MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Řada

Konstrukce s imaginárními elementy v projektivní geometrii

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání - Deskriptivni geometrie se zaměřením na vzdělávání

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Konstrukce s imaginárními elementy v projektivní geometrii

Autor: Jakub Řada

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci se věnujeme konstrukcím kuželoseček s komplexními elementy. To znamená, že si zadáme kuželosečku pěti podmínkami pro kuželosečku. Na těchto konkrétních zadáních objevujeme a ukazujeme postupy, jak z těchto podmínek získat pět elementů kuželosečky. Dále ukazujeme konstrukce jako průnik reálné/komplexní přímky s kuželosečkou nebo budujeme na konkrétních konstrukcích znalosti k pozdějšímu sestrojení kuželosečky s imaginárním zadáním.

Klíčová slova: rovinná projektivní geometrie, komplexní elementy, kuželosečka, syntetické konstrukce

Title: Constructions with imaginary elements in projective geometry

Author: Jakub Řada

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this thesis we study construction with imaginary elements. First we define some basic construction with imaginary elements. Then we construct conic or we make some construction with conic. We build this thesis on examples. We take some assignment, where we discover and show, how to get five elements for conic. For example we show intersection of a real/complex line with a conic or we build some knowledge on examples, that we use in following constructions with imaginary assignment.

Keywords: planar projective geometry, imaginary elements, conic, synthetic constructions

Poděkování.

Na tomto místě bych chtěl především poděkovat vedoucímu práce
Mgr. Lukášovi Krumpovi, Ph.D. za věnovaný čas, kladení těch správných otázek nejčastěji typu: „Proč to můžeme takhle sestrojit?“, laskavost a neobyčejnou trpělivost při vedení této práce.

Obsah

Úvod

V planimetrii, stereometrii i v deskriptivní geometrii se studenti setkávají nejčastěji s řešením problému, který se odehrává pouze na jejich papíře. Nad touto omezenou plochou se rýsuje i přemýšlí. Obecně v projektivní geometrii nestačí k řešení problému pouze plocha papíru, ale musí se brát v potaz i nevlastní bod, který se hojně využívá. Navíc, zahrneme-li i imaginární body, musí se naše myšlenky odpustit pouze od papíru a jít kamsi nad a pod papír. S touto problematikou se žáci na středních i vysokých školách zabývají většinou jen početně. Již na střední škole se začínají žáci učit o komplexních číslech, která nejsou schopni znázornit. Proto jsme se rozhodli, že by stálo za uvážení nějakou práci na toto téma napsat. Řešit nějaké syntetické problémy, které se na středoškolský papír jednoduše nevejdou.

Dle mého názoru je člověk dost vizuální tvor. Všude vznikají různé grafiky, obrázky a piktogramy, které se nás snaží někam vést. Proto člověk nemůže studovat všechno pouze analyticky, ale měl by si někdy vzít do ruky pravítko, kružítko a tužku. Jelikož se chceme pohybovat v projektivní geometrii, můžeme si teoreticky kružítko odpustit. My ho však budeme pro zjednodušení v konstrukcích používat.

Jak už bylo zmíněno, v této práci bychom se chtěli věnovat projektivní geometrii, kde nebudeme trvat na tom, že všechny body a přímky, jedním slovem elementy, musí být reálné. Vezmeme v potaz i elementy komplexní.

Nejdříve ze všeho si budeme muset stanovit, co to vůbec takový komplexní bod je, jak ho budeme na papíře reprezentovat, jelikož papír je pouze dvoudimenzionální prostor. Jelikož chceme rýsovat planimetrické konstrukce, nemůžeme komplexní body znázorňovat v Gaussově rovině. Této problematice věnujeme velkou část první kapitoly.

Cílem této práce je naučit čtenáře narýsovat libovolnou kuželosečku zadanou nějakými imaginárními body, potažmo tečnami. Jelikož je kuželosečka jednoznačně zadána pěti elementy, budeme se většinou snažit získat reálné elementy místo imaginárních. Než se k této dovednosti dostaneme, nejprve zopakujeme vybrané pojmy z projektivní geometrie, kterých budeme hojně využívat. Poté se již vrhneme na různé konstrukce s imaginárními elementy. Tyto konstrukce nám budou pomocnými konstrukcemi k následnému sestrojení kuželoseček. Práce bude stavěna stylem, kde si nejdříve oznámíme problém. Poté se pokusíme teoreticky popsat, jak dosáhnout cíle a nakonec se pokusíme do něj dostat i synteticky. K tomu si budeme pomáhat různými obrázky. Jelikož pouhé čtení této práce nemusí čtenáře přesvědčit o možnosti aplikace konstrukce v libovolné poloze, chceme mít jednotlivé konstrukce interaktivní.

Celá tato práce je rozšířením předmětů Projektivní geometrie I a II, které se vyučují podle knihy Hlavatý (1944), proto tato práce vzniká podle téže knihy. V této práci předpokládáme čtenářovu znalost pojmů z výše uvedených předmětů jako je projektivita, perspektivita, dualita, harmonická čtveřice, dvojpoměr apod.

1. Shrnutí známých pojmů a konstrukcí

1.1 Potřebné pojmy z projektivní geometrie

V této kapitole si zopakujeme základní znalosti, které se nám později budou hodit při konstrukcích kuželoseček. Je potřeba si nejprve připomenout definici involuce.

Definice 1. *Neidentická projektivita soumístných soustav se nazývá involuce, platí-li následující ekvivalentní podmínky:*

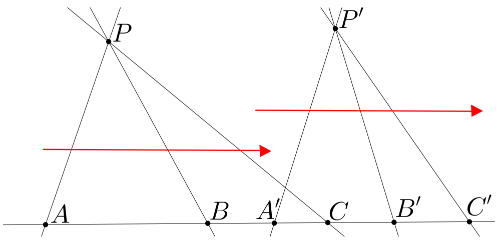
1. *Charakteristika projektivity* $w = -1$.
2. *Páry* $xx', \dots$ *odpovídajících si elementů jsou samodružnými elementy* s, t *harmonicky oddělovány* $((xx'st) = -1)$.
3. *Je-li* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *matice projektivity, pak stopa matice* A *je rovna* $\alpha + \delta = 0$.
4. *Existuje-li pár* x, x' $(x \to x')$, *kde* x *je různé od samodružného bodu, pak* $x' \to x$.
5. *Pro libovolný pár* x, x' $(x \to x')$, *kde* x *je různé od samodružného bodu, platí* $x' \to x$.

Involuce si rozdělíme na tři typy: hyperbolickou, parabolickou a eliptickou. Přičemž parabolická involuce je zobrazení, které není projektivitou, mající vlastnosti involuce. Proto si dovolíme parabolickou involuci uvést v následující definici.

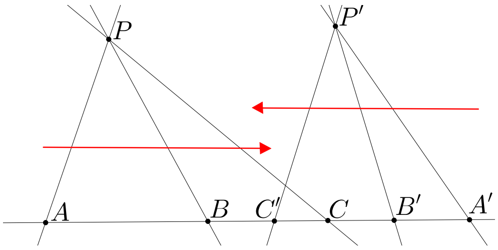
Definice 2. *Jsou-li samodružné elementy involuce* $\begin{cases} \text{různé reálné} \\ \text{reálné splývající} \\ \text{komplexně sdružené} \end{cases}$ *pak říkáme, že tato involuce je* $\begin{cases} \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \\ \text{eliptická.} \end{cases}$

Dále projektivní soumístné soustavy dělíme na souhlasné a nesouhlasné.

Definice 3. *Chovají-li se soustavy jak je naznačeno na obrázku 1.1a jedná se o soustavy souhlasné, chovají-li se však jak je naznačeno na obrázku 1.1b, jedná se o soustavy nesouhlasné. (Tj. obrazy jsou uspořádány ve stejném nebo opačném směru než jsou uspořádané vzory.)*



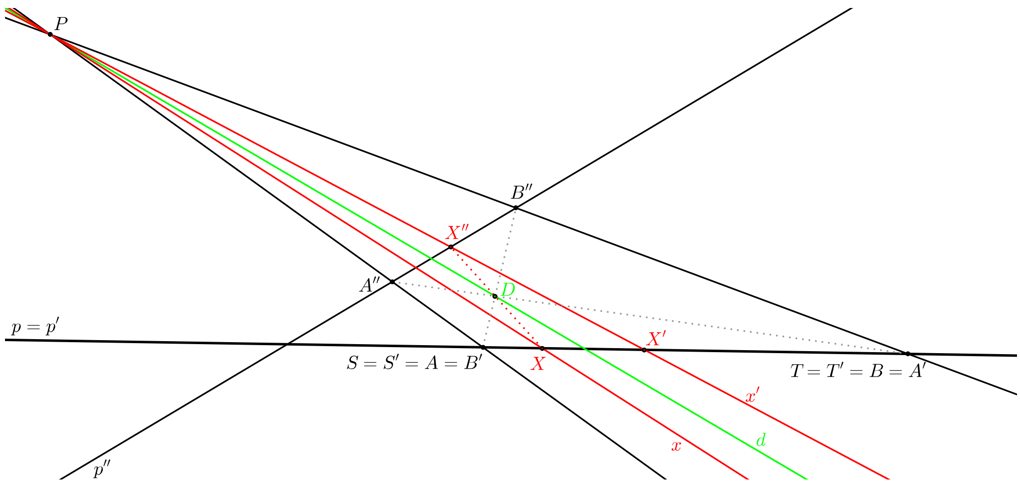
(a) souhlasné soustavy



(b) nesouhlasné soustavy

Obrázek 1.1: (Ne)souhlasné Soustavy

Z definice involuce pro každý pár x, x' odpovídajících si elementů dvou soustav v involuci platí $w = (xx'st) = -1$, kde s, t jsou samodružné elementy involuce. Dle známých vlastností dvojpoměru, pak bude platit $(x'xst) = \frac{1}{w} = -1$. Z předchozích dvou vět můžeme vyvodit následující rovnost $(xx'st) = (x'xst)$. Z tohoto důvodu můžeme prohlásit, že involuce je vzájemně jednoznačné zobrazení. Následně můžeme o involuci prohlásit, že je jednoznačně zadaná svými samodružnými body. To si znázorníme na následujícím obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Doplňování involuce zadané samodružnými body S,T.

Nechť máme danou involuci na přímce p samodružnými body S, T. Šikovným přejmenováním involuce získáváme na přímce $p = p'$ dvě soumístné projektivní soustavy. Promítnutím jedné projektivní soustavy na libovolnou přímku p'' získáme nesoumístné projektivní soustavy, které umíme klasicky doplňovat.

Z obrázku 1.2 názorně plyne možnost záměny elementu x s x'. Jednoznačné zadání involuce závisí pouze na volbě samodružných elementů. Máme-li samodružné elementy involuce, můžeme dle definice 2 jednoduše určit o jaký typ involuce se jedná. Nám by se hodilo poznat typ involuce, bez nutnosti hledat samodružné elementy.

Věta 1. $\begin{cases} \textit{Hyperbolická} \\ \textit{Eliptická} \end{cases}$ *involuce je tvořena* $\begin{cases} \textit{nesouhlasnými} \\ \textit{souhlasnými} \end{cases}$ *soustavami.*

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení pro hyperbolickou involuci. Nechť máme

hyperbolickou involuci dvou projektivních soustav
$P(s,t,a,b,\ldots) ::: P(s,t,a',b',\ldots)$, kde z definice 2 s,t jsou různé reálné samodružné elementy. Víme, že pro harmonickou čtveřici platí $(x,x',s,t) = -1$. Pamatujeme si, že $w = (x,x',s,t) = \frac{[x,s]}{[x,t]}\frac{[x',t]}{[x',s]}$. Položme $s = [1:0]$ a $t = [0:1]$. Dosazením konkrétních hodnot s,t do vzorce pro výpočet dvojpoměru získáme

$$-1 = (x,x',s,t) = \frac{[x,s]}{[x,t]}\frac{[x',t]}{[x',s]} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & s_0 \\ x_1 & s_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & t_0 \\ x'_1 & t_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & t_0 \\ x_1 & t_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & s_0 \\ x'_1 & s_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & 0 \\ x'_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & 1 \\ x'_1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(-x_1)}{(x_0)}\frac{(x'_0)}{(-x'_1)} = \frac{(x'_0)}{(x_0)}\frac{(x_1)}{(x'_1)}.$$

Pokud zafixujeme $x_0 = x'_0 = 1$, dostáváme, že $x'_1 = -x_1$ z čehož vyplývá, že obrazy jsou uspořádány opačně než vzory, nebo můžeme rovnost přepsat ve tvaru $\frac{x_0}{x_1} = -\frac{x'_0}{x'_1}$. Potom roste-li $\frac{x_0}{x_1}$, musí nutně $\frac{x'_0}{x'_1}$ klesat. To je specifické pro nesouhlasné soustavy.

Jedná-li se o involuci eliptickou, musíme bez újmy na obecnosti za s,t dosadit body komplexně sdružené. Položme tedy $s = [i:1]$. Pak musí být $t = [-i:1]$. dosazením do rovnice tentokrát dostaneme

$$-1 = (xx'st) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & i \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & -i \\ x'_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & -i \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_0 & i \\ x'_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_0 - ix_1)(x'_0 + ix'_1)}{(x_0 + ix_1)(x'_0 - ix'_1)} =$$

$$= \frac{x_0x'_0 + x_1x'_1 + i(x_0x'_1 - x'_0x_1)}{x_0x'_0 + x_1x'_1 - i(x_0x'_1 - x'_0x_1)}.$$

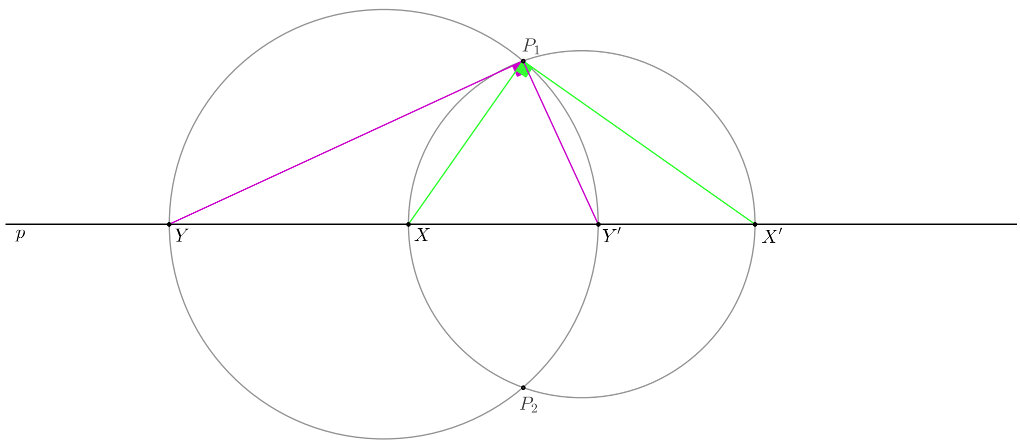
Tato rovnost může nastat pouze v případě, bude reálná část $x_0x'_0 + x_1x'_1$ rovna nule. Z toho získáme

$$\begin{aligned} x_0x'_0 + x_1x'_1 &= 0 \\ x_0x'_0 &= -x_1x'_1 \\ \frac{x'_1}{x'_0} &= -\frac{x_0}{x_1}. \end{aligned}$$

V tomto případě bude-li $\frac{x_0}{x_1}$ růst, bude růst i $\frac{x'_1}{x'_0}$. To je specifické pro souhlasné soustavy.

□

Definice 4. *Nechť máme danou eliptickou involuci dvěma páry na přímce p. Průsečík kružnic, které sestrojíme nad každým párem involuce, se protnou v bodě P_1, P_2. Jako na obrázku 1.3. Body P_1, P_2 si definujeme jako pomocné body involuce na přímce p.*

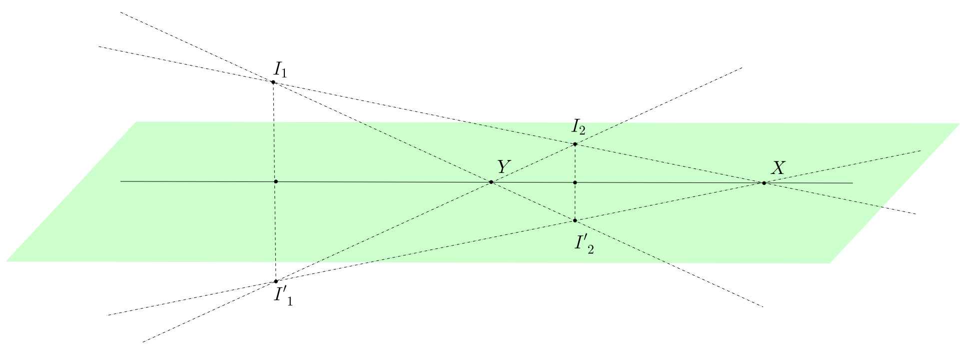


Obrázek 1.3: Eliptická involuce s reálným pomocným bodem

Poznámka 1. Z definice 4 vyplývá:

- Pomocný bod P_1 a přímka p (na obrázku 1.3) zadávají eliptickou involuci jednoznačně.
- Máme-li k dispozici pravoúhlé pravítko, můžeme jednoduše danou involuci doplňovat.
- Pro sestrojení pomocného bodu nám stačí pouze dva různé páry involuce.

V této práci se budeme zabývat konstrukcemi s imaginárními elementy. Imaginárními elementy budeme rozumět bod nebo přímku s komplexními souřadnicemi. Pro názornost si vypomůžeme obrázkem 1.4. Na obrázku jsou body I_1 a I_1' komplexně sdružené body. Můžeme si všimnout, že v našich planimetrických konstrukcích nebudeme schopni body I_1 a I_1' rozlišit. Z toho důvodu se zaměříme pouze na konstrukce, v kterých budou jen komplexně sdružené elementy.



Obrázek 1.4: Na obrázku je znázorněna reálná rovina zelenou barvou, ke které máme přidanou komplexní část. Jelikož nejsme schopni nakreslit daný problém ve čtyř-dimenzionálním prostoru, dovolím si zde vypomoci prostorem 3D.

Poznámka 2. V následujícím textu bude A, A', (B, B') pár involuce, kromě výše uvedeného značení I, I'. Označení I, I' si vyhradíme pouze a jen pro komplexně sdružené elementy. Toto označení budeme dodržovat v celém následujícím textu. (Ekvivalentně i, i' pro komplexně sdružené přímky.)

Body I, I' budou v konstrukcích zadané jako samodružné body eliptické involuce. To si můžeme dovolit dle definice 2. Eliptická involuce je dle věty 1 tvořena souhlasnými projektivními soustavami. Sestrojíme-li kružnice nad páry obou souhlasných projektivních soustav, jako na obrázku 1.3, získáme tak reálný pomocný bod P. Ekvivalentně pro hyperbolickou involuci je pomocný bod P izotropickým bodem.

Z toho plyne, že body I, I' budou zadané jako samodružné body eliptické involuce na přímce určené jednoznačně pomocným bodem. Přímkovou verzi eliptické involuce získáme promítnutím eliptické involuce na přímce do svazku.

V této práci se budeme výhradně zabývat eliptickými involucemi, neboť budeme mít zadané komplexně sdružené body I_1, I_1'. Občas pro lepší názornost zakreslíme do obrázku body I_1, I_1' jako body reálné. Na jednu stranu se nám budou v obrázcích některé kroky konstrukce lépe ukazovat, ale na druhou stranu se nám eliptická involuce mění na involuci hyperbolickou, a tím pádem přicházíme o reálný pomocný bod P.

