Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Krychlová tělesa - didaktické využití

Diplomová práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Milan Hejný CSc.
Vypracovala: Jana Spilková

Praha, 2007

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předkládanou diplomovou práci vypracovala zcela samostatně s použitím uvedené literatury.

Praha, 15. 3. 2007

Poděkování

Děkuji Prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. za odborné vedení práce, podnětné návrhy a připomínky a za čas věnovaný společným konzultacím. Dále bych chtěla poděkovat Prof. Grahamu Littlerovi z University of Derby za cenné rady při realizaci experimentů v anglickém Derby a pedagogickému sboru tamější Lonsdale Bishop Primary School, který mi vyšel vstříc a umožnil jednotlivé experimenty provést. Poděkování patří i oběma učitelkám za jejich ochotu a čas, který mi při rozhovorech věnovaly. Také děkuji všem, kteří mě při tvorbě této práce podporovali, zejména své rodině.

Anotace

Předkládaná diplomová práce je věnována tématu krychlových těles a jejich využití v hodinách matematiky. Těžištěm práce jsou individuální experimenty a jejich analýza. Větší část experimentů byla provedena v anglickém Derby a je v práci prezentována v anglickém jazyce. Na zkušenosti z anglických experimentů navazují experimenty provedené v českém prostředí, jeden z experimentů je individuální, druhý probíhal ve dvojici.

Další část diplomové práce je zaměřena na zkoumání, nakolik se krychlovým tělesům věnují učebnice některých českých nakladatelství. Vybrané úlohy jsou analyzovány z různých hledisek a prezentovány v přehledné tabulce. Součástí pohledu do praxe ve školství jsou orientační rozhovory se dvěma učitelkami zjišťující praktické využití krychlových těles v hodinách a zkušenosti s prostorovou geometrií.

Annotation

This diploma thesis deals with cube solids and their application in the lessons of mathematics. It is focused on individual experiments and their analysis. Most of the experiments were implemented in Derby, England, and they are described in English language. This is followed by experiments taken in the Czech environment; while one experiment is individual, the other one deals with two children.

The next part of the diploma thesis is focused on investigation of several exercise books and their content of cube solids. Chosen exercises are looked at from different points of view and presented in a chart. As a part of judging the real situation in schools there is an interview with two experienced teachers. The interview is based on practical use of cube solids in the lessons and teachers' experience with 3D geometry.

1 ÚVOD 1
2 PŘED-EXPERIMENT NA ZŠ JINDŘIŠSKÁ 2
2.1 PŘÍPRAVA HODINY 2
2.2 PREDIKCE A HYPOTÉZY 3
2.3 POPIS PRUBĚHU HODINY 3
2.4 SEBEREFLEXE 6
3 THE EXPERIMENTS IN THE UK 8
3.1 GOALS OF THE EXPERIMENT 8
3.2 PLANS OF THE EXPERIMENT 9
3.2.1 Plan of the first meeting *9*
3.2.2 Plan of the second meeting *10*
3.2.3 Plan of the third meeting *10*
3.3 HYPOTHESIS AND EXPECTATIONS 11
3.4 DESCRIPTION OF THE INDIVIDUAL EXPERIMENTS 11
3.4.1 Adam *12*
*3.4.2 Adam** *20*
3.4.3 Simone *30*
3.4.4 Stacey *37*
3.4.5 Raveena, Stacey *45*
3.4.6 Leah *50*
3.4.7 Aaron *58*
4 EXPERIMENTY V ČR 66
4.1 CÍLE EXPERIMENTU 66
4.2 HYPOTÉZY 66
4.3 POPIS JEDNOTLIVÝCH EXPERIMENTŮ 67
4.3.1 Veronika *68*
4.3.2 Denisa a Veronika *82*
5 ORIENTAČNÍ ROZHOVOR 96
5.1 PHDR. JITKA MICHNOVÁ, II. ZŠ NERATOVICE 96
5.1.1 Záznam rozhovoru *96*
5.2 MGR. SILVA ZEKOVÁ, ZŠ POD MARJÁNKOU 100
5.2.1 Záznam rozhovoru *100*
6 PROBLEMATIKA KRYCHLOVÝCH TĚLES V UČEBNICÍCH ZŠ 102
7 SEBEREFLEXE A ZÁVĚR 103
8 SEZNAM LITERATURY 108
9 PŘÍLOHY 110

1. Úvod

S tématem krychlových těles jsem se poprvé seznámila v rámci projektu katedry matematiky IIATM (Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics). Jelikož se jedná o problematiku, jež byla teprve nedávno aplikována a experimentálně zkoušena v rámci uvedeného projektu, nebylo možné plně vycházet z odborné literatury. Inspirací mi tak byly průběžně psané články doktorky Jirotkové a pana profesora Hejného. Těžištěm práce se staly experimenty a jejich analýza.

Nejvíce mě z široké škály zajímavých úloh oslovila práce s krychlovými tělesy a jejich zápis do půdorysového plánu. V kapitole ***Před-experiment*** je stručně popsána moje první zkušenost s tímto tématem. Právě vyučovací hodina, kterou jsem vedla v rámci praxe, byla počátečním impulsem pro napsání této práce a inspirovala mě k provedení dalších experimentů.

Jednotlivé experimenty a jejich analýzy jsou uvedeny v kapitolách ***The Experiments in the UK*** a ***Experimenty v ČR***. Anglické experimenty jsou vzhledem k prostředí a autentičnosti výpovědí dětí popsány a analyzovány v anglickém jazyce. Kapitola uvádí celkem pět individuálních experimentů a jeden experiment realizovaný s dvojicí dětí. V kapitole ***Experimenty v ČR*** jsou analyzovány dva experimenty, jeden individuální a druhý probíhající ve dvojici.

Přepis rozhovorů, které byly uskutečněny se dvěma zkušenými učitelkami, je prezentován v kapitole ***Rozhovor***. Jelikož samotné rozhovory mají poměrně silnou výpověď, následná reflexe je uvedena až v kapitole ***Sebereflexe***.

V sekci ***Učebnice*** je stručně popsáno, jakým způsobem jsem učebnice rozebírala a jak na mě některé působily. Přehledná tabulka rozboru učebnic je uvedena v ***Příloze***, která navíc zahrnuje obrázky jednotlivých krychlových těles a materiály vybrané od dětí.

Poslední a závěrečnou kapitolou diplomové práce je již zmíněná ***Sebereflexe***.

2. Před-experiment na ZŠ Jindřišská

Před-experiment se uskutečnil v rámci kurzu Didaktiky matematiky s praxí na Základní škole v Jindřišské. Jednalo se o můj první pokus výuky s krychlovými tělesy.

2.1 Příprava hodiny

datum: listopad 2004

třída: čtvrtá

počet žáků: 22 (dívky 10, chlapci 12)

hodina: první

tematický celek: prostorová geometrie

téma: záznam (plán) krychlové stavby - kótovaný půdorys

pomůcky: krychle, čtverečkovaný papír s nalinkovanými čtverci o stejné délce jako je hrana krychle (pracovní list)

cíle:
- žáci získají zkušenosti v modelování různých KT
- žáci objeví vlastní způsoby, jak zapsat KT
- žáci si osvojí co nejjednodušší zápis KT (kótovaný půdorys)
- žáci rozvíjí představivost a obrazotvornost
- žáci se učí komunikovat s ostatními
- žáci se učí spolupracovat

ÚVOD

- seznámení s náplní hodiny
- úvodní motivační vyprávění o planetě Krychli, přiblížení problému, který je třeba řešit

HLAVNÍ ČÁST

- rozdělení dětí do skupin po čtyřech – každá skupinka dostane pracovní list a čtyři krychle; učitel dává dětem prostor pro vlastní práci, obchází, „popostrkuje" k řešení, motivuje
- spojení menších skupin do skupin po osmi žácích – společná diskuse nad nápady, jak plánek napsat, prezentace vlastních nápadů a usnesení se, který by mohl být nejvhodnější
- celá třída – diskuse řízená učitelem, společné shrnutí, dohoda, jak se budou tělesa zapisovat (kótovaný půdorys)

- opět práce ve skupinách po čtyřech – úkolem je vymyslet a dohodnutým zápisem zapsat co nejvíce různých krychlových staveb složených ze čtyř krychlí

ZÁVĚR

- stručné shrnutí a posouzení nalezených těles, zhodnocení

EXTRA ČAS

- dekódování symbolického jazyka, který popisuje proces stavění stavby

AKTIVITA v případě nezájmu

- příklady s tajenkou

2.2 Predikce a hypotézy

Úkol vymyslet plán KT jsem nejprve zkušebně zadala své spolubydlící a rodičům. Ti hned začali kreslit stavbu v 3D provedení. Když jsem jim toto zakázala s tím, že musí jít o plánek, nikoliv plošné vyjádření prostoru, začali složitě vymýšlet různá značení, symboly; jejich úsilí nakonec vyústilo v nákresu tří projekcí tělesa – půdorysu, bokorysu a nárysu.

Ačkoliv nelze srovnávat dětskou fantazii a kreativitu dětí s realitou dospělých a jejich schopností hledat složitosti ve zdánlivě jednoduchém případě, očekávám, že děti mohou být při řešení bezradné. Především se obávám, že se na nic nepřijde a já budu nucena odpověď alespoň částečně vyzradit. Dále očekávám, že se vyskytnou problémy s dvojicemi těles, jež jsou vzájemnými zrcadlovými obrazy.

2.3 Popis průběhu hodiny

Úvod hodiny proběhl nad všechna očekávání; děti byly tak ponořeny do vyprávění o planetě Krychli, že ani nedutaly. Poté jsem zadala úkol a rozdělila děti do skupinek. Kritériem rozdělování byla pozice ve třídě, takže jednu skupinu vždy tvořili dvě sousední lavice. Vzniklo tak šest skupin, pět po čtyřech dětech, poslední skupinou byla dvojice. Většina dětí se ihned pustila do řešení problému, některým skupinkám musel být úkol ještě jednou vysvětlen. Všechny skupiny pracovaly s velkým zaujetím, zcela očividně je krychle a práce s nimi zaujaly. Při monitorování jednotlivých skupin jsem nezaznamenala výrazné problémy s „přízemními“ budovami (tj. tělesy, u nichž se všechny čtyři krychle dotýkaly povrchu

desky). Děti byly dále vybízeny k zaznamenání tělesa, které má jednu z krychlí na druhé. Každá skupina přišla s originálním návrhem, jak těleso zaznamenat do jednoduchého plánu.

Komentář: Určitě by bylo lepší hned na začátku při zadávání úkolu děti pobídnout, aby nejprve přemýšlely o plánu přízemních těles. Asi nejjednodušší pro kontrolu a společnou diskusi by bylo společné ustanovení, jaká tělesa budou stavět. I když si myslím, že by je to příliš omezovalo a děti by neměly žádný prostor pro vlastní tvořivé stavění. Právě z hlediska vlastních pokusů o postavení různých staveb by bylo přínosné hned ze začátku dětem kostky rozdat a nechat je si s nimi „vyhrát".

- **Skupina A (čtyři dívky)**

Jednotlivé krychle popsaly písmenem a číslem, např. A1, A2 atd. V plánu potom do určitého čtverce uvedly právě označení dané krychle. Dvě krychle nad sebou skupina vyřešila vypsáním obou „jmen" určitých krychlí do jednoho pole plánu. Při tvorbě plánu rovněž respektovaly barevnost jednotlivých krychlí, které dostali (tři modré a jednu žlutou), a jednotlivá pole vybarvily vždy adekvátně vybarvily (viz Příloha 01). Když jsem chtěla, aby si krychle neznačily a zkusily najít jiný způsob záznamu, s novým nápadem již nepřišly a nadále se držely svého „objevu".

Komentář: Bohužel jsem se nezeptala, proč zvolily právě takové označení. Pravděpodobně postupovaly podle abecedy, písmeno A je prvním v abecedě.

- **Skupina B (dvě dívky, dva chlapci)**

Ačkoliv skupina B byla od skupiny A poměrně daleko, zvolila velmi podobný způsob značení krychlí, a to pomocí čísel. Avšak krychle jimi nepopisovali. Čísla jsou tedy zanesena do určitého plánu. Když byla skupinka navedena k zaznamenání plánu vícepatrového tělesa, vyřešila problém napsáním odpovídajících čísel do jednoho pole (viz Příloha 02 a 03).

Evidence: Obrys jednotlivých plánů není obtáhnut, což způsobuje nepřehlednost a zmatek.

Komentář: Zapomněla jsem se zeptat, podle jakého klíče vybrali jednotlivé číslice pro popis krychlí a proč se čísla v jednotlivých plánech liší. Zřejmě je převážně volili nahodile, bez jakéhokoliv systému.

- **Skupina C (čtyři chlapci)**

Vzhledem k jednolité barvě všech kostek (žluté) vytvářela skupina plány vybarvováním jednotlivých polí plánu žlutou pastelkou. Když byli chlapci vybídnuti nakreslit plán tělesa,

které má jednu krychli na druhé, okamžitě zazněl nápad zapsat počet krychlí nad sebou pomocí číslice (viz Příloha 04).

Evidence: Ohraničení plánů není přesně dané.

Komentář: Při tvorbě jednotlivých plánů chlapci zřejmě věděli, o které těleso se jedná. Avšak pohled nezasvěceného oka může jednotlivé plány rozeznávat velmi obtížně.

- **Skupina D (tři chlapci, jedna dívka)**

Pro způsob zaznamenání jednotlivých krychlí byly použity dva různé symboly; modrá krychle byla znázorněna křížkem, pole, které reprezentovalo žlutou krychli, bylo ponecháno prázdné. Když jsem děti pobídla k vytvoření plánu pro těleso s krychlí „v prvním patře", zakreslili plán v podobě nárysu. Krychli schovanou za tělesem v druhé řadě znázornili pomocí menšího čtverce v poli, jež představovalo přední krychli (viz Příloha 05).

Komentář: Když jsem přišla ke skupině poprvé, myslela jsem, že vytvořený plán je kótovaným půdorysem. Teprve později jsem zjistila, že se děti dívají na těleso zpředu a kreslí nárys jednotlivých těles.

- **Skupina E (dva chlapci, dvě dívky)**

Při stavbě různých těles byla skupina velmi kreativní a vymýšlela různá, esteticky zajímavá leč nekrychlová tělesa. S problémem jednopatrového tělesa si děti poradily zakreslením menšího vykukující čtverečku do patřičného pole plánu (viz Příloha 07 a 08). Smícháním žluté a modré barvy se pak pokusily o výraznější vyjádření faktu, že pole plánu představuje dvě krychle nad sebou.

- **Skupina F (jeden chlapec, jedna dívka)**

Jejich návrhem na zaznamenání vícepatrového tělesa bylo zapsání čísel do odpovídajících polí plánu. Jak sami vysvětlili, číslo představuje počet krychlí nad sebou.

Komentář: Myslím si, že zdařilá práce skupiny pramenila především z menšího počtu řešitelů. Celkově mezi sebou lépe komunikovali a rychleji se dokázali dohodnout na určitém postupu. Naneštěstí jsem na závěr hodiny zapomněla jejich pracovní list sebrat, a tak nemohu jejich práci uvést v příloze.

Po dostatečně dlouhém časovém prostoru potřebném pro nalezení plánů byly skupiny sloučeny do tří větších. Jejich úkolem bylo prodiskutovat své objevy a najít nejlepší a

nejjednodušší řešení. Jednotlivé skupiny jsem obcházela a povzbuzovala děti k diskusi. Když se pak vrátily zpět na své místo, seznámila jsem je s výsledky a nápady jednotlivých skupin. Následovala krátká, leč poměrně zapálená diskuse, na jakém plánu se dohodnout. Jako první příklad tělesa jsem uvedla těleso no. 1 a nakreslila jeho půdorys na tabuli. Děti navrhly napsat do jednotlivých polí nuly s vysvětlením, že je to nulté patro.

Komentář: Zde je patrné východisko z vlastní zkušenosti dětí, kdy v panelovém domě je přízemí na tlačítkách výtahu označováno jako 0.

Dalším modelem bylo těleso no. 8. I tento plán byl zapsán pomocí dvou nul a jedné jedničky. Když jsem vymodelovala těleso no. 9 a chystala se napsat plán podle předchozího postupu, z řad dětí se ozval návrh napsat místo jedniček dvojky. Po krátkém diskutování, jestli označovat podlaží, nebo počet kostek nad sebou, byl nový návrh odsouhlasen, a tak vznikla dohoda o zápisu plánů jednotlivých krychlových těles. Na otázku, jak se na těleso takto zakreslené ve skutečnosti díváme, mi jeden chlapec odpověděl: „zešikma".

Děti jsem opět rozdělila do předchozích skupinek, rozdala další čtyři kostky na jednu skupinu a zadala úkol najít co nejvíce těles složených ze čtyř krychlí a zapsat jejich plány. Ještě než se děti plně ponořily do práce, zazvonilo a hodina skončila. V nastalém zmatku jsem pak řešení daného problému uložila za domácí úkol.

