xz}^2}{\epsilon_{xx} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} \right) + O(k_y^4) , \quad (4.35)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} k_{z,-} = \epsilon_{yy} \mu \omega^2 + k_y^2 \frac{\epsilon_{yy} (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})}{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx}} + O(k_y^4) , \quad (4.36)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y A_{1,+}) = \frac{\mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})}{\epsilon_{xz} k_{z,+}} - k_y^2 \frac{\epsilon_{xx} ((\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xz}^2)}{\epsilon_{xz} k_{z,+} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} + O(k_y^4) , \quad (4.37)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y A_{1,-}) = k_y^2 \frac{\epsilon_{yy} \epsilon_{xz}}{k_{z,-} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} + O(k_y^4) , \quad (4.38)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y A_{3,\pm}) = k_y + O(k_y^6) , \quad (4.39)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y A_{5,+}) = \frac{\mu \omega^2 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})}{\epsilon_{xx} k_{z,+}} - \frac{k_y^2 (\epsilon_{xx}^2 (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) + \epsilon_{xz}^2 (\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}))}{\epsilon_{xx} k_{z,+} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} + O(k_y^4) , \quad (4.40)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y A_{5,-}) = k_y^2 \frac{\epsilon_{yy} (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})}{k_{z,-} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy} \epsilon_{xx})} + O(k_y^4) , \quad (4.41)$$

<sup>1</sup>Tedy polarizace s nulovou komponentou  $y$

<sup>2</sup>Například v programu Wolfram Mathematica.

<sup>3</sup>Tato úprava je vhodná pro numerické výpočty a fyzikálně ničemu neškodí, neboť se jedná vždy o vynásobení všech amplitud stejným číslem a následně jsou výrazy normalizovány.



$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y B_{1,\pm}) = -k_y \frac{\epsilon_{yy}\mu\omega}{k_z} + O(k_y^6) , \quad (4.42)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y B_{3,+}) = \frac{\mu\omega (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx})}{\epsilon_{xz}} - k_y^2 \frac{\epsilon_{xx} ((\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xz}^2)}{\epsilon_{xz}\omega (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx})} + O(k_y^6) , \quad (4.43)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y B_{3,-}) = k_y^2 \frac{\epsilon_{yy}\epsilon_{xz}}{\omega (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx})} + O(k_y^6) , \quad (4.44)$$

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y B_{5,+}) = k_y \frac{\mu\omega (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx})}{\epsilon_{xz}k_{z,+}} + k_y^3 \frac{\epsilon_{xx} ((\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xz}^2)}{\epsilon_{xz}k_{z,+}\omega (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yy}\epsilon_{xx})} + O(k_y^6) , \quad (4.45)$$

a

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} (k_y B_{5,-}) = k_y^3 \frac{\epsilon_{yy}\epsilon_{xz}}{\epsilon_{yy}\epsilon_{xx}k_{z,-}\omega - \epsilon_{xx}^2 k_{z,-}\omega - \epsilon_{xz}^2 k_{z,-}\omega} + O(k_y^6) . \quad (4.46)$$

Uvedené limity jsou do řádu  $k_y^4$ , v praxi ale stačí použít rozvoj do  $k_y^2$ , protože skutečný problém s divergencí je jen pro téměř kolmé úhly dopadu ( $\theta < 0.1^\circ$ ) a místo vyšších řádů lze již použít kompletní výrazy.

Částí této práce je uvést podmínky pro měření asymetrie transverzálního Kerrova jevu pro opačné úhly dopadu. Je nutné předpokládat, že experimentálně nebude nastavena rovina dopadu přesně ve směru magnetizace, ale s mírnou odchylkou. To odpovídá případu, kdy kromě transverzálního Kerrova jevu bude měřen i vliv longitudinálního. Na tomto základě je nutné diskutovat vliv longitudinální magnetizace na eliptisometrické veličiny.

V [4] je ukázáno, že, asymetrie plyne z mimodiagonálních složek tenzoru permitivity; je tedy nutné zkoumat, jak se bude chovat longitudinální Kerrův jev pro záměnu  $\epsilon_{xz} \rightarrow -\epsilon_{xz}$  odpovídající otočení směru magnetizace. Tomuto prohození totiž odpovídá záměna úhlu dopadu za opačný, ale matematicky se jedná o přehlednější postup.<sup>4</sup> Pro amplitudové koeficienty (4.9)–(4.18) bude platit

$$A_1 \rightarrow -A_1 , \quad (4.47)$$

$$A_5 \rightarrow +A_5 , \quad (4.48)$$

$$B_1 \rightarrow +B_1 , \quad (4.49)$$

$$B_3 \rightarrow -B_3 \quad (4.50)$$

a

$$B_5 \rightarrow +B_5 . \quad (4.51)$$

Z těchto tvarů je vidět, že pro longitudinální magnetizace k asymetrii v reflektanci dochází jen ve smyslu změny znamének některých amplitud a nikoli co do velikosti reflexních koeficientů jako pro transverzální jev (sekce 3.2 *Přenosová matice pro transverzální magnetizaci*).

---

<sup>4</sup>U tohoto způsobu není třeba kombinovat opačné znaménko u vlnového vektoru se změnou souřadné soustavy a s diskuzí změny fáze odražených vln.

### 4.3 Polární orientace magnetizace

Nyní se zabýváme magnetizací, která je kolmá k rovině vzorku, tedy polárním Kerrovým jevem. Tento případ popisuje tenzor efektivní permitivity ve tvaru

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Tvar řešení Maxwellových rovnic se zpřehlední při použití substituce

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{4\mu\omega^2\epsilon_{zz}\epsilon_{xy}^2(k_y^2 - \epsilon_{zz}\mu\omega^2) + k_y^4(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2} \quad (4.53)$$

a stejně jako u longitudinální magnetizace bude použit zápis (4.7). Složka vlnového vektoru kolmá k rozhraní následně musí splňovat

$$k_z = +\sqrt{\frac{\pm\eta - k_y^2(\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}) + 2\epsilon_{zz}\epsilon_{xx}\mu\omega^2}{2\epsilon_{zz}}}. \quad (4.54)$$

Je vhodné podotknout, že existuje matematicky identické řešení s  $k_z \rightarrow -k_z$ . Amplitudové koeficienty ale pro něj vypadají jinak, protože otočení osy  $z$  fyzikálně znamená šíření světla proti směru magnetizace. Pro přechod k tomuto druhému řešení je tedy nutné kromě opačného znaménka u  $k_z$  provést navíc transformaci  $\epsilon_{xy} \rightarrow -\epsilon_{xy}$ . Pokud uvažujeme znaménko odpovídající vztahu (4.54), mají amplitudové koeficienty pole v souladu se značením (4.1) tvary

$$A_{1,\pm} = \frac{K^2}{\mu\omega^2\epsilon_{xx}\epsilon_{xy}k_z} \frac{(\pm\eta - k_y^2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}))k_z}{2(\epsilon_{zz}\mu\omega^2 - k_y^2)} + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}}, \quad (4.55)$$

$$A_{2,\pm} = A_{1,\pm}, \quad (4.56)$$

$$A_{5,\pm} = \frac{k_y}{\epsilon_{zz}k_z} \left( \frac{K^2}{\mu\omega^2\epsilon_{xx}k_z} \frac{(\pm\eta - k_y^2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}))k_z}{2(\epsilon_{zz}\mu\omega^2 - k_y^2)} - \frac{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}} \right), \quad (4.57)$$

$$A_{6,\pm} = -A_{5,\pm}, \quad (4.58)$$

$$B_{1,\pm} = \frac{K^2}{\omega\epsilon_{xx}k_z^2} \frac{(\pm\eta - k_y^2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}))k_z}{2(\epsilon_{zz}\mu\omega^2 - k_y^2)} - \frac{\mu\omega}{k_z} \frac{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}, \quad (4.59)$$

$$B_{2,\pm} = \frac{K^2}{\omega\epsilon_{xx}k_z^2} \frac{(\eta \mp k_y^2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}))k_z}{2(\epsilon_{zz}\mu\omega^2 - k_y^2)} + \frac{\mu\omega}{k_z} \frac{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}, \quad (4.60)$$

$$B_{3,\pm} = \frac{1}{\omega\epsilon_{xy}} \frac{(\pm\eta - k_y^2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}))k_z}{2(\epsilon_{zz}\mu\omega^2 - k_y^2)}, \quad (4.61)$$

$$B_{4,\pm} = -B_{3,\pm}, \quad (4.62)$$

$$B_{5,\pm} = \frac{k_y}{\omega \epsilon_{xy} k_z} \frac{(\pm \eta - k_y^2 (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})) k_z}{2 (\epsilon_{zz} \mu \omega^2 - k_y^2)}, \quad (4.63)$$

a

$$B_{6,\pm} = B_{5,\pm}. \quad (4.64)$$

Stejně jako pro longitudinální případ, odpovídají spodní indexy *plus* a *minus* dvěma nezávislým polarizacím. Následně budou označovány jako  $\eta_+$  a  $\eta_-$ .

**Diskuze řešení: Polární magnetizace** V diskuzi longitudinálního Kerrova jevu bylo ukázáno, že při otočení magnetizace nedochází ke změně odrazivosti co do velikosti, ale pouze ke změně fáze. Pro polární jev k asymetrii nedochází vůbec. Fyzikálně to plyne z představy, že u magnetizace odpovídající normále ke vzorku je jedno, z jakého směru světlo dopadne. Matematicky je toto odůvodnitelné záměnou  $k_y \rightarrow -k_y$ . Záměna  $\epsilon_{yz} \rightarrow -\epsilon_{yz}$  odpovídá v tomto případě otočení normály k rozhraní, je tedy ekvivalentní případu, kdy by světlo dopadalo na vzorek z druhé strany. Protože je polární Kerrův jev lichý v magnetizaci, nebude přispívat ke sledované asymetrii transverzálního případu. Na druhou stranu, jeho matematický popis je do velké míry podobný longitudinálnímu, je proto pro kompletnost vhodné uvést řešení Maxwellových rovnic i pro tento případ.

## 4.4 Okrajové podmínky na rozhraní

K vyšetření polí na rozhraní dvou materiálů lze použít okrajové podmínky vyjadřující spojitost tečných složek. Ve vektorovém zápisu a při dodržení notace, že rozhraní leží v rovině  $x - y$  budou mít tvar

$$\mathbf{n}_z \times (\mathbf{E}^{j-1} - \mathbf{E}^j) = 0 \quad (4.65)$$

a

$$\mathbf{n}_z \times (\mathbf{H}^{j-1} - \mathbf{H}^j) = 0, \quad (4.66)$$

kde horní index  $j - 1$  nebo  $j$  značí indexuje materiály před a za rozhraním a kde normála k rozhraní je jednotkový vektor

$$\mathbf{n}_z = (0, 0, 1). \quad (4.67)$$

Z řešení Maxwellových rovnic pro longitudinální i polární Kerrův jev vyplynula existence dvou polarizací, které mohou na rozhraní magnetického materiálu přecházet jedna v druhou. Na tomto základě je na každé straně rozhraní nutné uvažovat

1. dvě různé polarizace a zároveň
2. pro každou z nich dvě vlny šířící se opačnými směry.

To odpovídá čtyřem složkám pole v každém materiálu. Dopadající a odražené vlny budou značeny podle dříve zavedeného tvaru polí (4.1) a (4.2), tj. světlo šířící se ve směru osy  $z$  popisuje  $\alpha$  a koeficienty  $A$  a  $B$  s lichými spodními indexy; obdobně opačnou vlnu charakterizuje  $\beta$  a koeficienty  $A$  a  $B$  s indexy sudými.

Různé polarizace necht' jsou rozlišeny druhým spodním indexem nabývajících hodnot *plus* nebo *minus*. Podle následného vztahení k longitudinálnímu nebo polárnímu Kerrovu jevu budou tyto dvě varianty odpovídat polarizacím  $\zeta_{\pm}$  (viz sekce 4.2: *Longitudinální Kerrův jev*) nebo  $\eta_{\pm}$  (viz sekce 4.3: *Polární Kerrův jev*) s příslušným indexem.

**Přenosová matice** Při použití takto zavedené notace a při položení rozhraní v souřadnici  $z = 0$ , plyne ze vztahů (4.65)–(4.66) po dosazení (4.1) a (4.2) pro dvě různé polarizace:

$$\begin{aligned} A_{1,+}^{j-1}\alpha_+^{j-1} + A_{1,-}^{j-1}\alpha_-^{j-1} + A_{2,+}^{j-1}\beta_+^{j-1} + A_{2,-}^{j-1}\beta_-^{j-1} &= \\ &= A_{1,+}^j\alpha_+^j + A_{1,-}^j\alpha_-^j + A_{2,+}^j\beta_+^j + A_{2,-}^j\beta_-^j \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\alpha_+^{j-1} + \alpha_-^{j-1} + \beta_+^{j-1} + \beta_-^{j-1} = \alpha_+^j + \alpha_-^j + \beta_+^j + \beta_-^j \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{1,+}^{j-1}\alpha_+^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{1,-}^{j-1}\alpha_-^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{2,+}^{j-1}\beta_+^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{2,-}^{j-1}\beta_-^{j-1} &= \\ &= \frac{1}{\mu^j}B_{1,+}^j\alpha_+^j + \frac{1}{\mu^j}B_{1,-}^j\alpha_-^j + \frac{1}{\mu^j}B_{2,+}^j\beta_+^j + \frac{1}{\mu^j}B_{2,-}^j\beta_-^j \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{3,+}^{j-1}\alpha_+^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{3,-}^{j-1}\alpha_-^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{4,+}^{j-1}\beta_+^{j-1} + \frac{1}{\mu^{j-1}}B_{4,-}^{j-1}\beta_-^{j-1} &= \\ &= \frac{1}{\mu^j}B_{3,+}^j\alpha_+^j + \frac{1}{\mu^j}B_{3,-}^j\alpha_-^j + \frac{1}{\mu^j}B_{4,+}^j\beta_+^j + \frac{1}{\mu^j}B_{4,-}^j\beta_-^j \end{aligned} \quad (4.71)$$

Přenosovou matici lze z těchto okrajových podmínek vyjádřit zápisem:

$$\begin{pmatrix} \alpha_+^j \\ \beta_+^j \\ \alpha_-^j \\ \beta_-^j \end{pmatrix} = M_{j,j-1} \begin{pmatrix} \alpha_+^{j-1} \\ \beta_+^{j-1} \\ \alpha_-^{j-1} \\ \beta_-^{j-1} \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

kde  $M$  je přenosová matice, která splňuje vlastnosti představené v sekci 2.4 *Formalismus přenosové matice* a lze s ní dle toho pracovat. Pokud má vrstva materiálu tloušťku  $w$ , bude mít tvar

$$M_{j,j-1} = \begin{pmatrix} m_{11} e^{ik_z+w_n} & m_{12} e^{ik_z+w_n} & m_{13} e^{ik_z+w_n} & m_{14} e^{ik_z+w_n} \\ m_{21} e^{-ik_z+w_n} & m_{22} e^{-ik_z+w_n} & m_{23} e^{-ik_z+w_n} & m_{24} e^{-ik_z+w_n} \\ m_{31} e^{ik_z-w_n} & m_{32} e^{ik_z-w_n} & m_{33} e^{ik_z-w_n} & m_{34} e^{ik_z-w_n} \\ m_{41} e^{-ik_z-w_n} & m_{42} e^{-ik_z-w_n} & m_{43} e^{-ik_z-w_n} & m_{44} e^{-ik_z-w_n} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

kde  $m_{kl}$   $k, l \in 1, 2, 3, 4$  jsou její jednotlivé elementy.

Soustava (4.68)–(4.71) je tak soustavou čtyř rovnic pro čtyři neznámé, které je třeba řešit a jejichž řešení je vhodné uvést ve tvaru (4.72). Matematicky se jedná o dobře podmíněný problém s existujícím výsledkem. Jejich tvar je ale komplikovaný, a proto je uveden v Příloze 1: *Elementy přenosové matice*.

**Amplitudové koeficienty odrazivosti a transmise** Pro získání koeficientů popisujících elektrické pole je vhodné diskutovat význam veličin vystupujících v přenosové matici:

1.  $A$  a  $B$  jsou koeficienty známé z řešení Maxwellových rovnic a odpovídají jednotlivým materiálům.
2. Permittivita  $\mu$  je také určena materiálem.
3.  $\alpha_{\pm}^{j-1}$  popisují pole dopadající na rozhraní z přední strany a  $\beta_{\pm}^j$  ze zadní. Obecně jsou dány světelným zdrojem, pro teoretické výpočty je vhodné uvažovat intenzitu dopadající na první rozhraní z přední strany vzorku jednotkovou a z opačné strany nulovou. Pokud popisují pole uvnitř vzorku v souvislosti s větším množstvím rozhraní, přecházejí na koeficienty transmise nebo reflexe.<sup>5</sup>
4.  $\alpha_{\pm}^j$  je koeficient transmise a  $\beta_{\pm}^{j-1}$  odrazu.

Většinou je podstatné mít k dispozici koeficienty odrazivosti. Po úvaze<sup>6</sup>, že z opačné strany na vzorek nedopadá světlo, tedy že příslušné koeficienty v nulté vrstvě jsou nulové lze napsat  $\beta_+^0 = 0$  a  $\beta_-^0 = 0$ . Amplitudy  $\alpha_+^N$  a  $\alpha_-^N$  odpovídají reflexi od vzorku pro příslušné polarizace, pro přehlednost je označme jako

$$r_{\pm}^N \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{\pm}^N ; \quad (4.74)$$

stejně tak pro koeficienty transmise

$$t_{\pm}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{\pm}^0 , \quad (4.75)$$

přičemž indexy 0 a  $N$  jsou pro vrstvy použity z důvodu, že tyto koeficienty se týkají právě první nebo poslední vrstvy. Poté ze soustavy rovnic (4.72) platí

$$r_+^N = \frac{\alpha_-^N m_{11} m_{23} - \alpha_-^N m_{13} m_{21} + \alpha_+^N m_{33} m_{21} - \alpha_+^N m_{23} m_{31}}{m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}} \quad (4.76)$$

a

$$r_-^N = \frac{\alpha_-^N m_{11} m_{43} - \alpha_-^N m_{41} m_{13} + \alpha_+^N m_{33} m_{41} - \alpha_+^N m_{43} m_{31}}{m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}} . \quad (4.77)$$

Obdobně jde v případě potřeby vyjádřit koeficienty transmise

$$t_+^0 = \frac{\alpha_+^N m_{33} - \alpha_-^N m_{13}}{m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}} \quad (4.78)$$

a

$$t_-^0 = \frac{\alpha_-^N m_{11} - \alpha_+^N m_{31}}{m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}} , \quad (4.79)$$

které vzhledem ke zkoumání vzorku na tlustém substrátu nebudou třeba, ale je vhodné je uvést pro úplnost.

<sup>5</sup>V případě reflexe se jedná o odraz na rozhraní  $j + 1$  nebo další, protože toto světlo pak dopadá na rozhraní z opačného směru.