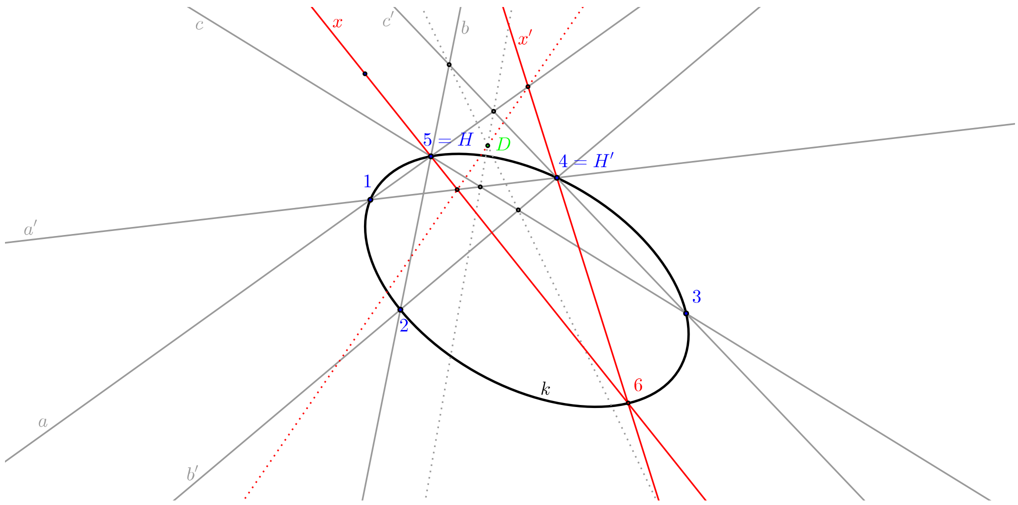
Poznámka 3. V následujícím textu bude hojně konstrukcí, v kterých budeme mít více involucí. Budeme-li v involuci $\sigma_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$ konstruovat element ε_1 a v involuci $\sigma_2(A_2, B_2, C_2 \dots)$ element ε_2, pak pro stručnost zápisu budeme psát: V involuci $\sigma_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$ $\big(\sigma_2(A_2, B_2, C_2 \dots\big)$ zkonstruujme element ε_1 (ε_2).

Všechny následující konstrukce jsou interaktivně znázorněny na stránkách geogebry na odkazu: https://www.geogebra.org/m/xHz5n9Gc. V elektronické podobě tato práce jednotlivá zadání konstrukcí přesměruje čtenáře na příslušnou interaktivní konstrukci na webu geogebry.

1.2 Základní konstrukce v projektivní geometrii

V této kapitole uvedeme několik konstrukcí, které budeme od jejich zkonstruování považovat za triviální, abychom je nemuseli v následující práci neustále konstruovat.

Úloha 1. Sestrojit kuželosečku z pěti reálných bodů $1, 2, 3, 4$,5.

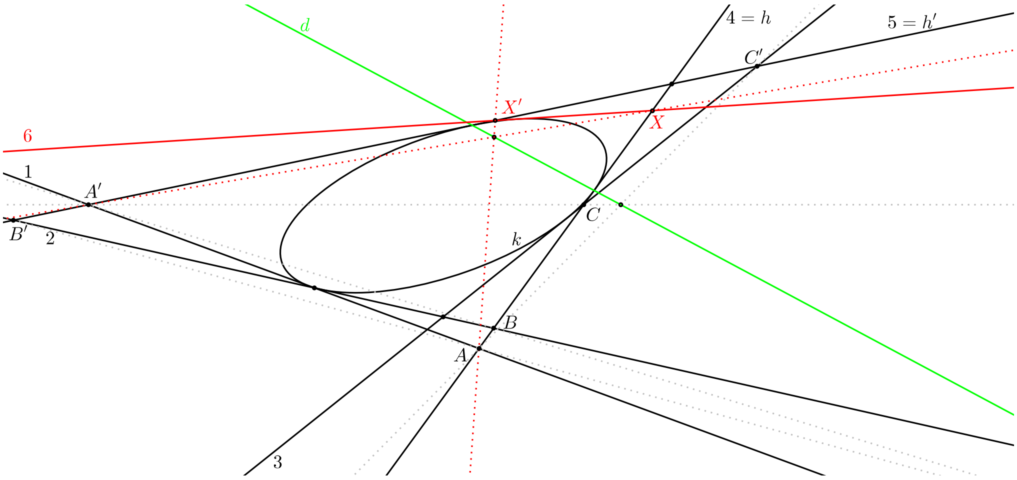


Obrázek 1.5: **Úloha 1**: kuželosečka z pěti reálných bodů

1. Body $4, 5$ označme H, H'.
2. Veďme přímky $a = \overleftrightarrow{1H}, a' = \overleftrightarrow{1H'}, b = \overleftrightarrow{2H}, b' = \overleftrightarrow{2H'}, c = \overleftrightarrow{3H}, c' = \overleftrightarrow{3H'}$.
3. Najděme direkční bod D projektivity $H(a, b, c) ::: H'(a, b, c)$.
4. Sestrojme libovolnou přímku x procházející bodem H.
5. Průsečík $x \cap a'$ spojme s direkčním bodem D.
6. Tato červená spojnice nám protne přímku a v bodě, který spojíme s H'. Tím získáme přímku x'.
7. Průsečík $6 = x \cap x'$ je další bod kuželosečky k. Tímto způsobem můžeme sestrojit libovolný počet bodů kuželosečky.

Úloha 2. Sestrojit kuželosečku z pěti reálných tečen $1, 2, 3, 4, 5$.

1. Tečny $4, 5$ označme h, h'.
2. Označme průsečíky $A = \overleftrightarrow{1h}, A' = \overleftrightarrow{1h'}, B = \overleftrightarrow{2h}, B' = \overleftrightarrow{2h'}, C = \overleftrightarrow{3h}, C' = \overleftrightarrow{3h'}$.
3. Najděme direkční přímku d projektivity $h(A, B, C) ::: h'(A, B, C)$.
4. Zvolme libovolně bod X na přímce h.
5. Sestrojme spojnici $\overleftrightarrow{XA'}$.



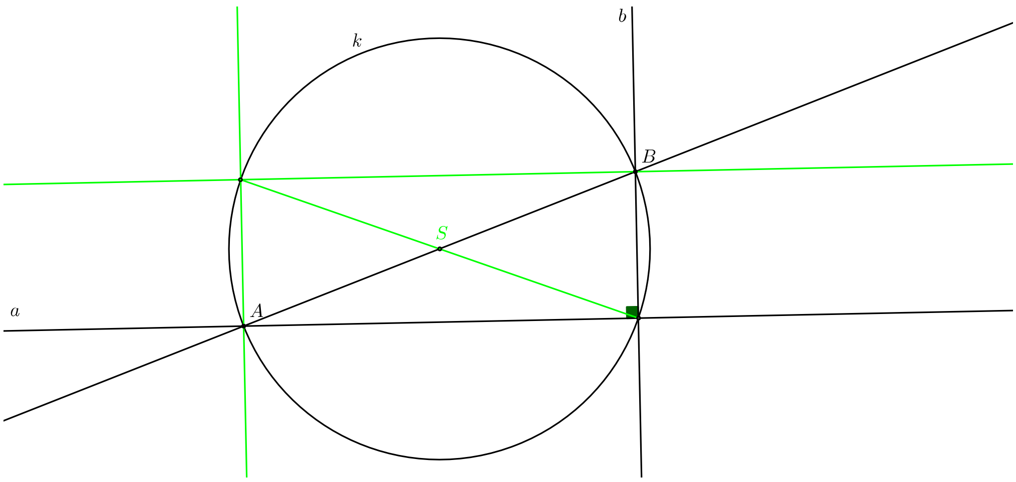
Obrázek 1.6: **Úloha 2**: kuželosečka z pěti reálných tečen

6. Tato spojnice nám protne direkční přímku d v bodě, z kterého vedeme přímku bodem A.

7. Průsečík právě vzniklé přímky vedené bodem A nám protne přímku h' v bodě, který označme X'.

8. Spojnice $6 = \overleftrightarrow{XX'}$ je další tečna kuželosečky k. Tímto způsobem můžeme sestrojit libovolný počet tečen kuželosečky.

Úloha 3. Sestrojit kružnici k z průměru $|AB|$.



Obrázek 1.7: **Úloha 3**: Sestrojit kružnici k

- Kvůli narýsování kružnice si přidáme pojem kolmost.

1. Na libovolné přímce označme 2 body A, B. Nechť $|AB|$ je průměr kružnice.

2. Bodem A veďme libovolnou přímku a.

3. Bodem B veďme přímku b kolmou k přímce a.

4. Průsečík $a \cap b$ označme jako bod kružnice k. Tímto způsobem můžeme sestrojit libovolné množství bodů kružnice.

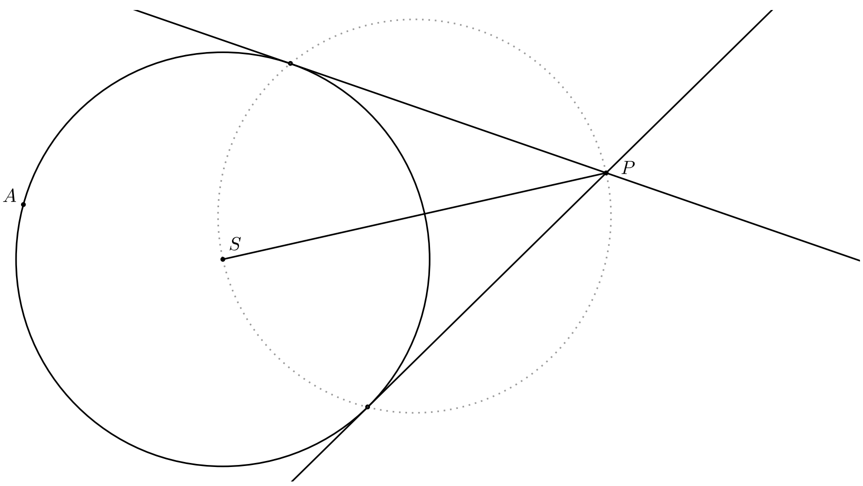
- Konstrukce středu S kružnice.

1. Veďme bodem A kolmici k přímce a.
2. Veďme bodem B kolmici k přímce b.
3. Průsečík kolmic spojme s již sestrojeným bodem kružnice. Tím získáme další průměr kružnice.
4. Průsečík průměrů kružnice je střed S.

Z těchto poznatků jsme schopni zkonstruovat kružnici ze středu a jednoho bodu na kružnici.

Poznámka 4. V praxi ovšem budeme kružnici sestrojovat klasicky kružítkem.

Úloha 4. Sestrojit tečny ke kružnici z bodu P vně kružnice.

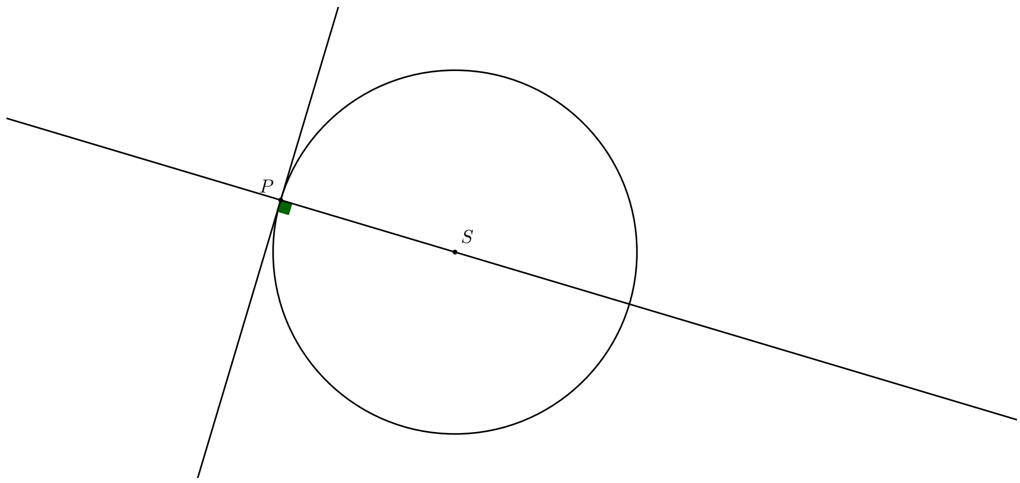


Obrázek 1.8: **Úloha 4**: Konstrukce tečen z bodu

1. Nechť je dána kružnice svým středem S a bodem A.
2. Sestrojme kružnici nad průměrem $|SP|$ (Úloha 3).
3. Průsečíky kružnic spojme s bodem P. Tím získáme hledané tečny.

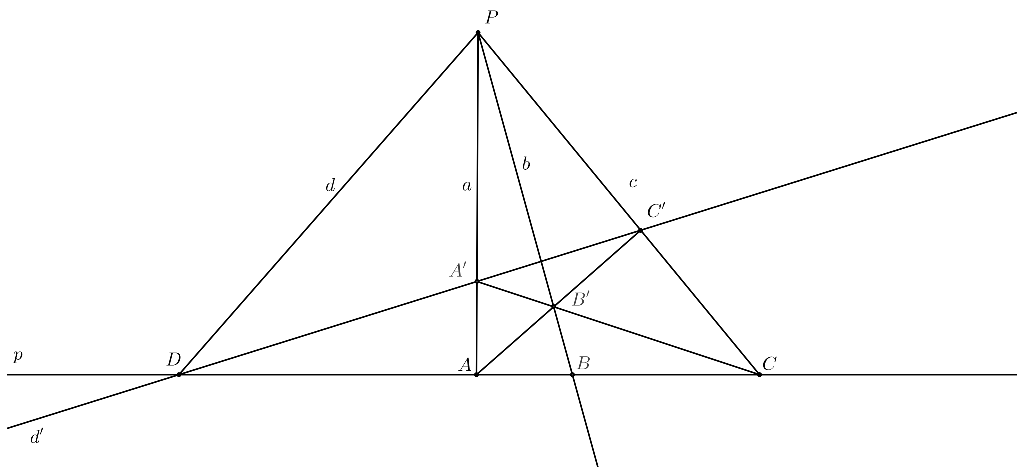
Úloha 5. Sestrojit tečnu v bodě P na kružnici.

1. Nechť je dána kružnice svým středem S a bodem P.
2. Sestrojme přímku procházející bodem P kolmou na přímku $\overleftrightarrow{SP}$. Tím získáme hledanou tečnu.



Obrázek 1.9: **Úloha 5**: Konstrukce tečny z bodu P na kružnici

Úloha 6. Sestrojit harmonickou čtveřici.



Obrázek 1.10: **Úloha 6**: Harmonická čtveřice

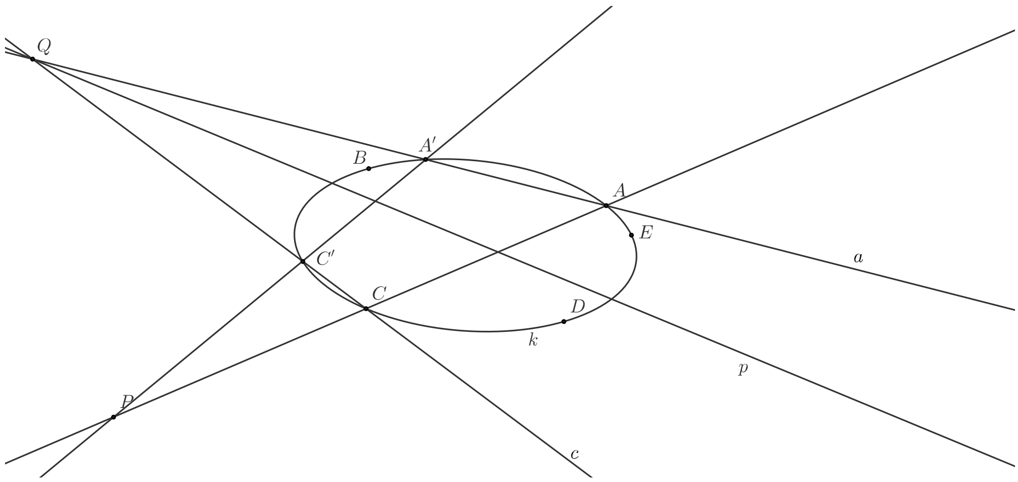
Pro případ, kdy známe body A, B, C.

1. Nechť je dána přímka p na které jsou dány body A, B, C. Sestrojme harmonickou čtveřici $(ACDB) = -1$.
2. Zvolme libovolně bod P.
3. S bodem P spojme body A, B a C.
4. Bodem A veďme libovolnou přímku. Ta nám protne přímky b, c v bodech B', C'.
5. Sestrojme přímku $\overleftrightarrow{B'C}$. Průsečík této přímky s přímkou a označme A'.
6. Hledaný bod D je průsečík přímky p s přímkou $\overleftrightarrow{A'C'}$.

Pro případ, kdy známe body A, C, D.

1. Nechť je dána přímka p na které jsou dány body A, C, D. Sestrojme harmonickou čtveřici $(ACDB) = -1$.
2. Zvolme libovolně bod P.
3. S bodem P spojme body A, C a C.
4. Bodem D veďme libovolnou přímku. Ta nám protne přímky a, c v bodech A', C'.
5. Sestrojme průsečík B' jako průsečík dvou přímek $B' = \overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{AC'}$.
6. Přímka b prochází body $\overleftrightarrow{PB'}$.
7. Průsečík $b \cap p$ je hledaný bod B.

Úloha 7. Sestrojit pól k poláře.

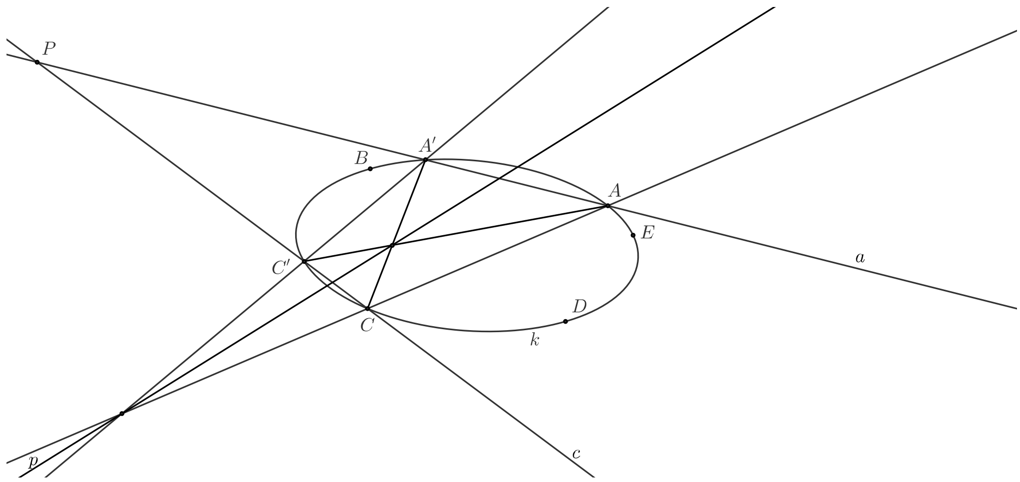


Obrázek 1.11: **Úloha 7**: Najít pól k poláře

1. Nechť je dána kuželosečka k pěti body A,B,C,D,E a polára p.
2. Zvolme na přímce p bod Q vně kuželosečky.
3. Sestrojme přímku $a = \overleftrightarrow{AQ}$ ($c = \overleftrightarrow{CQ}$).
4. Pomocí Pascalovy věty najděme druhý průsečík A' (C') přímky a (c) s kuželosečkou k.
5. Pól P je průsečíkem spojnic $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{A'C'}$.