Komentář: Jak jsem se brzy přesvědčila, úkol nebyl zcela jasně popsán a většina dětí začala ihned stavět tělesa obsahující všech osm kostek, které byly k dispozici. Myslím si, že bylo zbytečné dávat dětem další kostky. Zcela bez rozmyslu jsem zahájila novou práci, aniž bych zkontrolovala čas. Zadání úlohy za domácí úkol mělo být provedeno hned.

2.4 Sebereflexe

Celkově jsem měla z hodiny velmi dobrý pocit. Šlo o moji vůbec první hodinu vyučovanou konstruktivistickým způsobem, se kterým jsem se pak blíže seznámila právě v Anglii. Nejvíce mě na této hodině nadchlo právě ono tajemné objevování, kdy děti musely samy najít nejvhodnější řešení, obhájit jej a následně jej aplikovat na dalších příkladech. Za nejpřínosnější považuji moment, kdy se ve třídě rozpoutala živá diskuse nad nejlepší formou zápisu. Bylo velmi zajímavé sledovat, jak se většina dětí do diskuse zapojila a vhodně argumentovala se svými návrhy.

Před přípravou na hodinu jsem téma konzultovala nejen s vedoucí praxe, ale i s třídní učitelkou. Ta mi sdělila, jak daleko s dětmi v geometrii postoupili a jak moc blízká je jim prostorová orientace. Paní učitelka můj experiment velmi podpořila a podle jejích slov se jím nechala inspirovat i do dalších hodin matematiky.

Aktivit, které jsem si předem připravila, bylo více, než se dalo za hodinu zvládnout. Bylo hodně důležité, aby děti měly čas a prostor na své vlastní nápady a diskusi. Také si myslím, že bylo velmi vhodné zadat jim domácí úkol.

3. The Experiments in the UK

As I had planned to spend one academic term studying at the University of Derby in the UK, my consultant suggested I might have implemented some of the experiments there. Since the teaching approach in the UK is different from ours, I found it very interesting and enriching to do the most of the experiments there. As foreing student of the university I had the possibility to observe different lessons at Lonsdale Bishop Primary School. The headteacher and other teachers there were very helpful and let me implement my experiment whenever I needed. Generally, the experiments were focused on observing the level of children's three dimensional imagination and further comparison to pupils from the Czech Republic.

All experiments had the same scenario (see Chapter 3.3). Each one included three chronologically ordered parts – meetings. The experimental children were chosen from three grades according to their abilities and teacher's recommendation. The meetings took place in a staffroom, an environment a little bit familiar to the children. For better analysis the process of the experiment was recorded.

In summary, there were six experiments (see Table 1). The experimental sample were two children from Grade 4, one child from Grade 5, and two children from Grade 6. Most of the meetings were individual; there was one extra experiment based on the communication between two friends of the same grade.

3.1 Goals of the experiment

Basically, the main aim of the experiment was to observe and analyse the child's process of thinking and her/his process skills. The experiment was also aimed at seeing whether a child may success in a task without previous knowledge and absorb the new knowledge so that it can be applied again. The comparison of differences between girl's and boy's investigation might be considered as a subsidiary aim.

Goals of the experiment based on communication between two friends

This specific experiment was based on the observation of two pupils when one pupil guides his/her friend following the same tasks and steps as he/she had been going through before with the experimenter. The experimenter's observation is aimed at seeing the understanding of the pupils, the way of explanation and communication, and the difficulties the pupils might have.

3.2 Plans of the experiment

One meeting might approximately take from 20 to 30 minutes. The experiment is held in a staffroom. It is not necessary to have any other observers taking part in the experiment. The tools used for the experiments are as follows: square paper and wooden cubes. For the purpose of recording a casette recorder and a tape are needed. As another source of evidence, the pupil's products might be collected.

The meetings are based on different tasks given to a pupil. At the beginning, the exercises are meant to be an introduction for the domain of cube solids and discussion on various problems. This is followed by tasks that encourage creative solving. The last part of the experiment is aimed at final comprehension.

3.2.1 Plan of the first meeting

At the beginning of whole experiment there is a short opening interview focused on motivating the child. The experimenter introduces herself and explains the reasons for recording the experiment. A child is asked about his/her favourite subjects, preferency of geometry or algebra or whether he/she had had an experience with lego, or building blocks. The child is introduced to the topic by a story about a planet called The Cube: "There is a planet called The Cube. On that strange planet there are only buildings consisted of cubes." Then task 1 is submitted. When completed successfully there is task 2 that might be modified according to child's understanding. When a child has any problems with solving, task 2a may be given. To check comprehension or to prompt a child task 2b can be introduced. Subsequently, task 2c or 2d might be applied for better understanding. As the easiest variation of task 2 there is task 2e. After accomplishment of the previous tasks, task 3 is given. There are possible modifications (task 3a or task 3b) that might help to solve the problem. As homework a child gets task 4.

Task 1: Four cubes are given. The task is to build any solid using all four cubes.

Task 2: There are four different solids made of four cubes. One of them is a pirate (somehow it does not belong to the group of the cube solids), the others are proper cube solids (see Pictures T2). The task is to identify the pirate and explain why it is the pirate.

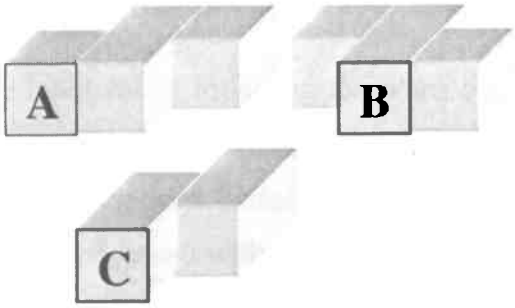
Task 2a: There are three different solids made of four cubes. One of them is a pirate (somehow it does not belong to the group of the cube solids), the rest are proper cube solids (see Pictures T2a). The task is to identify the pirate and explain why it is the pirate.

Task 2b: Make a proper solid from the pirate given.

Task 2d: There is one cube solid given. Is it a pirate?

Task 2e: A group of two solids is given. Identify the pirate.

Task 3: Three cube solids are given (see picture T3). The task is to say whether they are the same or not and explain the reasons for deciding so.



Picture T3

Task 3a: Try to move some of the previous cube solids so that you get two absolutely identical cube solids. Are they all the same or not?

Task 3b: Is it possible to get two identical cube solids from solids A and C? Are all the solids the same?

Task 4: There are four cubes given. The task is to build any cube solid using the cubes and draw some plan that would exactly represent the built cube solid.

3.2.2 Plan of the second meeting

At the beginning of the meeting the child is interviewed what he/she has found out at home. Task 4 is discussed. When the child has not come with any solution, task 4a and task 4b might help. As a comprehension and agreement about the way of drawing the plans there is task 5. When it is clear that the child understands the drawing of the plans, task 6 is set as homework.

Task 4a: Build any cube solid from four cubes that represents just the ground floor. Place it onto the square paper so that each cube is on a separate square. Draw a plan using the squares.

Task 4b: Build any cube solid with one cube representing the first floor. Draw a plan. (Hint: Think of marking that there is one cube on another.)

Task 5: A cube solid is given. Draw its plan.

Task 6: There are four cubes given. Make as many various cube solids as possible. Each time draw the plans of the solids.

3.2.3 Plan of the third meeting

To see the understanding and results of homework task 6a is given. When all possible cube solids have not been found, the child is encouraged and helped to find some more. After that worksheet (see Attachment 09) and task 7 are given. Finally, there is task 7a to check the results of the previous task.

Task 6a: Build the solids following the plans.

Task 7: Complete the worksheet; in the first exercise build solids following the plans by using the wooden cubes, in the second part draw plans according to the pictures of cube solids (it is not necessary to use wooden cubes for building the solids for better imagination).

Task 7a: Build the solids according to the plans you have just drawn without looking at the pictures. Compare the solids to the pictures.

3.3 Hypothesis and expectations

As 3D geometry is quite broadly included in The National Curriculum in the United Kingdom, I do not expect to see any problems with getting into the tasks.

Generally, I suppose to see difficulties especially with mirror reflection, rotation and their definition. I also think the children might have problems with creating a plan for the solids but help is provided when needed. When a child understands the drawing of the plans, I am sure there cannot be any serious difficulties. I also expect that boys might have better 3D imagination than girls. As English is my second language, I do expect some misunderstanding and difficulties in the communication with a child; that might cause child's confusion.

3.4. Description of the individual experiments

The experiments are commented in four different levels. The general comments made during the analysis of experiment are marked as **Commentary**. The other comments presenting my reflection and thoughts during the experiment are titled as **Commentary J**. The third level annotates thoughts of the experimental child; it is marked as **Commentary + initial** of the certain child. Finally, **Commentary J*** presents my ideas what could have been done during the experiment. There are two analysis of experiment with Adam. The first description of the experiment presents my unexperienced attempt to analyse Adam's progress and thinking (see chapter 1.4.1 Adam). The second analysis is supposed to show my own learning progress after working on different analysis and getting more experienced (see chapter 1.4.2 Adam*). Since the ilustrating pictures are the same for both experiments, they are added only to the first experiment.

Notes and comments:

- The child's direct speech is differentiated by inverted comas. The plans are redrawn in a computer programme according to their original form. The parting lines are dot-and-

dashed as a sub-elementary step. The original plans have all continuous lines. The original plans are attached (see Attachment), their redrawn copies accompany their descriptions.

- In the descriptions of the plans the height and the width of the squares and rectangles are considered as usual parameters of 2D formation.
- The word "square" is used in general although the sides of the formation are not equal.
- By the term "flat building" is meant a solid that has all its cubes on the surface (it only has the ground floor).

Name	Y	Date	Time	Duration	Chapter	Page	Attachment
Adam I	4	18th May 05	13:15-13:35	20 mins	3.4.1.1.	12	-
Adam II		19th May 05	11:00-11:35	30 mins	3.4.1.2.	13	10,11
Adam III		20th May 05	11:10-11:35	25 mins	3.4.1.3.	15	12,13
Simone I	5	18th May 05	9:35-10:00	25 mins	3.4.3.1.	30	-
Simone II		19th May 05	10:40-10:50	20 mins	3.4.3.2.	32	14
Simone III		23rd May 05	9:50-10:10	20 mins	3.4.3.3.	33	15,16
Stacey I	6	19th May 05	10:35-10:55	20 mins	3.4.4.1.	37	-
Stacey II		20th May 05	9:40-10:00	20 mins	3.4.4.2.	39	17,18
Stacey III		23rd May 05	10:35-11:00	25 mins	3.4.4.3.	39	19,20
Raveena, Stacey	6	24th May 05	9:40-10:15	35 mins	3.4.5.	45	21,22,23
Leah I	4	1st May 05	10:30-11:05	35 mins	3.4.6.1.	50	24,25
Leah II		2nd May 05	9:35-9:55	20 mins	3.4.6.2.	54	26,27,28
Aaron I	6	2nd May 05	10:35-10:50	15 mins	3.4.7.1.	58	29
Aaron II		3rd May 05	11:00-11:10	10 mins	3.4.7.2.	59	30,31
Aaron III		6th May 05	10:40-10:55	15 mins	3.4.7.3.	59	32

Table 1. The general overview of the experiments in the UK.

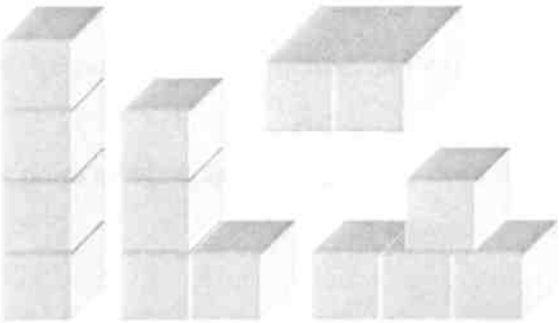
3.4.1 Adam

Grade 4, an average-ability boy, calm, patient.

3.4.1.1 Adam I

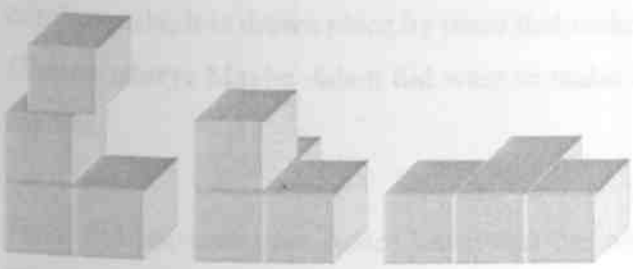
Adam was given **task 1**. He built three solids altogether. At first, he built solids no. 14 and 15, then he built pirate P01.

Task 2 was submitted (see Picture T2G3). Adam identified the pirate at once and reasoned his choice saying: "because the bricks are not on each other." To see if he understood and if he was sure about this task, **task 2d** was given. He answered that the solid was a pirate but when he was asked to say any reason, he got confused and changed his previous statement.



Picture T2G3

Commentary: I think it is quite difficult to give a reason without having an opportunity to compare a pirate with a cube solid.



Picture T2aG2

Therefore Adam was given **task 2a** (see Picture T2aG2). This time he succeeded and said an argument that "there are not … on top of each other."

Commentary: When stating the reason Adam was not sure with his answer and got easily distracted. But at the end he became more confident about the pirates and cube solids.

Alter defining the term cube solid, Adam was given **task 3**. At first, he identified B and C as the same solids because "I can move it to get other building." Adam then stated that solid A is different. But after longer hesitation he claimed solid A as being the same as B and C because "it doesn't matter that people live upside down." And he turned the solid A over to get solid B. Later, we agreed on that solid A and B are different because they are facing different way and it is impossible to turn them over.

At the end of the first meeting, **task 4** was given as homework.

3.4.1.2 Adam II

As a solution of **task 4** Adam came with two ideas (see Attachment 10). He was encouraged to build the solids according to his plans.

Evidence: The first plan is a front projection of solid no. 8. The second plan is an attempt of drawing a 3D picture. In the 3D picture, there is one cube missing.

As Adam built the solids according to the plans I could see he drew a 3D picture of solid no. 13. When he was asked where was the fourth cube, he pointed to the picture and said that "that one is round there."

Commentary: I think the cube was hidden from his point of view and he thought it does not have to be marked in the picture.

After discussing the terms 3D picture and plan, Adam was given **task 4a**. He built solid no. 5 and drew its plan (see Attachment 11).

Evidence: The plan is drawn without using the lines of the squares on the paper. The size of the squares is almost equal as the size of the squares on the paper. Instead of drawing the line continuously, it is drawn piece by piece that makes it more bold and breakneck.

Commentary: Maybe Adam did want to make the plan visible. I could have brought him a marker.

From the previous case Adam learnt that the way of looking at the solid was from the top. Then **task 4b** was submitted. Adam built solid no. 13 and drew its plan. He marked the cube on the top as another square drawn inside.

Adam was given **task 5**. He drew the plan of solid no. 9 and again drew smaller squares inside the bigger. When he was encouraged to use symbols or numbers, he just added numbers into the previous plan. He also improved his drawing by describing the separate steps. Then the ways of drawing the plans were shown and explained.

Commentary: Adam was the first child I did the experiment with. Therefore I did not have any experience how to guide him better. I also did not know how to explain it in English. This time, I made a mistake as an experimenter; I slipped into the role of a teacher and taught the child how to draw the one right plan. I drew two plans and explained it by building the solids. I think Adam could have missed the role of an inventor.

For comprehension, Adam was given **task 5**, this time solid no. 10. He drew its plan. Then I gave him solid no. 13 but Adam drew the plan of solid no. 10 again.

Commentary: I think he got confused. Maybe he thought that the plan should be drawn in one line. Therefore I him another example by drawing the plan of solid no. 4.

Again, **task 5** was given. Adam succeeded in drawing the plan of solid no. 15. Adam also tried to draw the plan of solid no. 13 and he did it well. **Task 6** was given as homework.

3.4.1.3 Adam III

At home Adam found eight solids and drew their plans. He was given **task 6a**. When he successfully completed this task, he was encouraged to find more cube solids and draw their plans. There were also two identical plans that were discussed. Sometimes Adam tended to put a cube in the air but realized it would not hold there without using a glue. So he changed his attempt and moved the cube somewhere else. Adam's search for new solids was done by the method of trial and error.

Evidence: Some of the plans are very chaotic or deformed. There are plans that covers each other. One plan is reversed in comparison to the others (see Attachment 12).

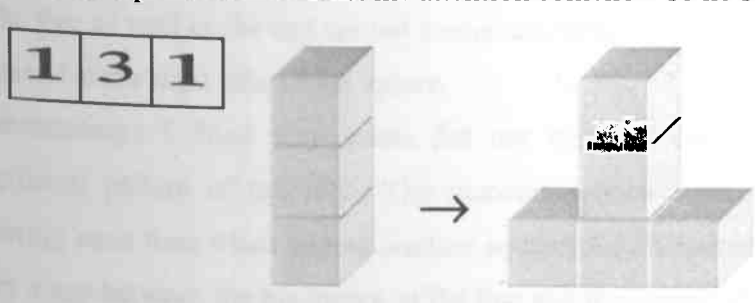
Commentary: Obviously, the deformed shapes of the plans are caused by little space provided. I think that Adam also did not estimate the space properly when drawing one plan next to another. The reversed plan might be caused by turning the paper upside down for a while.