<sup>6</sup>Tento předpoklad není nezbytný, ale je většinou platný a zjednodušuje následné výrazy.

**Diskuze bázi** Přenosová matice uvedená v této sekci byla odvozena pro speciální tvar (4.1) a (4.2), které je vhodné uvažovat kvůli tvaru permitivity. Nebylo by ale možné pracovat ve fyzikálně názornější bázi transverzálně elektrického a magnetického pole nebo v kartézské soustavě? Principiálně sice ano, ale důsledkem by bylo naopak zesložnění tvarů. Důvodem je samotný formalismus přenosové matice, který musí spojovat amplitudy nebo jiné charakteristiky polí v jednotlivých vrstvách. V (4.1) a (4.2) tuto roli mají koeficienty  $\alpha_{\pm}$  a  $\beta_{\pm}$ , které určují bázi,<sup>7</sup> popisují tedy jednoznačně světlo, a proto je vhodné je vyjadřovat z okrajových podmínek. Přenosová matice tedy neobsahuje vektory jako takové, a proto ji není možné transformovat pomocí běžných lineárně-algebraických vztahů.

Transverzálně elektrická a příčně magnetická složka pole může být popsána vektory

$$\mathbf{E}_{\text{TE}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_z z} e^{i(k_y y - \omega t)} \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_{\text{TM}} = \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{ik_z z} e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad (4.80)$$

kde  $\alpha$  je úhel polarizace světla měřený od TE složky a  $\theta$  úhel dopadu. Právě tyto dva úhly jednoznačně bázi určují, ale nelze je jednoduše vyjádřit po dosazení do okrajových podmínek. Druhou variantou by mohlo být sestavení přenosové matice přímo pro tyto goniometrické funkce, kde je ale problém stejný (je třeba vyjádřit např.  $\sin \alpha$  pomocí  $\cos \alpha$ ). Je proto vhodnější používat právě výše uvedenou bázi s  $\alpha_{\pm}$  a  $\beta_{\pm}$  a v případě potřeby znát složky TE a TM lze provést projekci do těchto komponent v konkrétním místě, nikoli obecně.

---

<sup>7</sup>Při znalosti materiálových parametrů a amplitudových koeficientů.

# 5. Numerické výpočty

## 5.1 Podmínky a předpoklady numerických výpočtů

V bakalářské práci [4] bylo ukázáno, že asymetrie v reflektanci u  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  existuje, ale je velmi slabá. Bylo ale také zjištěno, že významná je změna fáze odraženého světla (vlivem imaginární části reflexních koeficientů), což implikuje velký vliv na stočení roviny polarizace a elipticitu. Z toho důvodu popisují grafy v této kapitole především právě rotace a elipticity, přičemž s odrazivostí vzorků není problém – citlivost detektorů na množství fotonů je daleko nad očekávanými signály. Vybrány jsou přitom takové parametry výpočtů, které jsou relevantní pro experiment. Jak je diskutováno v předchozí kapitole, asymetrii v odrazivosti vykazuje pouze transverzální a longitudinální směr magnetizace. Pro polární magnetizaci k asymetrii nedochází, z tohoto důvodu pro ni nebudou uvedeny výpočty.

K numerickým výpočtům byly použity materiálové veličiny získané z volně dostupných zdrojů (pro GaAs z [26]) a od vedoucího této práce (pro  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  dle [21] a [22]). Podrobnější popis a jejich průběh je v příloze 6.3 *Použité hodnoty permitivity*. Důležité je zmínit, že teoreticky vypočtené hodnoty vodivosti, tedy ty použité v této práci, se díky omezením modelu mohou významně lišit od experimentálních dat, někdy až o čtyřnásobek. Vlivem toho se může stát, že pozorované asymetrie budou až několikrát větší; je proto vhodné uvést i výsledky s takto upravenými parametry. K tomu zavedme notaci, kdy jako velká sigma  $\Sigma$  bude značen příspěvek vodivosti k permitivitě počítaný dle (2.17) a malá sigma<sup>1</sup>  $\sigma$  odpovídá základní hodnotě použitých vodivosti. Příspěvek potom bude označován jako  $\Sigma = 1\sigma$  pro originální velikost nebo  $\Sigma = 4\sigma$  pro čtyřnásobně zvětšenou<sup>2</sup>. Numerické výpočty vykazují velké množství stupňů volnosti a pro zde publikované grafy byly vybrány pouze takové kombinace parametrů, které mají návaznost na dostupné vzorky a možná provedené měření. Parametry charakterizující výsledky a jejich značení je následující:

1. Složení vrstev: Je předpokládána vrstva  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  s tloušťkou  $w = 20$  nm na nekonečném GaAs substrátu (reálné vzorky mají vrstvu GaAs přibližně 0.5 mm). Vždy je uvažován dopad světla ze vzduchu.
2. Koncentrace manganu je značena  $x$ .
3. Energie světla  $E$  leží v optické oblasti.
4. Úhel dopadu světla na vzorek je značen  $\theta$ .
5. Stočení roviny polarizace dopadajícího světla je  $\alpha$ , jednotkami jsou stupně a  $\alpha = 0^\circ$  platí pro transverzálně elektrickou lineární polarizaci,  $\alpha = 90^\circ$  pro TM. Pro dopad eliptické nebo kruhové polarizace je zpoždění jedné komponenty elektrického pole

---

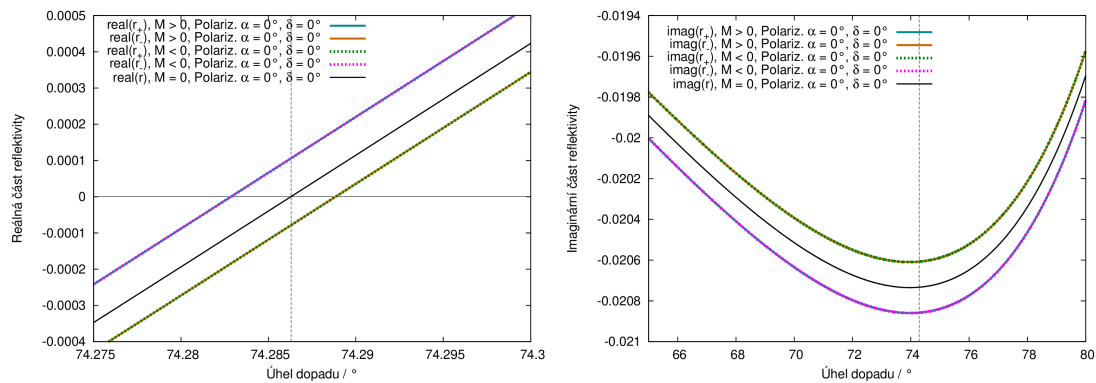
<sup>1</sup>Oproti tenzoru vodivosti není vysázena tučným písmem a na rozdíl o prvků tenzoru nemá spodní indexy.

<sup>2</sup>V rámci hledání maxima asymetrie byly provedeny výpočty i pro jiné násobky, kvůli zachování rozumného textového rozsahu práce nejsou uvedeny. Asymetrie veličin se totiž vzhledem k tomuto násobku chová zhruba lineárně, přičemž  $\Sigma = 1\sigma$  je její dolní mez a  $\Sigma = 4\sigma$  odpovídá potenciálně největší možné asymetrii.

oproti druhé značeno  $\delta$  a je uváděno v radiánech (násobcích  $\pi$ );  $\delta = 0$  odpovídá lineární polarizaci,  $\delta = \pi/2$  kruhové.

6. Kvůli nejistotě ve shodě použitých vodivostí  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  vlivem manganu od reálných hodnot jsou výpočty provedeny pro vodivost  $\Sigma = 1 \sigma$  značící předpokládanou hodnotu, ale také pro  $\Sigma = 4 \sigma$ , kde je příspěvek do vodivostí čtyřikrát zvětšen.

Nejsignifikantnější asymetrie transversálního Kerrova jevu může být pozorována poblíž Brewsterova úhlu. Důvodem je průběh odrazivosti v této oblasti; relevantní je totiž porovnání reflexních koeficientů pro dvě opačné magnetizace (opačné úhly dopadu) a jak je z grafů 5.1 vidět, jedna z nich je podstatně menší než druhá.<sup>3</sup> Jejich relativní rozdíl je pak důvodem pro velkou asymetrii elipsometrických veličin.



Graf 5.1: Reálná a imaginární část reflexního koeficientu poblíž Brewsterova úhlu pro transversální magnetizaci. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7.0 %, energie 1.77 eV

Většina grafů je uvedena pro koncentraci manganu  $x = 7.0\%$ . Důvodem je, že spolu se vzorkem  $x = 9.0\%$  vykazují největší asymetrie. Větším množstvím manganu než devět procent by dle teoretických výpočtů mohlo být o něco “lepší”, problém zde ale nastává s reálnými vzorky, protože u nich dle předchozí charakterizace není jisté, že jsou všechny atomy manganu začleněny v mříži GaAs.

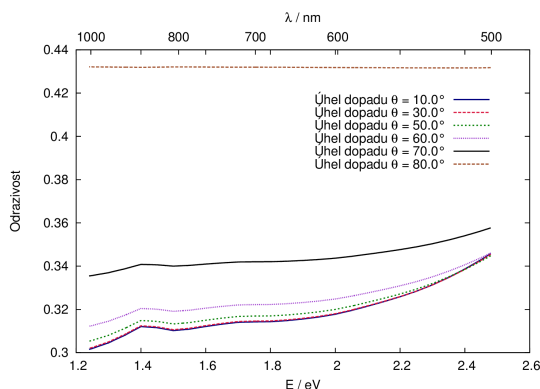
Popisovaná data jsou uváděná v souladu s definicemi v kapitole 2: *Základní pojmy a definice veličin*. Například úhel stočení lineární polarizace je tak měřen od osy  $x$  směrem k  $y$  v pravotočivé kartézské soustavě. Výstupní stočení lineární polarizace je přitom uvedeno jako rozdíl oproti dopadajícímu světlu, nikoli jako absolutní natočení odražené vlny. Rozdílné zavedení může vést k opačným znaménkům veličin nebo k posunutí nulové hodnoty o úhel natočení vstupní polarizace. Na tyto konvence je třeba brát ohled při porovnání s jinými daty.

<sup>3</sup>Pokud jde o reálnou část, odrazivost pro jednu z magnetizací jde do nuly v místě, kde je druhá nenulová, důsledkem čehož nabývá jejich poměr velkých čísel.

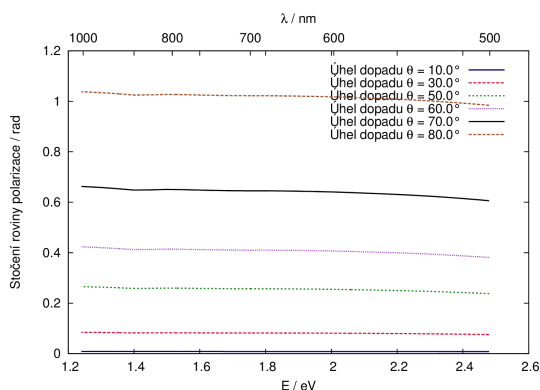


## 5.2 Transverzální Kerrův jev

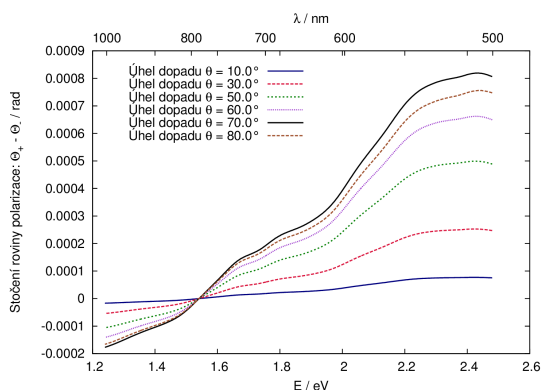
Nejvýraznější závislost vykazuje asymetrie na úhlu dopadu a polarizaci světla. Z geometrické představitosti lze přitom usoudit, že pro malé úhly dopadu bude asymetrie největší pro polarizaci  $\alpha = 45^\circ$  kvůli průmětům do směru magnetizace a do kolmého. Zobrazení těchto základních parametrů je v grafech 5.2; z nich lze jednoznačně vyčíst maximální asymetrii v oblasti Brewsterova úhlu a 2.4 eV dosahující 1 mrad; tyto úhly dopadu jsou podrobněji v grafech 5.3.



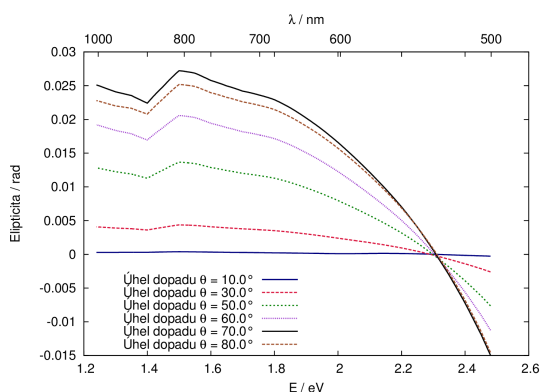
(a) Odrazivost



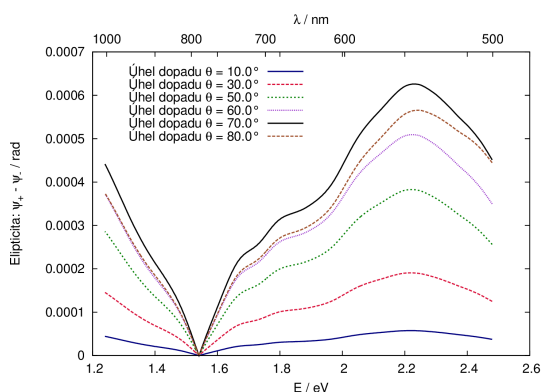
(b) Stočení polarizace



(c) Rozdíly stočení polarizace

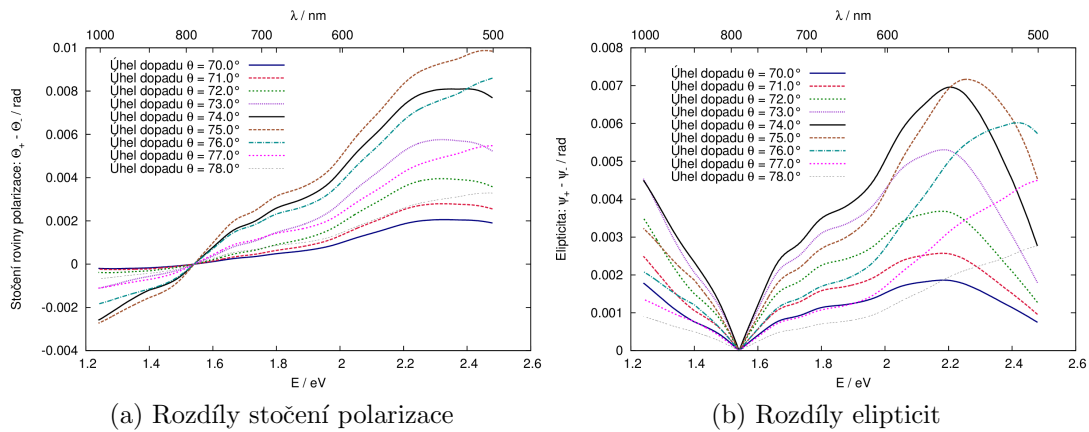


(d) Eliplicita



(e) Rozdíly eliplicit

Grafy 5.2: Spektra pro různé úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, polarizace  $\alpha = 45^\circ$ , vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$



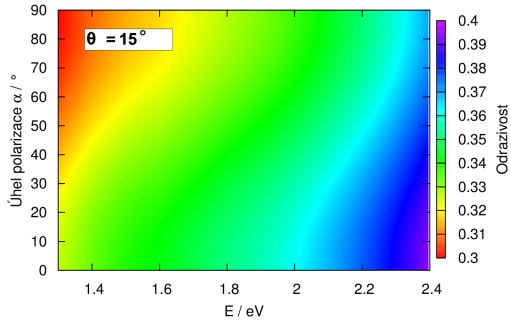
Grafy 5.3: Spektra rozdílů veličin v okolí Brewsterova úhlu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, polarizace  $\alpha = 45^\circ$ , vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$

Na grafech s jednou osou nezávislé proměnné lze vyzorovat průběh a výskyt maximálních hodnot, ale neukáží, že pro větší úhly dopadu se maxima přesouvají k jiné polarizaci. K tomu je třeba se podívat na 2D mapy; na všech zde publikovaných je na vodorovné ose energie a na svislé úhel lineární polarizace. První dvě skupiny, tj. grafy 5.4 a 5.5, ukazují velikosti odrazivosti, stočení a elipticity, kvůli představě, jakých řádů nabývají. Ač se jedná o informaci méně důležitou z hlediska zkoumání asymetrie, o to podstatnější je pro experiment. Rozdíl veličin pro opačné úhly dopadu je následně na skupině grafů 5.6, ze kterých lze při splnění ideálních podmínek usoudit na asymetrii až v řádech miliradiánů.

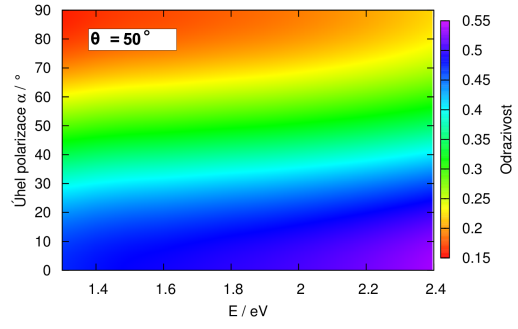
Z velkého množství stupňů volnosti byly jako nejrelevantnější grafy vybrány tyto:

1. Grafy 5.7 porovnávající různé vzorky s rozdílnými koncentracemi manganu.
2. Grafu 5.8 s rozdílnými příspěvky vodivosti k permitivitě a také s vlivem kruhové polarizace světla.

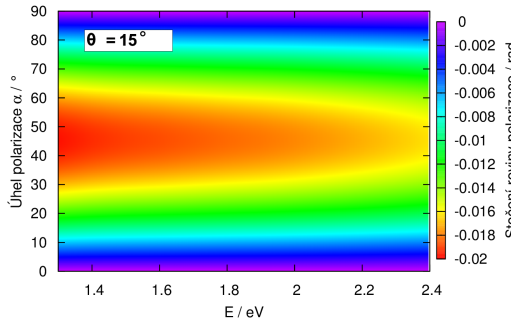
K porovnání těchto parametrů byl volen úhel  $\theta = 75^\circ$ , aby byly vidět maximální – tedy nejideálnější – řády veličin. Vlivy je přitom vhodné porovnávat se situací  $x = 7\%$ ,  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$  (na již zmíněných grafech 5.6).