Úloha 8. Sestrojit poláru k pólu.

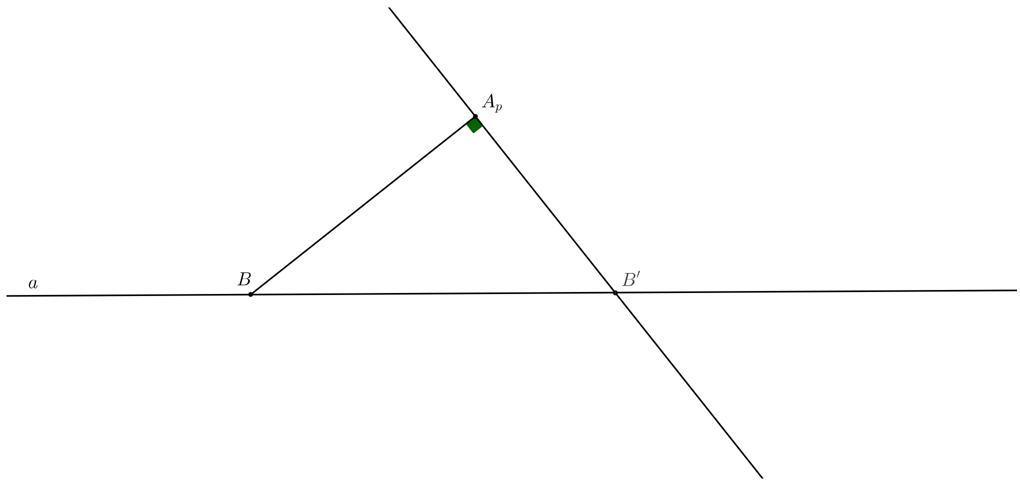
1. Nechť je dána kuželosečka k pěti body A,B,C,D,E a pól P.
2. Sestrojme přímku $a = \overleftrightarrow{AP}$ ($c = \overleftrightarrow{CP}$).



Obrázek 1.12: **Úloha 8**: Najít poláru k pólu

3. Pomocí Pascalovy věty najděme druhý průsečík A' (C') přímky a (c) s kuželosečkou k.
4. polára p prochází průsečíky $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ a $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$.

Úloha 9. Doplňování eliptické involuce zadané pomocným bodem A_p.

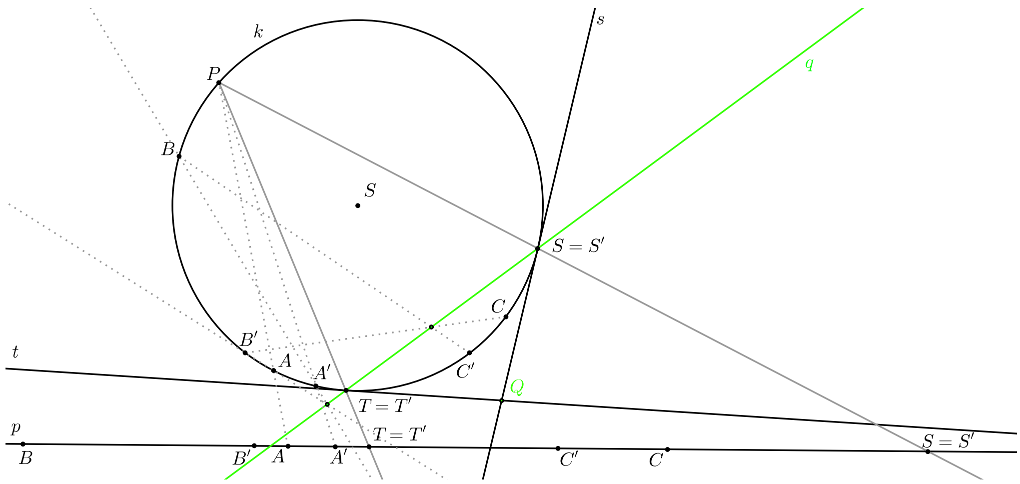


Obrázek 1.13: **Úloha 9**: Doplňování eliptické involuce zadané pomocným bodem A_p

1. Nechť je dána involuce na přímce a pomocným bodem A_p.
2. Zvolme na přímce a bod B.
3. Bod B spojme s bodem A_p.
4. Sestrojme kolmici na přímku $\overleftrightarrow{BA_p}$.
5. Průsečík kolmice s přímkou a je bod B' do páru BB'.

2. Konstrukce s eliptickými involucemi

Konstrukce 1. Stanovit involuci, která má s projektivitou stejné samodružné body, je-li dána projektivita soumístných bodových soustav $p(A, B, C)$ a $p(A', B', C')$.



Obrázek 2.1: konstrukce 1

- Zadanou projektivitu je třeba promítnout do dvou projektivních soustav, v které nalezneme samodružné prvky. Poté určíme involuci, mající stejné samodružné prvky.

1. Promítnout obě projektivní soustavy $p(A, B, C)$, $p(A', B', C')$ na kružnici k vedenou libovolným bodem P ($P \notin p$).
   - Zvolme libovolně bod P.
   - Sestrojme libovolnou kružnici k bodem P.
   - Body A, A', B, B', C, C' spojme s bodem P.
   - Každá z těchto přímek protne kružnici k.
   - Označíme-li průsečíky podle bodů, jimiž přímky procházejí, získáme tak dvě projektivní soustavy $k(A, B, C), k(A', B', C')$ na kružnici k.
2. Najít direkční přímku q projektivity $k(A, B, C) ::: k(A', B', C')$ na kružnici k.
   - Sestrojme dva průsečíky spojnic $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$.
   - Spojnice těchto průsečíků je hledaná direkční přímka q.
3. Průsečíky $q \cap k$ jsou samodružné body projektivity na kružnici k.
4. Nyní chápejme direkční přímku q jako poláru kuželosečky k. (Proto jsme direkční přímku nezvykle označili.)

5. Najděme pól Q k poláře q. (úloha 7)

6. Pól Q nyní chápejme jako střed involuce na kružnici k.

7. Průsečíky libovolné přímky procházející bodem Q s kružnicí k tvoří pár involuce. Body dotyku tečen z bodu Q s kružnicí k jsou tedy samodružné body involuce. Jelikož těmito body prochází přímka q, tak jsou to současně samodružné body projektivity.

8. Nyní můžeme promítnout samodružné body $S = S', T = T'$ zpět na přímku p.

Poznámka 5. Bodem P prochází dvě soumístné přímkové soustavy. To znamená, že v uvedeném obrázku je znázorněna i konstrukce duální (přímková).

Nyní si ukážeme základní konstrukce s imaginárními elementy. Ukážeme si, jak spojit dva imaginární body, a jak sestrojit spojnice průsečíků imaginárních přímek.

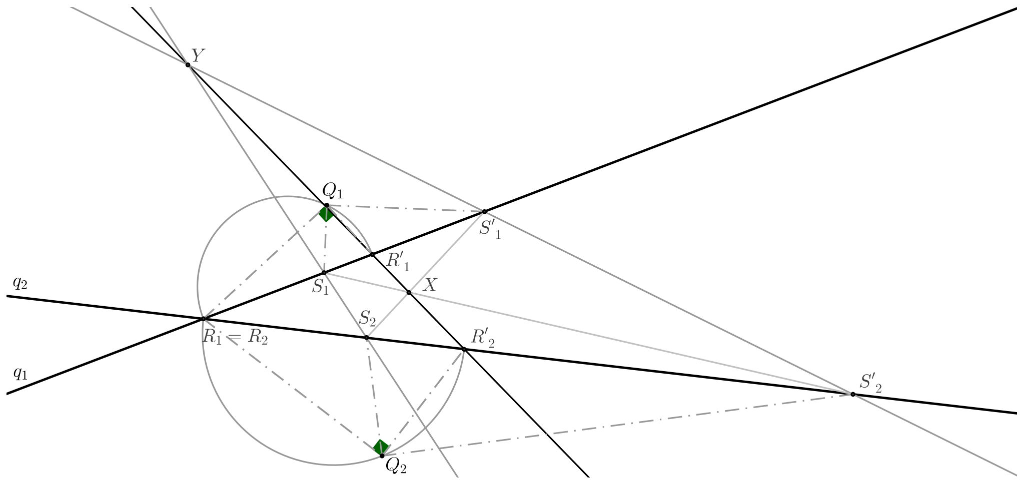
Spojnice dvou imaginárních bodů je opět imaginární přímka. Jelikož nejsme schopni takovou přímku v reálné rovině znázornit, znázorníme pouze průsečík dané přímky s reálnou rovinou. Dále nejsme schopni v reálné rovině rozlišovat body $[a, bi]$ a $[a, -bi]$ $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$, musíme tedy brát v úvahu vždy dvojice bodů komplexně sdružených. Z toho plyne,že chceme-li spojit 2 imaginární body, musíme nalézt spojnici 4 bodů I_1, I_1', I_2, I_2' po dvou komplexně sdružených. Jelikož páry I_1, I_1' a I_2, I_2' jsou komplexně sdružené, nemá cenu hledat jejich spojnice. Zbývají nám spojnice bodů $\overleftrightarrow{I_1I_2}$, $\overleftrightarrow{I_1I_2'}$, $\overleftrightarrow{I_1'I_2}$ a $\overleftrightarrow{I_1'I_2'}$. Zmíněné čtyři imaginární přímky jsou též po dvou komplexně sdružené. Z poznatku, že každý pár komplexně sdružených přímek, prochází středem svazku jenž je reálný. Existuje vždy reálný bod, kterým dvě komplexně sdružené přímky prochází. Lze na to nahlížet jako je znázorněné na již uvedeném ilustračním obrázku 1.4.

Z téhož obrázku názorně vyplývá, že nejsme schopni rozlišit body X, Y ani komplexně sdružené přímky jimi procházející. Nyní se již podíváme, jak reálné průsečíky X a Y sestrojit.

Konstrukce 2. Nechť jsou dány dva komplexně sdružené body I_1, I_1' a dva komplexně sdružené body I_2, I_2'. Stanovte průsečíky přímek $\overleftrightarrow{I_1I_2} \cap \overleftrightarrow{I_1'I_2'}$ a $\overleftrightarrow{I_1'I_2} \cap \overleftrightarrow{I_1I_2'}$, kde body I_1, I_1' jsou dány jako samodružné body eliptické involuce σ_1 na přímce q_1 a I_2,I_2' jsou dány jako samodružné body eliptické involuce σ_2 na přímce q_2. Obě eliptické involuce σ_1 (σ_2) jsou jednoznačně zadány přímkou q_1 (q_2) a pomocným bodem Q_1 (Q_2).

- V této konstrukci máme za úkol sestrojit páry v involucích σ_1 (σ_2) tak, aby šikovně zvolené spojnice vhodných bodů involucí σ_1 a σ_2 tvořily involuci přímkovou jak ve svazku se středem X, tak ve svazku se středem Y. Středy jsou námi hledané body.

1. Průsečík přímek $q_1 \cap q_2$ je společný bod obou involucí σ_1 a σ_2. Označme jej $R_1 = R_2$.



Obrázek 2.2: konstrukce 2

2. Sestrojme k bodu R_1 (R_2) v involuci σ_1 (σ_2) involutorní bod R_1' (R_2') (Úloha 9).

3. Máme již zkonstruovaný jeden potřebný pár R_1R_1' (R_2R_2') involuce v obou involucích σ_1, σ_2. Dále sestrojme osy úhlu $\angle R_1Q_1R_1'$ $(\angle R_2Q_2R_2')$. Průsečíky os úhlu s přímkou q_1 (q_2) označme S_1, S_1' (S_2, S_2'). Vzhledem k tomu, že jsme dělili pravý úhel napůl, pak úhel $\angle S_1Q_1S_1'$ $(\angle S_2Q_2S_2')$ bude též pravý. Z toho důvodu můžeme dvojici bodů S_1, S_1' (S_2, S_2') nazvat párem involuce σ_1 (σ_2). Navíc, jelikož jsme v obou involucích našli pár S_1, S_1' (S_2, S_2') stejnou metodou, budou se nám hodit k hledání přímkové involuce.

   - Sestrojíme osu úhlu $\angle R_1Q_1R_1'$ $(\angle R_2Q_2R_2')$.
   - Průsečík osy úhlu s přímkou q_1 (q_2) nazveme S_1 (S_2).
   - Sestrojíme kolmici k přímce $\overleftrightarrow{S_1Q_1}$ $(\overleftrightarrow{S_2Q_2})$ procházející bodem Q_1 (Q_2).
   - Průsečík kolmice s přímkou q_1 (q_2) označme S_1' (S_2').

4. Nyní musíme propojit správné body involuce σ_1 s body involuce σ_2. Vzhledem k tomu, že bod R_1 splývá s bodem R_2, pak tedy hledané body X, Y musí ležet na přímce $\overleftrightarrow{R_1'R_2'}$, protože v involuci prohazování „čárkovaných“ a „nečárkovaných“ elementů nemá vliv. Dále musí průsečíky X,Y ležet na spojnicích $\overleftrightarrow{S_1S_2} \cap \overleftrightarrow{S_1'S_2'}$ a $\overleftrightarrow{S_1'S_2} \cap \overleftrightarrow{S_1S_2'}$

   - Sestrojme přímku $\overleftrightarrow{R_1'R_2'}$.
   - Sestrojme přímky $\overleftrightarrow{S_1S_2}$, $\overleftrightarrow{S_1'S_2'}$, $\overleftrightarrow{S_1S_2'}$, $\overleftrightarrow{S_1'S_2}$.
   - Na průsečících přímek z první a druhé odrážky budou ležet hledané body X, Y.
     (Na určení průsečíku by nám stačilo sestrojit méně přímek, jelikož průsečík určují dvě přímky jednoznačně.)

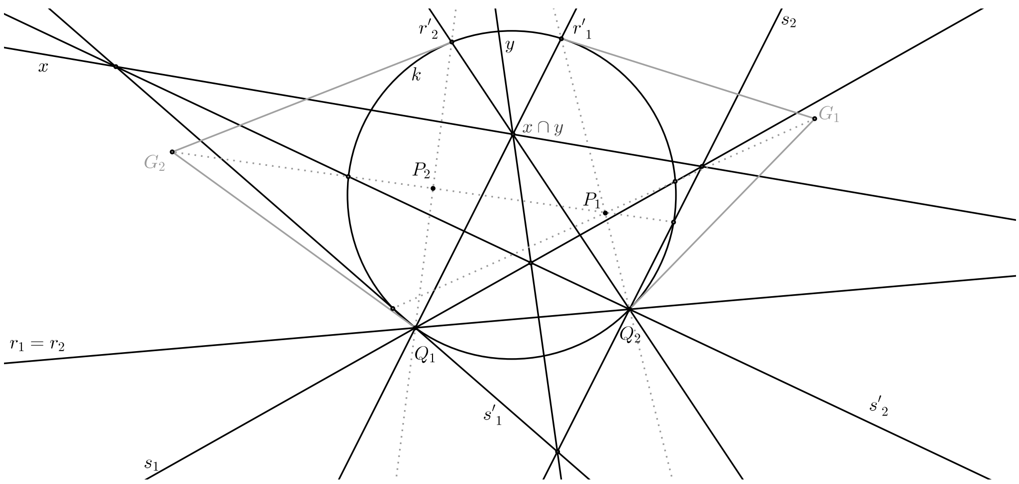
Poznámka 6. V konstrukci 2 jsme hledali přímkovou involuci takovou, abychom byli schopni promítnout jednu involuci do druhé. Tím pádem vezměme libovolnou přímku neprocházející bodem X (Y), ale procházející bodem $R_1 = R_2$.

Promítneme-li na ni přímkovou involuci, získáme tak involuci na přímce, která má komplexně sdružené samodružné body mající stejné vlastnosti jako v involuci σ_1 a σ_2.

Poznámka 7. Z obrázku 2.2 je patrné, že body I_1, I_1', I_2', I_2 tvoří úplný čtyřroh s diagonálním trojúhelníkem XYR_1 (XYR_2). Přitom si všimněme, že body $R_1S_1R_1'S_1'$ $(R_2S_2R_2'S_2')$ tvoří harmonickou čtveřici.

Nyní se podíváme na konstrukci, jak sestrojit spojnice průsečíků imaginárních přímek.

Konstrukce 3. Nechť je dán pár komplexně sdružených přímek i_1, i_1' involuce σ_1 a pár komplexně sdružených přímek i_2, i_2' involuce σ_2. Stanovte spojnice průsečíků $\overleftrightarrow{i_1 \cap i_2 \;\; i_1' \cap i_2'}$ a $\overleftrightarrow{i_1 \cap i_2' \; i_1' \cap i_2}$. Zmíněné komplexně sdružené páry přímek jsou zadané jako samodružné přímky involuce ve svazku Q_1 (Q_2), zadané pomocným bodem involuce P_1 (P_2) pro pár i_1, i_1' (i_2, i_2').



Obrázek 2.3: konstrukce 3

- V této konstrukci můžeme přímkovou involuci σ_1 (σ_2) ve svazku promítnout do bodové involuce na kružnici k. V bodové involuci na kružnici máme involuci jednoznačně zadanou pomocným bodem P_1 (P_2) (tj. pár bodové involuce na kružnici leží na přímce procházející bodem P_1 (P_2).
- Nechť pomocné body P_1, P_2 indukují involuci na kružnici k, vedenou body Q_1, Q_2. V této konstrukci máme za úkol spojit průsečíky přímek. Jelikož se jedná o komplexní průsečíky, nesestrojíme jejich spojnici, nýbrž reálnou část přímky komplexními body procházející. Poněvadž se jedná o konstrukci duální budeme opět hledat involuci, v které se obě zadané involuce přímkové σ_1, σ_2 protnou v involuci bodové. Hledané přímky označíme x, y.

1. Spojnice bodů $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ je přímka, nacházející se v obou svazcích. K této přímce sestrojíme involutorní pár v obou involucích σ_1, σ_2. Tím získáme v každé involuci po jednom páru, jenž si navzájem odpovídají.
   - Spojnici $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ nazveme $r_1 = r_2$.

- Nyní hledejme přímku do páru. Průsečík přímky r_1 (r_2) (vycházející z bodu Q_1 (Q_2)) s kružnicí k spojíme s bodem P_1 (P_2) (Průsečík máme v obrázku označen Q_2 pro přímku r_1 $(Q_1$ pro přímku $r_2)$.
- Veďme sečnu $\overleftrightarrow{Q_2P_1}$ $(\overleftrightarrow{Q_1P_2})$.
- Průsečík právě vzniklé sečny procházející bodem P_1 (P_2) s kružnici k spojíme s bodem Q_1 (Q_2). Tuto nově vzniklou přímku nazveme r_1' (r_2').

2. Nyní musíme najít stejný druhý pár v obou involucích. Nechť je to pár, který odděluje přímky r_1, r_1' (r_2, r_2') harmonicky. Hledaný druhý pár s_1, s_1' (s_2, s_2') je společným párem involuce σ_1 (σ_2) a involuce se samodružnými přímkami r_1, r_1' (r_2, r_2').