Finally, Adam was given **task 7**. There were no problems with the first exercise.

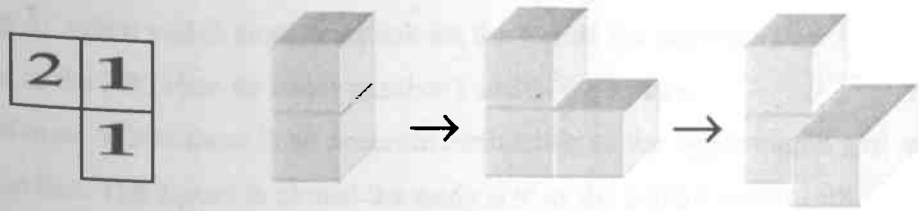
Evidence: Adam built the solids following his own strategy – in the first three cases he built the column of more cubes first, then just added the other cubes. The last solid was built from the columns of two cubes (see Picture A1).

Commentary: Maybe Adam considered the columns as crucial and more dominant. Or, the numbers in the plans could attract his attention somehow so he started from them.

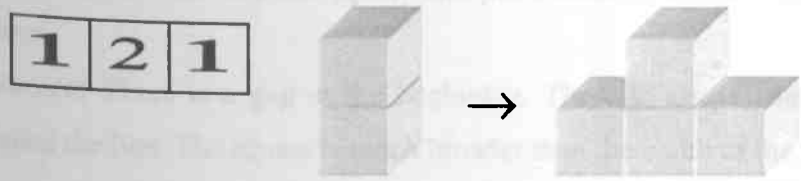
1)

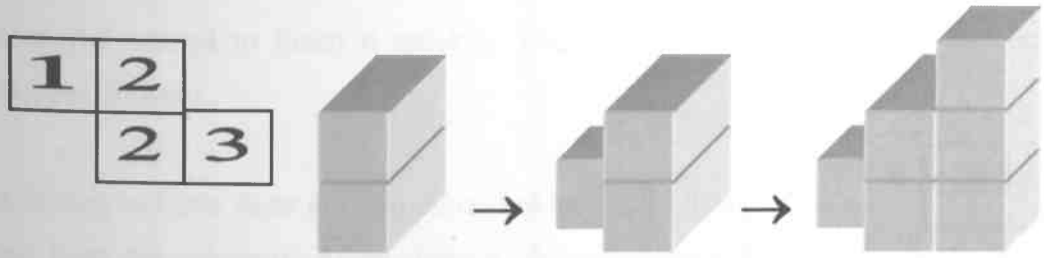


2)



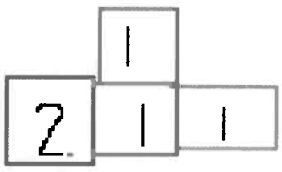
3)



4) 

Picture A1. Graphic analysis of the steps Adam did when building cube solids according to the plans.

In exercise II there were no problems with two first tasks. When drawing the plans, Adam proceeded from the left to the right (see Attachment 13).



Plan A1

Adam drew **picture 1)** in four elementary steps (see Plan A1).

Step 1: Adam drew a square and put a number in it.

Evidence: The first square is much more marked than the rest of the plan. It i also much bigger.

Commentary: I think the first step was important for Adam. He seemed to be absolutely sure about the column; maybe he thought it as the crucial point of the whole plan.

Step 2: Next to the first square Adam added another square and wrote a number in it.

Evidence: The square is smaller then the previous one; the height is different. The beginning of the line as well as the end are not connected to the square on the left precisely. Number one is placed at the right side of the square.

Commentary: I think that Adam did not consider drawing and proper matching as a significant pattern of the plan. The inaccurate lines might be caused by his strategy of drawing; each time when adding another square, Adam started drawing at the bottom leaving there a gap between the beginning of the line and the corner of the previous square.

Step 3: Adam added another square on the top of the previous one. He led the line from the right to the left. Then he wrote number 1 inside the square.

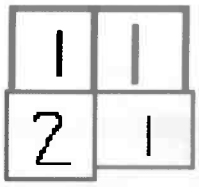
Evidence: While there is an accurate connection at the beginning, a gap appeared at the end of the line. The square is almost the same size as the square underneath.

Step 4: Adam drew the last square and put a number inside. Again, the line went from the bottom.

Evidence: There is a gap at the beginning. There is also a small over-draw where Adam finished the line. The square is much broader than the width of the previous squares.

Commentary: I think the over-draw might be caused by the fact that this was the last square. Adam maybe wanted to finish it quickly. The width of the square might be created by spontaneous drawing.

When finding out that there are two cubes behind each other (it was not obvious from the printing), Adam drew a plan of **picture 2)** in three elementary steps (see Plan A2).



Plan A2

Step 1: As the first step Adam drew a square and wrote number 2 in it.

Evidence: The square that represents the column is the more dominant one of the rest of the plan.

Commentary: The impression of the dominancy might be caused by the way the other squares were drawn – the lines are not matched properly; therefore the square seems to be sticked out.

Step 2: There was another square added on the right. And Adam put a number in it.

Evidence: The square has different size – it is shorter but wider than the square on the left. There is a gap at the bottom.

Commentary: Obviously, Adam followed the same system of adding squares on the right as in the previous plan.

Step 3: Adam drew a rectangle; he started the line on the right and finished on the left. Then he made a parting line as a sub-elementary step to divide the rectangle into two squares. Finally, Adam wrote the numbers.

Evidence: The line is much bolder than the lines of the rest of the plan. It is also almost precisely connected to the corners of bottom squares. There are just two small gaps made on the right- and left-hand side. The parting line goes directly in the middle and it is linked to the corners.

Commentary: The bold lines either show the confidence of Adam's drawing or presents his attempt to emphasise the cubes in the second row.

When drawing the plan for **picture 3)**, Adam did not consider the cube in the front. He drew the plan square by square in four elementary steps (see Plan A3).

Plan A3

Step 1: Adam drew the first square and put number 1 in it.

Evidence: The square is quite regular. Number 1 is in the middle of it.

Step 2: Another square was drawn on the right side of the previous one. When Adam finished drawing, he put number 2 in the square.

Evidence: There is a gap at the bottom where the line begins. The square is narrower than the previous one. Number 2 fills up the whole square.

Commentary: I suppose Adam did not realize that there is a cube in the front. Or, maybe he drew the first square, then looked at the plan and continued in drawing the line without noticing that he should have started at the top of the first square. He just kept on drawing the row of squares.

Step 3: When drawing next square, Adam started at the bottom again. Then he wrote a number.

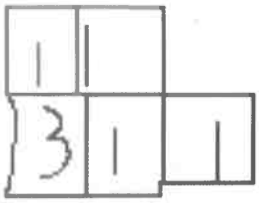
Evidence: The square is much smaller then previous squares.

Step 4: Adam finished the plan by drawing last square and putting number 2 in it.

Evidence: There is an empty space at the bottom left hand corner. The square is the smallest one of all squares of the plan. A part of number 2 blends with the line of the square. Number 2 is written twice.

Commentary: I think Adam drew this square as last step in hurry and did not concentrate on it so much. When writing number 2, he might have not estimated the size of it. I suppose he wrote it twice to make it more bolder and visible.

Again, Adam made similar mistake when drawing the plan of **picture 4)**; he did not consider the front column and put it in one line with the other cubes (see Plan A4). He seemed to be unsure about the picture; Adam started drawing from the right to the left. He drew the plan in five elementary steps.



Plan A4

Step 1: After short hesitation whether there is a cube behind the column or not, Adam drew a square and put number 1 inside.

Evidence: Number 1 touches the bottom line of the square.

Step 2: After looking at the picture Adam drew a square on the left of the first square. Then he wrote a number in it.

Evidence: The bottom of the square goes under the level of the square on the right. There is a small attempt to connect the end of the line to the corner but the line finishes right next to it.

Commentary: I think Adam just did not estimate the size of the square. He started drawing at the top corner and did not realize the height of the square; therefore he overdrew it a little bit.

Step 3: Following the size of the previous square Adam added a square on the top of it.

Evidence: Adam followed the size of the square; it has the same width and almost the same height.

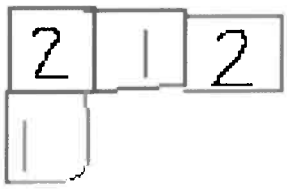
Step 4: Adam looked at the picture and thought that the cube he had just drawn had different position. He erased the half of the upper square and the number and made a rectangle. Then he put number in the middle of the rectangle to cover the erased place. When he looked back at the picture, he could see that there is another cube; therefore he drew a parting line as a sub-elementary step to divide the rectangle into two squares. Then he put a number into the square on the left.

Evidence: It can be clearly seen where the erased place is. The parting line does not fit to the corner of the bottom square. There is also small over-draw at the bottom end of the parting line.

Commentary: It is obvious that Adam did not want to erase another lines; therefore he put the parting line right next to the number. As one can see in the plan, Adam just saw the hidden cube as the neighbouring cube of the cube at the back.

Step 5: As the finishing step Adam drew a square presenting the column and put a number in it.

When Adam finished his drawing of the plans, he was given **task 7a**. He built a solid according to the Plan A3 and immediately saw the difference between the real solid and the picture. Then he changed his plan by drawing it in four elementary steps (see Plan A3c). During his drawing Adam looked at the model several times.



Plan A3c

Step 1: Adam started on the left, drew a square and put number in it.

Step 2: As the second step Adam added square on the right and wrote number 1 inside.

Evidence: There is a small over-draw at the top left-hand corner.

Step 3: Adam drew another square in the line and put a number in it.

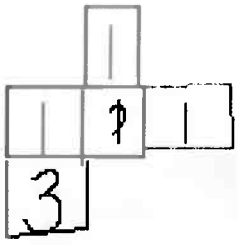
Evidence: There is a gap at the bottom left-hand corner as well as at the top left-hand corner. Number 2 is almost touching the bottom line.

Step 4: As the last step Adam drew the square that had caused the trouble and mistake in the previous plan. Then he wrote number 1 in it.

Evidence: The bottom right-hand corner is more curved and the end of the line is not connected to the square's upper corner.

Commentary: In my opinion, the curved corner is more or less caused by hurry. Maybe Adam just wanted to finish the plan quickly and did not concetrate on the drawing.

Although Adam could compare the solid he built according to the Plan A4 with picture 4), he did not see any difference. When I built the building as in the picture, he immediately started drawing the right plan (see Plan A4c).



Plan A4c

Step 1: Adam drew a long rectangle. But before he divided it into three squares, he erased the upper part and left three sides of the square at the bottom.

Evidence: The erased place is still quite visible.

Step 2: When looking at the building again, Adam drew a horizontal rectangle. He filled the first square with number 3 and wanted to write number 2 in the right part of the rectangle. But then he changed his mind and wrote number 1 instead.

Evidence: There is obvious attempt of drawing number 2. The first square has the bottom line sloping downward.

Commentary: I think Adam just realized that we look at the solid from the top and that there is just one cube on the ground. Or, maybe he did see the solid from the front. It is also surprising that he did not halve the rectangle immediately or before writing the numbers.

Step 3: Next, Adam drew the upper square and a parting line that divided the rectangle into two squares. Adam added number 1 into the new square he got.

Evidence: The upper square is very narrow. It is almost the same width as the bottom square.

Step 4: As the finishing step Adam added the last square on the right and wrote a number inside.

Evidence: There is a gap at the bottom left-hand corner. The square is broader than the previous squares. Number 1 is directly in the middle of it.

3.4.2 Adam*

3.4.2.1 Adam I

At the beginning I gave Adam **task 1** that was repeated three times. The first two solids Adam created were solids no. 14 and 15, then he built pirate P01.

Task 2 was submitted (see Picture T2G3). Adam identified the pirate at once and reasoned his choice saying: "because the bricks are not on each other."

Commentary A: The expression "bricks" indicates Adam's association with word "building" that I used for describing the solids. As an attribute of identification Adam considers harmony

and precision of given solids. It seems to him that the proper solids have a system in ordering individual cubes.

Subsequently, I gave him **task 2d** and pirate P01 to see whether he understood and was sure about his previous solution. He claimed the given solid a pirate but when he was asked to give any reason, he got confused and changed his statement.

Commentary J: When Adam stated the right reason for identification of the pirate in task 2, I considered it to be well understood and gave him task 2d without giving him another group of task 2 again.

Commentary A: When comparing the four cube solids, Adam tried to distinguish them somehow. The other task that was given to him appeared to be difficult in the way of absence of possibility to compare the given solid to others. From the previous task he was not provided any background whether he was right or not. That might have caused his confusion in task 2d. Also the pirate in task 2d is more symmetric than pirate in task 2. Adam had obviously followed his previous statement about cubes not being one on each other but the symmetry of the given solid might have puzzled him and he was not sure whether the solid was a pirate or not.

Adam was given **task 2a** (see Picture T2aG2). This time he identified the pirate without any hesitation and gave an argument that "there are not … on top of each other."

Commentary J: As I could see in the previous task, Adam needed to be more sure about pirates and solids. So this time I gave him task 2a with less solids in one group to make it a bit easier and quicker as well.

Commentary A: Although giving the same reason as in task 2, Adam still was not sure with his idea and when his response was not confirmed from my side, he got easily confused and distracted.

After helping Adam to define the term cube solid, I gave him **task 3**.

Commentary J: This time I gave up the role of an experimenter and slipped into the role of a teacher. Unfortunately, I intended to make some conclusion and help Adam to undestand the problem of proper cube solids. I realized my mistake right after I made it. I really regreted taking over all the iniciative and not leting Adam to come up with his own conclusion.

Commentary J*: If I could implement the experiment again, I would give Adam more tasks and groups of different solids to let him find out the features of a pirate.

When solving **task 3,** Adam at first identified solids B and C as the same because "I can move it to get other building." Then he stated that solid A is different. After longer hesitation he claimed solid A as being the same as B and C and turned it over. When I tried to transform the solids into real life by saying that people would live upside down, he argued that "it doesn't matter that people live upside down." Later, we agreed on considering solids A and B as different because they are facing different way and it is impossible to turn them over.

Commentary J: Surprisingly enough, Adam did not consider my note about people living in those buildings. So I tried to influence him by agreeing on the fact that we cannot turn solids over. When he seemed to understand this, I just dropped this task without reassuring that Adam understood what I meant. I assumed he understood well.

Commentary A: When Adam claimed solid A as being different from solids B and C, he probably needed some feedback from me. When this was not provided, he thought it over again and tried another possible answer; this time he did not want to change his statement, I think he just did not accept the cubes as real buildings so he did not mind turning them over.

At the end of the first meeting, I gave Adam **task 4** as homework.

3.4.2.2 Adam II

As a solution of **task 4** Adam came with two original ideas (see Attachment 10). To see if he understood what he had drawn at home, I encouraged him to build the solids according to those plans.

Evidence: The first plan is a front projection of solid no. 8. The second plan is an attempt of drawing a 3D picture of solid no. 13. In the 3D picture, there is one cube missing.

As Adam built the solids according to the plans, I could see he drew a 3D picture of solid no. 13. When he was asked where the fourth cube was, he pointed to the picture and said "that one is round there."

Commentary A: Probably the fourth cube was hidden from Adam's point of view and he thought it did not have to be marked in the picture.

After I explained to Adam the difference between a 3D picture and a plan, Adam was given **task 4a**. He built solid no. 5 and drew its plan.

Evidence: The plan is drawn without using the lines of the squares on the paper. The size of the squares is almost equal to the size of the pre-drawn squares. Instead of drawing the line continuously, it is drawn piece by piece that makes it more bold and breakneck.

Commentary A: Adam probably wanted the plan to be more visible therefore he did not follow the pre-drawn lines. But he sticked to the size of separate squares maybe in order to show the size of the cubes.

Commentary J*: It would have been interesting to see whether Adam had followed the pre-drawn squares when given a thick marker that would make the lines more visible.

Then **task 4b** was submitted. Adam built solid no. 13 and drew its plan. He marked the cube on the top as another square drawn inside. To practice drawing the plans Adam was given **task 5** and solid no. 9. He drew the plan without long hesitation and again drew smaller squares inside the bigger ones (see Attachment 12). When I encouraged him to use some symbols or numbers instead of drawing smaller squares and built solid no. 9, he just added numbers into the squares. He also managed to improve his drawing by describing the separate steps (see Attachment 12).

Evidence: The notes (step no.1,2,3,4) are written into each square.

For demonstration how the plans should be drawn, I drew two plans of two different solids (solids no. 9 and 4) and explained to Adam how each cube is marked and how each solid is looked at.