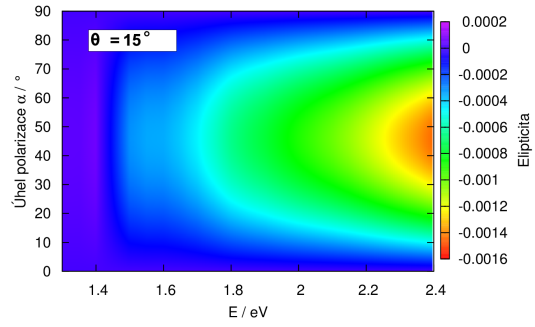
(a) Odrazivost. Úhel dopadu  $\theta = 15^\circ$



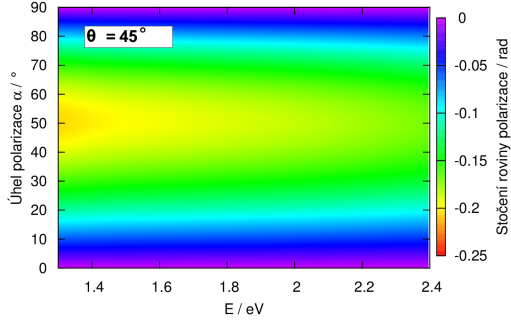
(b) Odrazivost. Úhel dopadu  $\theta = 50^\circ$



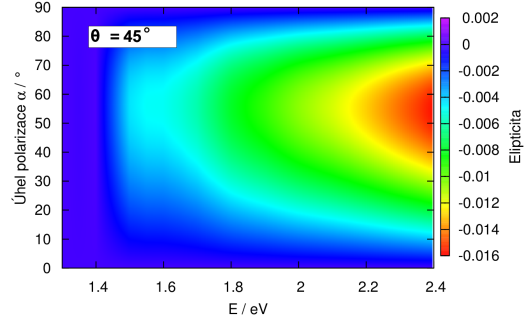
(c) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 15^\circ$



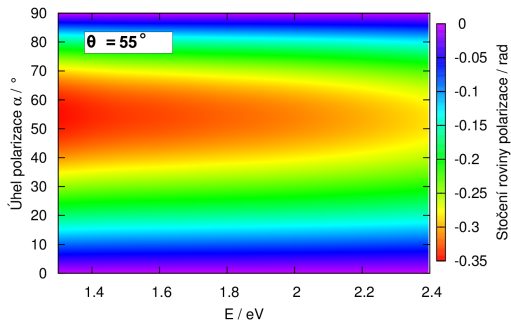
(d) Elipticita. Úhel dopadu  $\theta = 15^\circ$



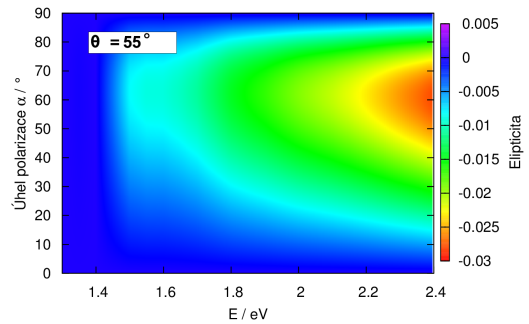
(e) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 45^\circ$



(f) Elipticita. Úhel dopadu  $\theta = 45^\circ$

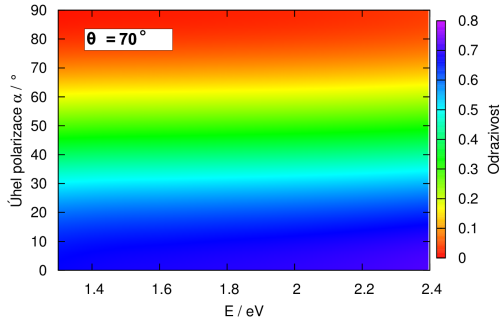


(g) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 55^\circ$

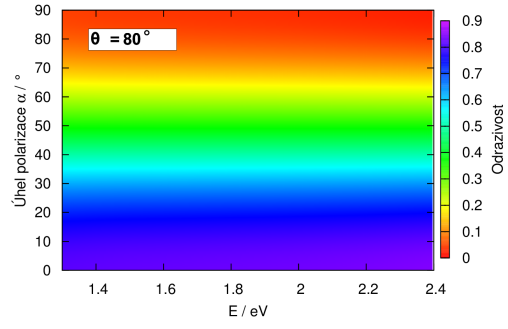


(h) Elipticita. Úhel dopadu  $\theta = 55^\circ$

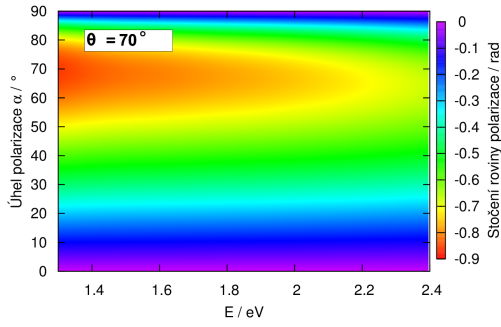
Grafy 5.4: Velikosti odrazivostí (první řádek), rotací (vlevo) a elipticit (vpravo). Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$



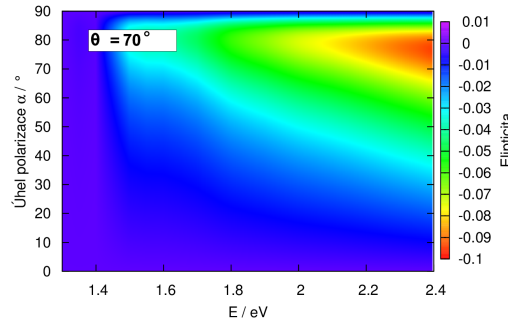
(a) Odrazivost. Úhel dopadu  $\theta = 70^\circ$



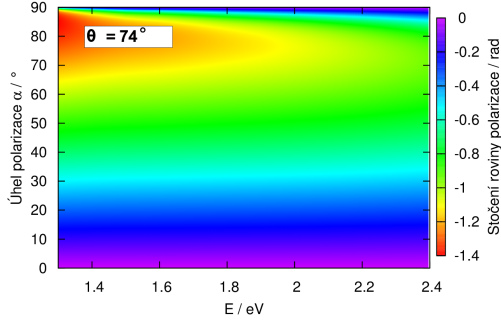
(b) Odrazivost. Úhel dopadu  $\theta = 80^\circ$



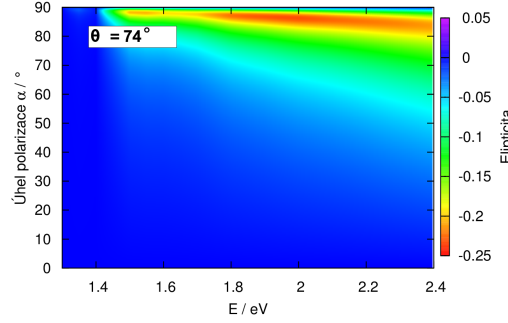
(c) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 70^\circ$



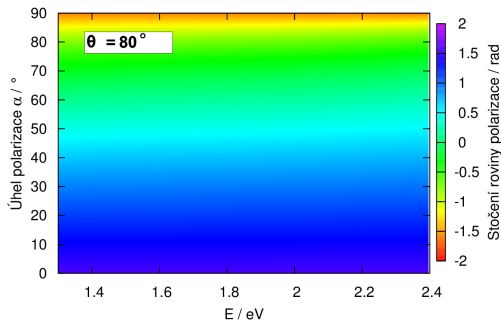
(d) Eliplicita. Úhel dopadu  $\theta = 70^\circ$



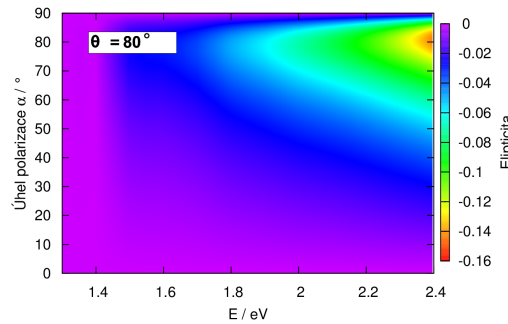
(e) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 74^\circ$



(f) Eliplicita. Úhel dopadu  $\theta = 74^\circ$

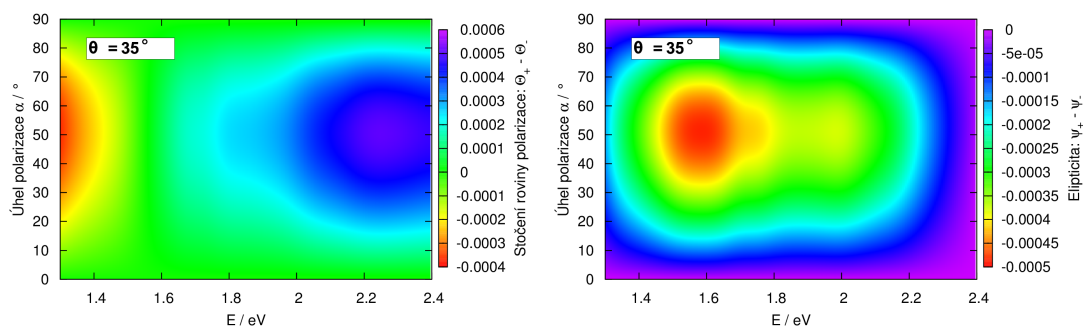


(g) Stočení polarizace. Úhel dopadu  $\theta = 80^\circ$



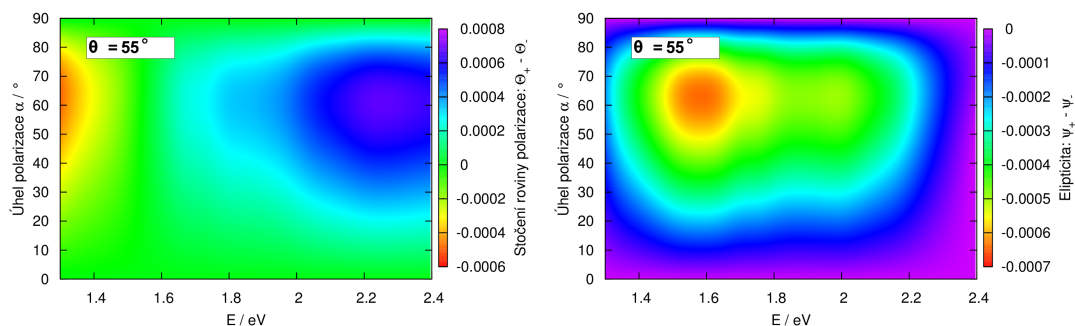
(h) Eliplicita. Úhel dopadu  $\theta = 80^\circ$

Grafy 5.5: Velikosti odrazivostí (první řádek), rotací (vlevo) a elipticit (vpravo). Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$



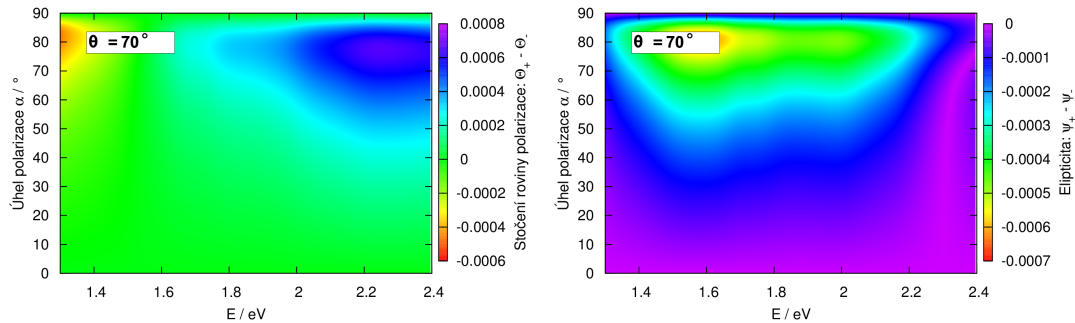
(a) Rozdíl stočení. Úhel dopadu  $\theta = 35^\circ$

(b) Rozdíl elipticit. Úhel dopadu  $\theta = 35^\circ$



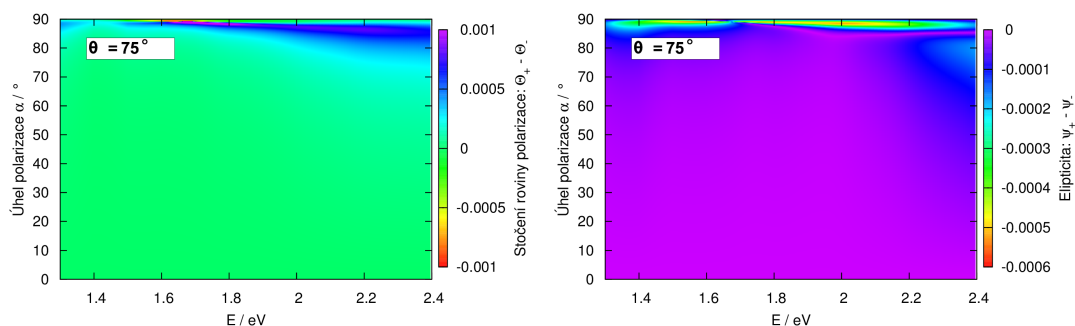
(c) Rozdíl stočení. Úhel dopadu  $\theta = 55^\circ$

(d) Rozdíl elipticit. Úhel dopadu  $\theta = 55^\circ$



(e) Rozdíl stočení. Úhel dopadu  $\theta = 70^\circ$

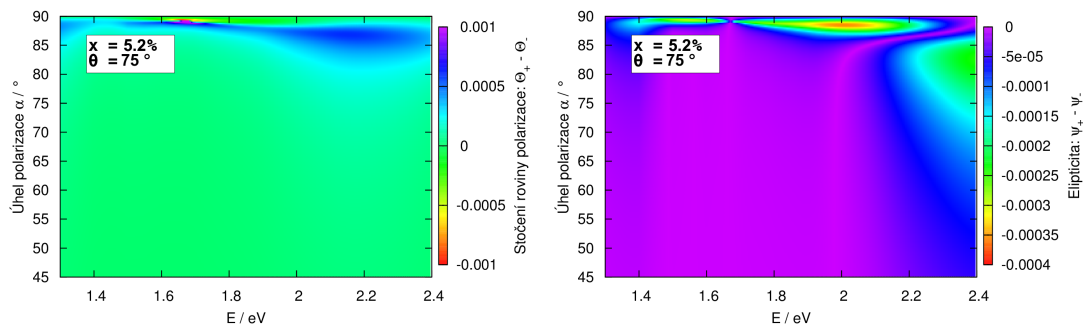
(f) Rozdíl elipticit. Úhel dopadu  $\theta = 70^\circ$



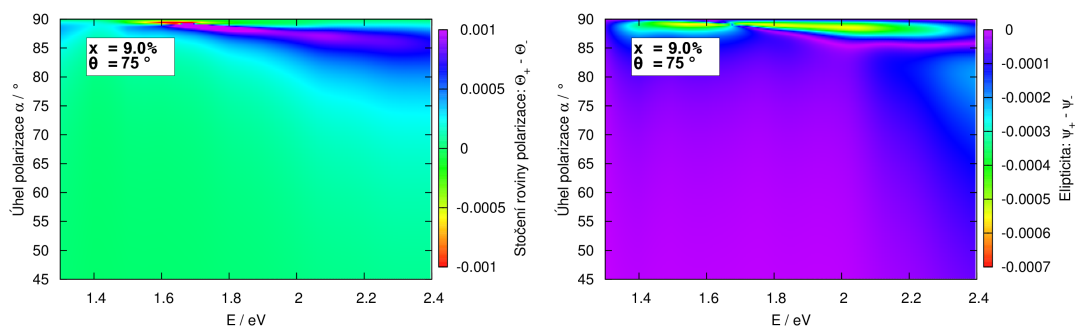
(g) Rozdíl stočení. Úhel dopadu  $\theta = 75^\circ$

(h) Rozdíl elipticit. Úhel dopadu  $\theta = 75^\circ$

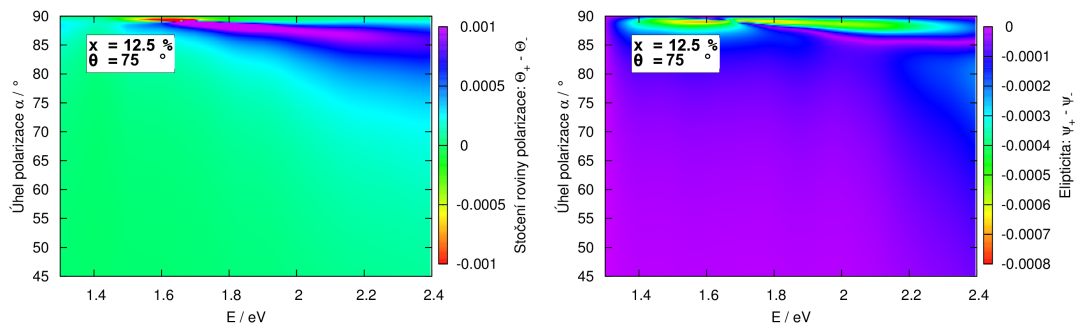
Grafy 5.6: Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$



(a) Rozdíl stočení. Koncentrace Mn  $x = 5.2\%$  (b) Rozdíl eliplicit. Koncentrace Mn  $x = 5.2\%$

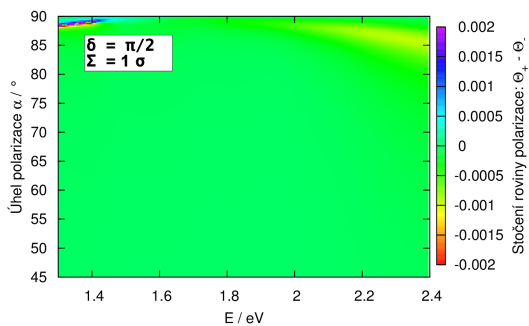


(c) Rozdíl stočení. Koncentrace Mn  $x = 9.0\%$  (d) Rozdíl eliplicit. Koncentrace Mn  $x = 9.0\%$

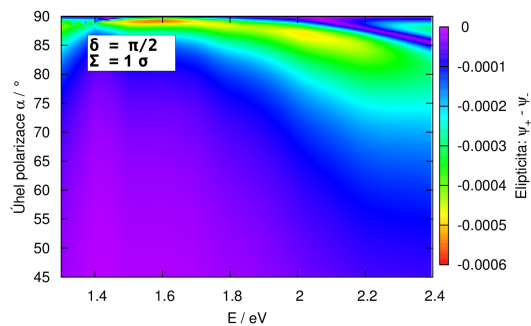


(e) Rozdíl stočení. Koncentrace Mn  $x = 12.5\%$  (f) Rozdíl eliplicit. Koncentrace Mn  $x = 12.5\%$