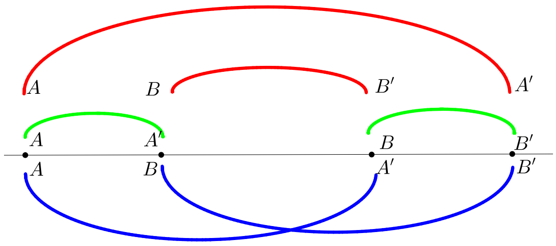
   - Sestrojíme tečnu ke kružnici k z průsečíku přímky r_1 (r_2) s kružnicí k odlišného od Q_1 (Q_2).
   - Sestrojíme tečnu ke kružnici k z průsečíku přímky r_1' (r_2') s kružnicí k odlišného od Q_1 (Q_2).
   - Příslušný průsečík obou tečen označíme G_1 (G_2).
   - Poveďme sečnu kružnicí k procházející body $\overleftrightarrow{G_1P_1}$ $(\overleftrightarrow{G_2P_2})$.
   - Z průsečíků sečny s kružnicí k veďme přímky příslušným bodem Q_1 (Q_2). Tyto přímky jsou náš druhý hledaný pár s_1s_1' (s_2s_2').

3. Obě hledané přímky x, y musí procházet průsečíkem $r_1' \cap r_2'$ ze stejného důvodu, jako v předchozí konstrukci. Dále musí přímky x, y procházet průsečíky $s_1 \cap s_2, s_1 \cap s_2', s_2' \cap s_1', s_1' \cap s_2$. Nemusíme konstruovat všechny průsečíky, protože přímka je zadána dvěma body jednoznačně. Nejsme schopni rozlišit přímky x, y a páry involucí můžeme prohazovat. V řešení níže, si zvolíme jednu konkrétní volbu takovou, abychom získali výsledné přímky.

   - Sestrojím přímku x procházející průsečíky $s_2' \cap s_1', s_1 \cap s_2$. Pro kontrolu musí procházet průsečíkem $r_1' \cap r_2'$.
   - Sestrojím přímku y procházející průsečíky $s_2 \cap s_1', s_1 \cap s_2'$. Pro kontrolu musí procházet průsečíkem $r_1' \cap r_2'$.

Poznámka 8. Stejně jako v předchozí konstrukci si můžeme všimnout toho, že přímky i_1, i_1', i_2, i_2' tvoří úplný čtyřstran s diagonálním trojúhelníkem xyr_1 (xyr_2).

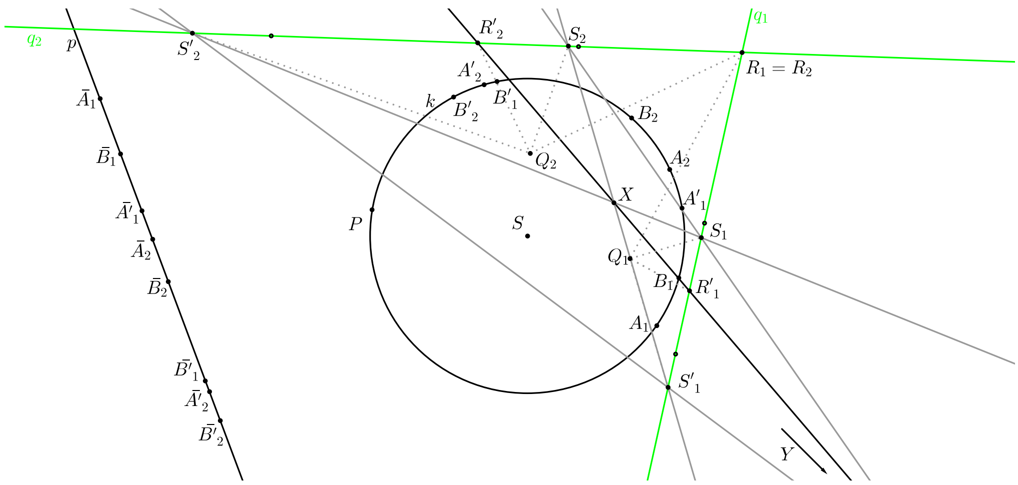
Další konstrukcí, která nás bude zajímat, bude zjistit jaké všechny involuce mohou tvořit čtyři body. Jsou-li všechny čtyři body reálné, existují tři řešení uvedená na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: involuce tvořené čtyřmi body

Budou-li všechny čtyři body komplexní, budou tvořit též tři involuce, které si ukážeme na další konstrukci.

Konstrukce 4. Nechť jsou dány na přímce p čtyři komplexní body I_1, I_1', I_2, I_2' po dvou sdružené. Stanovme všechny involuce které, tyto body určují. Nechť body I_1, I_1' jsou samodružné body involuce σ_1, určené páry $\bar{A}_1, \bar{A}_1', \bar{B}_1, \bar{B}_1'$ na přímce p. Nechť body I_2, I_2' jsou samodružné body involuce σ_2, určené páry $\bar{A}_2, \bar{A}_2', \bar{B}_2, \bar{B}_2'$ na přímce p.



Obrázek 2.5: konstrukce 4

- Páry $\bar{A}_1, \bar{A}_1', \bar{B}_1, \bar{B}_1'$ ($\bar{A}_2, \bar{A}_2', \bar{B}_2, \bar{B}_2'$) musí být na přímce p dány jako souhlasné projektivní soustavy, aby samodružné body byli komplexně sdružené.

- K doplňování involuce chceme mít dán střed involuce a dva páry. Dva páry bodů již máme. Stačí tedy najít pouze střed involuce. Čtyři body I_1, I_1', I_2, I_2' určují tři involuce. Jedna involuce, kde máme páry I_1, I_1' a I_2, I_2' je spojnice těchto párů v nevlastním bodě. Tento nevlastní bod je středem involuce. Abychom získali zbylé dva středy, promítneme si involuce σ_1, σ_2 na libovolnou kružnici k. Na kružnici k sestrojíme direkční přímky q_1, q_2 involucí σ_1, σ_2. Na direkční přímky q_1, q_2 promítneme involuce σ_1, σ_2. Tím konstrukci přetransformujeme do konstrukce, kdy musíme najít spojnice samodružných bodů involuce na přímce q_1 se samodružnými body involuce na přímce q_2. Nyní již stačí aplikovat postup z konstrukce 2.

1. Promítneme si body involuce σ_1 (σ_2) na kružnici k.

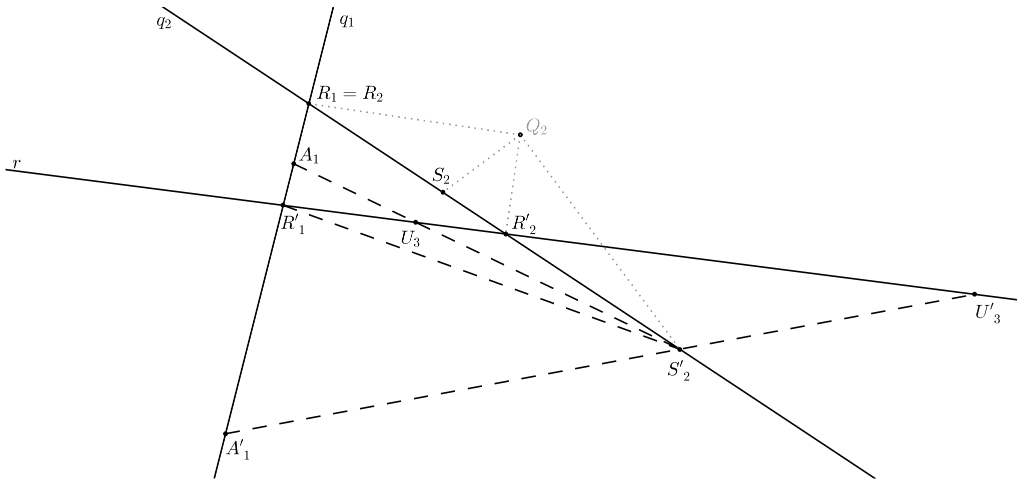
- Sestrojíme libovolnou kružnici k procházející libovolným bodem P.
- Sestrojíme přímky procházející bodem P a body $\bar{A}_1, \bar{A}'_1, \bar{B}_1, \bar{B}'_1$ $(\bar{A}_2, \bar{A}'_2, \bar{B}_2, \bar{B}'_2)$.
- Označme průsečíky přímek $A_1 = \overleftrightarrow{P\bar{A}_1}, A'_1 = \overleftrightarrow{P\bar{A}'_1}, B_1 = \overleftrightarrow{P\bar{B}_1}$, $B'_1 = \overleftrightarrow{P\bar{B}'_1}$ $(A_2 = \overleftrightarrow{P\bar{A}_2}, A'_2 = \overleftrightarrow{P\bar{A}'_2}, B_2 = \overleftrightarrow{P\bar{B}_2}, B'_2 = \overleftrightarrow{P\bar{B}'_2})$.

2. Sestrojme direkční přímky q_1 (q_2) involuce $\sigma_1(A_1, \ldots)$ $(\sigma_2(A_2, \ldots))$ na kružnici k. Jelikož jsou jejich samodružné body komplexně sdružené, tak tvoří eliptickou involuci. Z toho plyne, že direkční přímka q_1 (q_2) musí nutně být nesečnou kružnice k.
   - Sestrojíme průsečík $\overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A'_1B'_1}$ $(\overleftrightarrow{A_2B_2} \cap \overleftrightarrow{A'_2B'_2})$.
   - Sestrojíme průsečík $\overleftrightarrow{A_1B'_1} \cap \overleftrightarrow{A'_1B_1}$ $(\overleftrightarrow{A_2B'_2} \cap \overleftrightarrow{A'_2B_2})$.
   - Vzniklé průsečíky spojíme v direkční přímku q_1 (q_2).
3. Nyní promítneme involuci σ_1 (σ_2) na přímku q_1 (q_2).
   - Pozorujme průsečíky přímek q_1 (q_2) s přímkami $\overleftrightarrow{A_1\bar{A}_1}, \overleftrightarrow{A'_1\bar{A}'_1}, \overleftrightarrow{B_1\bar{B}_1}, \overleftrightarrow{B'_1\bar{B}'_1}$ $(\overleftrightarrow{A_2\bar{A}_2}, \overleftrightarrow{A'_2\bar{A}'_2}, \overleftrightarrow{B_2\bar{B}_2}, \overleftrightarrow{B_2\bar{B}_2})$.
4. Pozorované průsečíky tvoří stále involuci. Nalezneme k nim pomocný bod Q_1 (Q_2).
5. Nyní postupujeme dle konstrukce 2. Podle této konstrukce sestrojíme body X,Y. Tím získáváme zbylé dva středy involucí.

V konstrukcí 2 dle poznámky 7 sestrojujeme diagonální trojúhelník úplného čtyřrohu, kde můžou být všechny vrcholy komplexně sdružené. Nyní, bychom se měli podívat na možnost, kdy jsou dva vrcholy reálné a dva vrcholy komplexně sdružené.

Konstrukce 5. Sestrojme diagonální trojúhelník XYR_1 úplného čtyřrohu, máme-li dva jeho vrcholy A_1, A'_1 reálné a dva I_2, I'_2 komplexně sdružené. Nechť jsou body I_2, I'_2 dány jako samodružné body involuce σ_2 na přímce q_2 s pomocným bodem Q_2.

- Dle rozboru konstrukce 2 bude jeden vrchol na průsečíku přímek $\overleftrightarrow{A_1A'_1} \cap q_2$. Čtyřroh je specifický tím, že jsou „všude“ harmonické čtveřice, čehož budeme využívat. Na přímce $q_1 = \overleftrightarrow{A_1A'_1}$ sestrojíme bod R'_1, aby platilo $(AA'_1R_1R'_1) = -1$. Získáváme tak druhý pár $R_1R'_1$.Tyto dva páry definují na přímce q_1 involuci σ_1. Tato involuce je eliptická dle věty 1. Na přímce q_2 sestrojíme body S_2, R'_2, S'_2 aby platilo $(R_2R'_2S_2S'_2) = -1$ a zároveň aby $R_2R'_2, S_2S'_2$ byly páry involuce na q_2 s pomocným bodem Q_2. Pak musí být protější strana diagonálního trojúhelníku k vrcholu $R_1 = R_2$ přímka $r = \overleftrightarrow{R'_1R'_2}$. Na přímce r leží zbylé dva vrcholy X, Y. Podíváme-li se na obrázek konstrukce 2 z jiného úhlu, usoudíme, že dvojice bodů X, Y jsou samodružné komplexně sdružené body involuce na přímce r. K danému páru



Obrázek 2.6: konstrukce 5

R'_1, R'_2 na přímce r musíme sestrojit druhý pár U_3, U'_3 takový, aby body X, Y byly samodružné body involuce na přímce r a zároveň aby X, Y byly vrcholy diagonálního trojúhelníku. Toho docílíme tím, že promítneme harmonickou čtveřici na přímce q_2 na přímku r a současně na ní promítneme i harmonickou čtveřici z přímky q_1. Tím získáme dva páry bodů involuce na přímce r, jejichž samodružné body budou body X, Y.

1. Sestrojíme harmonickou čtveřici na přímce q_1, aby platilo $(AA'_1R_1R'_1) = -1$. Toho docílíme například konstrukcí úplného čtyřrohu nad přímkou q_1 (Úloha 6).

2. Na přímce q_2 sestrojíme harmonickou čtveřici $R_2R'_2S_2S'_2$, jako v konstrukci 2.

    - Sestrojme přímku $\overleftrightarrow{R_2Q_2}$.
    - K ní sestrojme kolmici bodem Q_2.
    - Kolmice nám protne přímku q_2 v hledaném bodě R'_2.
    - Sestrojíme osy úhlů přímek $\overleftrightarrow{R_2Q_2}$ a $\overleftrightarrow{R'_2Q_2}$.
    - Na průsečících os uhlů s q_2 nalezneme druhý pár S_2, S'_2.

3. Spojením bodů R'_1, R'_2 získáme potřebnou stranu diagonálního trojúhelníku dle poznámky 7 za konstrukcí 2.

4. Stačí již promítnout harmonické čtveřice z q_1 a z q_2 na přímku r. Toho lze docílit několika projekcemi.

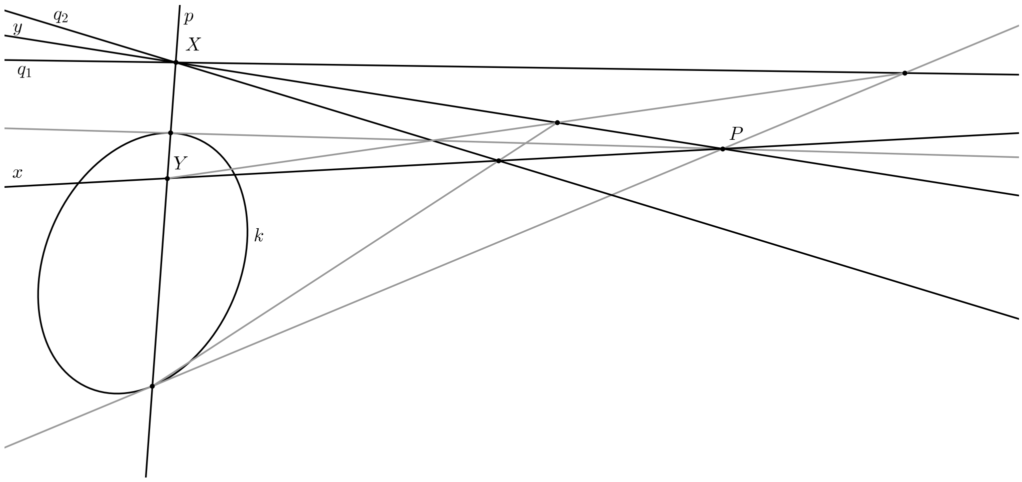
    - Například: $(R_2R'_2S_2S'_2) = (R'_1R'_2U_3U'_3) = (R'_1R_1A_1A'_1) = -1$.
    - Střed tohoto promítání je bod S'_2.
    - To znamená, že na spojnici $\overleftrightarrow{A'_1S'_2}$ leží bod U'_3.
    - Na spojnici $\overleftrightarrow{A_1S'_2}$ leží bod U_3.
    - Zároveň oba body U_3, U'_3 leží na přímce r, tím jsou jednoznačně zadány.

5. Body X, Y jsou samodružné body involuce na přímce r určené páry $R_1'R_1$, U_3, U_3'.

3. Konstrukce s imaginárními elementy se zadanou kuželosečkou

Nyní bychom se podívali na konstrukce, v kterých již figuruje kuželosečka zadaná imaginárními elementy. Kuželosečka je pro nás doteď jednoznačně zadána pěti reálnými elementy (Úloha 1 a 2). Proto se budeme snažit v následujících konstrukcích najít vždy alespoň pět reálných elementů. Dále bychom si měli připomenout, že sečna má s kuželosečkou společné dva body a to i v případě, jedná-li se o sečnu imaginární. V následující konstrukci se podíváme na to, jak najít druhý společný bod sečny s kuželosečkou, známe-li jeden takový bod. Je-li zadaný společný bod sečny a kuželosečky reálný, pak je i sečna reálná. Stačí pouze sestrojit průsečík sečny s kuželosečkou. Je-li zadaný společný bod sečny a kuželosečky imaginární, sečna je imaginární přímka. Řešení si ukážeme na následující konstrukci.

Konstrukce 6. Nechť je dána kuželosečka k, na které se nachází komplexní bod I_1 a bod P vně kuželosečku k. Proložme přímku body $\overleftrightarrow{PI_1}$. Najděme druhý průsečík přímky $\overleftrightarrow{PI_1}$ s kuželosečkou k. Bod I_1 je samodružný bod involuce na přímce q_1.



Obrázek 3.1: konstrukce 6

- Nelze nahlížet pouze na jeden komplexní bod I_1 kuželosečky k, proto si k němu vezmeme i jeho komplexně sdružený bod I_1'. Ten musí též ležet na kuželosečce k. Body I_1, I_1' jsou samodružné komplexně sdružené body involuce na přímce q_1 a současně jsou to body kuželosečky k. Naším cílem je najít na přímkách $\overleftrightarrow{I_1P}$ a $\overleftrightarrow{I_1'P}$ druhé průsečíky I_2, I_2' s kuželosečkou k. Řekněme, že přímky vycházející z bodu P procházející body I_1, I_1', I_2, I_2' tvoří čtyřstran kuželosečce opsaný. Z toho důvodu prohlásíme, že bod P je vrcholem diagonálního trojúhelníku. Jeho protější stranu najdeme jako poláru p. Na průsečíku $q_1 \cap p$ musí nutně ležet druhý vrchol diagonálního trojúhelníku. Poté sestrojíme kompletní diagonální trojúhelník a máme jednoznačně určený úplný čtyřstran. Ze znalosti čtyřstranu pak plyne, že $(q_1q_2py) = -1$. S touto znalostí zkonstruujme přímku q_2. Na přímce q_2 bude totiž involuce se samodružnými body I_2,I'_2.

Když už máme takovýto rozbor, můžeme konstrukci provést jednodušeji. Stačilo by sestrojit poláru p k pólu P, spojit průsečík $p \cap q_1$ s bodem P, tím vznikne přímka y a následně hledat přímku q_2, aby platilo $(q_1q_2py) = -1$.