Commentary J: Since Adam was the first child I did the experiment with, I did not have any previous experience. Consequently, I made several mistakes under the influence of the role of a teacher. Sometimes I also did not know how to make an explanation in English. This time, I made a mistake as an experimenter as I slipped into the role of a teacher and TAUGHT the child how to draw the one right plan. At that time I did not realize how crucial might be the child's investigation for success in following tasks.

Commentary A: Obviously Adam tried to come with some idea how to draw a plan. I think he did not take it as a failure when I explained him the way of drawing the plan.

Commentary J*: If I could implement the experiment once more, I would definitely lead Adam to find his own way of making the plan. I would give him more hints and examples of different solids.

To see if Adam understood my explanation I gave him **task 5**, this time solid no. 10. He drew its plan without any difficulties. But when I gave him solid no. 13 Adam drew the plan of solid no. 10 again.

Commentary A: Adam got confused and unsured according to the lack of experience with drawing the plans. Probably he did not consider the cube behind the solid or just thought (according to the previous plans) that the plan has to be drawn in one continuous line.

For better understanding I gave Adam another example by drawing the plan of solid no. 4.

Commentary J: From Adam's failure of drawing the plan of solid no. 13 I could see he needed more examples. Therefore I became a teacher again and showed him another example.

Again, **task 5** was given. Adam succeeded in drawing the plan of solid no. 15. He also tried to draw the plan of solid no. 13 and he did it well.

Commentary J: At first I intended to give him easier solid to draw its plan. I wanted to let him succeed to feel more comfortable about drawing.

Task 6 was given as homework.

3.4.2.3 Adam III

At home Adam found eight solids (no. 4, 15, 8, 1, 10, 11, 9, 7) and drew their plans. For checking his work he was given **task 6a**. When he completed this task successfully, I encouraged him to find more cube solids and draw their plans. During that task Adam also drew two identical plans (plans of solids no. 14, 2). I found them important to discuss whether they were the same or not. Sometimes Adam tended to put a cube in the air but soon he realized it would not hold there without using a glue. So he had to change his attempt and move the cube somewhere else. Adam's exploration of new solids was done by trial.

Evidence: Some of the plans are very chaotic or deformed. There are plans that cover each other. One plan is reversed in comparison to the others.

Commentary A: Obviously, the deformed shapes of the plans are caused by little space provided. Adam probably did not estimate the space properly when drawing one plan next to another. **B.** Maybe he did not bother with the design of different plans. He might have not considered it as a crucial matter. The inverse of the plan might be caused by turning the paper upside down for a while.

Finally, Adam was given **task 7**. There were no problems with the first exercise. Adam built the solids following his own strategy – in the first three cases he built a column of more cubes first, then just added the other cubes on the sides of the column. The last example was built from columns of two cubes (see Picture A1).

Commentary: Possibly, Adam started from forming the columns because they could appear to him as being more dominant. Especially the numbers in the plans could have attracted his attention somehow.

In exercise II the first two tasks were completed successfully. When drawing the plans, Adam proceeded from the left to the right (see Attachment 13).

Adam drew the plan of **picture 1)** in four elementary steps (see Plan A1).

Step 1: Adam drew a square and put a number in it.

Evidence: The first square is bolder and bigger than the rest of the plan.

Step 2: Next to the first square Adam added another square and wrote a number in it.

Evidence: The square is smaller than the previous one; the height is different. The beginning of the line as well as the end is not connected to the square on the left precisely. Number one is placed at the right side of the square.

Commentary: The inaccuracy and smallness of the new square might be caused by the movement of Adam's hand when adding another square. The absence of continuation was probably influenced by Adam's look at the picture of the solid. Obviously, this disruption affected the fluency of linking to the previous square.

Step 3: Adam added another square on the top of the previous one. He led the line from the right to the left. Then he wrote number 1 inside the square.

Evidence: While there is an accurate connection at the beginning, a gap appears at the end of the line. The new square is almost the same size as the square underneath.

Step 4: Adam drew the last square and put a number inside. He started the line at the bottom and finished at the top.

Evidence: While there is a gap at the bottom left-hand corner, the line at the top left-hand corner is over-drawn. The square is broader than the previous squares.

Commentary: The over-draw might be caused by the fact that this was the last step. Adam maybe wanted to finish his drawing quickly.

Since Adam was not sure about **picture 2),** he asked me whether there were two cubes behind each other (that was not obvious from the printing). Then he drew the plan of **picture 2)** in three elementary steps (see Plan A2).

Step 1: As the first step Adam created a square and wrote number 2 in it.

Evidence: The square that represents the column is the most dominant one of the rest of the plan.

Commentary: The impression of dominancy might be caused by the fact that the lines of other squares are not connected precisely.

Step 2: There was another square added on the right. And Adam put a number in it.

Evidence: The square has different size – it is shorter but wider than the square on the left. There is a gap at the bottom.

Commentary: The way of drawing influenced by disruption of Adam's look at the picture and movement of his hand is the same as in the previous example.

Step 3: Adam drew a rectangle; he started drawing the line on the right and finished on the left. Then he made a parting line as a sub-elementary step to divide the rectangle into two squares. Finally he filled in the numbers.

Evidence: The line of the rectangle is bolder than the lines of the rest of the plan. It is also almost precisely connected to the corners of bottom squares. There are just two small gaps made on the right- and left-hand side. The parting line goes directly in the middle of the rectangle and it is linked to the corners.

Commentary A: The boldness of the lines is possibly a result of Adam's attempt to highlight the presence of two "hidden" cubes. He might also have found the lines not being very visible so he managed to trace them for assuring.

When drawing the plan of **picture 3),** Adam did not consider the cube at the front. He drew the plan square by square in four elementary steps (see Plan A3).

Step 1: Adam drew the first square and put number 1 in it.

Evidence: The square is quite regular. Number 1 is in the middle of it.

Step 2: Another square was drawn on the right side of the previous one. When Adam finished drawing, he filled in number 2.

Evidence: There is a gap at the bottom where the line begins. The square is narrower than the previous one. Number 2 fills the whole square.

Commentary A: A. Supposingly, Adam did not realize that there was a cube in the front. **B.** Maybe he drew the first square, then looked at the plan and continued in drawing the line

without noticing that he should have started at the top of the first square. The same problem as in task 5a arised; the absence of not exploring his way of drawing the plans causes Adam's uncertainity and wrongly understood process.

Step 3: When drawing next square, Adam started at the bottom again. Then he wrote a number.

Evidence: The square is much smaller than previous squares.

Step 4: Adam finished the plan by drawing the last square and putting number 2 in it.

Evidence: There is an empty space at the bottom left hand corner. The square is the smallest one of all the squares of the plan. The part of number 2 blends with the line of the square. Number 2 is written twice.

Commentary: The shape and inaccuracy of the square might be influenced by the fact of drawing the last step. Adam propably was not satisfied with the way number 2 had been written so he traced it once more to correct it.

Again, Adam made similar mistake when drawing the plan of **picture 4)**; he did not consider the front column and put it in one line with the other cubes (see Plan A4). Adam started drawing from the right to the left and created the plan in five elementary steps.

Commentary A: The decision to draw a plan in the opposite direction might reveal Adam's confusion and helplessness; he decided to start from the point he was sure about – from the right.

Commentary: Possibly Adam did not look at the solid as a whole. I think that during his drawing he proceeded step by step seperating the solid into smaller parts.

Step 1: After short hesitation whether there was a cube behind the column or not, Adam drew a square and put number 1 inside.

Evidenee: Number 1 touches the bottom line of the square.

Step 2: After looking at the picture Adam drew a square on the left of the first square. Then he wrote a number in it.

Evidence: The bottom of the square goes below the level of the square on the right. There is a small attempt to connect the end of the line to the corner but the line finishes right next to it.

Commentary: The fact that Adam made the new square "higher" might be caused by covering the square on the right with his right hand during the drawing. By changing the direction of drawing upwards he tried to connect the line to the corner of the right square.

Step 3: Following the size of the previous square Adam added a square on the top of it.

Evidence: Adam followed the size of the square; it has the same width and almost the same height.

Step 4: Adam looked at the picture and thought that the cube he had just drawn had different position. He erased the half of the upper square and the number and made a rectangle. Then he put number in the middle of the rectangle to cover the erased place. When he looked back at the picture, he could see that there was another cube; therefore he drew a parting line as a sub-elementary step to divide the rectangle into two squares. Then he put a number into the square on the left.

Evidence: It can be clearly seen where the erased place is. The parting line does not fit to the corner of the bottom square. There is also small over-draw at the bottom end of the parting line.

Commentary: It is obvious that Adam did not want to erase another lines; therefore he put the parting line right next to the number. As one can see in the plan, Adam probably saw the hidden cube as the neighbouring cube of the cube at the back. It is also possible that he got lost and could not follow the system and arrangement of the solid in the picture.

Step 5. As the finishing step Adam drew a square presenting the column and put a number in it.

Evidence: The last square copies the size of neighbouring squares. The left side line is little bit deformed.

Commentary: Adam might have been more careful to stick to the size of the previous squares. The inaccuracy of the left line can be influenced by the lack of concentration.

When Adam finished his drawing of the plans, he was given **task 7a**. He built a solid according to the Plan A3 and immediately noticed the difference between the real solid and the picture. Therefore he changed his plan by drawing it in four elementary steps (see Plan A3c). During his drawing Adam reassured himself by looking at the model several times.

Step 1: Adam started on the left, drew a square and put a number in it.

Step 2: As the second step Adam added square on the right and wrote number 1 inside.

Evidence: There is a small over-draw at the top left-hand corner.

Step 3: Adam drew another square in the line and put a number in it.

Evidence: There is a gap at the bottom left-hand corner as well as at the top left-hand corner. Number 2 is almost touching the bottom line.

Commentary: The inaccuracy of adding a new square might be a result of adding new squares on the right, as in the previous cases.

Step 4: As the last step Adam drew the square that had caused the trouble and the mistake in the previous plan. Then he wrote number 1 in it.

Evidence: The bottom right-hand corner is more curved and the end of the line is not connected to the square's upper corner.

Commentary: In my opinion, the curved corner is more or less caused by the fact of being in hurry; maybe Adam just wanted to finish the plan quickly and did not concetrate on the drawing.

Although Adam could compare the solid he built according to the Plan A4 with **Picture 4),** he did not notice any difference. When I built the building as in the picture, he realized his failure and immediately started drawing the right plan (see Plan A4c).

Step 1: Adam drew a long rectangle. But before dividing it into three squares, he erased the upper part and left three sides of the square at the bottom.

Evidence: The erased place is still quite visible.

Step 2: While looking at the building again, Adam drew a horizontal rectangle. He filled the first square with number 3 and wanted to write number 2 in the right part of the rectangle. But then he changed his mind and wrote number 1 instead.

Evidence: There is obvious attempt of drawing number 2. The first square has the bottom line sloping downward.

Commentary: Perhaps Adam just realized that it is supposed to look at the solid from the top and that there is just one cube on the ground. It is also surprising that he did not halve the rectangle immediately or before writing the numbers. The fact of not proceeding in a systematic way might be a result of Adam's confusion and lose in the drawing. Again, this could come from the fact he had not had an experience with discovering his own way of drawing.

Step 3: Next, Adam drew the upper square and a parting line that divided the rectangle into two squares. Adam added number 1 into the new square he got.

Evidence: The upper square is very narrow. It is almost the same width as the bottom square.

Step 4: As the finishing step Adam added the last square on the right and wrote a number inside.

Evidence: There is a gap at the bottom left-hand corner. The square is broader than the previous squares. Number 1 is directly in the middle of it.

Commentary: The width of the last square might be influenced by Adam's relief that he finished the task of drawing a plan.

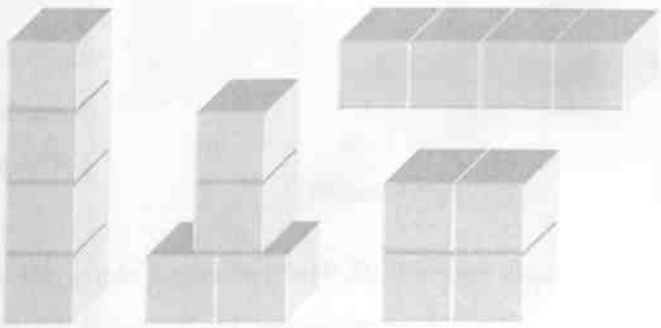
3.4.3 Simone

Grade 5, an average-ability girl, friendly, calm.

3.4.3.1 Simone I

At the beginning Simone was given **task 1** that was submitted four times. She did not hesitate and built solids no. 8 and 9. The next two solids were pirates P04 and P05.

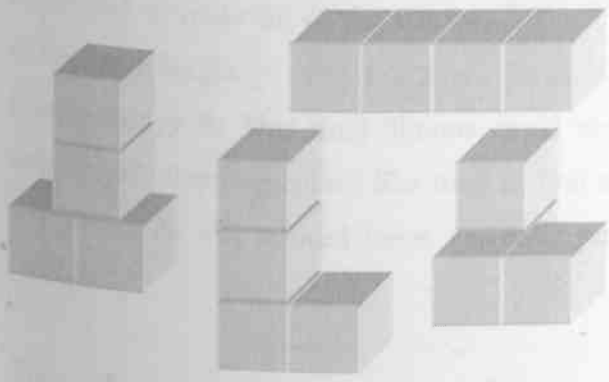
Then **task 2** was submitted (see Picture T2G4). Simone identified solid no. 1 as a pirate: "Buildings have to be built upwards."



Picture T2G4

Commentary S: As an indicator of the pirates Simone decided to consider the criterion of measurement. There was just one "ground floor building" among the others therefore she excluded that one as a pirate.

Then I gave Simone another group of solids (see Picture T2G2) where she pointed out the solid no.1 again.



Picture T2G2

Commentary J: Just when Simone stated her decision, I realized that the group of solids had not been chosen appropriately. I did not change either the pirate nor the solid that Simone had considered as a pirate.

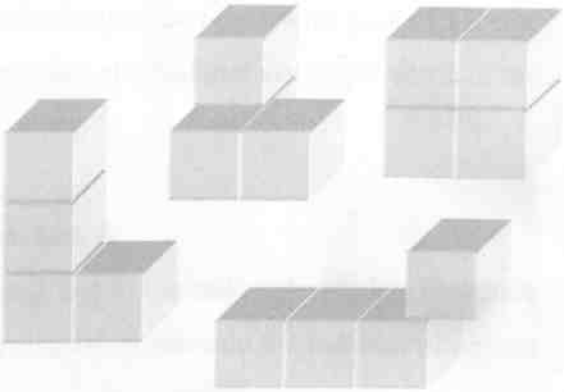
Commentary J*: Next time I would arrange the solids so that all of them would be of the same height.

Commentary S: Simone obviously noticed that there was again the flatest building. Moreover, since I did not change the solid no.1, she might have reasured herself that the solid was the pirate. She perhaps did not even look at other solids; probably the three left seemed to her to be very similar.

Afterwards **task 2** was submitted again but this time I changed the flat solid (see Picture T2G5). She pointed to the pirate saying: "... it's flapping over the side; it could fall in a minute."

Commentary J: Since I wanted to make the task a little bit easier, I chose a pirate that could attract her attention more and that would be easier to identify.

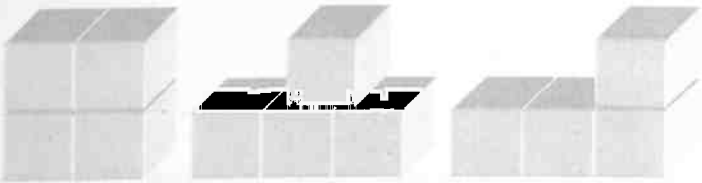
Commentary S: Simone was undoubtedly interested in the unusual solid. She could easily see that the solid did not look like proper building.



Picture T2G5

To see whether she could manage to rebuilt the pirate I gave her **task 2b.** Simone changed the pirate P11 to get solid no. 10. For better and maybe easier solving of the problem Simone was given **task 2a** (see Picture T2aG3). Simone thought solid no. 9 as the pirate and gave reason for it saying: "You have never changed that one, you have never changed the wrong one ..."

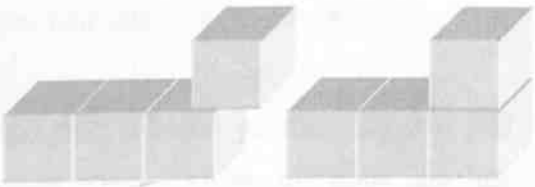
Commentary J: When building a new group of solids I tried to avoid creating any flat or "unstable" solid. I intended to make all of them to be of the same height.



Picture T2aG3

Commentary S: This time Simone could not apply either her criterion of height nor her opinion of "flapping cube". She tried to find another pattern that would help her to identify the pirate. As she noticed there was solid which I had built several times and had never changed.

Then Simone was given **task 2e** (see Picture T2eG1). She could see the pirate at once and when given **task 2b** she completed it successfully. When asked for giving any reasons, Simone was not able to find some.