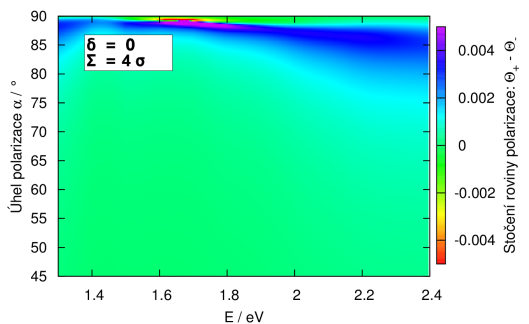
Grafy 5.7: Rozdíly rotací (vlevo) a eliplicit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, úhel dopadu  $\theta = 75^\circ$ , vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$



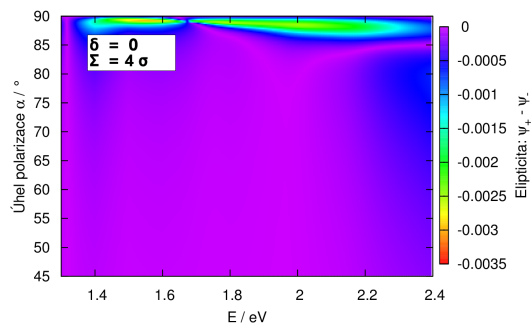
(a) Rozdíl stočení.  $\delta = \pi/2$ ,  $\Sigma = 1\sigma$



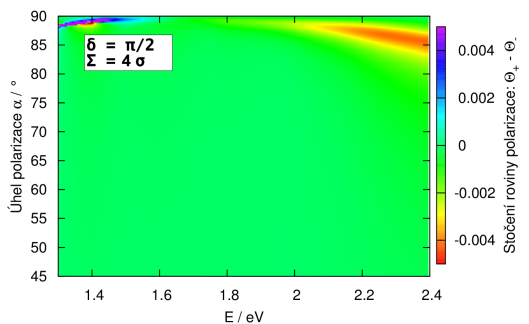
(b) Rozdíl eliplicit.  $\delta = \pi/2$ ,  $\Sigma = 1\sigma$



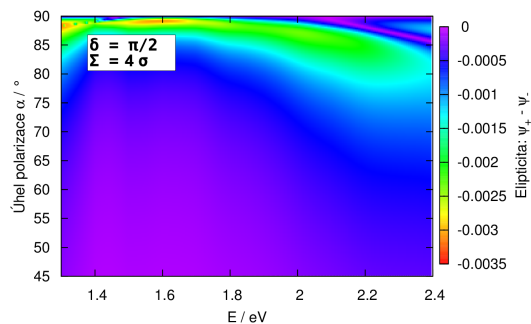
(c) Rozdíl stočení.  $\delta = 0$ ,  $\Sigma = 4\sigma$



(d) Rozdíl eliplicit.  $\delta = 0$ ,  $\Sigma = 4\sigma$



(e) Rozdíl stočení.  $\delta = \pi/2$ ,  $\Sigma = 4\sigma$

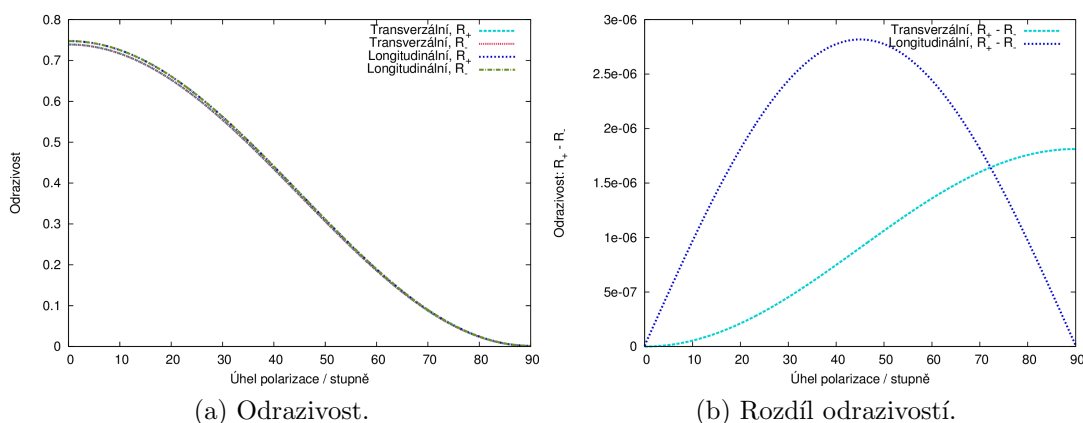


(f) Rozdíl eliplicit.  $\delta = \pi/2$ ,  $\Sigma = 4\sigma$

Grafy 5.8: Rozdíly rotací (vlevo) a eliplicit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 % a úhel dopadu  $\theta = 75^\circ$

### 5.3 Longitudinální Kerrův jev

Při popisu souvislosti longitudinálního a transverzálního jevu je nutné si uvědomit, že většina příspěvku ke stočení roviny polarizace a k elipticitě pochází z nemagnetické části materiálových parametrů. Právě proto je stočení a elipticita při uvážení longitudinální magnetizace téměř stejná jako při transverzální; v grafu 5.9 je porovnání odrazivostí a jejich rozdílů u Brewsterova úhlu v závislosti na polarizaci. Téměř nerozlišitelný průběh odrazivosti implikuje malý rozdíl ve stočení a elipticitě pro tyto dvě magnetizace.<sup>4</sup> Relevantní je rozdíl odrazivosti pro opačné úhly dopadu, který implikuje asymetrii v elipsometrických veličinách.



Grafy 5.9: Odrazivost (vlevo) a její rozdíl (vpravo) při opačných úhlech dopadu u transverzální a longitudinální magnetizace. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$ , úhel dopadu  $\theta = 74^\circ$ , energie  $E = 1.77$  eV ( $\lambda = 700$  nm) a  $\delta = 0$

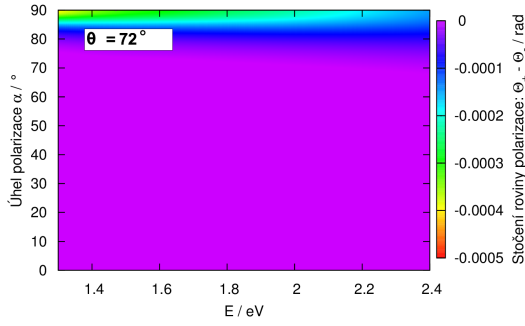
Rozdíl elipticity a rotace pro opačné úhly dopadu v okolí Brewsterova úhlu, tedy tam, kde by měl být největší a kde může komplikovat experiment, je v grafech 5.10. Hlavním výsledkem je, že asymetrie zde stěží nabývá hodnot větších než 1 mrad a extrém se nachází v malých energiích (do 1.6 eV) a dle očekávání u  $\theta = 74^\circ$ .

Jak se longitudinální jev chová v závislosti na dalších parametrech? Protože je k elipsometrii zásadní příspěvek od nemagnetické složky, chová se tento případ téměř identicky jako u transverzálního jevu. Při zvětšování příspěvku vodivosti (např.  $\Sigma = 4\sigma$ ) se asymetrie úměrně zvyšuje<sup>5</sup>, ale stále je řádově menší oproti transverzálnímu. Obdobný je též průběh při změně koncentrace manganu: Grafy 5.9 jsou pro  $x = 7.0\%$ , při vyšších koncentracích je asymetrie zhruba stejná, u  $x = 5.2\%$  nižší.

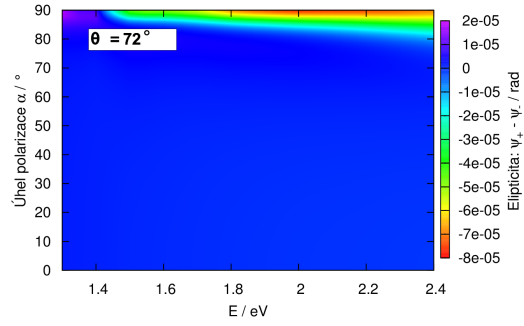
<sup>4</sup>Rozdíl je poznat z numerického výpisu hodnot nebo grafu z omezeným rozsahem polarizace coby nezávislé proměnné, ale není rozlišitelný grafem obdobných 5.5 kvůli použitému měřítku.

<sup>5</sup>Nejde přesně o přímou úměru, ale o něco menší, ale tímto není třeba se zabývat.

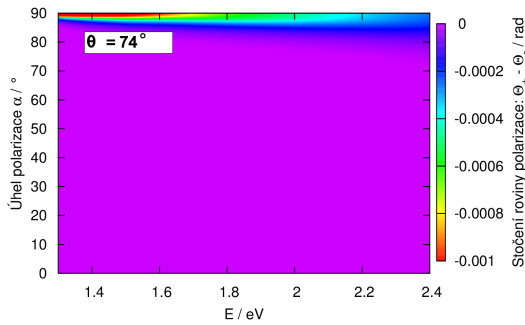




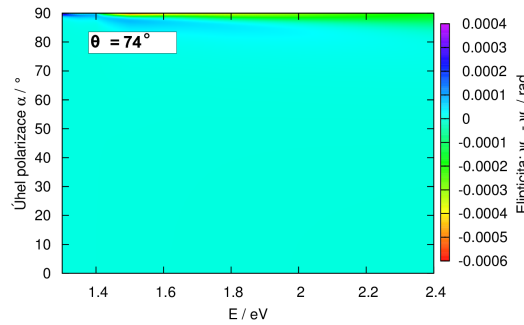
(a) Rozdíl stočení polarizací,  $\theta = 72^\circ$ .



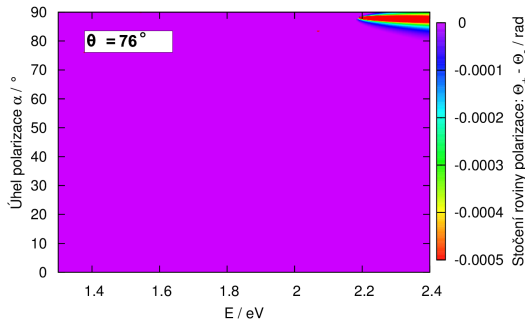
(b) Rozdíl elipticit,  $\theta = 72^\circ$ .



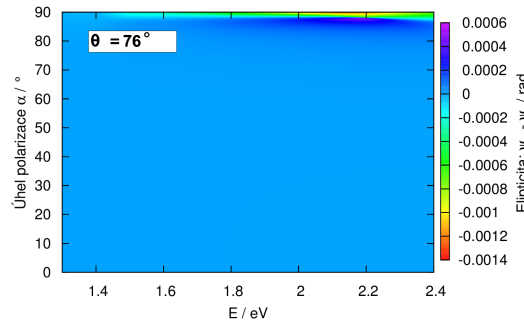
(c) Rozdíl stočení polarizací,  $\theta = 74^\circ$ .



(d) Rozdíl elipticit,  $\theta = 74^\circ$ .



(e) Rozdíl stočení polarizací,  $\theta = 76^\circ$ .



(f) Rozdíl elipticit,  $\theta = 76^\circ$ .

Grafy 5.10: Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$  a  $\delta = 0$

## 5.4 Diskuze příspěvků k asymetrii

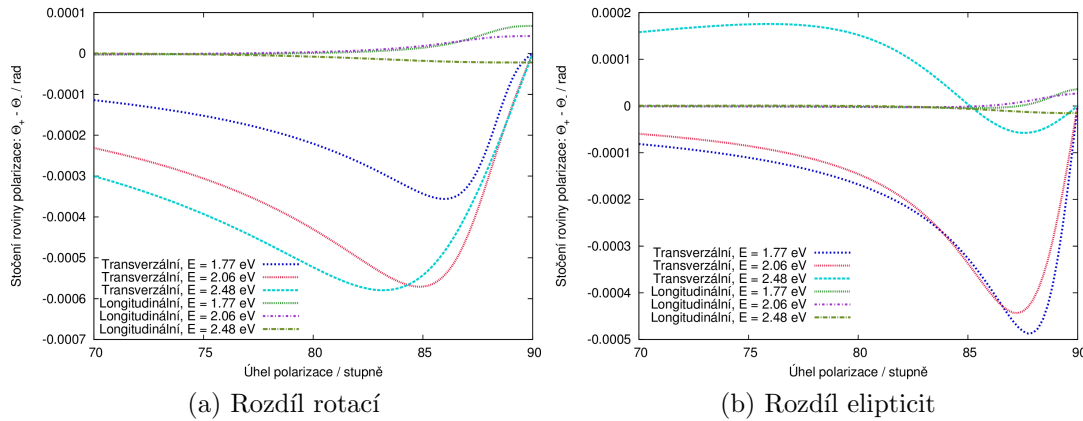
Výstupem publikovaných výpočtů by mělo být ukázání podmínek na měření asymetrie optické odezvy u  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ . Primární motivací je zkoumání transverzálního Kerrova jevu, jenž není možné předpokládat, že směry magnetizace a šíření světla budou ideální a je naopak pravděpodobné, že magnetizace bude mít nenulový průmět do roviny dopadu laseru. Pro dokonalé vyšetření takového případu by bylo třeba řešit Maxwellovy rovnice s obecným tenzorem permitivity, což by bylo extrémně náročné. Na druhou stranu, za předpokladu, že se tyto dva efekty navzájem neovlivňují a že se chovají lineárně, jde uvážit rozklad celkového vlivu do „báze“ longitudinální, polární a transverzální

magnetizace a přistupovat k příspěvkům nezávisle. Při zanedbání nelinearit je totiž obecný tenzor efektivní permitivity (2.20), který je použit k popisu magnetizace, rozložitelný do komponent daných longitudinální magnetizací (tenzor (4.5)), polární (tenzor (4.52)) a transverzální (tenzor (3.1)). Následně již je možné postupovat na základě odvozeného formalismu, který umí popsat Kerrovy jevy v závislosti na úhlu dopadu a vstupní polarizaci světla.

Diskutujme vlivy jednotlivých směrů magnetizace:

1. Transverzální jev chceme zkoumat kvůli asymetrii. Lze tedy předpokládat, že při experimentu budou podmínky nastaveny tak, aby byl jeho příspěvek maximální. V ideálním případě by měla být rovina šíření světla kolmá na magnetizaci.
2. Longitudinální efekt je „parazitní“. Může také projevovat asymetrii vzhledem k úhlu dopadu přispívající k prvnímu případu, proto je vhodné ho minimalizovat.
3. Příspěvek v elipsometrickém měření může mít též jev polární. Vzhledem k zaměření se na asymetrickou odezvu, je tento třetí případ možné zanedbat, neboť ji nevykazuje. Jeho příspěvek bude možné považovat za „pozadí“ shodné pro oba opačné úhly dopadu.

Cílem je tedy nalezení velké asymetrie pro transverzální magnetizaci v oblasti, kde k ní longitudinální jev přispívát nebude. Porovnání těchto dvou magnetizací v závislosti na polarizaci světla je v grafech 5.11: podélná magnetizace má asymetrii pro většinu parametrů zhruba desetkrát menší a za hranicí detekovatelnosti, a proto by neměla zkoumaný jev zásadně ovlivňovat.



Grafy 5.11: Rozdíl stočení polarizací (vlevo) a elipticit (vpravo) při opačných úhlech dopadu u transverzální a longitudinální magnetizace. Parametry výpočtu: Tloušťka  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost  $\Sigma = 1\sigma$ , úhel dopadu  $\theta = 74^\circ$ ,  $\delta = 0$  a energie  $E = 2.06$  eV,  $E = 1.77$  eV a  $E = 2.48$  eV ( $\lambda = 700$  nm,  $\lambda = 600$  nm a  $\lambda = 500$  nm)

## 5.5 Přesnost a správnost numerických výpočtů

Všechny publikované výsledky jsou založeny na numerických výpočtech, které od své podstaty mohou být problematické. Typickými komplikacemi jsou operace s malými čísly nebo s čísly s rozdílnými řády, přesnost použitých proměnných a často též „dělení nulou“. Je proto vhodné diskutovat akurátnost jednotlivých postupů, ukázat na jejich slabiny a možné nepřesnosti.

**Transverzální Kerrův jev** Vyšetření příčné magnetizace je nejjednodušší, což je zapříčiněno nejméně komplikovaným matematickým popisem. Díky tomu se ve výpočtech neobjevují singularity způsobené tvarem vztahů, ale jen občasné „náhodné“ způsobené omezenou přesností výpočtů. I přesto byly použity algoritmy s přenosovou maticí nejdříve ověřeny pro jedno rozhraní a pro kolmý dopad. Až po shodě s jednoduššími modely bylo přikročeno k práci se složitějšími strukturami a nekolmým dopadem, přičemž výsledky byly vždy zpětně kontrolovány a byl kladen důraz na fyzikálně rozumný průběh veličin.

**Longitudinální Kerrův jev** Komplikovanější tvar amplitud pro podélnou orientaci magnetizace způsobuje problematické chování výpočtů pro dva případ: Pro kolmý dopad a pro izotropní prostředí.

V nemagnetickém materiálu ( $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy} = 0$ ) je problém s divergencí, především koeficientů  $A_1$ , kvůli nulovým výrazům ve jmenovateli. Tato komplikace lze odstranit použitím analytických limit pro izotropních prostředí uvedených v sekci 4.2: *Longitudinální orientace magnetizace*.

Pro malá  $k_y$ , tedy malé úhly dopadu, dochází obdobně k divergenci některých amplitud kvůli této veličině ve jmenovateli. Nejedná se o fyzikální problém, neboť pro směr šíření kolmo na rozhraní musí existovat řešení, která mají nulové amplitudy ve směru  $z$ . Pro ně ale nastává matematický problém se vztahy (4.9)–(4.18), proto je nutné použít limitní přechody z Taylorova rozvoje. Ty jsou přesně platné pro kolmý dopad a v rozmezí  $\theta \in (0^\circ, 3^\circ)$  jsou lineárně napojeny na kompletní vztahy. Limita nulového úhlu dopadu je důležitá kvůli kontrole shody s předchozími jednoduššími výpočty platnými právě pro tento případ.

**Ověření správnosti** Kontrolou správnosti je porovnání výsledků pro izotropní prostředí s Fresnelovými vztahy, ze kterých byla spočtena elipsometrie pro GaAs a data se shodují. Následně při zvětšování příspěvku od magnetizace se veličiny mění spojitě a v rozumné míře.

Transverzální a longitudinální jev se liší pouze příspěvkem v magnetizaci, přičemž nediagonální složky permitivity (vodivosti) jsou o tři až čtyři řády slabší než diagonální. Dle fyzikálního předpokladu by měl být nemagnetický příspěvek vždy stejný, přičemž takový byl skutečně spočten a je to možné brát jako další ověření výsledků, neboť oba jevy jsou matematicky odvozeny a numericky spočteny nezávisle, navíc i s lehce odlišným formalismem a algoritmy.

## 5.6 Diskuze výpočtů a pozorovatelnosti

**Transverzální, longitudinální a polární magnetizace vzorku** Vzorek může být vzhledem k dopadajícímu světlu zmagnetizován třemi různými způsoby: transverzálně (magnetizace ve směru elektrické intenzity TE polarizace), longitudinálně (magnetizace v rovině dopadu světla) nebo polárně (magnetizace kolmá k rovině rozhraní). Pro tyto tři situace jsou případy diametrálně odlišné, jak plyne již z geometrického názoru nebo následně z tvaru elektrických a magnetických polí ve vzorku.