1. V obou postupech konstrukce sestrojíme nejdříve poláru p k pólu P (Úloha 8).

2. Průsečík poláry p a přímky q_1 označíme X.

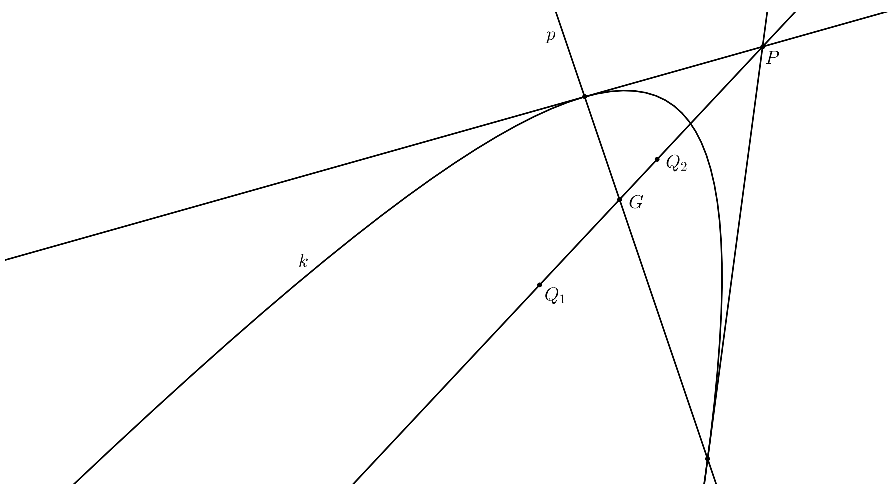
3. Nyní můžeme buďto sestrojit přímku $\overleftrightarrow{XP}$, nebo k bodu X hledat poláru x, (ta nám protne bod P). Označme průsečík polár $p \cap x$ jako třetí vrchol Y diagonálního trojúhelníku. Polára y musí nutně procházet body X, P. To plyne z vlastnosti diagonálního trojúhelníku.

   - Pro jednoduchost sestrojme přímku $x = \overleftrightarrow{XP}$. (V obrázku je uveden i diagonální trojúhelník XYP.)

4. Teď už stačí najít přímku q_2 tak, aby platilo $(q_1q_2py) = -1$. Sestrojili jsme si již diagonální trojúhelník, stačí jen doplnit přímky, aby vznikl úplný čtyřstran. Nemáme-li diagonální trojúhelník sestrojen, musíme si sestrojit libovolný čtyřstran, aby platilo $(q_1q_2py) = -1$ (Úloha 6).

K této konstrukci je duální.

Konstrukce 7. Nechť je dána kuželosečka k a libovolná sečna p. Nechť je dán bod Q_1, z kterého vedou komplexně sdružené tečny i_1, i'_1 ke kuželosečce k. (Z toho plyne, že bod Q_1 může být libovolný vnitřní bod kuželosečky k). Komplexně sdružené tečny i_1, i'_1 protínají sečnu p v bodech, z nichž chceme vést tečny i_2, i'_2 ke kuželosečce k. Sestrojme průsečík tečen i_2, i'_2.



Obrázek 3.2: konstrukce 7

- Je zřejmé, že průsečíky i_1, i_1' se sečnou p tvoří dva různé průsečíky, z kterých můžeme vést ke kuželosečce k celkem čtyři tečny i_1, i_1', i_2, i_2'. Vezmeme-li úplný čtyřstran tvořený tečnami i_1, i_1', i_2, i_2', pak sečna p je jedna strana diagonálního trojúhelníku. Pak tedy pól P poláry (sečny) p je protějším vrcholem v diagonálním trojúhelníku. Dále dle vlastností čtyřstranu musí být spojnice $\overleftrightarrow{PQ_1}$ další stranou diagonálního trojúhelníku. Dle symetričnosti zadání a výsledku můžeme prohlásit, že průsečík $i_2 \cap i_2'$ musí ležet na přímce $\overleftrightarrow{PQ_1}$. Jelikož nemůžeme najít tečny i_2, i_2', protože jsou komplexně sdružené, sestrojíme si alespoň jejich průsečík $Q_2 = i_2 \cap i_2'$. Bod Q_2 musí ležet na přímce $\overleftrightarrow{PQ_1}$ tak, aby splňoval $(Q_1Q_2GP) = -1$, kde $G = p \cap \overleftrightarrow{PQ_1}$.

1. Díky rozboru sestrojíme pól P k poláře p (Úloha 7).

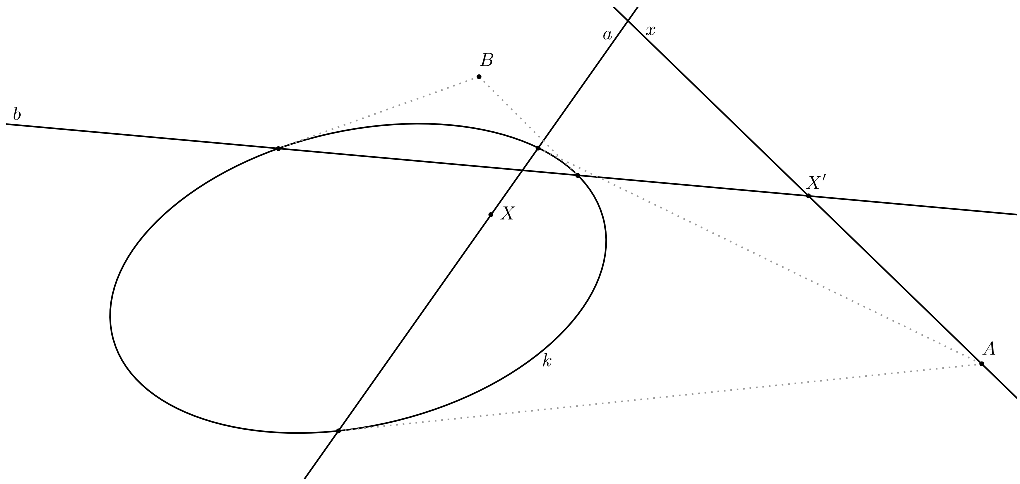
2. Dále dle rozboru sestrojíme bod G. (Bod G musí být další vrchol diagonálního trojúhelníku).

   - sestrojíme spojnici $\overleftrightarrow{PQ_1}$
   - průsečík spojnice $\overleftrightarrow{PQ_1}$ se sečnou p nazveme bod G.

3. Sestrojíme libovolný čtyřroh nad přímkou $\overleftrightarrow{PQ_1}$, aby platilo $(Q_1Q_2GP) = -1$. (Úloha 6)

   - Tím získáme bod Q_2.

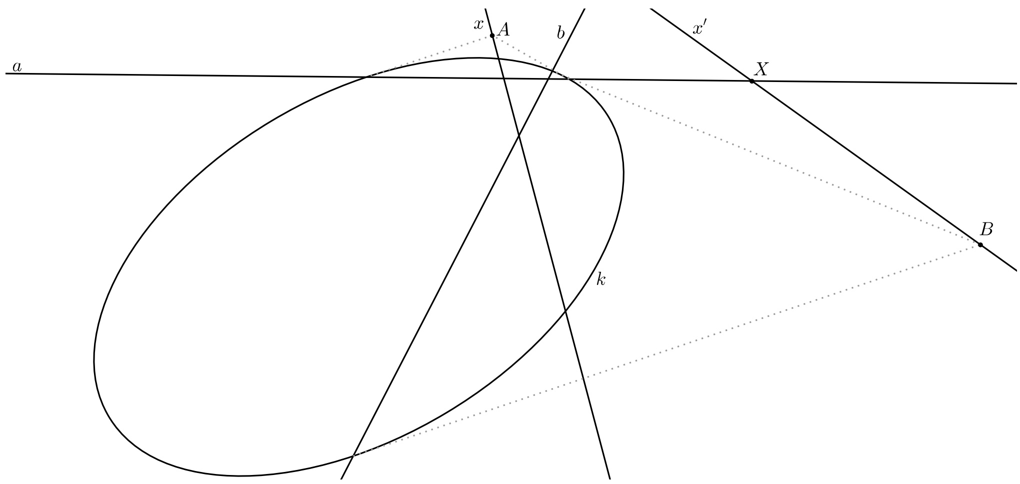
Věta 2. *Nechť máme danou kuželosečku k a dvě přímky a, b, které nejsou sdruženými polárami. Sestrojíme-li póly A, B přímek a, b, získáme tak na přímkách a, b dvě bodové projektivní soustavy.*



Obrázek 3.3: věta 2

Důkaz. Na přímce a zvolme libovolně bod X. K danému bodu X najdeme poláru x. (x musí nutně procházet bodem A).Průsečík $x \cap b$ označíme X'. Pak tvrdíme, že body XX' jsou odpovídající si body v projektivních soustavách na přímkách a, b. To platí, jelikož $a(X, \ldots) ::: A(x, \ldots) :: b(X', \ldots)$. □

Věta 3. *Nechť máme danou kuželosečku k a dva body A, B, které nejsou sdruženými póly. Sestrojíme-li poláry a, b k pólům A, B, získáme tak ve svazcích A, B dvě přímkové projektivní soustavy.*



Obrázek 3.4: věta 3

Důkaz. Bodem A proložíme libovolnou přímku x. K přímce x najdeme pól X. Spojnici $\overleftrightarrow{XB}$ označíme x'. Pak tvrdíme, že přímky x, x' jsou odpovídající si přímky v projektivních soustavách ve svazcích A, B. To platí, jelikož
$A(x, \ldots) ::: a(X, \ldots) :: B(x', \ldots)$. □

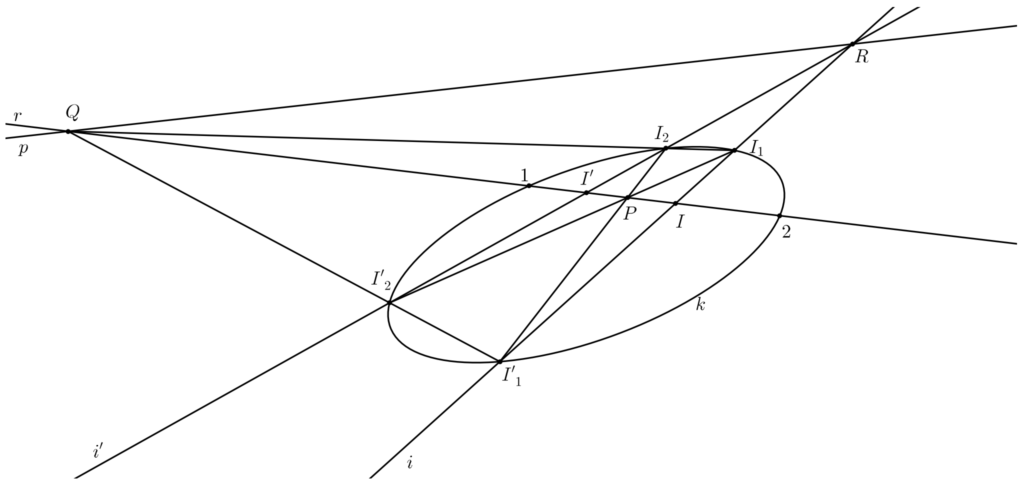
Poznámka 9. Budou-li body A, B (přímky a, b) z předchozích věty 2 (3) sdruženými póly (přímkami), získáme pak pro volbu A, B (a, b), úplný čtyřroh (čtyřstran), namísto dvou projektivních soustav.

Nyní bychom se podívali na průsečíky imaginární přímky s kuželosečkou. Bereme opět dvě komplexně sdružené sečny kuželosečky. Našim úkolem bude sestrojit průsečíky s kuželosečkou.

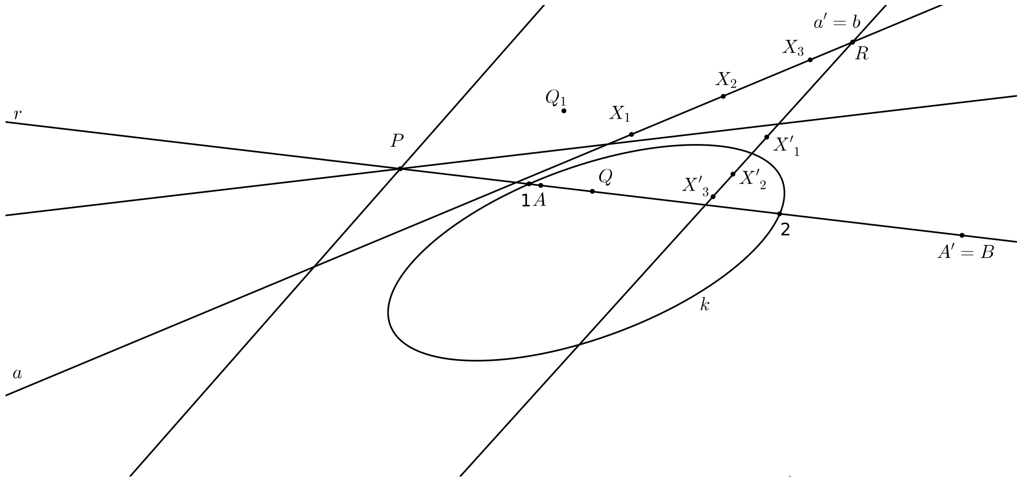
Konstrukce 8. Nechť je dána kuželosečka k a bod R vně kuželosečky. Dále máme dané komplexně sdružené přímky i, i' zadané jako samodružné přímky involuce σ_1 ve svazku R. Sestrojme spojnice průsečíků dvou komplexně sdružených tečen i, i' s kuželosečkou k. (Nechť máme sestrojenou poláru r k pólu R. Involuce σ_1 je promítnutá na přímku r, kde je jednoznačně zadaná pomocným bodem Q_1.)

- Dvě spojnice jsou rovnou zadané sečny i, i'. Svým způsobem se konstrukce podobá konstrukci 4, kde jsme hledali všechny involuce zadané čtyřmi body.

- Jsou-li komplexně sdružené přímky i, i' tečnami kuželosečky k, splývá spojnice průsečíků s polárou r. Nechť tedy tyto přímky nejsou tečnami kuželosečky. Na pomocném obrázku 3.5 nechť jsou pro názornost přímky i, i' reálné. Pak průsečíky s kuželosečkou k označme I_1, I_1', I_2, I_2', jako na obrázku 3.5. V úplném čtyřrohu I_1, I_1', I_2', I_2 jsou příslušné průsečíky spojnic vrcholy diagonálního trojúhelníku. V tomto případě jeden takový vrchol R již máme. Další nesestrojené vrcholy jsou P a Q. Tyto body jsou jednak



Obrázek 3.5: konstrukce 8 s reálným zadáním



Obrázek 3.6: konstrukce 8 s komplexním zadáním

párem involuce v bodové involuci σ_1 a navíc v úplném čtyřrohu platí harmonická čtveřice (v obrázku 3.5 $(PQ12) = -1$). Z toho můžeme body P, Q sestrojit. Pro sestrojení přímek $\overleftrightarrow{I_1I_2'}, \overleftrightarrow{I_2I_1'}$ použijeme postup z věty 2, protože libovolná přímka x procházející bodem P protne přímky r, p v páru involuce σ_1. Pouze speciální průsečíky dalšího páru involuce σ_1 s $\overleftrightarrow{I_1I_2'}$ ($\overleftrightarrow{I_2I_1'}$) jsou sdružené póly, protože pouze v tomto případě, vezmeme-li samodružné body tak, aby příslušná polára byla tečnou kuželosečky k. V tom případě vezmeme libovolný pár a, a' involuce σ_1 mimo pár p, q. Na tomto páru aplikujeme postup z věty 2. Tím získáme nesoumístné projektivní soustavy na přímkách a, a'. Promítneme-li obě projektivní soustavy do jednoho z vrcholů diagonálního trojúhelníku PQR, pak nalezením samodružných přímek těchto projektivit získáme:

- Pro R získáme zadané samodružné přímky involuce σ_1.
- Pro P získáme hledané spojnice $\overleftrightarrow{I_1I_2'}, \overleftrightarrow{I_1'I_2}$, které jsou reálné
- Pro Q získáme hledané spojnice $\overleftrightarrow{I_1I_2}, \overleftrightarrow{I_1'I_2'}$, které jsou komplexně sdružené.

Nyní už stačí jen vysvětlit, proč jsme v obrázku 3.6 sestrojili pouze dvě hledané spojnice, zatímco druhé dvě nikoliv. Druhé dvě spojnice jsou totiž komplexně sdružené. Spojnice vycházející z bodu Q ($\overleftrightarrow{I_1I_2}, \overleftrightarrow{I_1'I_2'}$) jsou komplexně sdružené právě tehdy, jsou-li komplexně sdružené přímky i, i' vycházející z bodu R, protože funkci bodů Q a R můžeme zaměnit. Tím pádem získáme dané dvě komplexně sdružené spojnice jako samodružné přímky projektivit na a, a' promítnuté do bodu Q.

1. Máme dán bod R, kuželosečku k a involuce σ_1. Involuci σ_1 máme zadanou na poláře r bodu R. Sestrojme body P,Q.

   - Body P, Q jsou párem involuce (tj $\angle PQ_1Q$ je pravý).
   - Body P, Q jsou polárně sdružené póly.
   - body $1, 2$ dle obrázku 3.5 jsou dalším párem involuce
   - Sestrojme osy úhlu $\angle 1Q_12$.
   - Průsečíky os úhlu s přímkou r jsou hledané body P, Q.

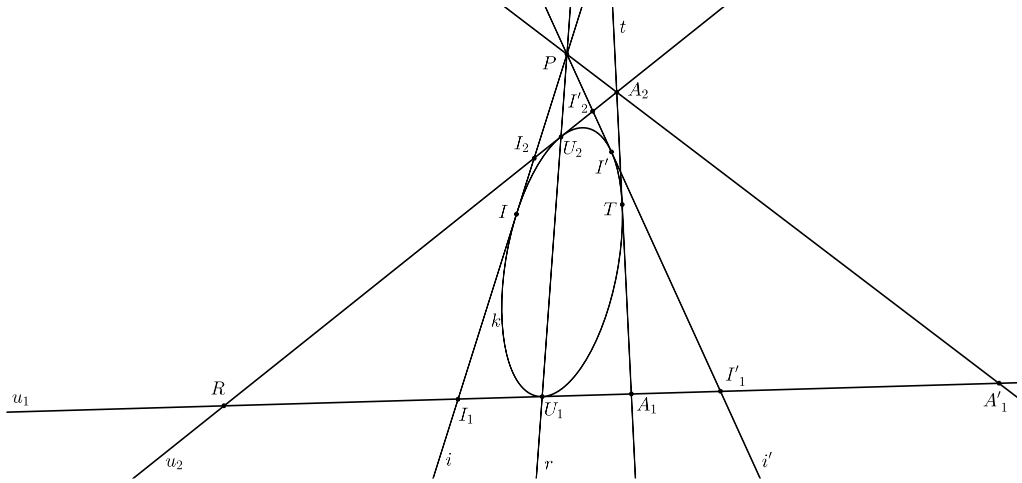
2. Zvolíme si libovolný pár involuce σ_1 vyjma páru p, q. Na něm si sestrojíme dvě projektivní soustavy dle věty 2.

   - Sestrojíme libovolný pár A, A' v involuci σ_1.
   - Bod A' přeznačíme na bod B.
   - Body A, B nechť jsou body z věty 2.
   - Aplikací věty získáme projektivní soustavy $a(X_1, X_2, X_3)$ a $b(X_1', X_2', X_3')$.