Picture T2eG1

Commentary J: I felt quite desperate to give some easy and appropriate tasks for Simone to discover the difference between a solid and a pirate. So instead of giving her pirate P02 that would be hardly recognizable I set a solid that Simone once assigned as a pirate.

Commentary J*: Next time I would give Simone pirate P02 to let her discover something she has not discovered before.

Commentary S: Simone obviously did the task like in the previous case with pirate P11. She maybe was not sure which reasons I wanted to know when she had already stated some in the previous task (about that flapping cube).

After I made a conclusion of task 2 Simone was given **task 3**.

Commentary J: When I saw Simone quite unsure and lost in the task, I decided to conclude it and make some general statement. I felt that Simone could understand the patterns of pirates but was not able to express herself in words.

When completing **task 3**, Simone rotated solid B upside down to get solid A and turned solid C round to get solid A, too. "They're the same. If you turn it that way *(and Simone moved C round)*, it looks the same as that one *(Simone pointed to solid A)*." "Except, you turn it round *(Simone rotated B upside down)* it makes it look different." At the end of our meeting **task 4** was submitted as homework.

3.4.3.2 Simone II

Simone came with no idea of drawing a plan. Therefore she was given **task 4a**. At first she built solid no. 2 and drew its contour around each cube. Simone drew the lines in short repeated sequences.

Commentary J: Since Simone did not complete the homework I decided to give her easier variation of task 4.

When **task 4b** was submitted, Simone built solid no. 13. She erased one part of the previous plan and drew a smaller square into the square where two cubes were on each other (see Attachment 14).

Commentary S: When building a new solid that had one cube on another, Simone just replaced one cube. Then she followed the same system when drawing the plan; she just redrew the plan as she had rebuilt the solid.

Afterwards, I gave Simone **task 5** and solid no. 15. She drew four squares inside each other. When I asked her to substitute the squares with numbers, Simone drew the plan of solid no. 15 as a square with number 3 inside arguing "the square is one cube and on it three more

cubes". Right at that time when she said this, she changed her mind and put number 4 instead of number 3 – "because we have got four cubes."

Commentary S: When describing her thoughts Simone could realize that it would be easier to mark the amount of cubes by one symbol, a number, instead of having two different markings, a square and a number.

Then Simone was given **task 5** and solid no. 13 again. She drew the plan for it successfully.

Evidence: All the lines Simone drew along the pre-drawn squares are very bold and drawn in short quick sequences. In the last plan number 1 is underlined. The type of number 1 is not English; it is not just a vertical line.

Commentary: Simone maybe wanted to draw the lines to be clearly visible. In all cases Simone drew type of number 1 differently from her school-mates. Unfortunately, I cannot remember whether she saw me writing it and copying it or it was her own way of writing.

After understanding of drawing the plans Simone was given **task 6** for homework.

3.4.3.3 Simone III

The next meeting Simone apologised for not having the homework again because she had forgotten to complete it. Therefore we went through **task 6** together (see Attachment 15). Sometimes Simone tempted to build non-cube solids but consequently she realized her "mistake" when she started drawing their plans. In most cases she drew the plans square by square and wrote the numbers after finishing each square. Altoghether Simone managed to find twelve different solids. Besides she drew plans of solids that were equal to some of those twelve (plans of solids no. 14, 11 and 8). When discussing whether the plans of solid no. 13 were similar, Simone argued that "they are different because the one cube is changing its position". Obviously, Simone did not enjoy the activity; she seemed to be helpless and bored.

Commentary J: It is possible that Simone was not encouraged and motivated enough. I did not consider to motivate children in searching for as many plans as possible; I found the activity to be motivating as such.

Commentary J*: Next time I would encourage Simone to find as many cube solids of three cubes as possible; this could keep her more motivated. Then we would proceed to solids made of four cubes.

To make a comprehension I gave Simone **task 7**. She did not have any problems with the first exercise. Simone built all the solids from the left to the right (see Picture L3 in chapter 3.4.6.2.Leah II).

In each case of the second exercise Simone had problems with marking the cubes either hidden behind the solid or foremost to the front (see Attachment 16).

Commentary S: The uncertainity and confusion of drawing the plans might be result of not getting enough experience in task 4. The process of mastering the way of making a plan was quite short and Simone did not have an opportunity to acquire it. Although she had her own conception about the plans, she was more guided than left to find her own way.

Simone drew the plan of **picture 1)** in three elementary steps (see Plan SM1).

Plan SM1

Step 1: Simone drew a square and put number 2 in it.

Step 2: She added another square on the left and wrote a number.

Evidence: The new square is smaller than the first one. The upper line is not connected neatly with the line of the square on the right. The bottom part of number 2 almost overlaps the line of the square.

Commentary: Simone maybe did not estimate the size of the new square and was not able to draw a square identical with the first one.

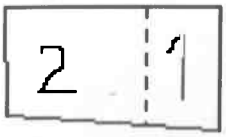
Step 3: On the right side of the first square another square was added. Simone drew from the top left-hand corner. Then she wrote number 1 inside the square.

Evidence: There is a small gap and an over-draw at the bottom left-hand corner. The bottom right-hand corner is rounded (this pattern can be clearly seen in most of Simone's plans). Number 1 is directly in the middle and it is the type of number 1 that is used in England.

Commentary: The attribute of drawing the squares so that the first corner is sharp and the second one is rounded might point to Simone's lack of punctuality and a bit of laziness. I am afraid I am not able to explain why Simone suddenly used English type of number 1.

After longer hesitation Simone drew a plan of **picture 2)** in one elementary step (see Plan SM2).

Step 1: Simone drew a rectangle. She did a parting line as a sub-elementary step and put numbers in the set squares.



Plan SM2

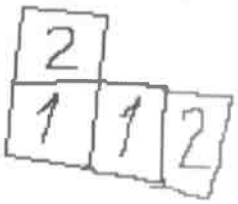
Evidence: The square that represents the column of two cubes is much bigger than the square on the right that is very narrow and high. The rectangle itself has sloping lines; especially the bottom line goes slightly downwards.

Commentary S: Undoubtedly, Simone could not see the hidden cubes. She seemed to be very unsure about that picture. The inaccuracy of parting the rectangle into two squares might flow from Simone's wrong projection.

Simone drew the plan of **picture 3)** in three elementary steps (see Plan SM3).

Step 1: At first a rectangle was done. The line was led from the top right-hand corner in anticlockwise direction. Then Simone added a parting line as a sub-elementary step and wrote numbers.

Evidence: The bottom corners of the rectangle are rounded. The parting line is sloping and goes over the line of the rectangle on the left side. The bottom square is little bit higher.



Plan SM3

Step 2: Simone looked at the picture and was thinking for a while. Then she decided to add another square and drew it on the right side of the bottom square. She put number 1 in it.

Evidence: The new square is almost the same height as the square on the left. The square itself seems to be going downward.

Commentary S: Simone might have seen the cube in the front but she did not have any idea how to draw the plan. It could also be a sudden lack of concentration that caused her drawing of the new square next to the wrong square.

Step 3: As the last step Simone added a square on the right of the previous one. She led the line from the top left-hand corner. Then she wrote a number inside the square.

Evidence: The square goes more downwards then the previous one. The bottom line is led below the level of the square on the left and there is also a small over-draw.

Commentary: The sloping direction of the plan might be result of handwriting and gentle slipping of the writing hand.

The last plan of **picture 4)** was drawn in three elementary steps (see Plan SM4).

Step 1: Simone drew a rectangle, wrote number 3 at first, then added a parting line and wrote number 1.

Evidence: The bottom square and number 3 in it are much bigger. There is just little space for number 1.

Plan SM4

Step 2: Simone added a square on the right. Then she put number 1 in it.

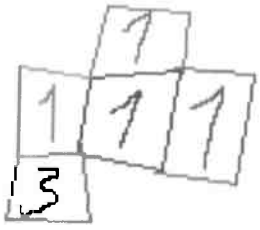
Evidence: The width and the height of the new square is the same as in the previous case.

Step 3: After looking at the picture and the plan, Simone drew the last square and wrote a number inside.

Evidence: Again, the size of the square is equal to the size of the square on the left.

Commentary: This time, the size does not correspond with the importance of individual squares. Possibly Simone just wanted to stick to the size of the rectangle and squares made in the first step on the left.

Obviously, Simone struggled with the last plan. During the drawing she felt discontented with it and rubbed it off. She started drawing a new plan, this time from the middle. She made the plan in five elementary steps (see Plan SM4c).



Plan SM4c

Step 1: Simone drew a square and put a number in it.

Evidence: The square has divergent sides.

Step 2: As the second step Simone added a square on the right.

Evidence: Both ends of the lines are over-drawn. The size of the square is bigger and divergent, too.

Step 3: One square at the top of the left square was drawn. Then Simone put a number inside.

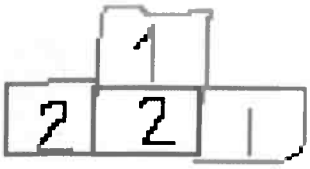
Step 4: Simone added a square on the left and wrote number 1.

Step 5: As the last step, Simone drew a square at the bottom of the plan.

Evidence: The line on both sides goes apart each other, number 3 is the same size as number 1 in the top square.

Commentary: The diversity of the lines might be caused by Simone's hurry to finish the plan and attempt not to forget to mark the square down .

For checking the answers Simone was encouraged to do **task 7a**. When she built the cube solid according to the Plan SM1 and picture 1) was uncovered, she claimed that they were the same. When the solid was turned around, Simone noticed the hidden cube and completed her plan (see Plan SM1c).



Plan SM1c

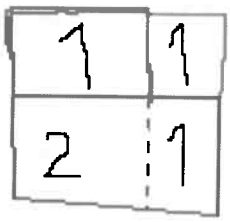
The next plan was much easier for her to realize the mistake she had made. She immediately completed her previous plan in two elementary steps (see Plan SM2c).

Step 1: Simone added a square on the top of the square representing the column of two cubes; then she contoured the lines again. Simone wrote a number in it.

Evidence: There is an over-draw at the bottom right-hand corner where Simone finished her line.

Step 2: As the last step Simone drew a square to complete the plan and put number 1 in it.

Evidence: The height and width remained the same.



Plan SM2c

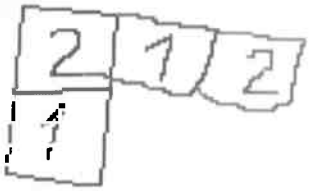
Another picture also did not correspond with the plan Simone drew. When she built the solid, she noticed different arrangement of the building and tried to change the plan. Simone erased the part of the original plan and redrew it in two additional steps (see Plan SM3c).

Step 1: Simone added a square next to the upper square.

Evidence: The finishing line goes above the level of the lines of the square on the left and there is also quite a long over-draw. The bottom line is sloping. The side line does not go straight.

Step 2: The last square and number 2 were added.

Evidence: Again, the bottom line is curved. The square is the widest of all the top squares that go downwards.



Plan SM3c

3.4.4 Stacey

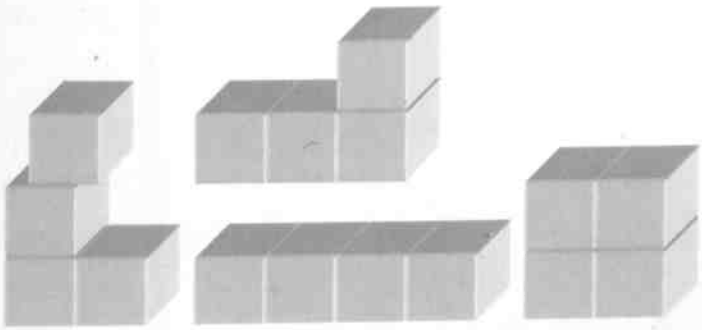
Grade 6, an average-ability child, very quite and patient.

3.4.4.1 Stacey I

Stacey was given **task 1** twice. The first solid she built was solid no. 9, then she built pirate P01.

Commentary J*: If I could do the experiment again, I would let Stacey to build more solids; I would let her to touch the cubes and get used to it.

Then, Stacey was given **task 2** (see Picture T2G1). She identified the pirate immediately and gave reasons for it saying that "it's not on the side. Just to touch it and it will fall down." Subsequently, **task 2b** was completed successfully. Stacey made from the



Picture T2G1

reasons of her decision Stacey explained: "Because when you move it like this it's the same." Stacey turned solid C round. "Solid A is different because when you move it like that, it's not the same; it's facing the other way."

Commentary S: Obviously, Stacey did not consider rotation of the solid upside down. Probably she had already had some experience with mirror reflection that she was able to apply on this case.

For homework Stacey was given four wooden cubes and **task 4**.

3.4.4.2 Stacey II

Stacey had not found any idea how to make the plans, therefore **task 4a** was given as a help. Stacey built solid no. 2. At first, she copied the shape drawing a line around the building precisely. Since it went slowly, she decided to put the cubes away, remembered the shape and drew it (see Attachment 17). When she finished her plan, **task 4b** was submitted. Stacey built solid no. 11 and drew its shape using the squares. She seemed to be clueless how to mark the cube on the top. When encouraged not to be afraid of mistake, she managed to draw another square inside the one she had made to show that there was a cube on the top. Stacey was given **task 5** and solid no. 15. She drew three squares inside each other in one main square of the square paper. When encouraged to find some symbol or number for marking, she drew a new plan of solid no. 15 and placed number 4 in the square. Again, for making sure that she understood, **task 5** was submitted, once more solid no. 11. Stacey fulfilled the task successfully. **Task 6** was given as homework.

3.4.4.3 Stacey III

At home Stacey found out eight plans (solids no. 5, 9, 10, 14, 15); three of them represented identical solid (solid no. 12) but rotated in different ways (see Attachment 18). Therefore Stacey was given **task 6a;** especially she was led to build the solids for the same plans. Then she could clearly see their likeness.

Evidence: The size of Stacey's squares is the same as the size of squares that were visible through the paper. Some plans are obviously drawn in several steps, or square by square, and some of them are pre-drawn as rectangles and then parted by lines into squares.

For example, the plan of solid no. 5 was drawn square by square. Stacey made the upper left square first, added the bottom rectangle, parted it by a line and finished the plan by drawing

the last two sides of the upper right square. Then she put numbers inside the squares. Another example is the plan of solid no. 9. Easily, Stacey drew a rectangle, parted it by a line in the middle and wrote number 2 in each square.

Evidence: All the squares and rectangles are drawn from the right top corner following the clockwise direction. Most of the corners are also little bit rounded.

Commentary: Stacey is left-hander. This definitely influenced the way she drew the plans. I also think the process of her drawing was not so systematic.

Stacey was asked to complete **task 6**. She tried many variations of solids; she did not apply any strategy when looking for the plans. Apparently, Stacey followed the method of trial and error. At first she found solid no. 8 and drew its plan. Then she added plans of solids no. 13 and 11. Stacey also hesitated for a while when comparing the plans of solid no. 11 and no. 12; then she claimed them for being different. Afterwards, she built solid no. 3 and without marking its plan she moved the solid around and made solid no. 10. But she noticed that she had already drawn this plan and carried on trying new solids. This time she focused on flat buildings like no. 4, 1, 2, 6, 3, and 7. She managed to finish the task without any help from my side (see Attachment 19 and 20).

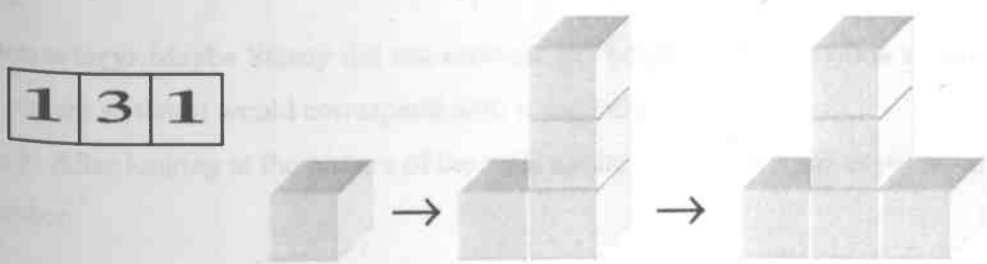
Commentary S: Although I did not interrupt Stacey by saying any comments or encouragement, she kept on looking for different solids. She propably felt to be responsible to find as many solids as possible.