Již dříve bylo ukázáno (sekce 3.2: *Přenosová matice pro transverzální magnetizaci* nebo [4]), že pro transverzální magnetizaci dochází k asymetrii v odrazivosti. Tento fakt plyne ze záměny směru magnetizace pro opačný úhel dopadu. Jde o efekt, jehož pozorovatelnost je hlavním cílem této práce, většina publikovaných grafů popisuje tedy tento případ.

U longitudinální magnetizace dochází k asymetrii ve smyslu změny znaménka u amplitudových koeficientů (viz sekce 4.2: *Longitudinální Kerrův jev*), což odpovídá změně fáze a implikuje vliv na elipstrometrické veličiny. V tomto smyslu jde také mluvit o asymetrii, nicméně rozdíl v elipstrometrických veličinách pro opačné úhly dopadu je o řád menší než u transverzálního jevu. Longitudinální případ společně s polárním případem je důležitý případný vliv způsobený ne zcela přesnou magnetizací vzorku vzhledem k rovině dopadajícího světla. Polární magnetizace se ale od prvních dvou liší svojí sudostí vzhledem k úhlu dopadu, což plyne z geometrického názoru i matematických vztahů. Z tohoto důvodu mu není věnován takový prostor, neboť u měření asymetrie přispívá pro oba opačné úhly dopadu vzhledem k magnetizaci stejně.

Níže, není-li zmíněno jinak, je pod pojmem *asymetrie a detekce jevu* myšlena transverzální magnetizace  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ .

**Možnosti detekce a aproximace ve výpočtech** Vzhledem k citlivosti přístrojů a aparatury je možné očekávat bezproblémové měření s přesností jednotek miliradiánů, v lepším případě jejich setin. Z toho plynou podmínky jak na samotné velikosti veličin, tak na nutné hodnoty asymetrie. V oblasti Brewsterova úhlu s tímto ale není problém, neboť asymetrie by měla být v řádech  $10^{-3}$  rad.

K popisu optické odezvy byly odvozeny vztahy separátně pro longitudinální, polární a transverzální magnetizaci. Již to je možné považovat za aproximaci, neboť pro kompletní přístup by bylo třeba řešit Maxwellovy rovnice s obecným tvarem permitivity a s předpokladem polí šířících se ve všech směrech. Takový přístup by dokázal popsat situaci, kdy se příspěvky od různých magnetizací navzájem ovlivňují a nejsou jen vzájemnou lineární kombinací. Tyto efekty by se mohly objevit například pro vysoké světelné intenzity. Nelineární jevy jsou ale v této práci zanedbávány a je předpokládáno, že magnetizace vzorku je konstantní a nezávislá na jiných parametrech. Jedná se o aproximaci bezproblémovou, která by se v měření neměla projevit.

**Permitivita GaAs** Na některých grafech je v rozsahu 1.4–1.5 eV patrná nespojitost rotace a elipticity. Důvod je v permitivitě GaAs, jak je ukázáno v příloze 6.3 *Použití hodnoty permitivity*. Protože se nejedná o viditelnou oblast a o oblast vhodnou k měření asymetrie, není třeba se tímto problémem zabývat. Důležité je jen vědět, že se nejedná o chybu analytickou nebo numerickou, která by se mohla vyskytovat i v jiných místech výpočtů.

**Zobrazení výsledků v grafech** Slabinou zde prezentovaných výsledků je velký rozdíl mezi minimální a maximální hodnotou v grafech. To se projevuje především v 2D grafech, kde není barevná škála vždy dostatečná a skutečné hodnoty v některých případech přesahují stupnici. Nejedná se o problém způsobený volbou barev nebo měřítkem, jde o principiální problém velké variability veličin. Například pro Brewsterův úhel je tato problematická oblast u vysokých energií a vstupní polarizaci poblíž TM (např. graf 5.7); je ji nutno porovnat s hodnotami téměř nulovými pro jiné polarizace a s nižšími energiemi, kde se vyskytují velikosti podobné, avšak s opačným znaménkem. Variantou je zobrazit pouze výřezy, bylo by to však na úkor porovnatelnosti hodnot při zachování rozumného množství grafů. Úmyslně jsou proto vybrány tyto souhrnné grafy a konkrétní hodnoty veličin jsou vidět z řezů 5.2–5.3 nebo zde komentovaná maxima byla zjištěna výstupem textovým místo grafického.

**Energie světla a úhel dopadu** Grafy charakterizující rozdíly veličin pro opačné úhly dopadu ukazují závislost efektu především na energii světla, úhlu dopadu na vzorek a vstupní polarizaci. Pokud vzhledem k reálné situaci budeme uvažovat citlivost měření s přesností miliradiánu až jeho setiny, je nutné se pohybovat v okolí Brewsterova úhlu a rozmezí 2.0–2.4 eV (přibližně 500–600 nm); poté by s detekcí jevu neměl být problém. Vlnová délka je čistě věcí vybavení laboratoře a v případě laditelnosti laseru lze očekávat změření spektrální závislosti.

V sekci 5.1: *Podmínky a předpoklady numerických výpočtů* je odůvodněno, proč by nejsilnější asymetrie měla být u Brewsterova. Numerické výpočty toto potvrdily, z grafů 5.6 se o tom lze snadno přesvědčit. Vzhledem k absolutní velikosti stočení a elipticity (grafy 5.4), nabývají elipstrometrické veličiny měřitelných řádů i pro nižší úhly dopadu, asymetrie však v této oblasti není zajímavá.

Vysoké úhly dopadu jsou těžko dosažitelné, protože vzorek musí být v kryostatu a není tedy možné na něj přímo posvítit pod dvěma opačnými úhly. Na druhou stranu, nejedná se o neřešitelný problém; více viz kapitola 6: *Návrh experimentu*. V závislosti na úhlu dopadu v rozsahu přibližně  $\theta = 74^\circ \pm 5^\circ$  je variabilita rozdílu veličin pro jednu vlnovou délku a jednu polarizaci dostatečně velká a jak plyne z grafů 5.6, mělo by být proto možné detekovat asymetrii i na úhlu.

Pozici maxima v 2.3 eV lze vysvětlit průběhem vodivosti  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ , protože toto je místo nad zakázaným pásem ( $E_g \approx 1.52$  eV), kde mimodiagonální vodivost dosahuje maxima v reálné i imaginární složce se stejným znaménkem; grafický průběh vodivosti je v příloze 6.3: *Použité hodnoty permitivity a vodivosti*.

**Polarizace světla** Elipsometrická měření musejí být od podstaty závislá na vstupní polarizaci světla. Tu lze charakterizovat pro případ lineární polarizace natočením její vstupní roviny nebo je možné na vzorek posílat polarizaci kruhovou či eliptickou. Pro první případ se natočením úhlu dosáhne jiného poměru složek vstupní elektrické intenzity vzhledem k magnetizaci. Matematicky jde o průměty báze vstupního světla do báze v magnetickém materiálu daného tvarem vodivosti. Eliptická polarizace odpovídá přidání fázového faktoru. Principiálně tedy různé polarizace odpovídají různým lineárním kombinacím parametrů a podle toho se určuje, kontrast jakých veličin je jak výrazný. Data pro malé úhly dopadu v grafech 5.4 mají očekávatelné závislosti, kdy se například rotace mění monotónně a zhruba lineárně se vstupní polarizací. Pro větší úhly dopadu a jiné

polarizace již závisí na konkrétní numerické kombinaci veličin ve vztazích, těžko se tedy průběh předpovídá. Proto většina grafů znázorňuje právě vliv vstupní polarizace,<sup>6</sup> na které efekt silně závisí. Grafy 5.8 slouží k ilustraci vlivu kruhové polarizace; například porovnáním lineární polarizace (c) s kruhovou (e) je vidět změna znaménka rotace, která se pro eliptické polarizace ležící mezi nimi chová zhruba lineárně s fázovým faktorem<sup>7</sup>. K experimentálnímu měření je tedy vhodné použít lineární polarizaci blízkou TM, kde je asymetrie největší (zároveň tam velikost veličin je malá, avšak měřitelná).

**Vliv příspěvku vodivosti a koncentrace manganu** Jak bylo popsáno v sekci 5.1: *Podmínky a předpoklady numerických výpočtů*, nelze neuvažovat nepřesnost materiálových veličin způsobených rozdílnými teoreticky spočtenými hodnotami vodivosti a těmi změřenými; experimentální se přitom liší zhruba čtyřnásobně proti zde použitým. Této práci nepřísluší diskutovat tuto odchylku, je ale třeba ji brát v potaz. Proto je v grafech 5.8 ukázán rozdíl mezi výsledky s předpokladem  $\Sigma = 1\sigma$  (spočtené teoretické vodivosti) a  $\Sigma = 4\sigma$  (čtyřnásobek teoretických vodivosti, hodnota podobná experimentální). Je z nich vidět, že pro čtyřnásobnou vodivost dosahuje asymetrie veličin zhruba čtyřnásobné hodnoty, což je pro měření dobrá zpráva. Z uvedených grafů sice plyne např. rozdíl stočení kolem padesáti miliradiánů<sup>8</sup>, což se může jevit jako hodnota až extrémní. Je ale nutné si uvědomit, že grafy jsou pro úhel dopadu  $\theta = 74^\circ$ , tedy prakticky Brewsterův úhel. Na velkou přesnost nastavení úhlu dopadu ale nelze spoléhat a v rozsahu měření  $70^\circ$ – $80^\circ$  bude na opačných krajích intervalu rozdíl veličin i o řád menší. Z tohoto hlediska zcela jistě není případná vyšší velikost asymetrie problémem. Užitečný může být pohled z druhé strany, kterou jest provedení elipstrometrického měření a na jeho základě zpřesnění charakteristik vzorku a případné potvrzení nebo vyvrácení neshody teoretických a experimentálních dat. Koncentrace manganu vstupuje do výpočtů nepřímo vlivem různých vodivostí pro různé množství příměsi. K porovnání slouží grafy 5.2 s  $x = 7.0\%$ ; z výsledků je vidět, že vzorek s  $x = 5.2\%$  není na měření vhodný, koncentrace  $7\%$  a vyšší si jsou zhruba ekvivalentní.

---

<sup>6</sup>Pro připomínku, stočení polarizace  $\alpha = 0^\circ$  odpovídá TE vlně a  $\alpha = 90^\circ$  TM složku. Fázové zpoždění  $\delta = 90$  je kruhová polarizace.

<sup>7</sup>Tyto grafy zde uvedeny nejsou.

<sup>8</sup>Přesná hodnota byla zjištěna numerickým výpisem.

# 6. Návrh experimentu

## 6.1 Požadavky na experiment

Provedené výpočty jsou již pro konkrétní dostupné vzorky (tloušťka  $\text{Ga}_x\text{Mn}_{1-x}\text{As}$  vrstvy 20 nm apod.), přičemž nalezené hodnoty veličin (stočení a elipticita v řádech miliradiánů) by měly být detekovatelné. Nejproblematictější částí proto bude nastavení aparatury a sestavení takového měření s takovou geometrií, aby mohl být vzorek v kryostatu, ale aby přitom úhel dopadu byl v rozsahu  $70^\circ$ – $80^\circ$ , případně velmi málo mimo tuto ideální oblast. V této kapitole bude ukázáno, že tohoto je možné docílit a bude představeno konkrétní experimentální uspořádání k tomu vhodné. Nutno zmínit, že diskutovány budou pouze věci zapříčínující komplikace proti jiným elipsometrickým měřením. Standardně budou muset být použity polarizátory, půlvlnné a čtvrtvlnné destičky a stejně tak detekční zařízení (optické můstky), přičemž toto vybavení není odlišné od jiných experimentů. Podmínky plynoucích z možného geometrického uspořádání experimentu a jiných omezení jsou následující:

1. Je třeba použít jeden z dostupných vzorků. (Konkrétní jejich parametry jsou uvažovány již při výpočtech.)
2. Vzorek se musí nacházet v kryostatu kvůli chlazení a možnosti zmagnetizování. Při pokojové teplotě je totiž paramagnetický, tj. s nulovou magnetizací, a proto by na něm zkoumaný efekt nemohl být pozorován.
3. Kvůli poloze pólových nástavců musí do kryostatu dopadat světlo přes okénko velikosti jednoho palce a stejným okénkem musí vycházet světlo odražené.
4. Vnitřek kryostatu má rozměry zhruba  $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$  a vzorek může být umístěn nejblíže 5 mm od okénka kryostatu.
5. Pro pozorování asymetrie Kerrova jevu je vhodný úhel dopadu větší než sedmdesát stupňů. Na druhou stranu by měl být nižší než osmdesát stupňů, protože pro takto velké úhly dopadu je jev opět slabší.
6. Měření musí být provedeno v reflexním módu. Měření v transmisním režimu není možné kvůli absorpci vzorku, jeho problematickému nalepení na podložku a nutnosti magnetizace.
7. Velikost vzorku je přibližně  $3\text{ mm} \times 3\text{ mm}$ .
8. Nejblíže deset centimetrů před kryostatem je omezeno šířkou pěti centimetrů na každou stranu od středu okénka. Toto omezení se týká především umístění čoček, neboť jeho důsledkem je vhodnější použít ty se vzdálenějším ohniskem.
9. Z hlediska použitelnosti laserů je možné měřit na vlnových délkách 690–1060 nm a s odpovídající druhou harmonickou z části tohoto spektra. Použitelný je též druhý laser s rozsahem 500–740 nm. V případě potřeby je možné využít též optický parametrický oscilátor.

10. Šířka laserového svazku<sup>1</sup> je zhruba 1 mm.

Tyto podmínky nelze příliš zeslabit, protože většina z nich plyne z nutného uspořádání přístrojů a jiných objektů. Kromě toho je třeba brát v úvahu ještě další požadavky, které není nezbytné dodržet, ale provedení experimentu usnadní:

1. Je vhodné proměřit signál pro větší množství úhlů dopadu.
2. Vhodnější na měření je stočení roviny polarizace než elipticita.

Graficky jsou geometrická omezení vně kryostatu zobrazena na schématu 6.1: Uprostřed je kryostat, ve kterém se bude nacházet vzorek, přičemž ten není kvůli zanedbatelným rozměrům v tomto měřítku zakreslen. Jediné použitelné okénko je znázorněno šedivě; velikost elektromagnetů je zde pouze ilustrativní.

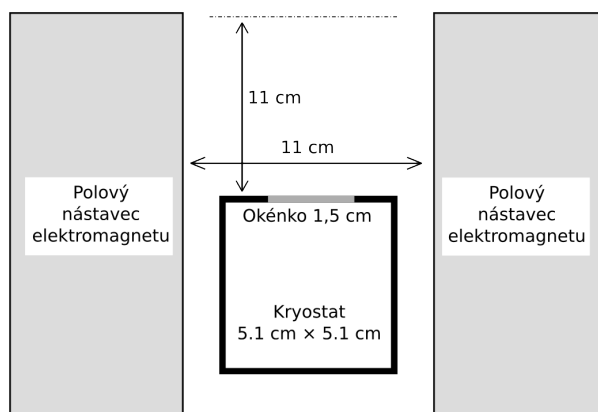


Schéma 6.1: Geometrické omezení aparatury

Z výše uvedených podmínek je vhodné zdůraznit a diskutovat především dvě: Vysoký úhel dopadu a prostor vně kryostatu. Požadovaný úhel dopadu světla na vzorek v rozsahu sedmdesáti až osmdesáti stupňů se může jevit jako zásadní problém ve spojitosti s pouze polcovým okénkem kryostatu a podmínce, že právě přes něj musí procházet dopadající i odražené světlo. Kryostat má sice okénka i na dalších místech, ta však není možné využít kvůli nezbytnosti zmagnetování vzorků dosaženého pomocí pólových nástavců. Jejich rozměry jsou totiž vzhledem ke komoře kryostatu značné (tříkrát až čtyřikrát větší), ale především blokují zbylá okénka. Kvůli tomu bude třeba použít uvnitř kryostatu geometrii s několika odrazy světla, navíc ještě ideálně takovou, aby na vzorek dopadala celá stopa svazku a nevznikal problém s nežádoucími paprsky.

Část experimentu vně kryostatu není zásadní z hlediska vzorku, ale kvůli možnostem přivedení laserového svazku a jeho sbírání. Z hlediska fokusace svazku by bylo vhodné umístit jedinou čočku s blízkým ohniskem k okénku kryostatu a tou světlo přivádět a stejně tak sbírat. Navíc by tímto byla jednoduše zaručena úzká stopa svazku na vzorku. Kvůli omezenému prostoru ale bude vhodnější použít dvě čočky a umístit je do větší vzdálenosti; jednou přitom může být světlo fokusováno dovnitř kryostatu a druhou sbíráno to odražené.

<sup>1</sup>Tento rozměr je uvažován na vstupu laseru do první čočky, nikoli na vzorku pod šikmým dopadem.



## 6.2 Experimentální uspořádání

**Skleněné hranoly** Možností, jak dosáhnou vysokého úhlu dopadu na vzorek je využití odrazů uvnitř kryostatu. Toho může být realizováno dvěma hranoly s pokovenými přeponami sloužícími tedy jako zrcadlo. Jde o pravoúhlé hranoly s velikostí odvěsen 5 mm, které mohou být nalepeny na podložku vedle vzorku. Konkrétní uspořádání vzorku a hranolů uvnitř kryostatu je na schématu 6.2.

Výhodou tohoto uspořádání je bezproblémové umístění čoček vně kryostatu sloužících k fokusaci světla na vzorek, respektive na dopadající hranol, a následnému sbírání odraženého světla. Může se jednat o dvě samostatné čočky, které budou umístěny ve větší vzdálenosti od okénka kryostatu tak, aby rozměry pólových nástavců nebyly problémem, viz schéma 6.3.