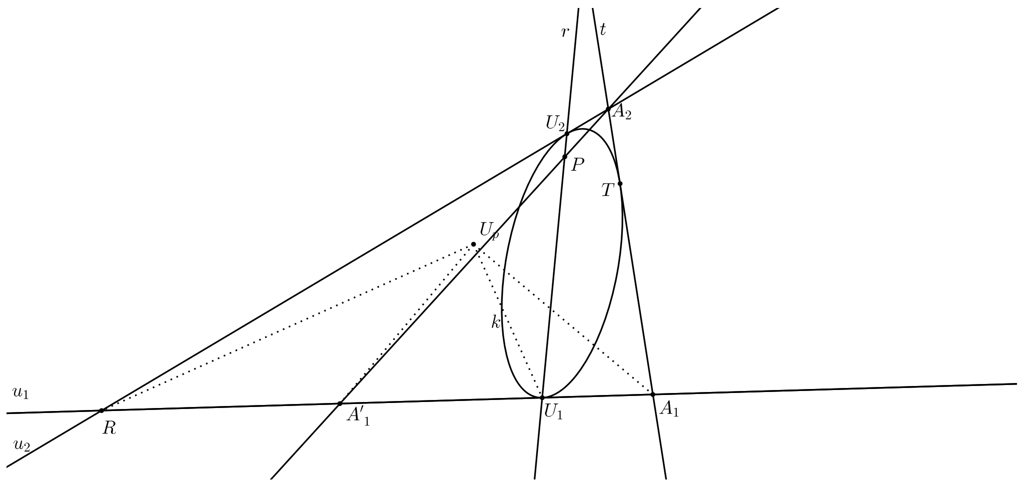
3. Promítnutím projektivních soustav do svazku P a následném nalezení samodružných přímek těchto projektivních soustav ve svazku P získáme požadované spojnice $\overleftrightarrow{I_1I_2'}$,$\overleftrightarrow{I_1'I_2}$. (V obrázku 3.6 jsou to neoznačené přímky procházející bodem P.)

4. Promítnutím projektivních soustav do svazku Q získáme zbylé dvě spojnice $\overleftrightarrow{I_1I_2}$,$\overleftrightarrow{I_1'I_2'}$ jako samodružné přímky těchto projektivních soustav ve svazku Q. Jelikož jsou samodružné přímky komplexně sdružené, nemůžeme je sestrojit (V interaktivní verzi je vidět, že direkční přímka je nesečou pomocné kružnice). Chceme-li můžeme jedině sestrojit involuci s pomocným bodem, jejichž samodružné přímky budou hledané spojnice. To budeme moci sestrojit podle konstrukce 10.

Konstrukce 9. Nechť je dána kuželosečka k. Dále nechť je dán pár komplexně sdružených bodů I_1, I_1' neležících na kuželosečce k. Sestrojte průsečík tečen vedených z bodů I_1, I_1' ke kuželosečce k. Komplexně sdružené body I_1, I_1' jsou dány jako samodružné body involuce σ_1 na přímce u_1 s pomocným bodem U_p, kde přímka u_1 je tečna ke kuželosečce k s dotykovým bodem U_1.



Obrázek 3.7: konstrukce 9 s reálným zadáním



Obrázek 3.8: konstrukce 9 s komplexním zadáním

- Pro lepší názornost konstrukce si vysvětlíme postup konstrukce na obrázku 3.7, kde jsou body I_1, I_1' reálné. Nechť se tečny i, i' vedené z I_1,I_1' protínají v bodě P. Z obrázku dále vyčteme, že bod R je pólem poláry $r = PU_1$. Z tohoto poznatku můžeme bod R sestrojit, protože body R, U_1, I_1, I_1' tvoří harmonickou čtveřici. Dále můžeme sestrojit z bodu R druhou tečnu u_2 ke kuželosečce k. Bod dotyku s kuželosečkou je U_2. Libovolná tečna t s bodem dotyku T nám protne přímky u_1 a u_2 v projektivních soustavách $u_1(A_1, \ldots) ::: u_2(A_2, \ldots)$. My však můžeme projektivní soustavu $u_2(A_2 \ldots)$ promítnout svazkem P na přímku u_1 a získat tak projektivní soustavu $u_1(A_1' \ldots)$. Jelikož na přímce u_1 lze pár U_1,R prohodit, máme na přímce u_1 involuci $u_1(A_1 \ldots) :: u_1(A_1' \ldots)$. Vzhledem k tomu, že tato involuce obsahuje pár RU_1 a $(RU_1I_1I_1') = -1$ jedná se o involuci σ_1 se samodružnými body I_1,I_1'. To znamená, že body A_1, A_1' máme dány jako pár involuce na obrázku 3.8. Přes sestrojenou tečnu z bodu A_1 ke kuželosečce k jsme schopni získat bod A_2 na přímce u_2. Hledaný průsečík P musí tedy ležet na spojnici $\overleftrightarrow{A_1'A_2} \cap r$.

1. Nejprve sestrojíme v harmonické čtveřici $(RU_1I_1I_1') = -1$ bod R.

- Použijeme postup z předchozí konstrukce, kde jsme hledali body P, Q. Jelikož nám body $U_1 = 1 = 2$ splývají, stačí nám pouze najít pár U_1R v involuce σ_1.

2. Nyní sestrojíme druhou tečnu u_2 z bodu R.

3. Pak získáme poláru r spojením bodů dotyků tečen U_1 a U_2 s kuželosečkou k. Na této poláře leží hledaný bod P.

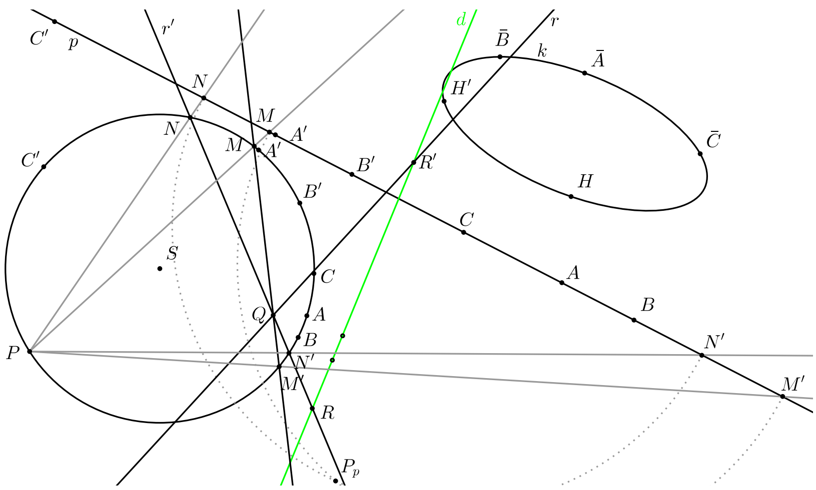
4. Nyní sestrojíme spojnici bodů např: $\overleftrightarrow{A_1'A_2}$

   - Vezmeme libovolný pár involuce na přímce u_1. Nechť je to tedy pár A_1A_1'.
   - Z bodu A_1 sestrojíme tečnu t ke kuželosečce k.
   - Průsečík tečny t s u_2 nazveme A_2.
   - Spojením $\overleftrightarrow{A_1'A_2}$ získáváme potřebou spojnici.

5. Průsečík $\overleftrightarrow{A_1'A_2} \cap r$ je hledaný bod P.

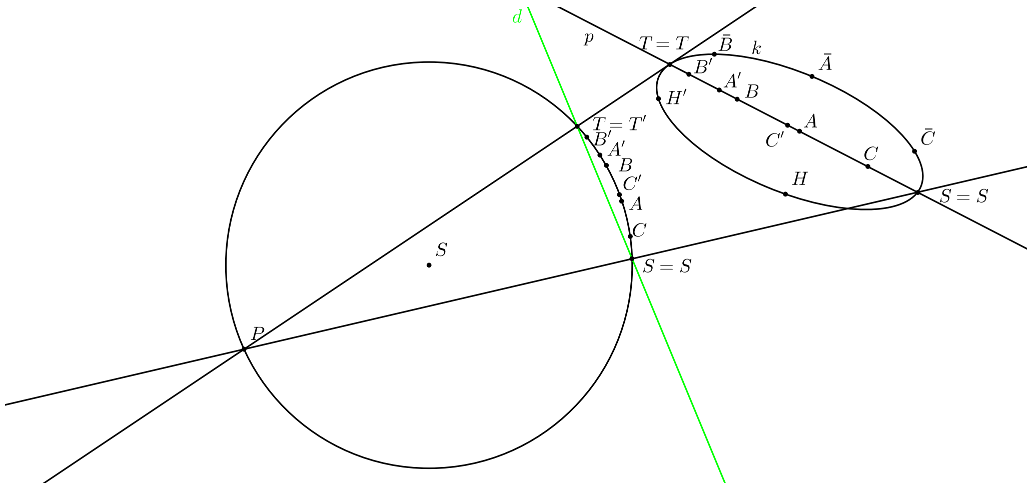
Dále bychom se podívali na konstrukci, kde máme zadanou kuželosečku k a libovolně zvolenou přímku p. Najděme průsečíky této přímky s kuželosečkou k. Je-li přímka p sečnou kuželosečky k je řešení jednoduché. Bude-li však přímka p nesečnou, má s kuželosečkou k společné pouze dva komplexně sdružené body. Tyto body si můžeme najít jako samodružné body involuce.

Konstrukce 10. Nechť je dána kuželosečka k pěti body a libovolně zvolená přímka p, která je nesečnou kuželosečky k. Sestrojte průsečíky kuželosečky k s přímkou p.



Obrázek 3.9: konstrukce 10 s komplexním řešením

- Ať je přímka sečnou či nesečnou, postup hledání je stejný. Nechť je tedy kuželosečka k dána pěti body: $H, H', \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Body A, B, C spojíme s body H, H' Tím nám vznikne šest přímek, které pojmenujeme podle bodů, kterými prochází $a = \overleftrightarrow{AH}, b = \overleftrightarrow{BH}, c = \overleftrightarrow{CH}, a' = \overleftrightarrow{AH'}, b' = \overleftrightarrow{BH'}, c' = \overleftrightarrow{CH'}$.



Obrázek 3.10: konstrukce 10 s reálným řešením

Průsečíky přímek a, a', b, b', c, c' s přímkou p pojmenujeme A, A', B, B', C a C'. Těchto šest bodů nám na kuželosečce k určují projektivitu $p(A, B, C)$ ::: $p(A', B', C')$ jejichž samodružné body jsou hledané průsečíky. Následně si všech šest bodů promítneme na kružnici jako v konstrukci 1. Sestrojíme direkční přímku projektivity. Jsou-li průsečíky direkční přímky s kružnicí reálné, pak tyto body promítneme zpět na přímku p. Je-li direkční přímka nesečnou kružnice k jsou průsečíky komplexně sdružené. To nic nemění na tom, abychom našli involuci, která má stejné samodružné body, jako projektivita. V konstrukci 1 je bod Q, který určuje involuci na kružnici pólem direkční přímky. To samé můžeme sestrojit v tomto případě. Pól Q bude vnitřním bodem kružnice k. Poté můžeme najít libovolné dva páry involuce na kružnici, které promítneme zpět na přímku p. Nyní už jen můžeme v případě potřeby sestrojit pomocný bod involuce.

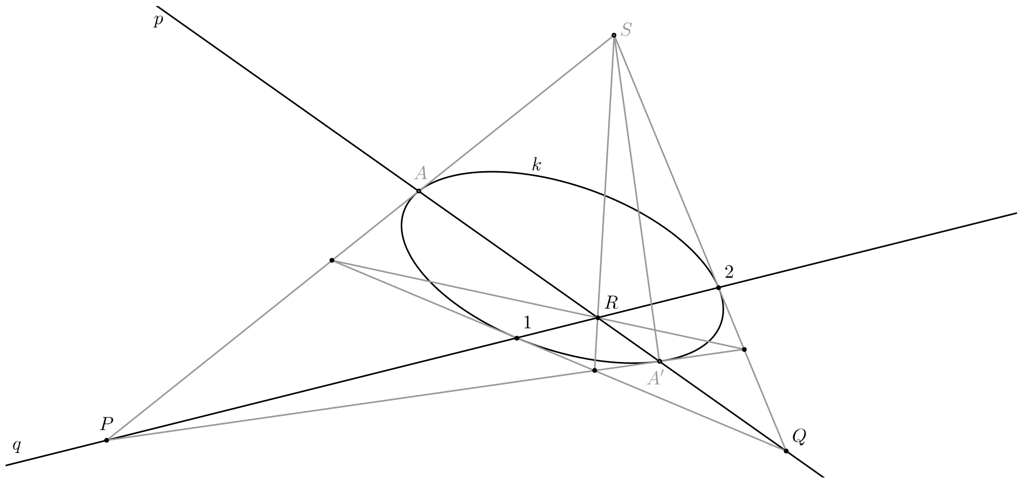
1. Sestrojme na přímce p projektivitu.
   - Veďme přímky $a = \overleftrightarrow{\bar{A}H}, b = \overleftrightarrow{\bar{B}H}, c = \overleftrightarrow{\bar{C}H}, a' = \overleftrightarrow{\bar{A}H'}, b' = \overleftrightarrow{\bar{B}H'}, c' = \overleftrightarrow{\bar{C}H'}$.
   - Průsečíky přímky p s přímkami a, a', b, b', c, c' popořadě označme A, A', B, B', C, C'.
2. Najděme samodružné body projektivity $p(A,B,C)$ ::: $p(A',B',C')$.
   - Zvolme pomocnou kružnici a na ní bod P.
   - Promítněme body A, A', B, B', C, C' na kružnici bodem P.
   - Najděme direkční přímku projektivity $p(A, B, C)$ ::: $p(A', B', C')$.
     (a) Průsečíky direkční přímky s kružnici jsou reálné body S, T.
       - Promítneme průsečíky S, T zpět na přímku p.
       - Tím získáme reálné průsečíky s kuželosečkou k.
     (b) Průsečíky direkční přímky s kružnici jsou komplexní body S, T.
       - K dané direkční přímce najdeme pól. Na direkční přímce zvolíme libovolně bod R, který prohlásíme za pól. K němu sestrojíme poláru r. Označme R' průsečík poláry r s direkční

přímkou. K bodu R' najděme opět poláru r'. Tím získáváme diagonální trojúhelník $RR'Q$, kde bod Q je průsečík $r \cap r'$. Bod Q je pól k direkční přímce d.

- Bod Q nám určuje involuci na kružnici se stejnými samodružnými body, jako má projektivita $p(A, B, C)$ ::: $p(A', B', C')$ dle konstrukce 1.
- Stačí tedy vést libovolně dvě přímky bodem Q. Tím získáme dva páry involuce MM' a NN'.
- Oba páry promítneme zpět na přímku p.
- Na přímce p sestrojíme nad páry MM', NN' kružnice, jejichž průsečík označíme P_p.
- Bod P_p je pomocným bodem involuce na přímce p.

4. Konstrukce kuželoseček s imaginárními elementy

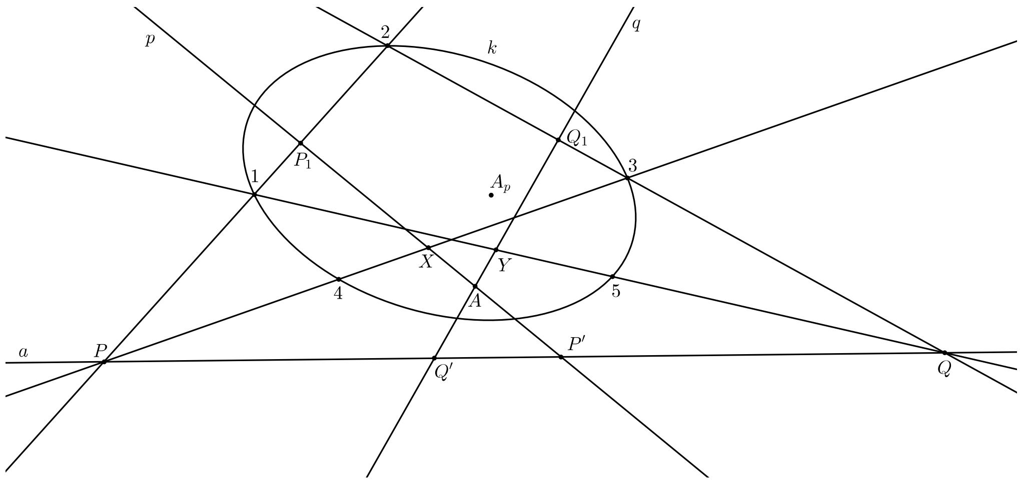
Věta 4. *Nechť je dána kuželosečka k a přímka q protínající kuželosečku k ve dvou bodech 1,2. Dále je dán pól P na přímce q a k němu polára p. Dále jsou dány průsečíky 1,2 kuželosečky k s přímkou q. Pak:*
a) body $P, R = p \cap q, 1, 2$ z obrázku 4.1 tvoří harmonickou čtveřici.
b) přímky $\overleftrightarrow{AS}, \overleftrightarrow{A'S}, \overleftrightarrow{1S}, \overleftrightarrow{2S}$ z obrázku 4.1 tvoří harmonickou čtveřici. Kde bod S je průsečík tečny ke kuželosečce k spuštěné z bodu Q s tečnou kuželosečky k spuštěnou z bodu P, dle obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: věta 4

Důkaz. a) K přímce q existuje pól Q. Pak můžeme prohlásit, že body PQR tvoří diagonální trojúhelník čtyřrohu kuželosečce k opsaného. Sestrojením úplného čtyřrohu získáváme na přímce q harmonickou čtveřici $(PR12) = -1$.
b) Jelikož přímky $\overleftrightarrow{Q1}, \overleftrightarrow{Q2}$ jsou tečnami kuželosečky k, tak bod Q indukuje na k involuci. Body AA' jsou párem této involuce z kterých vedeme přímky do bodu S. Tyto přímky tvoří harmonickou čtveřici, neboť jsou to přímky čtyřstranu s diagonálním trojúhelníkem PRS. □

Konstrukce 11. Sestrojit kuželosečku k z tří bodů reálných $1, 2, 3$ a dvou bodů I, I' komplexně sdružených. Body I, I' jsou dány jako samodružné body involuce σ na přímce a. Involuce σ je jednoznačně zadána svým pomocným bodem A_p.



Obrázek 4.2: konstrukce 11

- Sestrojíme spojnici již známých dvou reálných bodů kuželosečky k. Ta nám protne přímku a v bodě, který nazveme pól. K danému pólu chceme sestrojit poláru. Jeden bod poláry získáme jako čtvrtý harmonický bod: $1, 2$, pólu, a hledaného bodu dle věty 4, bodu a). K pólu sestrojíme jeho obraz v involuci σ na přímce a. Tento právě vzniklý obraz je dalším bodem poláry. Zdůvodnění plyne z pomocného obrázku 4.3 (je-li přímka a sečnou kuželosečky k, jsou samodružné body I, I' reálné, a potom je bod P' dle věty 4, bodu (a), bod na poláře. Navíc zde ale platí, že body P, P' jsou párem involuce σ na přímce a). Z pólu pak veďme přímku jiným reálným bodem kuželosečky. Na této přímce máme tři body: pól, průsečík s polárou a reálný bod kuželosečky. Tato přímka nám protne kuželosečku ještě v jiném reálném bodě. Tyto čtyři body nám dle věty 4, bodu a) tvoří harmonickou čtveřici. Tím získáme další reálný bod kuželosečky. Celý postup zopakujeme pro jinou spojnici dvou reálných bodů kuželosečky k. Tím získáváme pět reálných bodů kuželosečky, z kterých umíme kuželosečku snadno sestrojit.

1. Nyní si vyberme konkrétní volbu dvou reálných bodů. Sestrojím spojnici $\overleftrightarrow{12}$ $(\overleftrightarrow{23})$.