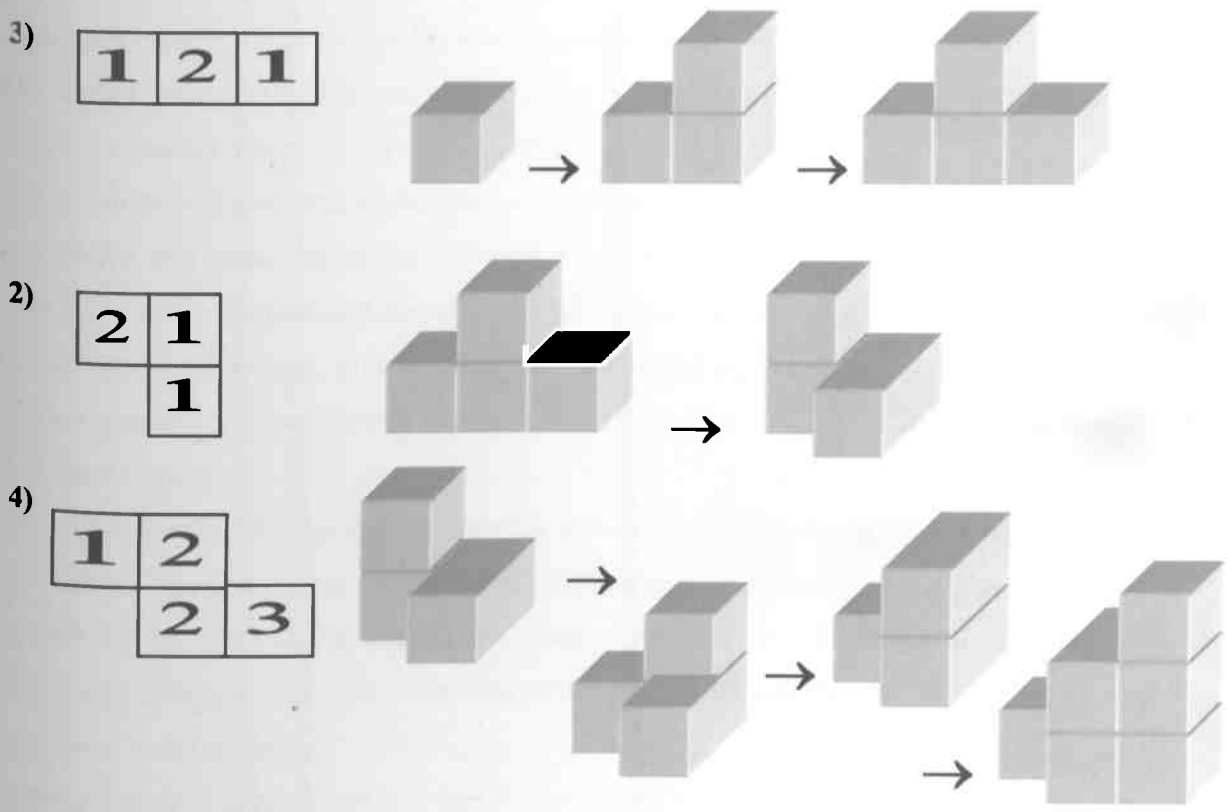
After finding all possible cube solids made of four cubes, Stacey was assigned **task 7**. There were no problems with the first exercise.

Evidence: In the first two cases (plans 1) and 3)), Stacey started building from separate cubes. When she finished plan 3), she did not ruin the solid but just moved some cubes to get plan 2). From this plan, she continued in moving and adding some more cubes to get plan 4) (see Picture S1).

Commentary S: Probably Stacey could see from the plans the similarity of the solids. Undoubtedly, she considered only the shape of each plan not the solid as such.

1)





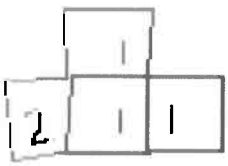
Picture S1. Graphic analysis of the steps Stacey did when building cube solids according to the plans.

In the second exercise Stacey drew each plan from the right to the left. As a left-hander Stacey had a big disadvantage when working on the worksheet. All the pictures are on the left side and Stacey was covering them by her hand while she was drawing the plans (see Attachment 20).

Picture 1) was drawn in four elementary steps (see Plan S1).

Step 1: Stacey drew a square and wrote number 1 in it.

Step 2: Then she added a square on the left side of the previous square and put number inside the square.



Plan S1

Evidence: The square goes slightly under the level of the previous square and the finishing line is over drawn. Number 1 is more on the right side and it is very small.

Commentary: Maybe Stacey did not estimate the height of the previous square to draw the new square so that it would correspond with it properly.

Step 3: After looking at the picture of the solid again, Stacey drew the upper square and wrote a number.

Evidence: Again, there is obvious overdraw at the end of the square that made a gap between the line of the upper square and the corner of the middle square. Also the height of the upper square is smaller. Number 1 is tiny and placed in the right bottom corner.

Commentary: Stacey started drawing at the upper right corner. The three lines were done in one draw; that could cause the deformation of the square. I think that Stacey (like in the previous case) miscalculated the width of the bottom square. Because the square is smaller as well as the number in it, it is possible that Stacey did not consider the hidden cube as being very important. The position of number one in the right hand corner might be caused by her left hand writing.

Step 4: Stacey did the last step by drawing the square on the left and writing a number in it.

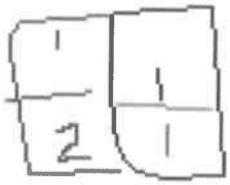
Evidence: The last square is the smallest and the narrowest one. It is also the most deformed square of the rest. The finishing line goes slightly below the width of previous square. Number 2 is bigger than other numbers of the plan. Although the last square is very narrow, number 2 looks dominant.

Commentary: I think that Stacey just did not move her hand enough to get space for drawing bigger square. As the other plans might show, there is obvious downward direction on the left side. I suppose this may be quite typical for left-handers.

Stacey drew the plan of **picture 2)** in three elementary steps (see Plan S2).

Step 1: Stacey made a rectangle first. Then she put a small number in the middle.

Evidence: The rectangle starts on the left top and the line goes in clockwise direction. The angles at the bottom are different – the one on the right is very sharp while the one on the left-hand side is curved.



Plan S2

Commentary: Since there is not visible line in the printed picture that clearly represents two cubes behind each other, Stacey maybe considered it to be one cube. Her decision to write just a small number in the middle of the rectangle can reveal her uncertainity and dissatifaction with her drawing.

Step 2: Next rectangle was drawn from the bottom to the top. Then Stacey parted it by drawing a parting line in the middle as a sub-elementary step. Afterwards she added numbers, number 2 first.

Evidence: There is a small gap at the beginning of the line. The shape of the rectangle is also deformed by a curved line but the corners remained sharp. As the parting line was written

from the right to the left, there is a gap at the beginning of the line and an over-draw on the other side. Number 2 is bigger than number 1; the position of number 2 is in the middle of the square while number 1 is written in the upper part of the square.

Commentary: The gap might be caused by absence of any starting point at the curved corner of previous rectangle that Stacey could use for precise connection. The sloppines of her drawing results from the fact of sketching the plan. Probably Stacey did not bother with punctuality of her drawing. Possibly she was unsure about the "hidden cube" and marked number 1 so that she would have been able to correct it when needed.

Step 3: At the moment when Stacey finished the parting line and looked at the picture again, she realized the mistake she had made when creating the right side of the plan. So she drew a parting line to divide the rectangle on the right. Then she put number 1 in the new square.

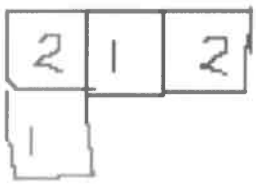
Evidence: The parting line is placed much lower than the neighbouring parting line. The size of the new number is the same as the original number in the upper square.

Commentary: The lower posititon of the line is probably caused by the fact that number 1 was already written in the rectangle and Stacey did not want to erase it; so she just added the parting line right below the number.

Stacey drew a plan of **picture 3)** in four elementary steps (see Plan S3). In comparison to previous cases Stacey did not draw a rectangle first; this time she drew the plan square by square.

Step 1: Stacey started her drawing in the middle of the solid; she drew the first square in the anti-clockwise direction beginning at the top right hand corner. Then she wrote a number.

Evidence: The square has very regular shape. Number 1 is almost in the middle of it.



Plan S3

Commentary: Surprisingly, Stacey started very originally. This could be caused by the symmetry of the solid which had two same columns at its sides. It is possible that Stacey was much more concentrated this time; the whole plan is drawn very precisely.

Step 2: As the second step Stacey added a square on the right side of the previous square and put number in it. She drew the square from the bottom.

Evidence: There is a small correction and over-draw on the right side of the square, number two is bigger than number one on the left. There is a small gap at the bottom where a new square is connected to the square on the left.

Commentary: A. During the drawing Stacey might have thought that the line was not led straight and wanted to correct it immediately; therefore she stopped drawing and started again from another point. **B.** It is possible that something interrupted her and she stopped drawing; when she wanted to continue she was not able to connect precisely.

Step 3: Stacey added another square on the left side of the first square. The line was led from the top. Number 1 was written.

Evidence: The corner at the left hand bottom is more curved. There is also an over-draw at the end of the line. Number 2 is the same size as the number in the square on the right.

Commentary: Probably Stacey considered the two columns as being important equally; therefore the size and position of the numbers is almost identical.

Step 4: The last step she made was the last square and number in it.

Evidence: There is a small gap at the end of the line (at the left hand top). Number 1 is very small in contrast with number 1 in the middle square.

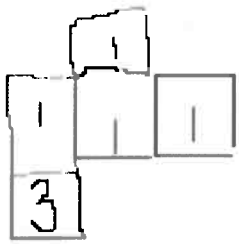
Commentary: The most obvious deformation of the last square might result from the fact that Stacey drew the square in the end and did not pay so much attention and concentration on that.

Picture 4) was transformed into a plan in five elementary steps (see Plan S4).

Step 1: Stacey drew the first square on the right. She led the line from the right bottom in clockwise direction.

Evidence: There is a gap between the starting and finishing point. Number 1 is directly in the middle of the square.

Step 2: Then Stacey added another square and wrote number 1. Again, the line went from the bottom.



Plan S4

Evidence: This time, there are two gaps made; one at the beginning, the second one at the end of drawing. The upper line is also curved in the upward direction. Number 1 is placed at the bottom of the square and has the same size as number 1 in previous square.

Commentary: The gaps might be caused by Stacey's lack of interest in punctual drawing. The curved line could be made when Stacey had to move her hand, or when she looked at the picture.

Step 3: After brief looking at the picture, Stacey drew square representing the cube at the back and place number 1 in it.

Evidence: The square is the most deformed one; the upper line goes rapidly downward. The number is the smallest of all the numbers in the plan.

Commentary: Stacey might have considered it as being not very important. Maybe she was not sure about it. The size of the number can also underline its unimportance.

Step 4: Stacey drew another square on the left. She led the line from the top in anti-clockwise direction.

Evidence: There is distinct over-draw; the square is the biggest of all the squares. It is rather a rectangle than a square. Number 1 is placed into the upper part of the rectangle.

Commentary: A. It is possible that Stacey had intended to draw whole rectangle but decided to finish one square and draw another one as the last step. **B.** Perhaps she just did not estimate the height of the square on the right to make a square of equal size. The printed picture might have confused her because the column of three cubes is not linked to the solid.

Step 5: Finally, Stacey added the last square and wrote a number in it.

Evidence: Number 3 is the biggest of all numbers. The square is precisely linked to the upper square.

When Stacey finished her drawing, the answers were checked by completing **task 7a**.

3.4.5 Raveena, Stacey

Stacey, Grade 6.

Raveena, chosen friend, Grade 6, quiet, patient.

The experiment was focused on one meeting that included task 1 and task 4. Since the experiment is aimed at communication between two friends of the same age, the direct speech is marked in inverted comas. Notes that describe child's movements and action during the direct speech are written in italics and put in the brackets. For simplicity there are just initials of the girls' names (S = Stacey, R = Raveena). The experiment is commented in three different levels. The general comments that were made during the analysis are titled as **Commentary**. While the process of Stacey's thinking and teaching is presented in **Commentary S**, **Commentary R** annotates Raveena thoughts. Stacey did not have any time to prepare for her role of a teacher; I asked her to teach Raveena just at the beginning of the experiment.

Stacey started with the motivation and told Raveena the story of the planet called The Cube. "We are doing like cube solids and that like this planets and buildings of its shape on it. If there is like a sphere, there will be sphere building, and if it's a cube, it will be cube buildings, and ... could you just build me few buildings of what you think they will be like on the planet ... it's gonna be like a cube solid built on cube planet." Raveena built solid no. 5.

S: "Can you build me another one? Can be any shape."

R: "Any shape?"

When Stacey nodded, Raveena built solid no. 10. S: "And one more for me?" Raveena built solid no. 15.

Commentary S: Stacey started the experiment followint absolutely the same way as I did with her. Undoubtedly, she found it very important to encourage Raveena by nodding and agreeing.

Then Stacey set **task 4**. "Right. If you were like an architect and you wanted like a plan but it was ... like on this piece of paper and it was like a building like this. How could you tell that it was like this building just by drawing it on this piece of paper? Do you want to draw it for me? How do you think it'll be like?" And Stacey built solid no. 15 and placed it next to the paper.

Commentary S: Probably solid no.15 seemed to her to be quite easy for demonstration of drawing a plan. It is possible that Stacey considered its easy shape.

R: "What for? For that one?"

S: "Yeah. And you're looking at it like that." And Stacey showed Raveena from which point it is advisable to look at the building.

Commentary S: After short explanation of the task Stacey might have felt that Raveena is unsure how to draw the plan. **A.** She found it important to demonstrate from which point Raveena should look at the solid. **B.** Perhaps Stacey wanted to make it clear for Raveena. This time she became a real teacher.

R: "On top?"

S: "Yeah."

R: "So I will draw the top itself of it." When Stacey nodded, Raveena contoured the square using her pencil (see Attachment 21).

Commentary R: Raveena's decision to draw the top sounded more like a question rather than an intention. Probably Raveena needed to be reasured by Stacey's approval.

S: "Yeah, but how would you know it was like four on top of each other? Just any idea you've got. ... If you're looking at it like this." Stacey took the column and turned it so that Raveena could see just the top square of it. S: "How could you tell the architect it was four cubes on top of each other?"

Commentary S: Until Stacey could see that Raveena understood her explanation she tried to make it as easy and clear as she could.

Raveena was thinking for a while before she decided "I would just draw number four."

Stacey encouraged her: "Yeah."

Evidence: Number 4 is quite small and placed into the upper part of the square (see Attachment).

Commentary: Probably Raveena was not so confident to write a big number although she was agreed by Stacey that the plan was right.

Stacey built solid no. 13 and asked: "How could you do this building? In the same idea you have done."

R: "That I'm looking down at the house? And then draw?"

S: "Yeah, just draw that shape, just do what you think it would be like."

Commentary R: Raveena needed to be reasured what Stacey wanted her to do. She had understood the way of drawing the plan in previous task but was not sure whether Stacey asked for it again or she was supposed to do something else.

Commentary S: It is possible that Stacey could see Raveena's uncertainity and decided to give her modified task.

Raveena drew the plan of solid no. 13 proceeding square by square. She started at the top on the left and finished with the bottom square.

Evidence: Square that represents one cube is empty.

Commentary R: Probably Raveena did not find it important to mark number 1 in the square which represents just one cube.

When Stacey could see that Raveena understood the plans, she gave her **task 6**: "Could you try to do as many as you can for me? And you can use these cubes to help you." Raveena did not understand Stacey's instructions therefore it was explained once more.
S: "Just like, make a building using these and draw a plan for it and draw as many as you can." Raveena built solid no. 5 and drew its plan. She proceeded drawing square by square from the left top to the right bottom. Then she added numbers (see Attachment 22 and 23).
When Stacey saw that Raveena understood the task, she kept on encouraging her: "Still as many as you can for me, yeah? Draw what you think. Doesn't matter if you go wrong."
Commentary S: Stacey felt it was important to mention that Raveena should follow her way without being disturbed by thinkin whether she had made a mistake or not. Stacey wanted to give her a positive impuls for the solving.

Before Raveena started drawing a plan of solid no. 11 she noticed that she had already had a similar solid (no. 13) and its plan. Raveena decided to change this plan into a plan of solid no. 11. Therefore she erased number 2 in the corner and wrote number 1 instead. Since there was not a number in the bottom, she put number 2 in it and then she got a plan of solid no. 11. Stacey did not interrupt her.
Commentary R: It is possible that Raveena wanted to save some space by redrawing similar plan.
Commentary S: Stacey could see that Raveena had her own way of drawing and did not want to disturb her.

When I saw that the drawn lines were hardly visible, I gave Raveena a marker to contour the plans.
Evidence: In the first plans (of solids no. 5, 11 and 15), the shape is redrawn by using a marker but the numbers are left being written by a pencil.
Commentary R: The reason for using the marker for contouring only the shape of each plan without highlighting the numbers as well might show Raveena's preference – the shape of the solid seemed to be more important to her.

Then Raveena drew new and new plans of solids no. 6, 13, 8 and 11. Every time she drew square by square but some parts of the plans were drawn at once; she usually drew a rectangle and parted it into two squares. After finishing a square, Raveena put a number inside immediately.

Evidence: The new plan of the same solid no. 11 is rotated of 90°.

Commentary: The rotation of the same solid might be caused by turning the page over and drawing on the blank page without realizing that she had already done this solid.

Raveena went on building other solids and drawing appropriate plans. The next solid was solid no. 1; she drew a big rectangle first that she parted by three lines to create four squares. The last step was putting the numbers in the squares.