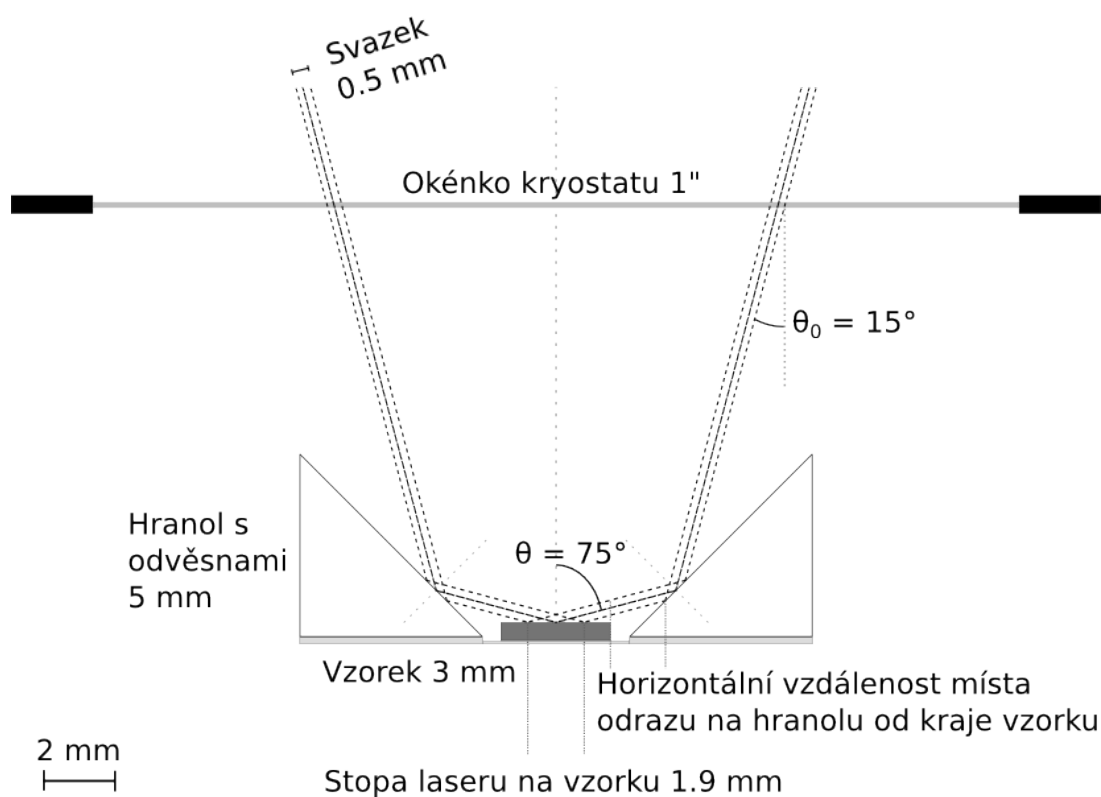


Schéma 6.2: Navrhovaná geometrie experimentu uvnitř kryostatu

První výhodou je dostupnost hranolů, neboť se již nacházejí mezi vybavením laboratoře. Druhou je symetrické uspořádání, kdy pod stejným úhlem světlo do kryostatu dopadá, jako je sbíráno.

Při tomto uspořádání je také možné měřit při různě velkých úhlech dopadu: Rozmezí odpovídá sice jen jednotkám stupňů a je omezeno velikostmi hranolů a umístěním čoček, na druhou stranu je kvůli detekci relevantní pouze oblast kolem Brewsterova úhlu a k tomu je navrhovaná aparatura dostatečná.

Limitním omezením je velikost stopy svazku na vzorku. Ta je totiž kvůli průmětu způsobeného úhlem několikrát větší<sup>2</sup> než ta na vstupu do kryostatu, musí se přitom vejít na

<sup>2</sup>Konkrétně pro úhel dopadu  $75^\circ$  je  $\cos(75^\circ) = 0.26$ , což odpovídá roztáhnutí stopy zhruba  $3.8\times$ .

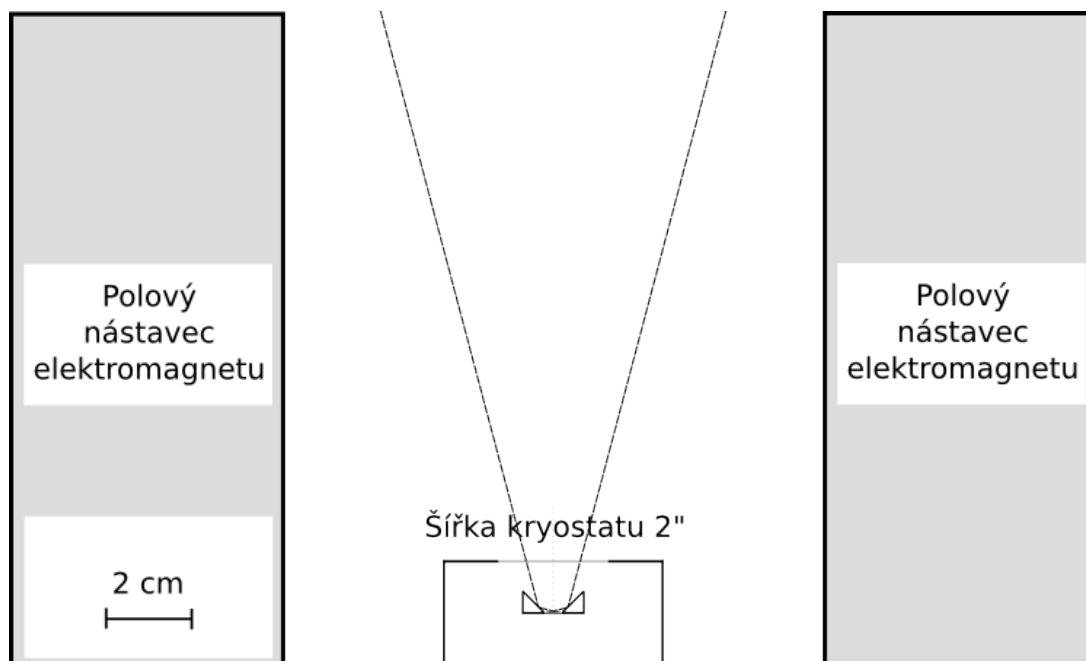


Schéma 6.3: Navrhovaná geometrie experimentu vně kryostatu

vzorek se stranami 3 mm. Pokud je uvažován výstupní svazek z laseru<sup>3</sup> se stopou jednoho milimetru, nebude k jeho soustředění dostatečná jedna čočka. Vzhledem k dostatečným rozměrům ale mohou být použity dvě, jedna k fokusování svazku, druhá k nasměrování na vzorek.

K úspěšnému měření je také vhodné, aby se svazek odrazil pokud možno na středu hranolu a dopadal celý na vzorek, nikoli do prostoru mezi vzorek a hranol nebo aby se „řezal“ o kraj vzorku. Výpočty ideálního umístění hranolů vůči vzorku vzhledem k vertikální i horizontální pozici sice nejsou složité, nemá je ale smysl uvádět. Důvodem je reálná možnost dosažení přesnosti: Vzorek má včetně substrátu známou tloušťku 0.5 mm, těžko lze ale předem odhadnout vrstvy lepidel pod vzorkem a hranoly. Navíc, jedná se o manuální manipulaci s milimetrovými objekty a nelze spoléhat na jejich přesné umístění. Proto bude lepší nejdříve nalepit vzorek a hranoly na podložku, poté zjistit jejich vzájemnou pozici a vhodné podmínky pro experiment ladit úhlem dopadajícího světla. Případné větší korekce je možné učinit i natáčením celé hlavy v kryostatu, na které se nachází podložka se vzorkem; podobná úprava ale není vhodná kvůli nutnosti vzorek zmagnetizovat, přičemž magnetizace závisí na naklonění vzorku vůči elektromagnetu.

Kromě aberací čoček, které by ale měly být zanedbatelné, je tato geometrie experimentu nezávislá na vlnové délce. Pro měření s jinou energií tedy stačí přeladit laser.

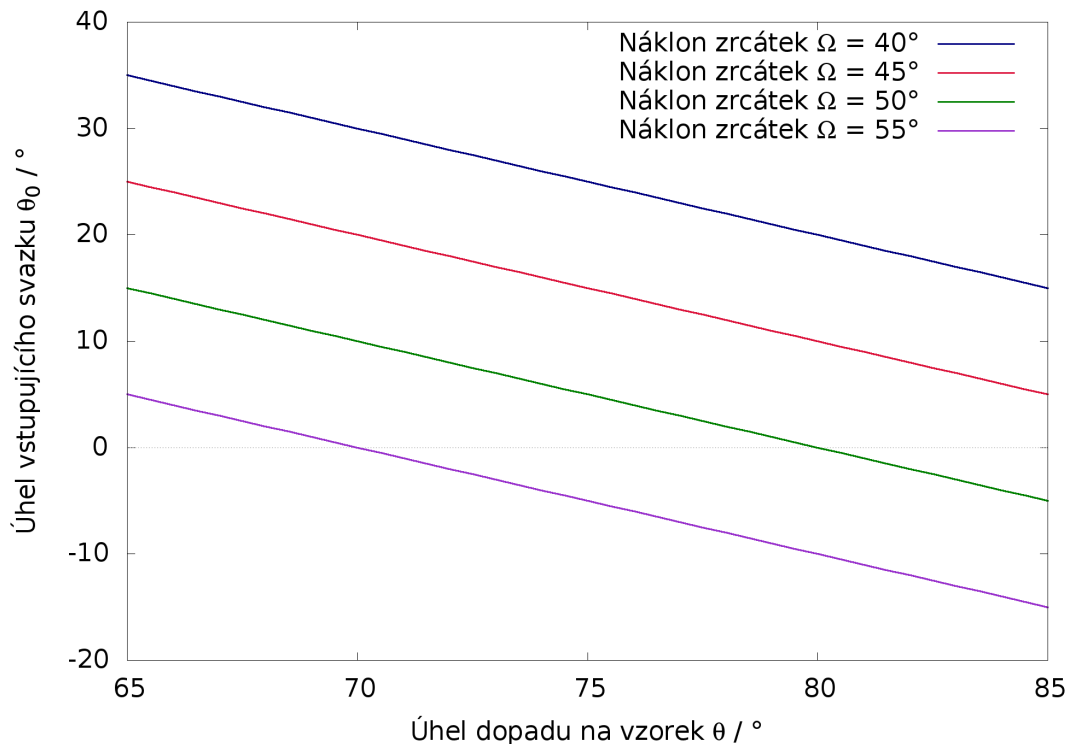
Drobnou nevýhodou této konstrukce je nutnost nalepit hranoly a vzorek na držák v kryostatu s milimetrovou přesností. Skleněné hranoly, ač s rozměry pouze 5 mm × 5 mm, jsou příliš těžké na prosté přilepení k podložce, je proto nutné ji opatřit zábranami, ke které se hranolu zaaretují.

<sup>3</sup>Ve skutečnosti nejde o šířku svazku vycházejícího přímo z laseru, protože světlo je nutné k experimentu dovést optickými vlákny nebo soustavou zrcátek, ale pro jednoduchost tímto nazýváme šířku svazku v místě, kde vstupuje na první čočku.

**Měděný nástavec** Velký vliv na úhel dopadu světla na vzorek a tedy na celý experiment mají odrazné hranoly, respektive úhel jejich zkosení. Druhou variantou k použití již dostupných hranolů s úhlem  $45^\circ$  je možnost výroby měděných „stojánků“, do kterých by se zapustila zrcátka. Ta by tedy mohla být vůči vzorku orientovaná pod jiným, prakticky libovolným, úhlem. Pokud označíme úhel dopadu na vzorek  $\theta$ , úhel zkosení hranolu (odpovídající náklonu zrcátka vůči podložce)  $\Omega$  a úhel vstupu svazku do kryostatu  $\theta_0$  (přesněji definováno, jde o úhel mezi svazkem dopadajícího laseru před dopadem na hranol a normálou ke vzorku), poté z geometrie platí

$$\pi = 2 \Omega + \theta_0 + \theta . \quad (6.1)$$

Grafický průběh této závislosti (ve stupních) je v grafech 6.4. Interpretovat jde způsobem, že  $\theta_0 > 0$  jsou svazky před kryostatem rozbíhavé, zatímco pro  $\theta_0 < 0$  se sbíhají. Vzhledem k vhodnosti mít úhel vstupního a výstupního svazku menší než  $10^\circ$  a měření by ideálně mělo probíhat při úhlu dopadu  $\theta \in [70^\circ, 80^\circ]$ , je vhodné zvolit náklon zrcátek kolem  $50^\circ$ .



Graf 6.4: Vztah mezi úhlem dopadu na vzorek  $\theta$ , úhlem vstupu svazku do kryostatu  $\theta_0$  a náklonem zrcátek vzhledem k rovině vzorku  $\Omega$ .

Na základě těchto požadavků byl navržen úchyt do kryostatu zobrazený na ilustračním<sup>4</sup> schématu 6.5:

1. Dvě zrcátka o průměru 7 mm se vlepí do dvou kruhových otvorů umístěných symetricky proti sobě. Na jedno bude světlo fokusováno před dopadem na vzorek, druhé nasměruje svazek do detektoru.

<sup>4</sup>Uvedené rozměry jsou skutečné, ale kvůli přehlednosti zde nejsou uvedeny všechny kóty nezbytné ke konstrukci.

2. Vzorek bude nalepen do části mezi zrcátka.
3. Válcový výstupek v pravé části je opatřen dvěma otvory pro šrouby, jejichž prostřednictvím bude úchyt připevněn v kryostatatu.

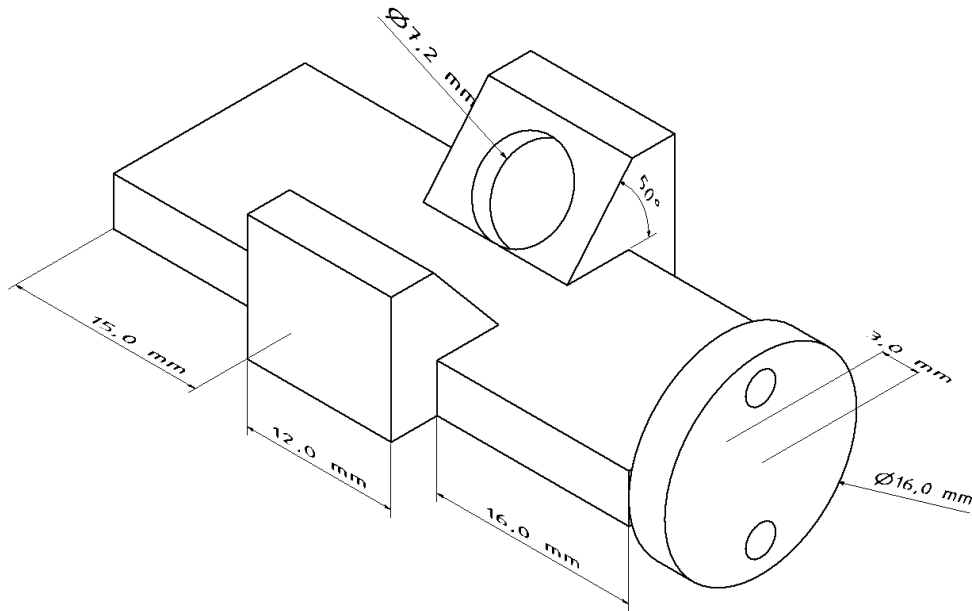


Schéma 6.5: Držák do kryostatu k uchycení zrcátek pod úhlem  $50^\circ$  vzhledem ke vzorku.

Výhodou tohoto úchytu je celistvost, neboť je celý z mědi a kromě zrcátek a vzorku na něm není třeba nic lepit. Jeho konstrukce přitom vychází z běžně používaného úchytu a je navržen tak, aby střed zrcátek byl v místě, kam se při jiných experimentech umísťují vzorky.

### 6.3 Diskuze experimentálního uspořádání

Měření se při prvním představení nutných parametrů může jevit neproveditelně, v této kapitole ale bylo ukázáno, že se je realizovatelné.

Většina parametrů experimentu a geometrického uspořádání byla popsána u návrhu experimentu s hranoly nebo měděným držákem. Důvodem je, že plánovaný experiment bude uskutečněn s jejich prostřednictvím. Ačkoli jsou dopředu známy problémy plynoucí z omezených rozměrů aparatury a vhodnosti parametrů pro měření, může se při samotné přípravě experimentu objevit mnoho komplikací dopředu nepředpověditelných. Právě z tohoto hlediska je největší důraz kladen na uspořádání se zrcátka zapuštěnými v kovovém nástavci, kde je počet proměnných minimální – nutné je pouze upevnit zrcátka a nalepit vzorek. Největší problém tedy může nastat s nepřesnou výrobou požadovaného držáku kvůli malým rozměrům. Požadované přesnosti výroby jsou na druhou stranu dosažitelné, a dokonce dosažené, u podobných držáků, ze kterých vycházela konstrukce tohoto. Komplikace plynoucí z tepelného pnutí zrcátek (případně hranolů) nebo z nalepení vzorků jsou odhadnutelné a budou obdobné jako u jiných experimentů, není ale v možnostech této teoretické práce je jakkoli ovlivnit nebo eliminovat.

Při samotném měření lze očekávat jako největší problém fokusaci světla do středu odrazných ploch, respektive soustředění světla na zrcátka tak, aby se celý svazek odrážel na vzorek. Tento aspekt lze ošetřit použitím dostatečně úzkého svazku se stopou pod milimetr.

Vzhledem ke způsobu měření veličin se dá očekávat, že experiment bude detekovat stočení roviny polarizace a asymetrii v ní. Zkoumání elipticity je složitější, ne však nemožné; pravděpodobně ale nebude třeba komplikovat situaci, protože zkoumaný jev by měl být patrný v obou těchto veličinách.

Ideálním výstupem z experimentu by byla závislost na vlnové délce a úhlu dopadu světla. První parametr lze měnit přeladěním laseru a při zanedbání nerovnoměrného spektrálního chování čoček a zrcadel by s ním neměl být problém. Náklon svazku lze měnit na vstupu do kryostatu a příslušně dle grafu 6.4 se mění i úhel dopadu na vzorek. Rozsah měření bude přibližně  $5^\circ$  stupňů na každou stranu od Brewsterova úhlu, což je oblast dostatečná.

# Závěr

Předmětem práce je výzkum asymetrie u konkrétních vzorků  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ , přičemž byly nalezeny parametry k měřitelnosti tohoto efektu a bylo navrženo experimentální uspořádání k pozorování.

K popisu optické odezvy byly na základě Maxwellových rovnic odvozeny přenosové matice použité následně v numerických výpočtech ke zkoumání Kerrovských jevů. Model je přitom odvozen obecně a konkrétní výstupy jsou získány numericky až po dosažení materiálových parametrů. Vztahy proto mohou být použity i pro velkou škálu dalších aplikací, obecnou analytickou diskuzí počínaje až pro výpočty s jiným množstvím vrstev. Jejich správnost přitom byla kontrolována zjednodušením pro dříve známé případy a porovnáním výsledků pro transversální a longitudinální případ při dosažení nulové magnetizace, kdy z nich plynou stejné výsledky – analytické odvození a numerické algoritmy jsou přitom pro ně odlišné.

Nejvýraznějším případem z hlediska asymetrie v odrazivosti je příčná magnetizace, na ní se soustředí většina textu. Podélná magnetizace je zkoumána coby vedlejší efekt, který může narušit pozorovatelnost, ale asymetrie z ní plynoucí je i v maximálních hodnotách přibližně o řád menší.<sup>5</sup> Navíc z podstaty vykazují tyto dva jevy jinou polarizační závislost a na tomto základě mohou být identifikovány jejich příspěvky k asymetrii. Polární magnetizace je obsažena především pro kompletnost textu a kvůli diskuzi, že na základě symetrie nemůže ovlivňovat odrazivosti pro opačné úhly dopadu.