2. Průsečík s přímkou a označíme P (Q).

3. Nechť bod P (Q) je pól. Sestrojme k němu poláru p (q).

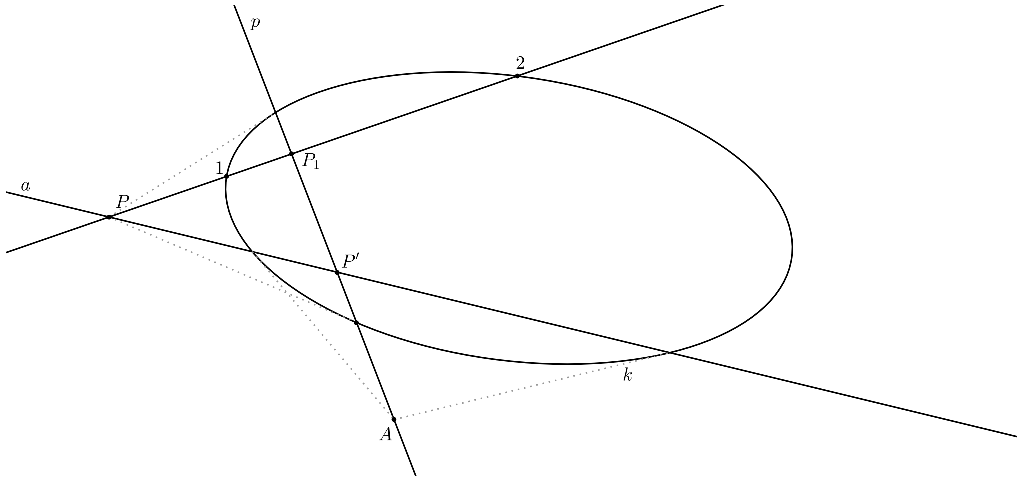
   - Bodu P (Q) odpovídá v involuci σ bod P' (Q'). Sestrojme bod P' (Q') (Úloha 9).
   - Sestrojíme bod P_1 (Q_1). O něm víme, že tvoří harmonickou čtveřici $(PP_1 12) = -1$ $((QQ_1 32) = -1)$ (Úloha 6).
   - Spojnice $\overleftrightarrow{P_1P'}$ $(\overleftrightarrow{Q_1Q'})$ je polára k pólu P (Q).

4. Nyní již sestrojíme další reálný bod 4 (5) kuželoseky k.

   - Nyní spojíme $\overleftrightarrow{P3}$ $(\overleftrightarrow{Q1})$.
   - Tato přímka nám protne poláru p (q) v bodě X (Y).

- Sestrojíme další bod kuželosečky, jelikož $(PX43) = -1$ $((QY51) = -1)$ (Úloha 6).

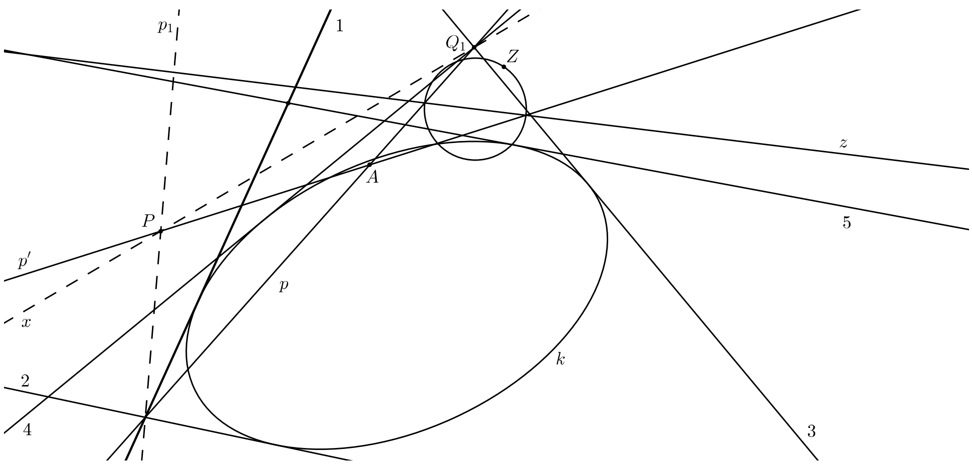
5. Zkonstruujeme kuželosečku k z pěti reálných bodů $1, 2, 3, 4, 5$ (Úloha 1).



Obrázek 4.3: pomocný obrázek ke konstrukci 11

Poznámka 10. V konstrukci 11 leží oba póly P, Q na přímce a, musí se proto nutně obě poláry p, q protínat v pólu A přímky a. To plyne z toho, že výše zmíněné póly tvoří diagonální trojúhelník čtyřrohu na kuželosečce k. Tímto postupem jsme schopni k poláře, která není sečnou kuželosečky k sestrojit pól. Sestrojení bodu A k nalezení kuželosečky k v konstrukci 11 není potřeba.

Konstrukce 12. Sestrojit kuželosečku ze tří tečen reálných $1, 2, 3$ a dvou komplexně sdružených i, i'. Kde i, i' jsou dány jako samodružné přímky involuce σ ve svazku A. Involuce σ je promítnutá na přímku z, kde je určena pomocným bodem Z.



Obrázek 4.4: konstrukce 12

- Spojnice průsečíků dvou tečen s bodem A určuje vzor v involuci σ. Tento vzor je současně polárou. My k ní potřebujeme najít pól. Hledaný pól je průsečíkem obrazu vzoru v involuci σ a čtvrté harmonické přímky harmonické čtveřice: 2,1 a vzor. Že pól leží na čtvrté harmonické přímce říká věta 4, bod b). Z pólu sestrojíme libovolnou přímku, která prochází průsečíkem vzoru s libovolnou další tečnou. Dle věty 4, bodu b) sestrojíme další tečnu jako čtvrtou harmonickou přímku z posledně jmenované tečny, vzoru a posledně sestrojené přímky. Tento postup můžeme zopakovat pro jinou volbu tečen. Tím získáme pět tečen, z kterých snadno sestrojíme kuželosečku k.
- Pro lepší názornost obrázku ke konstrukci, zobrazují v obrázku pouze konstrukci čtvrté tečny. Pátá tečna je znázorněná v elektronické verzi konstrukce.

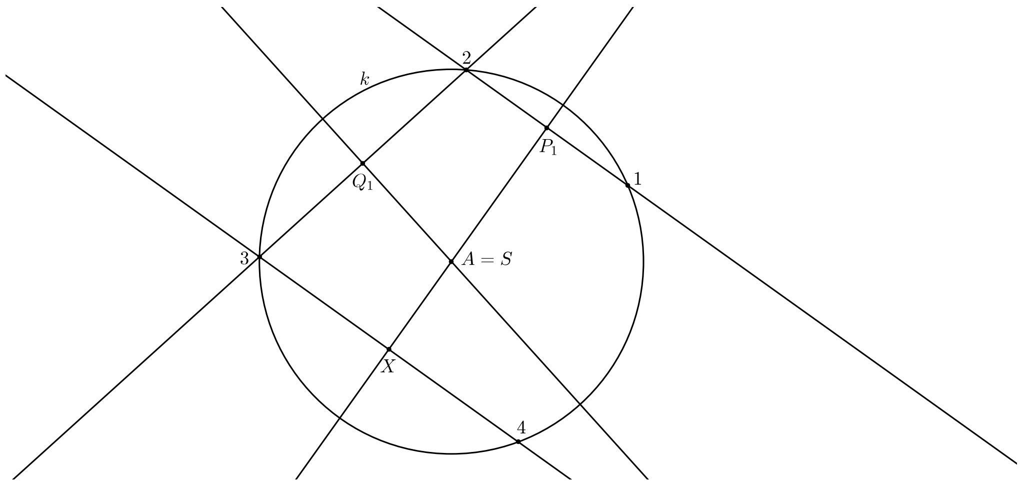
1. Sestrojíme poláru p (q)z průsečíku $1 \cap 2$ $(2 \cap 3)$ spojeného s bodem A.
2. K poláře p (q) najdeme pól P (Q).
   - Ten leží na přímce p_1 (q_1), která je čtvrtou harmonickou přímkou harmonické čtveřice $(12p_1p) = -1 \quad ((23q_1q) = -1)$.
   - Dále leží na přímce p' (q'), která je obrazem vzoru p (q) v involuci σ.
   - $P = p_1 \cap p' \quad (Q = q_1 \cap q')$.
3. Nyní sestrojíme již další tečnu 4 (5).
   - Zvolíme přímku x (y) procházející pólem P (Q) a průsečíkem $3 \cap p \quad (1 \cap q)$.
   - Pro hledanou tečnu 4 (5) platí: $(34px) = -1 \quad ((15qy) = -1)$. Z tohoto poznatku ji již můžeme narýsovat.
4. Zkonstruujeme kuželosečku z pěti reálných tečen $1, 2, 3, 4, 5$.

Poznámka 11. V konstrukci 12 se protínají obě poláry p, q v bodě A. Musí tedy být spojnice pólů $\overleftrightarrow{12}$ polárou k pólu A. Tímto způsobem můžeme narýsovat poláru k pólu, který je vnitřním bodem kuželosečky.

Prozatím jsme byli schopni rýsovat kružnici, bez znalosti pojmu kolmost, pouze z pěti reálných elementů a z konstrukcí pěti elementům odpovídajících. Nyní bychom měli být schopni narýsovat kružnici ze tří reálných bodů. Jelikož každá kružnice prochází izotropickými body (to jsou imaginární komplexně sdružené body na nevlastní přímce), jsme schopni dle konstrukce 11 kružnici narýsovat. Následující konstrukce kružnice je samozřejmě s užitím kružítka triviální, ale my bychom se nad ní chtěli zamyslet s užitím znalosti komplexních elementů v projektivní geometrii.

Konstrukce 13. Sestrojit kružnici ze tří reálných bodů $1, 2, 3$.

- Jelikož jsou izotropické body nevlastní, je přímka a z kontrukce 11 nevlastní. Z toho důvodu jsou póly na této přímce nevlastní. Konstrukce se nám velmi zjednoduší. Spojme dva reálné body. Pak čtvrtý harmonický bod leží na ose



Obrázek 4.5: konstrukce 13

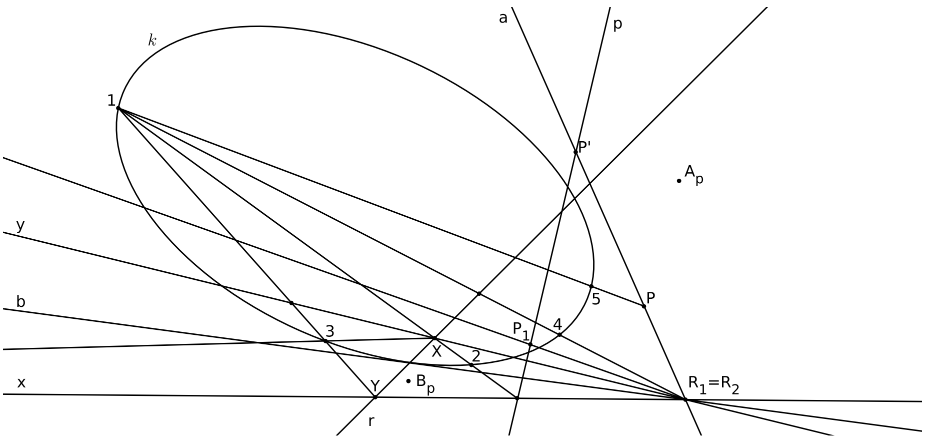
úsečky dvou reálných bodů. Dalším reálným bodem vedeme rovnoběžku se spojnicí dvou reálných bodů. Tuto rovnoběžku protíná osa úsečky ve čtvrtém harmonickém bodě. Sestrojením harmonické čtveřice získáváme další reálný bod kružnice. Tento postup zopakujeme pro jinou volbu reálných bodů, tím získáváme pět reálných bodů, z kterých kružnici jednoduše sestrojíme. V obrázku pátý bod kvůli přehlednosti není zobrazen.

1. Spojíme body $\overleftrightarrow{12}$ $(\overleftrightarrow{23})$.
2. Střed spojnice je bod P_1 (Q_1), kterým vede osa úsečky $\overline{12}$ $(\overline{23})$.
3. Sestrojíme rovnoběžku s $\overleftrightarrow{12}$ $(\overleftrightarrow{23})$ bodem 3 (1).
4. Průsečík rovnoběžky s osou úsečky označme X (Y).
5. V osové symetrii podle středu X (Y) sestrojíme ze vzoru 3 (1) obraz bodu 4 (5). Nebo aplikujeme úlohu 6 pro $(34X\infty) = -1$ $((15Y\infty) = -1)$.
6. Tím jsme získali body $4, 5$, z kterých snadno sestrojíme kružnici k (Úloha: 1).

Poznámka 12. Dle znalosti kružnice je v konstrukci 13 pól A střed kružnice.

Konstrukce 14. Sestrojit kuželosečku k z jednoho reálného bodu 1 a dvou párů komplexně sdružených bodů I_1I_1' a I_2I_2'. Body I_1, I_1' (I_2, I_2') jsou dány jako samodružné body involuce σ_1 (σ_2) na přímce a (b) určené pomocným bodem A_p (B_p).

- Komplexně sdružené body I_1, I_1', I_2, I_2' určují čtyřroh z konstrukce 2 s diagonálním trojúhelníkem $XYR_1(XYR_2)$ dle poznámky 7. Dále dle věty 4, bodu a), jsme schopni z bodu 1 pomocí diagonálního trojúhelníku XYR_1 sestrojit další tři body $2, 3, 4$ kuželosečky k. Pro získání dalšího bodu kuželosečky k použijeme konstrukci 11, protože máme již dva reálné body, a eliptickou involuci na přímce a potažmo b.



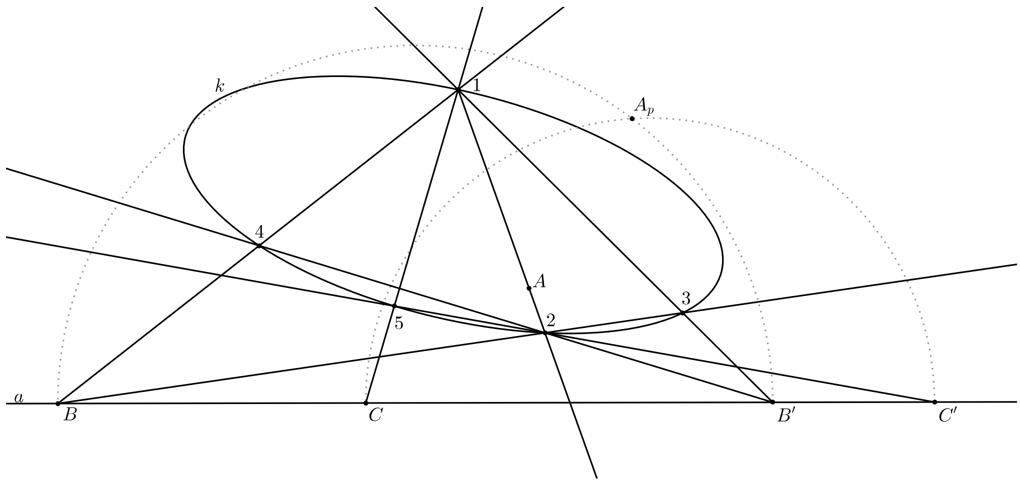
Obrázek 4.6: konstrukce 14

1. Sestrojíme diagonální trojúhelník, dle konstrukce 2.
2. Sestrojíme body $2, 3, 4$ pomocí diagonálního trojúhelníku XYR_1 dle věty 4, bodu a).
   - Sestrojíme bod 2, pomocí pólu X a poláry x.
   - Sestrojíme bod 3, pomocí pólu Y a poláry y.
   - Sestrojíme bod 4, pomocí pólu R a poláry r.
3. Na průsečíku spojnice $\overleftrightarrow{24}$ s přímkou a nalezneme pól P. K němu najdeme poláru, dle konstrukce 11.
   - Polára p prochází obrazem P' bodu P v involuci σ_1.
   - Navíc prochází čtvrtým harmonickým bodem $(PP_142) = -1$.
4. Pomocí poláry p, pólu P a bodu 1 sestrojíme bod 5 dle věty 4, bodu a).

Konstrukce 15. Konstrukce kuželosečky k z jednoho reálného bodu 1 a dvou komplexně sdružených tečen i, i' s body dotyku I, I'. Nechť A je průsečík dvou komplexně sdružených tečen i, i'. Nechť body dotyku I, I' jsou samodružné body eliptické involuce určené na přímce a pomocným bodem A_p.

- Uvědomíme-li si, že bod A je pól poláry a na kuželosečce k, můžeme bod 2 sestrojit klasicky harmonickou čtveřicí, dle věty 4, bodu a). Pak nalezneme na přímce a pár involuce. Nechť je to třeba pár BB'. Pak na průsečících $\overleftrightarrow{B2} \cap \overleftrightarrow{B'1}$ ($\overleftrightarrow{B'2} \cap \overleftrightarrow{B1}$) najdeme body 3 (4). Protože přímky $\overleftrightarrow{B'B}, \overleftrightarrow{B'2}, \overleftrightarrow{B'A}, \overleftrightarrow{B'3}$ tvoří harmonickou čtveřici dle věty 4, bodu b). Postup hledání bodů $3, 4$ zopakujeme pro jiný pár involuce na přímce a.

1. Sestrojíme bod 2 jako čtvrtý harmonický bod $(12A\ \overleftrightarrow{1A} \cap a) = -1$.
2. Sestrojíme body $3, 4$ $(5, 6)$.
   - Najdeme si libovolný pár involuce na přímce a. Nechť je to pár BB' (CC').

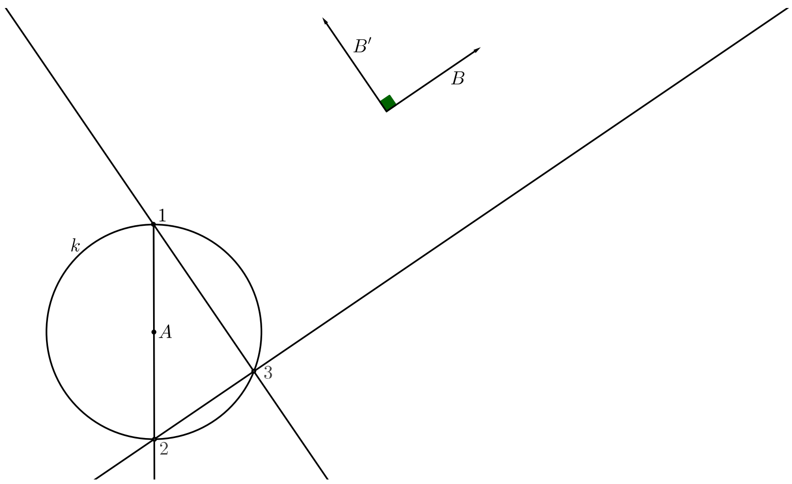


Obrázek 4.7: konstrukce 15

- bod 4 (5) leží na průsečíku $\overleftrightarrow{B1} \cap \overleftrightarrow{B'2}$ ($\overleftrightarrow{C1} \cap \overleftrightarrow{C'2}$).
- Bod 3 (6) leží na průsečíku $\overleftrightarrow{B2} \cap \overleftrightarrow{B'1}$ ($\overleftrightarrow{C2} \cap \overleftrightarrow{C'1}$).
- Bod 6 nekonstruujeme, jelikož máme již pět bodů, které nám stačí ke konstrukci kuželosečky (Úloha 1).

Speciálním případem konstrukce 15 je najít kuželosečku, kde přímka a je nevlastní přímkou. Pak se bod A stává středem kuželosečky k. Tím se nám z kuželosečky stává kružnice určená středem A s jedním bodem 1.