Evidence: Why did Raveena changed her strategy of drawing the plans?

Commentary: Possibly Raveena could see the solid as one unit. She maybe became more confident when drawing other plans. She remembered the shape of the solid first, and then marked the numbers for successful completion of the plan.

When drawing a plan of solid no. 4, Raveena drew a rectangle, made three squares in one line and added one square on the top. Then she put inside each square numbers. The plan of solid no. 10 was drawn in a different way from the previous case. Raveena drew a rectangle first that parted it by one line to make two squares; then she filled them with numbers. Afterwards she sketched on the right the last square and placed number 2 in it.

Evidence: Why did Raveena changed her previous way of drawing and writing the numbers?

Commentary: Raveena maybe wanted to finish the step of two squares with numbers 1. Then she drew the column made of two cubes; that could be the next step for her.

The next plan, this time of solid no. 2, was drawn in the similar way as the plan of solid no. 4; Raveena drew a rectangle that she divided into three squares and filled them with numbers. Finally, she added a square at the bottom of the plan and marked number 1.

Raveena drew the plan of solid no. 14 as a rectangle that she divided into two squares and filled with numbers.

When Raveena built solid no. 7, Stacey asked her if she considered this one to be the same as the one she had already drawn (the plan of solid no. 6). Raveena compared the solid and the plan and hesitated for a while. Then she answered: "If I can turn it upside down." And she did so.

S: "But if you couldn't turn it upside down, is it the same or different?"

R: "Different."

S: "Draw that one."

And Raveena drew the plan for solid no. 7 without marking the numbers.

Evidence: Why did Raveena not put the numbers in the last plan? The parting line in the left rectangle crosses the bordering lines of the rectangle and it is curved.

Commentary R: Probably Raveena did not consider the numbers as very important for this plan.

Commentary S: When Raveena built solid no. 7, Stacey probably remembered the task focused on mirror reflection I had done with her. At this time she felt responsibility to discuss the similarity with Raveena or she maybe thought it would have been advisable to help Raveena to realize this matter.

At the end of the experiment, I gave Stacey a sheet of paper with pictures of all cube solids made of four cubes. Stacey built for Raveena two solids (no. 11 and no. 11 rotated of 90°) according to Raveena's plans and asked her: "What can you tell me?"

R: "They're the same?"

S: "Why are they the same?"

Commentary R: The intonation of Raveena's answer shows her uncertainity and tendency to make a question rather than definite answer.

Since Raveena did not know how to describe her idea she rotated the solid so that she got two identical solids.

Commentary R: The absence of appropriate words was substituted by manual process. Raveena still did not acquire the vocabulary needed for expressing her thoughts.

S: "So you can say that this one and this one are the same. OK?" Then Stacey pointed to two plans of solid no. 11 that Raveena had drawn and asked her what she could say about these. Raveena could clearly see the equality of the plans and solids.

3.4.6 Leah

Grade 4, a high ability girl, friendly, communicative.

There were just two meetings which included all tasks.

3.4.6.1 Leah I

After short motivation and several questions about previous experience with cubes **task 1** was submitted several times. Leah built solids no. 5 and 9.

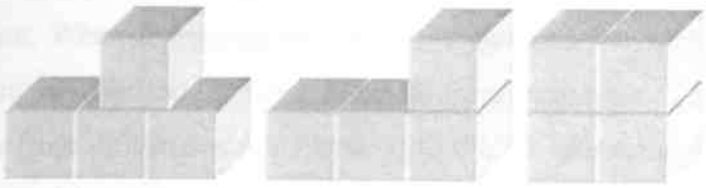
Commentary L: When I mentioned that we were going to work with cube solids Leah probably associated the vision of a cube with the shape of each solid and built only the solids that had the shape of a square and were very symmetric. Obviously she tried to built such solids that would look similar to a cube.

Commentary J: After I recognized Leah's intention, I explained to her that it was possible to build a solid in various ways; it did not have to be symmetric in every level.

Leah managed to build several more solids such as no. 10 or no. 8.

Then she was given **task 2a** (see Picture T2aG3). She identified the pirate without hesitation arguing that the proper solids had different shape and the pirate had "squares in the middle". I concluded the definition.

Commentary L: The pirate can be easily changed into solid no.10. This similarity might have helped Leah to realize which solid was a pirate.



Picture T2aG3

Commentary J: According to experience from previous experiments I chose an easier task to start with. This time I tried to be aware of solids with the same height to eliminate the criterion of measurement. When I observed that Leah defined a pirate quite confidently and cogently, I considered it a waste of time to give her more similar tasks. Maybe I did not want her to get confused by other pirates.

Commentary J*: It would be advisable to do more tasks based on looking for and defining a pirate althought Leah did not have any problems with that in following tasks.

Then Leah was given **task 2b** twice (pirates P01 and P03). She managed to rebuilt the pirates into proper cube solids.

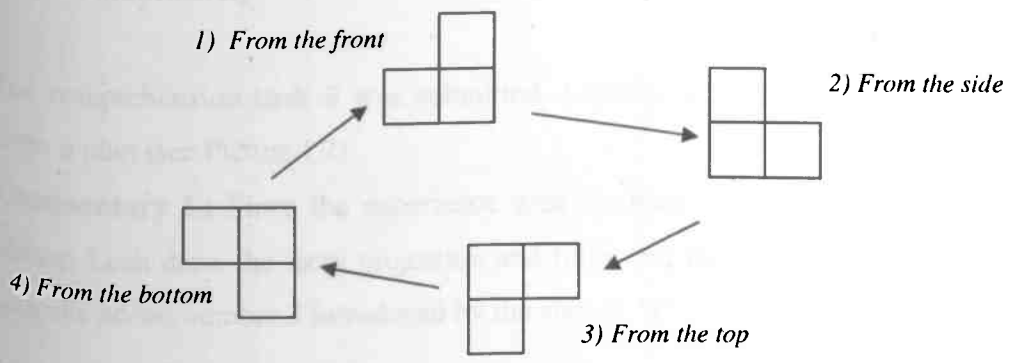
Afterwards, I gave Leah **task 3**. She considered the three solids as "nearly the same" "but in different angles". Since she was not sure how to solve the task, she was submitted **task 3a**. To fulfill the task Leah tried to move separate cubes. I stopped her saying that the cubes were supposed to be one solid glued together. She changed her mind and claimed the solids to be different. When I gave her **task 3b** she moved the solids A and C around to get two identical buildings. This time she understood that two solids were the same (A, C) but solid B could not been moved around to be equal to solids A and C.

Commentary J: Since I noticed Leah's helplessness, I modified task 3 to make it easier for her. I did not realize that she was unsure what she was supposed to do with those cubes.

Commentary L: The attempt to rebuilt one solid to get another one by moving separate cubes might show Leah's lack of experience with solids as whole. Probably she still looked at a solid as something built from cubes that might be easily separated.

Commentary J: Although I helped Leah to solve some tasks I could see that she understood very quickly. Therefore I decided to continue with other tasks.

Leah was given **task 4** and the square paper. At first she "used" the squares as "bricks" and seemed to be confused about what she was supposed to do. When I encouraged her to turn the paper and use the blank page for drawing a plan, she built solid no. 9 and drew the plan; in result it was the solid's front projection. When I removed the two top cubes and put them behind those on the ground floor to make solid no. 5, Leah drew its front projection. To practice her idea of marking the solids from different views I built solid no. 13. She created four projections - from the front, side, and bottom and top, and arranged them into a circle (see Picture L1 and Attachment 24 and 25).



Picture L1. Four projections of solid no. 13 arranged into a circle.

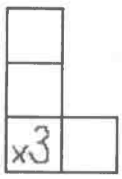
Commentary L: It is possible that Leah realized from the previous two plans of solids no. 5 and 9 that it was not sufficient to draw the front projection. Therefore she managed to create different projections made from different sides. The presence of projection from the bottom might show her concentration on a detail or attempt to plot the solids as well as she could. Probably she did not realize the equality of projections from the bottom and top although she drew it next to each other.

Commentary J: Since the projections were not the way of drawing the plans I wanted Leah to discover, I did not make any comments and analysis.

Then Leah was given **task 4a**. She built solid no. 4 and drew its plan (see Attachment 25).
Commentary L: Possibly Leah was atracted by the shape of the solid so she found important to mark the ground plan instead of drawing the front projection.
Commentary J: I thought she understood the way of drawing so without practicing it more by other examples I continued with another task.

I removed a cube and made solid no. 12. Leah drew the ground plan of solid no. 6. (see Attachment 24). When I built this solid for her according to the plan she had drawn, she could compare those two models and notice the difference. After encouraging her to mark the second cube presenting the first floor of solid no. 12, Leah suggested writing number 2 in the square where "there are two cubes on each other".
Commentary L: Probably Leah mixed up together two different projections – the ground plan and projection from the front. To be sure she needed some visual stimulus. Leah could associate the word plan and environment of maths together; therefore she suggested the number immediately.

For comprehension **task 5** was submitted. Looking at solid no. 14, Leah drew a plan (see Picture L2).
Commentary L: Since the experience with drawing a plan was not very strong, Leah drew the front projection and following the result of previous task she added number 3 introduced by the sign of "x".



Picture L2

Therefore I decided to build the solid according to her plan. When I finished Leah understood quickly and drew the plan of solid no. 14.
Commentary J*: It would be better to let her to build the solid by herself according to the drawn plan.

Leah was given **task 5** once more, this time solid no. 15; she managed to complete the task successfully and drew its plan. As homework and preparation for next meeting **task 6** was submitted.

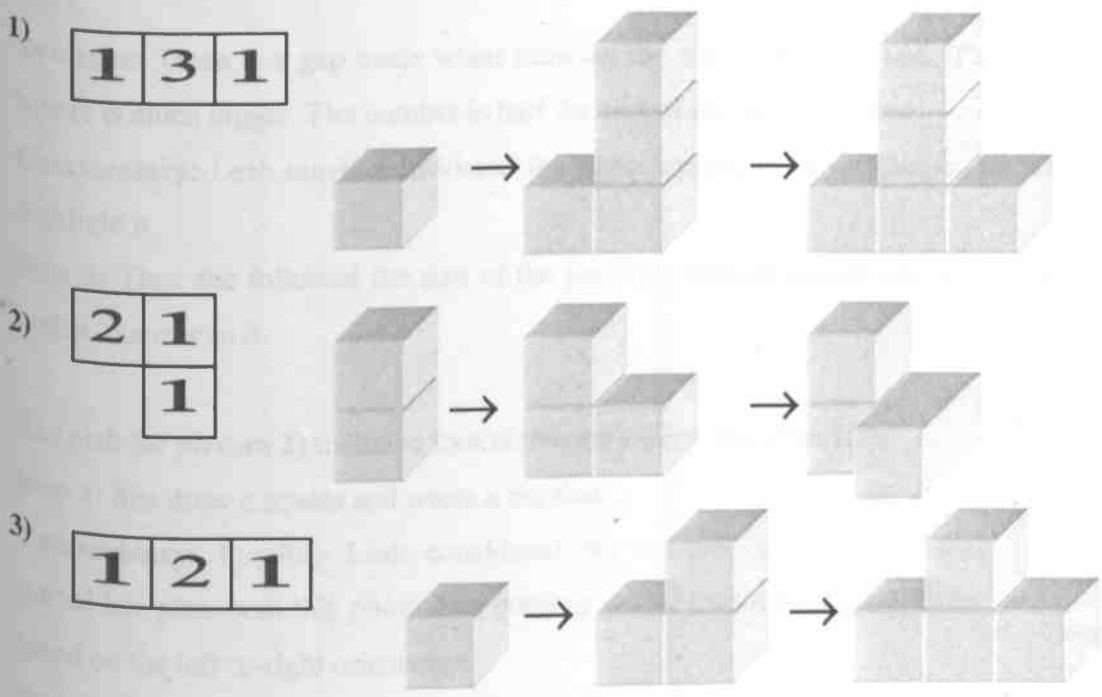
3.4.6.2 Leah II

At home Leah found ten cube solids (see Attachment 26 and 27). Then **task 6a** was given and all founded solids discussed. During the process Leah discovered three more cube solids. When discovering other new solids, Leah apparently struggled with solids built into the shape of a corner. Several times she built a new solid she had not drawn a plan for but she did not realize it.

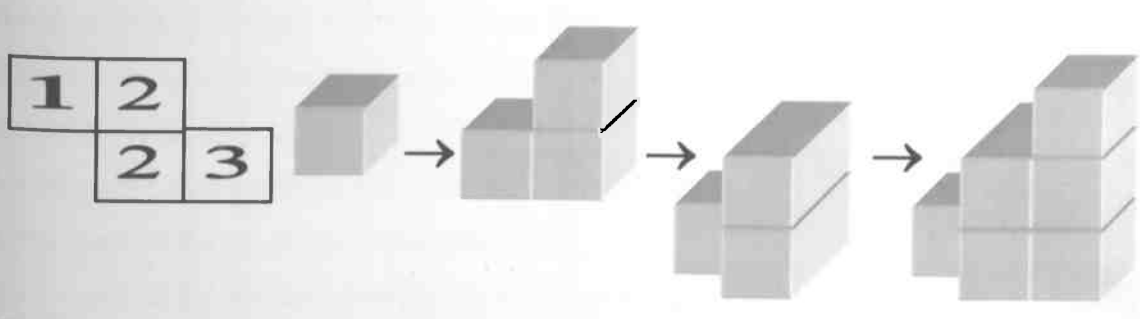
Commentary L: Probably Leah did not consider to check a new built solid with plans she had already drawn to assure herself whether she found a new one or not. Obviously she counted on her memory and speculation that she had built and drawn a particular solid before. The problems with solids "built in the corner" might have flown from the similarity of this buildings and their mirror reflection; and Leah had struggled with that in task 3.

Finally, the worksheet and **task 7** were given. The first exercise was completed successfully. Leah built all the solids from the left to the right. She built the solids "square by square" of the plans without considering the shape of the solid first.

Commentary: Apparently, the process of building the solids was fully automatic. Probably Leah just followed the steps one by one and did it strategically (see Picture L3).



4)



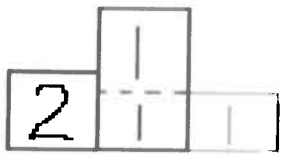
Picture L3. Graphic analysis of the steps Leah did when building cube solids according to the plans.

When drawing the plans according to each cube solid in exercise II, Leah proceeded from the left to the right (see Attachment 28).

Picture 1) was transformed into a plan in three elementary steps (see Plan L1).

Step 1: Leah drew a square and wrote a number inside.

Step 2: Then she depicted the two cubes behind each other by drawing a rectangle at once. The sub-elementary step was a line parting the two cubes. After placing the parting line (from the left to the right) Leah wrote the numbers (into the bottom square first).



Plan L1

Evidence: There is a gap made when drawing the sub-elementary line. Therefore the upper square is much bigger. The number is half the size of the upper number.

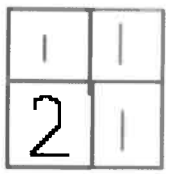
Commentary: Leah maybe considered the upper square to be very important and wanted to highlight it.

Step 3: Then she followed the size of the previous bottom square and added the last square with a number in it.

The plan for **picture 2)** included four elementary steps (see Plan L2).

Step 1: She drew a square and wrote a number.

Commentary: Possibly Leah considered the column as important and started her plan from this point. The purpose of the starting point might be based on the left-to-right orientation.



Plan L2

Step 2: After a while of hesitation whether there was a cube behind the column or not, Leah drew another square from the left to the right and put a number in it.

Evidence: There is a small over-draw where Leah finished the upper square. The square itself has got the same width; but the height is different from the height of the square at the front. The number is much smaller.

Commentary: Apparently, Leah drew the upper square smaller just because there was not enough space at the top (there was another plan).

Step 3: Leah added another square at the front and wrote a number inside.

Evidence: Although the height of the neighbouring squares is the same, the new square is a bit narrower. Number 1 is much smaller than number 2 on the left.

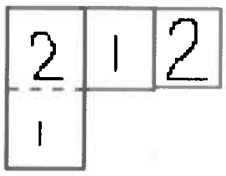
Commentary: Again, the column seems to be very dominant to Leah; therefore she drew the surrounding squares in different (smaller) sizes.

Step 4: Leah finished the plan by drawing the last square and marking the number in it.

Evidence: The last square is drawn in the same width and height as the neighbouring squares. Nnumber 1 is the biggest among the others.

Commentary: Obviously, the height and the width of the last square were kept to fit into the plan.

Leah transformed **picture 3)** into a plan in three elementary steps (see Plan L3).



Plan L3

Step 1: Leah drew the first step at once. She created a rectangle first then put a parting line – a sub-elementary step. After that she wrote the numbers; she marked number 2 first, and then number 1.