Z grafů 5.6 jsou patrné rozdíly ve stočení roviny polarizovaného světla a stejně tak ve změně elipticity nad 1 mrad. Pro měření je přitom důležité, že se nejedná jen o striktní kombinaci parametrů, ale pozorovatelnost by měla být možná pro úhly  $\theta \in (70^\circ; 80^\circ)$ . V závislosti na dostupném experimentálním vybavení půjde volit energii, polarizaci světla nebo případně i vzorek dle koncentrace manganu. Nejvýraznější z těchto parametrů je druhý jmenovaný, přičemž je vhodné použít polarizaci blízkou TM vlně. Při množství manganu  $x < 7\%$  není vhodné měřit kvůli malé asymetrii; naopak pro  $x > 11\%$  nejsou k dispozici „kvalitní“ vzorky.<sup>6</sup> Nejvhodnější se proto jeví koncentrace  $x = 7\%$  a  $x = 9\%$ . Na základě teoretických výpočtů by k pozorování měly být ideální energie mezi 2.0 a 2.4 eV (přibližně 500–600 nm), za povšimnutí však stojí, že spektrální závislost není zcela dominantní. Při experimentu by proto nemělo zásadně vadit, že tento parametr bude muset být určen s ohledem na zdroj světla a polarizační techniku.

Geometrické problémy experimentu, především tedy nutnost vysokých úhlů dopadu, jsou řešeny v poslední kapitole. Představený způsob uchycení vzorku v navrženém držáku by měl eliminovat komplikace plynoucí potřeby velkých úhlů dopadu a zároveň při rozbíhavosti svazků větší než  $3^\circ$  bude před kryostatem dostatek prostoru k umístění dvou malých čoček vedle sebe.<sup>7</sup> Zbylou část aparatury v podobně fázových destiček nutných k měření stočení roviny polarizace nebo elipticity a optických můstků pro detekci není třeba diskutovat, neboť se neliší od vybavení používaného k jiným elipsometrickým měřením. Grafy publikované v této práci ukazují závislost efektu na nejdůležitějších parametrech, ale

<sup>5</sup>Výjimkou malá asymetrie transversálního jevu, to ale není případ relevantní pro měření.

<sup>6</sup>U dostupných vzorků je na základě předchozí charakterizace velká pravděpodobnost, že ne všechny atomy Mn jsou zakomponovány do mříže GaAs, a tedy reálné materiálové parametry se liší od teoretických.

<sup>7</sup>Jedna čočka musí být použita k fokusaci laseru na vzorek, druhá pro sběr odražené světla.

na základě odvozeného matematického modelu a použitého numerického kódu lze dopočít jakékoli další závislosti vhodné pro správný výběr podmínek k měření. Kvůli názornosti přitom grafy byly vybrány coby výstup místo vyjmenovávání konkrétních parametrů doporučený k měření v textové podobě, neboť jev nevykazuje zásadní extrémy kromě Brewsterova úhlu a většina stupňů volnosti bude omezena experimentálním vybavením. Důležité je, že zkoumaný jev by měl být měřitelný, přičemž pravděpodobně bude výraznější, odpovídající grafům 5.8 s ohledem na diskutovanou nejistotu v použitých hodnotách vodivosti ( $\Sigma = 4 \sigma$  odpovídá až čtyřnásobně větší asymetrii). Vhodné zvolení parametrů experimentu pro konkrétní aparaturu může být pro měření zvoleno na základě odvozeného formalismu, připraveného numerického kódu a dat plynoucích z teorie.

# Literatura

- [1] Hecht E. *Optics*. 2002. Addison-Wesley. 4th edition. ISBN 0-321-18878-0.
- [2] Višňovský Š. *Optics in Magnetic Multilayers And Nanostructures*. 2006. CRC, ISBN 9780849336867.
- [3] Yeh P. Optics of anisotropic layered media: A new  $4 \times 4$  matrix algebra. *Surface Science* 96 (1980) 41–53.
- [4] Wagenknecht D. Šíření světla v magnetických materiálech. Master's thesis, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2012. Bakalářská práce.
- [5] Penfold C., Collins R.T., Tufaile A.P.B. a Souche Y. Transverse magneto-optical kerr effect: the phase change of reflected light. 2002. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 242–245 (2002) 964–966.
- [6] Tejedor M., Fernández A. a Cerdeira M. A. Enhancement of the transverse kerr magneto-optic effect by multiple reflections. 1998. *Review of Scientific Instruments* 69, 4000 (1998); doi: 10.1063/1.1149222.
- [7] Dehesa-Martinez C., Blanco-Gutierrez L., Velez M., Diaz J., Alvarez Prado L.M. a Alameda J.M. Magneto-optical transverse kerr effect in multilayers. 2000. *PHYSICAL REVIEW B, VOLUME 64*, 024417.
- [8] Allwood D. A., Seem P. R., Basu S., Fry P. W., Gibson U. J. a Cowburn R. P. Over 40% transverse kerr effect from ni 80 fe 20. 2008. *Applied Physics Letters* 92, 072503 (2008); doi: 10.1063/1.2884332.
- [9] Brubaker M.E., Moog E.R., Sowrs C.H. a Bader S.D. Transverse magneto-optic kerr effect in ultrathin films. 1991. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 103(1992) L7-LI2.
- [10] Lehnert A., Bulushek P., Weiss N., Giesecke J., Treier M., Rusponi S. a Brune H. High resolution in situ magneto-optic kerr effect and scanning tunneling microscopy setup with all optical components in uhv. 2009. *Review of Scientific Instruments* 80, 023902 (2009); doi: 10.1063/1.3077148.
- [11] Knabben D., Weber N., Raab B., Koop Th., Hillebrecht F.U., Kisker E., Guo G.Y. Transverse magneto-optical kerr effect of fe at the 2p excitation threshold. 1998. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 190 (1998) 349 —356.
- [12] Souche Y., Novosad V., Pannetier B. a Geoffroy O. Magneto-optical diffraction and transverse kerr effect. 1998. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 177-181 (1998) i277-1278.
- [13] Novosad V., Souche Y., Pishko V., Crozes T., Otani Y. a Fukamichi K. Magneto-optical kerr effect in conical diffraction geometry of micron-size fe<sub>3</sub>si wire array. 1999. *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL 35, NO 5, SEPTEMBER 1999*.



- [14] Kostylev N., Maksymov I.S., Adeyeye A.O., Samarin S., Kostylev M., Williams J.F. Plasmon-assisted high reflectivity and strong magneto-optical kerr effect in permalloy gratings. 2013. Applied Physics Letters 102, 121907 (2013); doi: 10.1063/1.4798657.
- [15] Halagačka L., Vanwolleghem, Postava K., Dagens B. a Pištora J. Coupled mode enhanced giant magnetoplasmonics transverse kerr effect. 2013. Vol. 21, No. 19, DOI:10.1364/OE.21.021741, OPTICS EXPRESS 21741.
- [16] Zvezdin A. K., Kotov V. A. *Modern Magneto-optics and Magneto-optical Materials*. 1997. Institute of Physics, Bristol/Philadelphia.
- [17] Majeed H., Shaheen A. a Anwar M. S. Complete stokes polarimetry of magneto-optical faraday effect in a terbium gallium garnet crystal at cryogenic temperatures. <http://refractiveindex.info/?group=CRYSTALS&material=GaAs>, citováno 14.4.2012.
- [18] Ebert H. Magneto-optical effects in transition metal systems. Rep. Prog. Phys. 59 (1996) 1665–1735.
- [19] Abolfah M., Jungwirth R., Brum J. a MacDonald A.H. Theory of magnetic anisotropy in  $\text{III}_{1-x}\text{Mn}_x\text{V}$  ferromagnets. 2001. Physical Review B, Volume 63, 054418.
- [20] Jungwirth T., Sinova J., Mašek J., Kučera J. a MacDonald A.H. Theory of ferromagnetic (III, Mn)V semiconductors. Rev. Mod. Phys. 78. 809 (2006).
- [21] Tesařová N., Ostatnický T., Novák V., Olejník K., Šubrt J., Reichlová H., Ellis C.T., Mukherjee A., Lee J., Sipahi G.M., Sinova J., Hamrle J., Jungwirth T., Němec P., Černe J. a Výborný K. Systematic study of magnetic linear dichroism and birefringence in (ga,mn)as. 2014. Physical Review B 89, 085203.
- [22] Tesařová N., Ostatnický T., Novák V., Olejník K., Šubrt J., Reichlová H., Ellis C.T., Mukherjee A., Lee J., Sipahi G.M., Sinova J., Hamrle J., Jungwirth T., Němec P., Černe J. a Výborný K. Systematic study of magnetic linear dichroism and birefringence in (ga,mn)as. 2013. arXiv:1308.5907.
- [23] Born M. a Wolf E. *Principles of optics*. 2005. 7th edition. ISBN 0521642221.
- [24] Rejman M. Modelování optického zisku v planárních vlnovodech s „prosakuujícími“ mody. Master's thesis, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2007. Diplomová práce.
- [25] Smith R. E., Houde-Walter S. N. a Forbes G. W. Mode determination for planar waveguides using the four-sheeted dispersion relation. 1992. IEEE Journal of Quantum Electronic, vol 28, no 6.
- [26] Optical constants of gaas (gallium arsenide). <http://refractiveindex.info/?group=CRYSTALS&material=GaAs>, citováno 14.4.2012.
- [27] Malý P. *Optika*. 2008. Praha, Karolinum. First edition ISBN 978-80-246-1342-0.
- [28] Sedlák B. a Štoll I. *Elektrina a magnetismus*. 2002. Praha, Academia. Second edition ISBN 80-200-1004-1.

# Seznam grafů a ilustrací

2.1	Uvažovaný souřadný systém s TM polarizací a kladným úhlem $\theta_i$ . . . . .	7
2.2	Elipsometrické veličiny: Stočení roviny polarizace $\Theta$ a elipticita $\psi$ . . . . .	8
2.3	Asymetrická odrazivost pro opačné úhly dopadu $\theta_+$ a $\theta_-$ . . . . .	12
3.1	Možné orientace magnetizace (červeně) vzhledem ke vzorku (modře) a rovině dopadu světla (směr šíření světla černě) . . . . .	13
5.1	Reálná a imaginární část reflexního koeficientu poblíž Brewsterova úhlu pro transverzální magnetizaci. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7.0 %, energie 1.77 eV . . . . .	28
5.2	Spektra pro různé úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, polarizace $\alpha = 45^\circ$ , vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	29
5.3	Spektra rozdílů veličin v okolí Brewsterova úhlu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, polarizace $\alpha = 45^\circ$ , vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	30
5.4	Velikosti odrazivostí (první řádek), rotací (vlevo) a elipticit (vpravo). Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	31
5.5	Velikosti odrazivostí (první řádek), rotací (vlevo) a elipticit (vpravo). Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	32
5.6	Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	33
5.7	Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, úhel dopadu $\theta = 75^\circ$ , vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	34
5.8	Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 % a úhel dopadu $\theta = 75^\circ$ . . . . .	35
5.9	Odrazivost (vlevo) a její rozdíl (vpravo) při opačných úhlech dopadu u transverzální a longitudinální magnetizace. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ , úhel dopadu $\theta = 74^\circ$ , energie $E = 1.77$ eV ( $\lambda = 700$ nm) a $\delta = 0$ . . . . .	36
5.10	Rozdíly rotací (vlevo) a elipticit (vpravo) pro opačné úhly dopadu. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ a $\delta = 0$ . . . . .	37

5.11	Rozdíl stočení polarizací (vlevo) a elipticit (vpravo) při opačných úhlech dopadu u transverzální a longitudinální magnetizace. Parametry výpočtu: Tloušťka $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ 20 nm, koncentrace Mn 7 %, vodivost $\Sigma = 1\sigma$ , úhel dopadu $\theta = 74^\circ$ , $\delta = 0$ a energie $E = 2.06$ eV, $E = 1.77$ eV a $E = 2.48$ eV ( $\lambda = 700$ nm, $\lambda = 600$ nm a $\lambda = 500$ nm) . . . . .	38
6.1	Geometrické omezení aparatury . . . . .	44
6.2	Navrhovaná geometrie experimentu uvnitř kryostatu . . . . .	45
6.3	Navrhovaná geometrie experimentu vně kryostatu . . . . .	46
6.4	Vztah mezi úhlem dopadu na vzorek $\theta$ , úhlem vstupu svazku do kryostatu $\theta_0$ a náklonem zrcátka vzhledem k rovině vzorku $\Omega$ . . . . .	47
6.5	Držák do kryostatu k uchycení zrcátka pod úhlem $50^\circ$ vzhledem ke vzorku. . . . .	48
6.6	Materiálové parametry GaAs ze serveru <a href="http://refractiveindex.info">refractiveindex.info</a> . . . . .	63
6.7	Diagonální relativní permitivity $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ pro $x = 5.2\%$ a $x = 7.0\%$ . . . . .	64
6.8	Diagonální relativní permitivity $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ pro $x = 9.0\%$ a $x = 12.5\%$ . . . . .	64
6.9	Mimodiagonální relativní permitivity $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ pro $x = 5.2\%$ , $x = 7.0\%$ , $x = 9.0\%$ a $x = 12.5\%$ . . . . .	65
6.10	Mimodiagonální vodivost $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ pro $x = 7.0\%$ . . . . .	65

# Seznam zkratek a proměnných

## Seznam proměnných

$A_i$ , kde $i \in \{1, 2, 5, 6\}$	Amplitudy elektrického pole
$B_i$ , kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	Amplitudy magnetického pole
<b>B</b>	Magnetická indukce
<b>D</b>	Elektrická indukce
$D_{\text{eff}}$	Efektivní elektrická indukce
<b>E</b>	Energie (světla)
<b>E</b>	Intenzita elektrického pole
<b>H</b>	Intenzita magnetického pole
$j$	Pořadí vrstvy
$\mathbf{J}_f$	Hustota volného proudu
<b>k</b>	Vlnový vektor
$m_{ij}$ , kde $i, j \in \{1, 2, 3\}$	Prvky přenosové matice
$M$	Přenosová matice. Bez indexu pro celý vzorek, se spodním indexem pro jednu vrstvu
$N$	Počet vrstev materiálu
$t$	Čas
$r_{\pm}$	Koeficienty odrazivosti pro dvě různé polarizace <i>plus</i> a <i>mínus</i> . Viz kapitola 2.
$w$	Tloušťka vrstvy
$\alpha$	Amplituda složky $y$ elektrického pole šířícího se v kladném směru osy $z$
$\beta$	Amplituda složky $y$ elektrického pole šířícího se v záporném směru osy $z$
$\delta$	Fázové zpoždění (k popisu elipticky polarizovaného světla)
$\epsilon$	Permitivita (skalární)
$\epsilon_{\text{eff}}$	Tenzor efektivní relativní permitivity
$\tilde{\epsilon}$	Tenzor efektivní permitivity
$\epsilon_{KL}$ , kde $K, L \in \{x, y, z\}$	Složky tenzoru efektivní permitivity
$\zeta$	Substituce ve složitějším výrazu, viz kapitola 4
$\eta$	Substituce ve složitějším výrazu, viz kapitola 4
$\theta_i$	Úhel dopadu na rozhraní (měřeno od normály k rozhraní)
$\theta_t$	Úhel šíření světla v materiálu, obvykle po průchodu rozhraním
$\Theta$	Stočení roviny polarizace
$\lambda$	Vlnová délka světla
$\mu$	Permeabilita
$\rho_f$	Hustota volného náboje

$\sigma$	Tenzor vodivosti
$\sigma_{KL}$ , kde $K, L \in \{x, y, z\}$	Složky tenzoru vodivosti
$\Sigma = n\sigma$ , kde $n \in \{1, 4\}$	Popis grafů dle uvážení základního příspěvku vodivosti nebo čtyřnásobné
$\chi$	Poměr amplitud elektrického pole ve dvou na sebe kolmých směrech
$\psi$	Elipticita
$\omega$	Úhlová frekvence světla

## Seznam zkratk

inc	Spodní index pro světlo dopadající na rozhraní
ref	Spodní index pro světlo odrážející se od rozhraní
trans	Spodní index pro světlo procházející rozhraním do druhého materiálu
TE	Transverzálně-elektrická polarizace
TM	Transverzálně-magnetická polarizace
$\zeta_{\pm}$	Označení polarizace dle kladnosti nebo zápornosti členu $\zeta$
$\eta_{\pm}$	Označení polarizace dle kladnosti nebo zápornosti členu $\eta$

# Přílohy

## Příloha 1: Elementy přenosové matice

V sekci 4.4 *Okrajové podmínky na rozhraní* je soustava čtyř rovnic pro čtyři neznámé. Je třeba z ní vyjádřit v souladu s tvarem přenosové matice (4.73) jednotlivé elementy. Kvůli použitelnosti při výpočtech, kdy je vhodné používat numerické normování amplitudových koeficientů, jsou zde uvedeny tvary s komponentami  $y$  elektrického pole nikoli jednotkovými, ale obecně označenými  $A_{3,\pm}$  pro dopadající vlnu a  $A_{4,\pm}$  pro odraženou. Obecně tedy napsáno, místo (4.1) je uvažováno

$$\mathbf{E} = \left[ \alpha N_\alpha \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \end{pmatrix} e^{ik_z z} + \beta N_\beta \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \\ A_6 \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \right] e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (6.2)$$

a tvar magnetického pole je shodný s (4.2).