Konstrukce 16. Sestrojte kružnici pomocí středu A a jednoho reálného bodu 1.



Obrázek 4.8: konstrukce 16

- Střed A je pólem póalry a, která je u kružnice nevlastní přímka, jelikož každá kružnice prochází izotropickými body. Bod A společně s izotopickými body tvoří diagonální trojúhelník. Z tohoto poznatku, můžeme kružnici sestrojit. Bod 2 je tradičně čvrtým harmonickým bodem $(12A\infty) = -1$, dle 4, bodu a). Dále si sestrojíme libovolný pár (např: BB') involuce na nevlastní přímce a. Body BB' jsou nevlastními body, jejichž směry lze znázornit z libovolného reálného bodu. Tyto směry musí být na sebe kolmé. Dle konstrukce 15 leží další bod kružnice na průsečíku $\overleftrightarrow{1B'} \cap \overleftrightarrow{2B}$. Touto metodou můžeme sestrojit libovolné množství bodů kružnice.

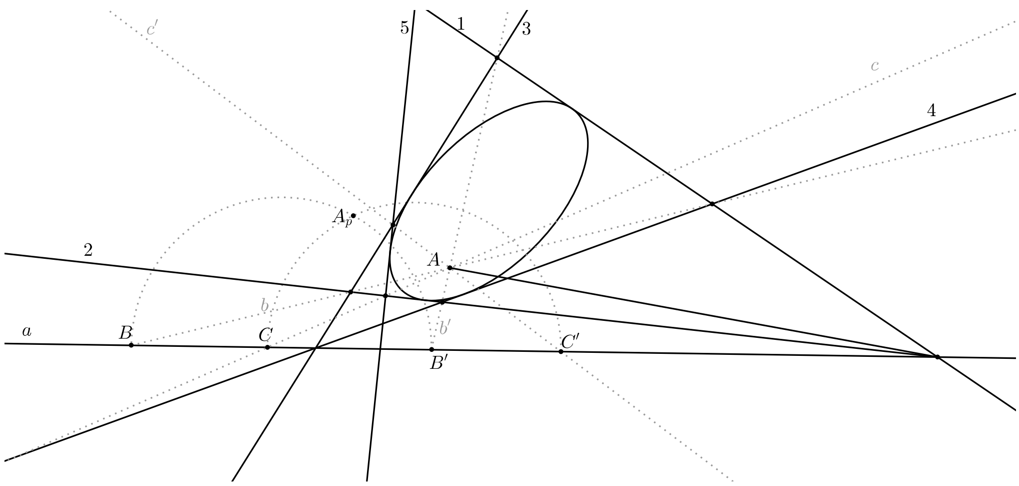
1. Sestrojíme bod 2 na přímce $\overleftrightarrow{1A}$, aby platilo $|A1| = |A2|$. (Můžeme též použít harmonickou čtveřici $(12A\infty) = -1$ (Úloha 6).)

2. sestrojíme další bod kružnice.

   - V libovolném reálném bodě sestrojme na sebe dva kolmé směry. Ty nám určují směry, kterými hledat nevlastní pár involuce BB'.
   - Sestrojme bod $3 = \overleftrightarrow{1B'} \cap \overleftrightarrow{2B}$.

3. Tímto způsobem můžeme určit další body, abychom měli pět bodů kuželosečky k a mohli aplikovat úlohu 1.

Konstrukce 17. Sestrojit kuželosečku k z jedné reálné tečny 1, dvou komplexně sdružených bodů I, I' určenými jako samodružné body involuce na přímce a pomocným bodem A_p. Dále jsou dány dvě komplexně sdružené tečny i, i' s body dotyku I, I'.



Obrázek 4.9: konstrukce 17

- Tečny i, i' se protínají v bodě A, jelikož bod A je pólem poláry a na kuželosečce k. Tečnu 2 sestrojíme klasicky harmonickou čtveřicí $12Aa$, dle věty 4, bodu b). Pak bodem A vedeme pár involuce. Nechť je to třeba pár bb'. Pak na spojnici $\overleftrightarrow{b \cap 2\ b' \cap 1}$ ($\overleftrightarrow{b' \cap 2\ b \cap 1}$) najdeme tečnu 3 (4). Protože body $b \cap b', b' \cap 2, b' \cap a, b' \cap 3$ tvoří harmonickou čtveřici dle věty 4, bodu b). Postup hledání tečen 3, 4 zopakujeme pro jiný pár involuce ve svazku A.

1. Sestrojíme tečnu 2 jako čtvrtou harmonickou přímku $(12a\ \overleftrightarrow{A\ 1 \cap a}) = -1$.

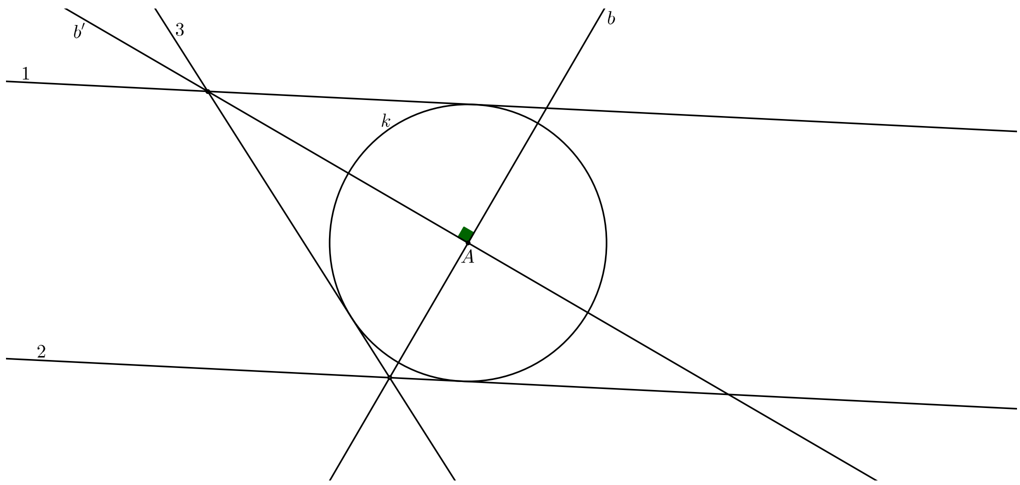
2. Sestrojíme tečny 3, 4 (5, 6).

   - Najdeme si libovolný pár involuce ve svazku A. Nechť je to pár bb' (cc').

- tečna 3 (4) leží na spojnici $\overleftrightarrow{b \cap 2\ b' \cap 1}$ ($\overleftrightarrow{b' \cap 2\ b \cap 1}$).
- tečna 5 (6) leží na spojnici $\overleftrightarrow{c' \cap 2\ c \cap 3}$ ($\overleftrightarrow{c \cap 2\ c' \cap 3}$).
- tečnu 6 nekonstruujeme, jelikož již máme pět tečen, které nám stačí ke konstrukci kuželosečky (Úloha 1).

Ke konstrukci 17 existuje opět speciální případ, kdy bude přímka a nevlastní.

Konstrukce 18. Sestrojte kružnici k, danou středem A a jednou reálnou tečnou 1.



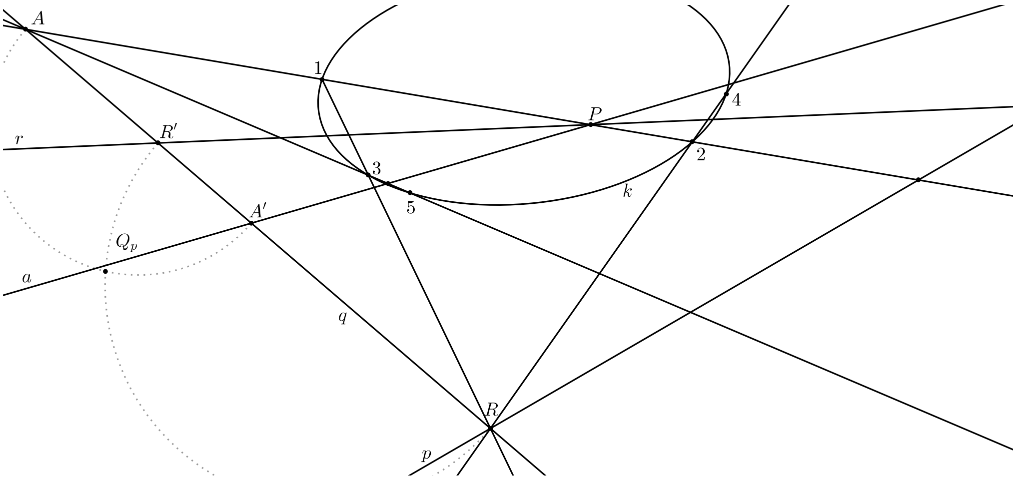
Obrázek 4.10: konstrukce 18

- Budeme postupovat stejně jako v konstrukci 17. Jen budeme navíc využívat vlastností nevlastní přímky a.

1. Z tečny 1 sestrojme středovou symetrií tečnu 2. Nebo aplikujme harmonickou čtveřici $(12a\ \overleftrightarrow{A\infty}) = -1$ (Úloha 6).
2. Sestrojíme další tečnu.
   - Najdeme libovolný pár involuce procházející středem A. Nechť je to pár bb'. Přímky bb' musí být navzájem kolmé.
   - Další tečna je na spojnici $\overleftrightarrow{b \cap 2\ b' \cap 1}$.
3. Touto metodou můžeme sestrojit libovolný počet tečen.

Konstrukce 19. Sestrojit kuželosečku k z jednoho reálného bodu 1, pólu P a poláry p a dvou komplexně sdružených bodů I, I'. Body I, I' jsou dány jako samodružné body eliptické involuce na přímce q s pomocným bodem Q_p.

- Z bodů 1, pólu P a poláry p sestrojíme dle věty 4, bodu a) bod 2. Dále průsečík $q \cap p$ označíme jako pól R. Polára r prochází bodem P. Dále polára r prochází bodem R', kde RR' je pár v involuci na přímce q. To známe z konstrukce 11. Z pólu R, poláry r a bodu 1 (2) sestrojme dle věty 4, bodu a) bod 3 (4). Nakonec zvolme na přímce q další pól A. K němu opět dle konstrukce 11 najdeme poláru a. A dle věty 4, bodu a) získáme z elementů $A, 3, a$ pátý reálný bod 5 kuželosečky k.



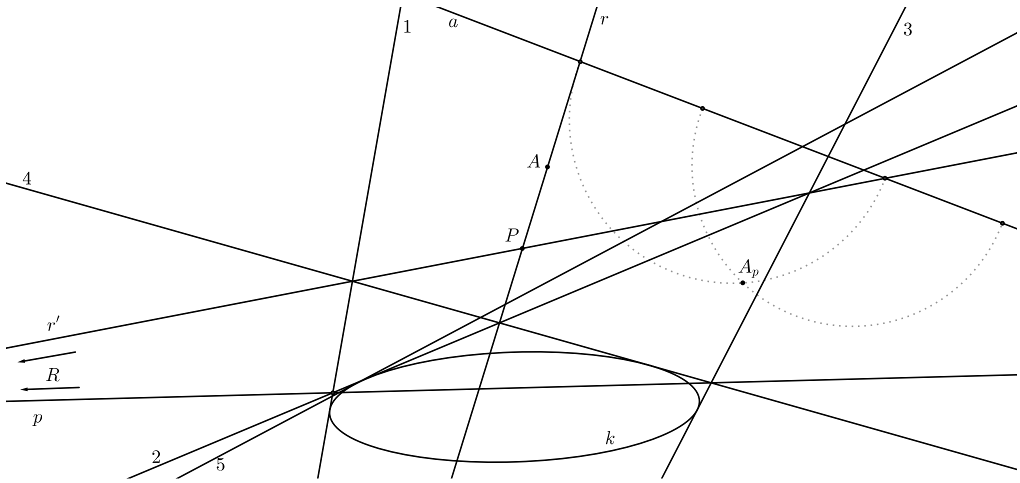
Obrázek 4.11: konstrukce 19

1. Harmonickou čtveřicí $(12P\ p \cap \overleftrightarrow{1P}) = -1$ získáme bod 2.
2. Průsečík $p \cap q$ označme R.
3. Najdeme poláru r k pólu R.
   - polára r prochází bodem P.
   - polára r prochází bodem R', kde RR' je pár involuce na přímce q.
4. Harmonickou čtveřicí $(13R\ r \cap \overleftrightarrow{1R}) = -1$ $\big((24R\ r \cap \overleftrightarrow{2R}) = -1\big)$ získáme bod 2 (4).
5. Zvolme na přímce q bod A, ke kterému najděme poláru a.
   - Polára a prochází bodem A', kde AA' je pár involuce na přímce q.
   - Polára a prochází bodem P.
6. Například harmonickou čtveřicí $(35A\ a \cap \overleftrightarrow{A3}) = -1$ získáme reálný bod 5 kuželosečky k.

Konstrukce 20. Sestrojit kuželosečku k z jedné reálné tečny, pólu P, poláry p a dvou komplexně sdružených tečen i, i'. Sdružené tečny i, i' jsou dány involucí σ ve svazku A. Eliptická involuce σ je dána na přímce a pomocným bodem A_p.

- Musíme najít pět tečen, abychom mohli kuželosečku jednoduše sestrojit. Pomocí tečny 1 pólu P a poláry p získáme druhou tečnu 2, metodou z úlohy 6. Dále najdeme další pól R a poláru r užitím postupu v konstrukci 12. Ze stejné konstrukce pak z tečen 1 (2) získáme pomocí pólu R a poláry r tečny 3 (4). S využitím tří tečen a dvou komplexně sdružených tečen jsme schopni dle konstrukce 12 kuželosečku sestrojit.

1. Tečnu 2 sestrojme jako čtvrtou harmonickou přímku $(12pP) = -1$. (Úloha 6).
2. Najděme další pól a poláru.



Obrázek 4.12: konstrukce 20

- poláru r veďme body P, A tak, aby byla přímka r v inovluci σ a současně, aby mohla být sdruženou polárou k již existující poláře.
- Přímka r má v involuci σ obraz r'.
- Na průsečíku $p \cap r'$ najdeme pól R.

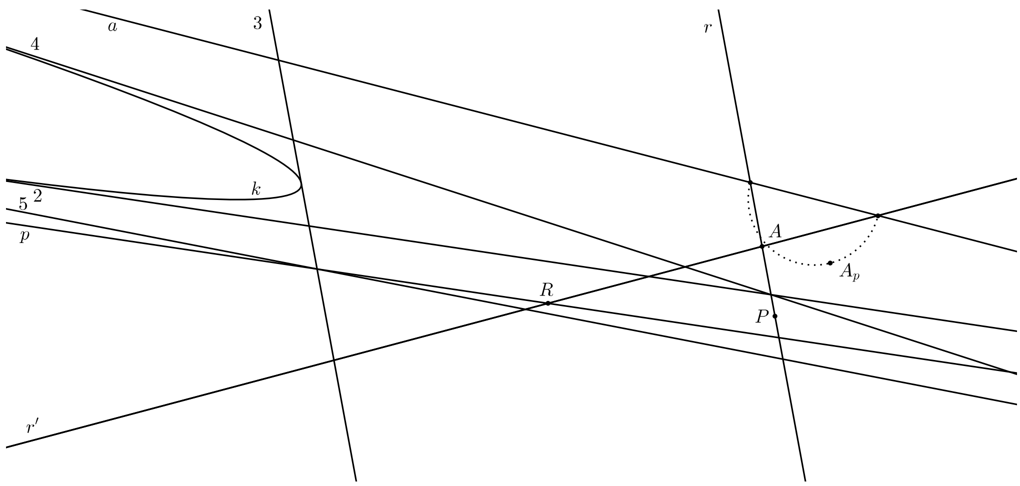
3. Tečnu 3 zkonstruujeme jako čtvrtou harmonickou přímku $(rR13) = -1$.

4. Tečnu 4 zkonstruujeme jako čtvrtou harmonickou přímku $(rR24) = -1$.

5. Tečnu 5 sestrojíme dle konstrukce 12.

Bude-li reálná tečna z minulé konstrukce nevlastní tečnou, získáme tak kuželosečku s jednou nevlastní tečnou. Kuželosečka s jednou nevlastní tečnou je parabola.

Konstrukce 21. Sestrojit parabolu z pólu P poláry p a dvou komplexně sdružených tečen i, i'.



- Parabola má jednu nevlastní tečnu. Položíme-li nevlastní tečnu za tečnu 1 z konstrukce 20 získáme speciální případ konstrukce 20. Můžeme tedy postupovat podle zmíněné konstrukce.

1. Tečnu 2 sestrojme jako čtvrtou harmonickou přímku $(12pP) = -1$. (Úloha 6).
    - Tečna 2 musí být k přímce p ve středové souměrnosti se středem P.
2. Dále postupujme totožně s konstrukcí 20.
    - Nalezneme další pól a poláru.
    - Sestrojíme další tečny jako čtvrté harmonické přímky.

Poznámka 13. Všimněme si, že jsme vždy sestrojili kuželosečku, která měla dva nebo čtyři komplexní elementy. Vždy se jednalo o sudé číslo, protože jsme mohli uvažovat pouze nad komplexně sdruženými elementy. Pátá podmínka musela být vždy reálná, aby byla kuželosečka jednoznačně zadaná. Kdybychom vzali 3 páry komplexně sdružených elementů, získali bychom šest podmínek pro kuželosečku, což nelze. Kdybychom byli schopni nějak jinak zadefinovat komplexní element, abychom k němu nemuseli vždy brát komplexně sdružený element, mohli bychom zkonstruovat i kuželosečku danou pěti komplexními elementy.

Závěr

Nejprve jsme si v této práci zavedli komplexní elementy a jak s nimi pracovat. Poté jsme zavedli pár pomocných konstrukcí využívajících komplexně sdružených elementů, které jsme později použili ke konstrukcím kuželoseček. Nakonec jsme s využitím komplexně sdružených elementů ukázali, jak sestrojit kuželosečku z pěti podmínek pro kuželosečku, jenž nemusí být všechny reálné. Všechny konstrukce měli jednoznačné zadání, aby si čtenář případně mohl konstrukci vyřešit sám. Poté jsme ke každé konstrukci uvedli obecný postup, jak daný problém řešit. Nakonec jsme vždy uvedli konkretní postup, který jsme znázornili na doprovodném obrázku.

Hlavním cílem této práce bylo vybudovat základ pro následné sestrojení kuželosečky z komplexně sdružených elementů, kterou jsme v poslední kapitole sestrojili. Ve všech obrázcích je sestrojená kuželosečka elipsou pro jednotnost, nejedná-li se přímo o konstrukci kružnice, nebo paraboly. Volbou jiného zadání samozřejmě nemusí vždy vyjít elipsa, jak se dá ukázat v interaktivní verzi jednotlivých konstrukcí.

Jak již bylo zmíněno v poznámce na poslední stránce, otevřený zůstává problém konstrukce kuželosečky z pěti komplexních elementů, kterého jsme nebyli schopni vzhledem k nerozlišitelnosti komplexně sdružených elementů dosáhnout. Jelikož se tato práce věnuje pouze konstrukcím v rovině, zůstávají neprobádané konstrukce v prostoru, kterým se například věnuje Seifert (1941).

Seznam použité literatury

HLAVATÝ, V. (1944). *Projektivní geometrie I.* Melantrich v Praze.

SEIFERT, L. (1941). Imaginární elementy v geometrii.

Seznam obrázků