Při zavedení substituce

$$\begin{aligned} \xi := & \stackrel{\text{def}}{\mu_1} (B_{4,+}^j (A_{1,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j - A_{1,-}^j A_{4,-}^j B_{1,+}^j - A_{1,+}^j A_{3,-}^j B_{2,-}^j + A_{1,+}^j A_{4,-}^j B_{1,-}^j) - \\ & - A_{1,-}^j A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{1,-}^j A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{1,-}^j A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,-}^j A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + \\ & + A_{1,+}^j A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,+}^j A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - A_{1,+}^j A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + A_{1,+}^j A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j + \\ & + A_{2,-}^j (A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j - \\ & - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j - \\ & - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j)) \end{aligned} \quad (6.3)$$

je jejich podoba maticových elementů následující:

$$\begin{aligned} m_{11} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{1,+}^{j-1} (-A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - \\ & - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{3,+}^{j-1} (A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{2,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + \\ & + A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{3,+}^{j-1} (B_{1,-}^j B_{4,-}^j - B_{2,-}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2 (A_{1,-}^j (-A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j + \\ & + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{2,-}^j (A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} - \\ & - A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{2,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1} + \\ & + A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}))], \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
m_{12} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{4,+}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{2,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,+}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + \\
& + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{4,+}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{4,-}^j - B_{2,-}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j + \\
& + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1}) + A_{2,-}^j(A_{3,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j(-A_{3,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1} - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j))] , \tag{6.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{13} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{1,-}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - \\
& - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{3,-}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{2,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + \\
& + A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{3,-}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{4,-}^j - B_{2,-}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j + \\
& + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,-}^j(A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j - \\
& - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,+}^j(-A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j + \\
& + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}))] , \tag{6.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{14} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{1,-}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - \\
& - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{3,-}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{2,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + \\
& + A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{3,-}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{4,-}^j - B_{2,-}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j + \\
& + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,-}^j(A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} - \\
& - A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,+}^j(-A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1} + \\
& + A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}))] , \tag{6.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{1,+}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{3,+}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j - A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + \\
& + A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{2,-}^j A_{3,+}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j + \\
& + A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{1,+}^j(A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1} - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{2,-}^j(-A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1} + \\
& + A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}))] , \tag{6.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{4,+}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j - A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,+}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j + \\
& + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,-}^j A_{4,+}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,-}^j + \\
& + A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j) + A_{1,+}^j(A_{3,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1} + \\
& + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j) + A_{2,-}^j(A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{3,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} + \\
& + A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j))] , \\
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
m_{23} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{1,-}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{3,-}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j - A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + \\
& + A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{2,-}^j A_{3,-}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{3,-}^j)) + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j + \\
& + A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{1,+}^j(A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1} - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,-}^j(-A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1} + \\
& + A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}))] , \\
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
m_{24} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{4,-}^{j-1}(A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{1,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j - A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j + \\
& + A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j) + A_{2,-}^{j-1}(-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j + A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^j - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,-}^j A_{4,-}^{j-1}(B_{1,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{3,-}^j)) + \\
& + \mu_2(A_{1,-}^j(-A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j) + \\
& + A_{1,+}^j(A_{3,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,-}^j B_{2,-}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,-}^j(A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{3,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,-}^j))] , \\
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
m_{31} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1(A_{1,+}^{j-1}(A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j) + A_{3,+}^{j-1}(-A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{2,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - \\
& - A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j) + A_{2,+}^j A_{3,+}^{j-1}(B_{2,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{4,-}^j)) + \mu_2(A_{1,+}^j(A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j - \\
& - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{2,-}^j(-A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1}) + A_{2,+}^j(A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^{j-1} - \\
& - A_{4,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1}))] , \\
\end{aligned} \tag{6.12}$$



$$\begin{aligned}
m_{32} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{4,+}^{j-1} (-A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{2,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j) + \\
& + A_{2,+}^{j-1} (A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - \\
& - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j) + A_{2,+}^j A_{4,+}^{j-1} (B_{2,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{4,-}^j)) + \\
& + \mu_2 (A_{1,+}^j (A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1}) + \\
& + A_{2,-}^j (-A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j) + \\
& + A_{2,+}^j (A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j))] , \tag{6.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{33} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{1,-}^{j-1} (A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j) + A_{3,-}^{j-1} (-A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + \\
& + A_{2,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j) + A_{2,+}^j A_{3,-}^{j-1} (B_{2,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{4,-}^j)) + \\
& + \mu_2 (A_{1,+}^j (A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1}) + \\
& + A_{2,-}^j (-A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1}) + \\
& + A_{2,+}^j (A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{3,-}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1}))] , \tag{6.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{34} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{4,-}^{j-1} (-A_{1,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j + A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j + A_{2,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{2,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j) + \\
& + A_{2,-}^{j-1} (A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^j - A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^j - \\
& - A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{3,+}^j) + A_{2,+}^j A_{4,-}^{j-1} (B_{2,-}^j B_{3,+}^j - B_{1,+}^j B_{4,-}^j)) + \mu_2 (A_{1,+}^j (A_{4,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,+}^j - \\
& - A_{4,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,-}^j + A_{4,+}^j B_{2,-}^j B_{4,-}^{j-1}) + A_{2,-}^j (-A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,+}^j + \\
& + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j) + \\
& + A_{2,+}^j (A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,-}^j - A_{3,+}^j B_{2,-}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j))] , \tag{6.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{41} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{1,+}^{j-1} (A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{3,+}^{j-1} (-A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + \\
& + A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{3,+}^{j-1} (B_{1,+}^j B_{3,-}^j - B_{1,-}^j B_{3,+}^j)) + \\
& + \mu_2 (A_{1,-}^j (A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1}) + \\
& + A_{1,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}) + \\
& + A_{2,+}^j (A_{3,-}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,+}^j - A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{3,+}^{j-1} - A_{3,+}^j B_{1,+}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^{j-1}))] , \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{42} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{4,+}^{j-1} (-A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,+}^{j-1} (A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - \\
& + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{4,+}^{j-1} (B_{1,+}^j B_{3,-}^j - B_{1,-}^j B_{3,+}^j)) + \\
& + \mu_2 (A_{1,-}^j (A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j) + \\
& + A_{1,+}^j (-A_{3,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^{j-1} + A_{3,-}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^{j-1} - A_{3,+}^j B_{2,+}^{j-1} B_{3,-}^j))] , \\
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
m_{43} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{1,-}^{j-1} (A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j - \\
& + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{3,-}^{j-1} (-A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - \\
& - A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{3,-}^{j-1} (B_{1,+}^j B_{3,-}^j - B_{1,-}^j B_{3,+}^j)) + \mu_2 (A_{1,-}^j (A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j - \\
& - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{1,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{4,+}^j + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^{j-1} + \\
& + A_{4,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1}) + A_{2,+}^j (A_{3,-}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,+}^j - \\
& - A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^{j-1} - A_{3,+}^j B_{1,-}^{j-1} B_{3,-}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{3,-}^{j-1}))] \\
\end{aligned} \tag{6.18}$$

a

$$\begin{aligned}
m_{44} = & \frac{1}{\xi} [\mu_1 (A_{4,-}^{j-1} (-A_{1,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j + A_{1,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j + A_{1,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j - A_{1,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j) + \\
& + A_{2,-}^{j-1} (A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,+}^j - A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{3,+}^j - A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,+}^j + A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{3,-}^j + A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{3,+}^j - \\
& - A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j A_{4,-}^{j-1} (B_{1,+}^j B_{3,-}^j - B_{1,-}^j B_{3,+}^j)) + \mu_2 (A_{1,-}^j (A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,+}^j - \\
& - A_{3,+}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j) + A_{1,+}^j (-A_{3,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{4,+}^j + \\
& + A_{3,-}^j B_{2,+}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{4,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^{j-1} + A_{4,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,-}^j) + A_{2,+}^j (-A_{3,-}^j B_{1,+}^j B_{4,-}^{j-1} + \\
& + A_{3,-}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,+}^j + A_{3,+}^j B_{1,-}^j B_{4,-}^{j-1} - A_{3,+}^j B_{2,-}^{j-1} B_{3,-}^j))] . \\
\end{aligned} \tag{6.19}$$

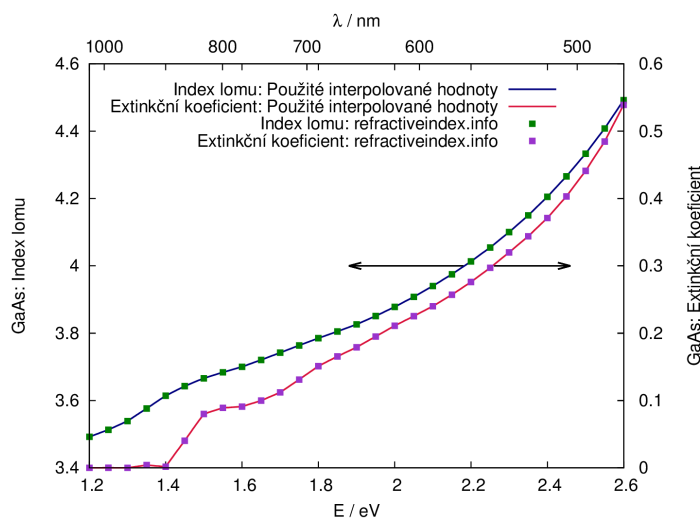
## Příloha 2: Použité hodnoty permitivity a vodivosti

K výpočtům byly použity následující materiálové konstanty

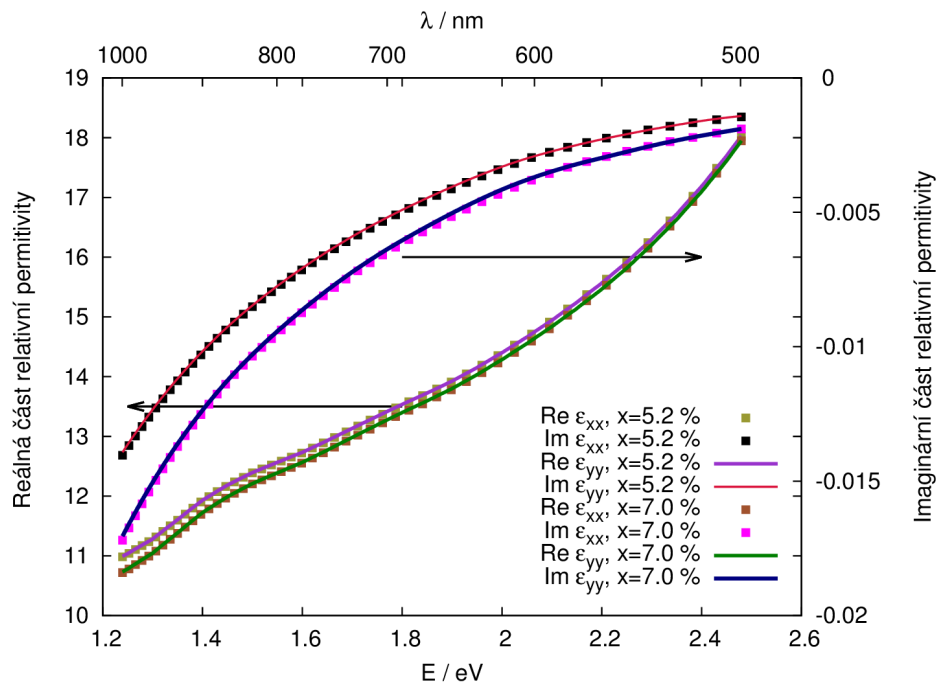
- První prostředí odpovídalo vzduchu s izotropní relativní permitivitou  $\epsilon_r=1$ .
- Substrát v podobně izotropního GaAs byl popsán indexem lomu ze serveru `refractiveindex.info` [26]. Jeho reálná a imaginární část je ukázána na grafu 6.6.
- Popis přístupu k magnetickému  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  je ukázán v [21] a [22]. Při notaci zavedené u složek tenzoru pro transversální magnetizaci (3.1) se jedná o tři hodnoty permitivity  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  a  $\epsilon_{yz}$ . Jejich průběh je v grafech 6.7, 6.8 a 6.9. Je vhodné poznamenat, že mimodiagonální nejsou identické, tedy že  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy}$ , což nemusí být kvůli použitému měřítku z grafu patrné, protože odchylka je na třetí až čtvrté platné cifře.  
Pro longitudinální a polární Kerrův jev bylo použito jiné značení ((4.5) a (4.52)), nicméně permitivity nejsou odlišené a jejich přeznačení plyne z otočení směrů magnetizace.

Maximum asymetrie rotace i elipticity kolem  $E \approx 2.3$  eV koreluje s průběhem mimodiagonální vodivosti, jejíž velikost (absolutní hodnota bez ohledu na znaménko) nabývá v tomto místě velkých hodnot pro reálnou i imaginární část. Ani pro jednu složku sice nejde o maximum, ale extrému nabývá jejich součin. Lze si představit, že při vychýlení z této polohy jedna z komponent sice nabývá vyšší absolutní hodnoty, růst je ale kompenzován tou druhou. Průběh nediagonální vodivosti pro  $\text{Ga}_{0.83}\text{Mn}_{0.07}\text{As}$  je na grafu 6.10. Vyšší kontrasty vodivostí jsou sice ve vyšších vlnových délkách, tam ale leží pod energií zakázaného pásu ( $E_g \approx 1.52$  eV).

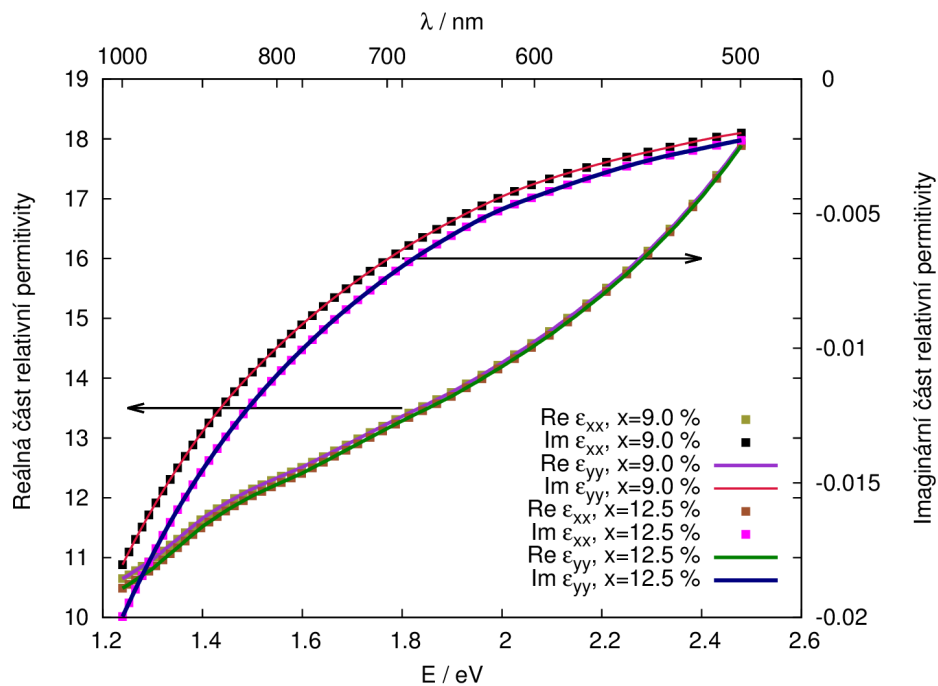
Z některých grafů v kapitole 5 *Numerické výsledky* je vidět, že průběh veličin v oblasti kolem 1.5 eV není zcela hladký. Tento problém je do výsledků přenesen s permitivitu GaAs; jak je z grafu 6.6 patrné, imaginární část indexu lomu zde není hladká. Nejedná se však o oblast vhodnou k měření asymetrie, a proto není třeba se jí zabývat.



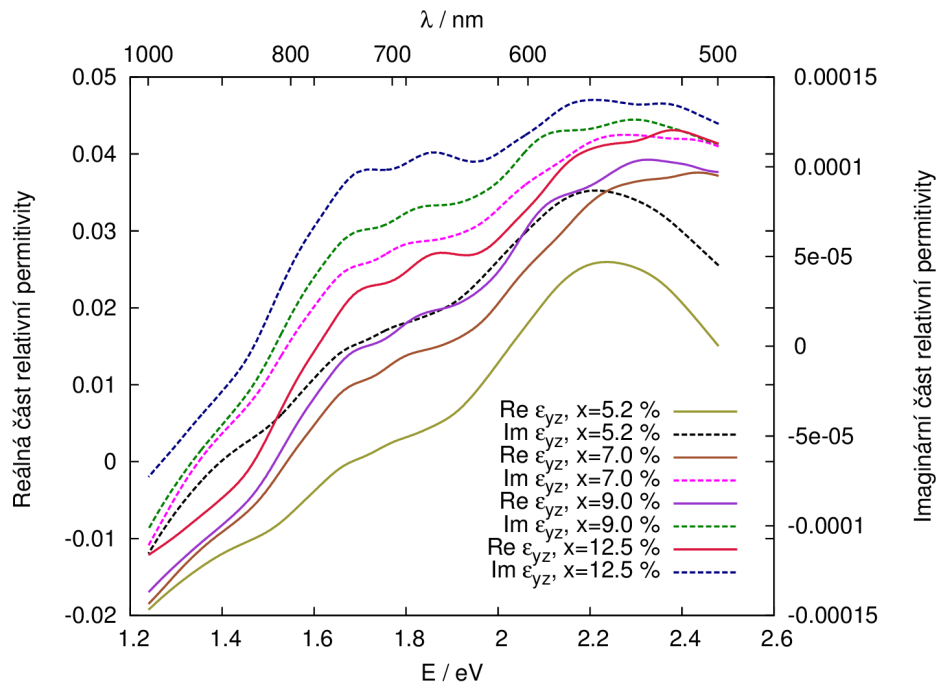
Graf 6.6: Materiálové parametry GaAs ze serveru `refractiveindex.info`



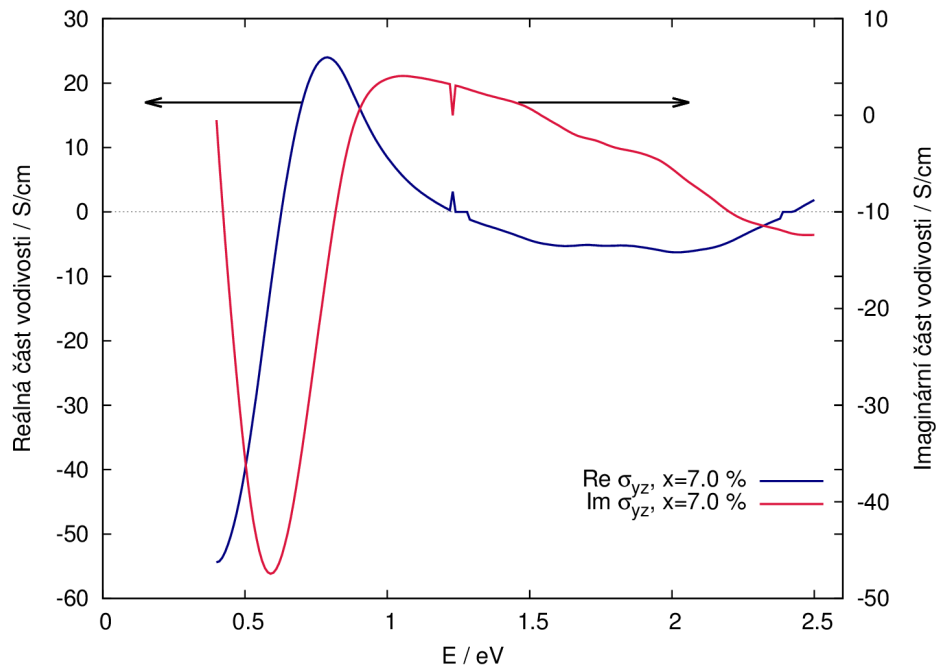
Graf 6.7: Diagonální relativní permittivity  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  pro  $x = 5.2\%$  a  $x = 7.0\%$ .



Graf 6.8: Diagonální relativní permittivity  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  pro  $x = 9.0\%$  a  $x = 12.5\%$ .



Graf 6.9: Mimodiagonální relativní permittivity  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  pro  $x = 5.2\%$ ,  $x = 7.0\%$ ,  $x = 9.0\%$  a  $x = 12.5\%$ .



Graf 6.10: Mimodiagonální vodivost  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  pro  $x = 7.0\%$ .