Commentary: A. Undoubtedly, Leah was more experienced from previous examples therefore she drew a rectangle instead of drawing separate squares. **B.** It is possible that Leah found this picture to be easier than the previous ones because there was not a cube hidden behind a column as it was in the previous cases. As the upper square is bigger as well as the number written in it, Leah could consider the column to be one of the essential pillars of the solid. That might be also confirmed by her preference to write number 2 first.

Step 2: Leah then added one square on the right and put a number in it.

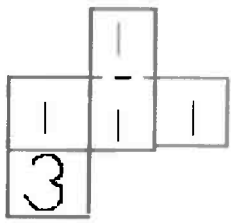
Evidence: The new square has got the same parameters as the one on the left.

Step 3: Leah drew the last square and wrote a number inside.

Evidence: When drawing the last square Leah made a little gap at the beginning.

Commentary: Perhaps the gap Leah made when starting drawing the last square might be caused by the lack of concentration at the end of the task, or she just did not intend to be punctual.

Picture 4) was drawn in five elementary steps (see Plan L4).



Plan L4

Step 1: Leah drew a rectangle first.

Evidence: She did not add the parting line as in previous cases. The rectangle is not finished at the upper right corner.

Commentary: Probably Leah applied the experience from previous exercises, especially from picture 2). She drew the rectangle quickly, without hesitation, being very confident. This can be the reason that she did not finished the rectangle properly.

Step 2: Without writing the numbers into the rectangle Leah drew a parting line and continued in drawing two other squares. After finishing the rectangle she made the parting line in the second rectangle as a sub-elementary step.

Evidence: Leah drew step 2 at once. The line of the rectangle on the right completed the previous unfinished rectangle.

Commentary: I was surprised of the strategy she chose. It seemed to me that she started to be an expert on the plans and could recognize and describe the solids much better than before. She drew more confidently in comparison to the beginning.

Step 3: Leah looked at the picture, counted the cubes and wrote numbers. She wrote number 3 first. Then she added number 1.

Evidence: Number 3 is much bigger than number 1.

Commentary: Again, Leah confirmed her intrinsic decision to write numbers that can be more dominant and important in a bigger size. Undoubtedly the column itself drew her attention by its height.

Step 4: Leah filled the rest of drawn squares – the number in the bottom square was put first.

Evidence: The size of the numbers is very similar.

Commentary: Maybe Leah just followed the line of filling in the squares; she started at the bottom square in step 3, went up, then right, and then again up.

Step 5: Leah add the last square. At the end she wrote last number.

Evidence: There is a small gap at the beginning of the line.

Commentary: Again, the gap might be caused by a hurry or lack of concentration when she finished her work.

When Leah ended the drawing, her plans were checked by setting **task 7a**.

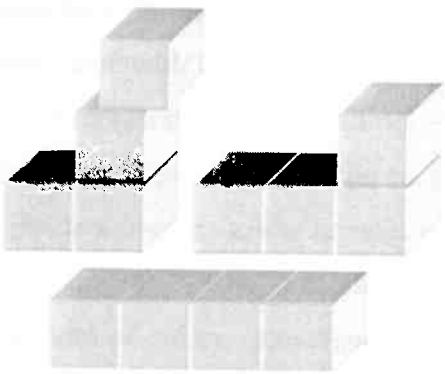
3.4.7 Aaron

Grade 6, a high-ability boy, very friendly, enthusiastic, mathematics is his favourite subject.

3.4.7.1 Aaron I

When given **task 1** several times Aaron built many solids in a very short while (solids no. 9 and 15, pirates P06, P07 a P08). He continued in building very quickly without long thinking. Twice Aaron made an effort to build pirate P09 but the cubes kept falling down so he stopped.
Commentary A: Aaron might intend to build the first two solids to become familiar with the cubes. When he built a new strange solid, a pirate, and I did not stop him, he started creating such buildings with obvious delight to find something extraordinary. This might show at his previous experience with some building blocks. Generally, he was able to build normal house but wanted to build some unusual he had not had experience with.

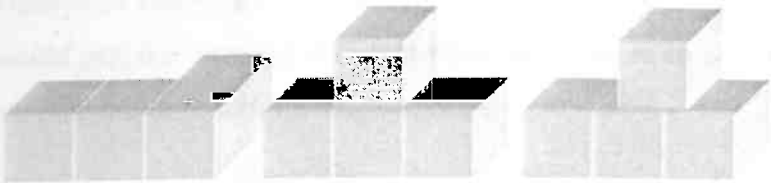
Aaron was given **task 2a** (see Picture T2aG4). He identified the pirate reasoning that "it's not fully on like that". Then he moved the cube into the position of the cube solid without my encouragement. But before he was given another task, he also considered solid no. 1 as being a pirate because "it's not built up". When I asked him whether there existed some flat buildings or not, he changed his mind and did not consider solid no. 1 as a pirate any more.



Picture T2aG4

Commentary A: At first Aaron used for identifying a pirate criterion of stability and tideness. Then he considered the pattern of height and coeficient of measurement. The change of his opinion might result from his effort to think of more solutions.

Afterwards **task 2a** with different group of solids was submitted. (see Picture T2aG5) At first Aaron pointed to solid no. 3 saying "it's not in one line" but immediately he identified the pirate reasoning that "it's right in the middle, it can't be like that". And he moved the cube to get solid no. 10.



Picture T2aG5

Commentary A: The similiraty of solid no. 8 and pirate P02 may have become an indicator

for identifying the pirate as well as the fact that in the previous group were all solids in one line. When Aaron rebuilt pirate P02 he intended to make three different solids – he did not remove the cube to get solid no. 8 again.

Commentary J: It is possible that Aaron found it necessary to come with another solution because of my hesitation to give him another task or absence of approval whether he was right or wrong.

Then Aaron was given **task 3**. At first he claimed the solids to be the same. But immediately he stated that solid A was different from those two solids. When asked to say any reasons for his opinion, Aaron moved solid C around to get solid B and said: "because of the way it *(solid A)* is facing". **Task 4** was assigned as homework.

3.4.7.2 Aaron II

As I could see Aaron was looking forward to our meeting and brought his suggestions of the plans. He also confessed that his mum had helped him. Aaron came with the idea of drawing projections of the solid (see Attachment 29). He was able to demonstrate what he had done. Then I gave him **task 4a**. He built a solid and drew its shape. When there was a cube on each other, Aaron came with the idea of drawing small squares inside according to the amount of the cubes. He also thought of drawing certain number of lines into the square. Therefore he was encouraged to find a better symbol for marking the amount of cubes; immediately he proposed writing a number (see Attachment 30). He understood the plans very quickly and seemed to be excited of **task 6** that was set as homework.

Commentary A: Possibly Aaron associated the word "symbol" with some drawing, some picture. The lines that would mark amount of cubes were simpler substitution for the squares.

Commentary J: As I could see Aaron's ability to accept the way of drawing the plans very quickly I did not consider to give him more examples.

Commentary J*: Next time I would practice drawing different plans much more to avoid Aaron's misunderstanding and lack of experience in following activities.

3.4.7.3 Aaron III

Aaron came with fifteen plans of cube solids drawn from the front (see Attachment 31). I liked his idea and gave him **task 6a** to check whether he was familiar with his drawings. As Aaron explained to me, the expression "one behind" means that there is a cube in the first row and another one is behind it. Expression "behind" means that there is not any cube in the front

row but it is placed in the second row. As an example see Plan AR that represents solid no. 14.

Evidence: The plans which are the front projections of the solids are very neat and drawn with help of a ruler.

Commentary A: Since Aaron did not have enough experience with drawing the plans from previous tasks he solved the homework differently. Although he sometimes seemed to be unsure what he meant by particular plans, in general he looked confident during the explanation.

Plan AR

Afterwards Aaron was asked to redraw the plans into those that were looked at from the top. As Aaron noticed and had not realized it before, there were several identical solids which he drew the plans for. When drawing the plans Aaron carried on by drawing square by square (see Attachment 32).

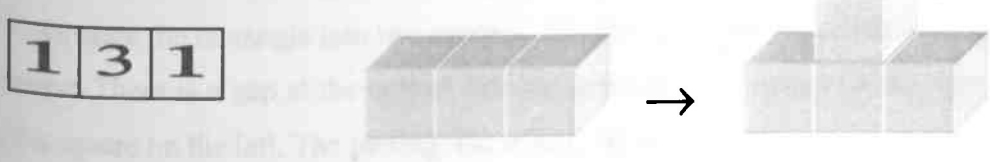
Evidence: There are written only numbers 2 and 3 in the plans. Instead of writing number 1 Aaron left the square empty. In most cases, the square that represents a column is bigger than other squares. There is an obvious tendency to connect the lines properly without leaving any gaps. The plan of solid no. 14 is divided into two seperate squares. Similar pattern is visible in the plan of solid no. 11.

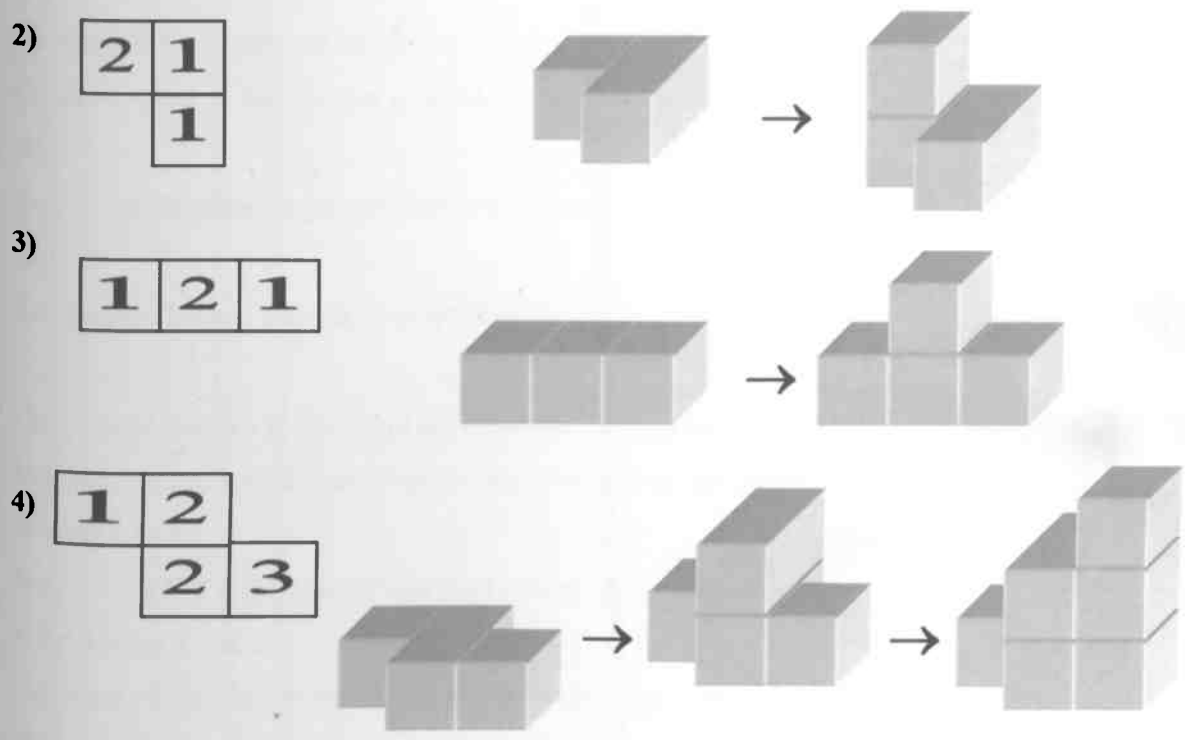
Commentary A: Perhaps Aaron did not consider it important to mark number 1 as well. Probably he wanted to emphasise the columns so that he usually drew bigger squares for them.

At the end of the task Aaron was shown a list of pictures of the solids he had been looking for. Finally, **task 7** was given. In the first exercise, Aaron did not have any problems. He built the solids according to the plans from the left to the right. He followed his own strategy of creating the shape of the solid first, then adding an appropriate number of cubes on the base.

Commentary: Aaron was the only child who built the solids by using this strategy. He looked at the plan as a whole, remembered it and built its shape, and then just completed the model (see Picture AR3).

1)





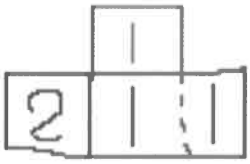
Picture AR3. Graphic analysis of the steps Aaron did when building cube solids according to the plans.

When drawing the plans according to the pictures of the cube solids in exercise II, Aaron started putting number 1 into squares that represented just one cube (see Attachment 32).

Commentary: It is possible that Adam noticed this in the exercise above and accepted it for himself.

The plan of **picture 1)** was drawn from the left to the right. Aaron did it in four elementary steps (see Plan AR1).

Step 1: Aaron drew a square and put number 2 inside. He started drawing the line in the top right-hand corner and carried on drawing in clockwise direction.



Plan AR1

Evidence: The bottom line goes sharply upwards.

Commentary: The sudden change of the direction upwards might be caused by slipping of Aaron's hand.

Step 2: Aaron added a rectangle on the right. As a sub-elementary step he marked the parting line to separate the rectangle into two squares. Then he put numbers inside each square.

Evidence: There is a gap at the bottom left-hand corner. The square on the right is narrower than the square on the left. The parting line is little bit curved.

Commentary: Again, Aaron's hand maybe slipped when he drew the parting line. Or he already looked at the picture to see how continue and at the same time he moved his hand a bit.

Step 3: As the finishing point Aaron drew a square on the top of the plan. He wrote number 1 in it.

Evidence: There is a small over-draw at the bottom left-hand corner.

The plan of **picture 2)** included six elementary steps (see Plan AR2).

Plan AR2

Step 1: Aaron drew the first square that represents the column and put number 2 in it.

Step 2: On the right side of the first square Aaron added another one with number 1 inside.

Evidence: There is not neat connection in the upper part of the two squares. The lateral side of the square is curved a bit. Number 1 also does not go straight.

Step 3: After a while of hesitation Aaron drew a square that represented the cube behind the one in the first line. He drew the line in two sub-elementary steps; at first he made a vertical line, then added the rest of lines to get the square.

Evidence: There are over-draws at both bottom corners.

Step 4: Then Aaron added a square that represented the cube hidden behind the column. He put number 1 in it.

Evidence: The square is not drawn just by adding two side lines but by drawing three lines so that the one side line is linked up with the line of previous square. Number 1 in this square is also written in bold.

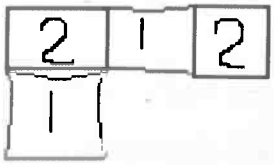
Step 5: Aaron looked at the picture again and suddenly crossed out the square he just had drawn.

Step 6: Aaron finished his drawing by adding the last square on the right.

Evidence: The bottom line goes below the level of the line of the square on the left. Number 1 is placed into the bottom part of the square and almost touches the bottom line.

Commentary: Obviously, Aaron looked at picture 1) by accident and created the plan of it.

Picture 3) was transformed into a plan in three elementary steps (see Plan AR3).



Plan AR3

Step 1: As the first step, Aaron drew a square that represented the

column of two cubes on the left and wrote a number in it.

Step 2: Aaron added another square that represented the second column and wrote number 2 inside.

Evidence: The square is smaller than the previous one.

Step 3: Drawing two paralel lines Aaron created a new square between the prior squares. Then he put a number in it.

Evidence: The upper line is curved a bit. The bottom line is traced again.

Step 4: After looking at the picture Aaron drew the last square at the front of the left square. At the end he noted the last number.

Evidence: The square is drawn as almost separate one; there is a gap between the two adjoining squares. The square at the front is much bigger.

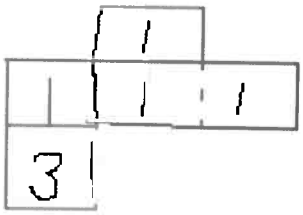
Commentary: The difference in the size of the squares might be caused by Aaron's tendency to emphasise the cube at the front. Maybe he also wanted to show that he noticed the cube. Or, it is bigger just because Aaron looked at the picture and drew; he might have lost the awareness of the size of the previous squares.

Finally, **picture 4)** was drawn in three elementary steps (see Plan AR4).

Step 1: Aaron started the plan by drawing a rectangle in horizontal position. He divided it by a parting line into two squares and fill them with numbers.

Evidence: The finishing line goes little bit upwards and over the beginning line.

Commentary: Probably, Aaron started drawing the rectangle because it was the point he was really sure about.



Plan AR4

Step 2: As the second step Aaron drew a square on the top of the plan. Then he added a number inside.

Step 3: Another step was drawn in two sub-elementary steps; Aaron drew an upper line first, then he continued drawing a rectangle in anti-clockwise direction. When finished, he did the parting line and completed the squares by numbers.

Evidence: The connection of the lines in the top left-hand corner is not very precise. There is also a small gap where the line of the rectangle finishes. The bottom square is higher than other squares in the plan.

Commentary: Aaron maybe did not estimate it or he did not intent to draw some neat lines. Perphaps he considered the square that represented the column as the dominant one and made it bigger.

When Aaron finished drawing the plans, he was given **task 7a**. He was very glad that three plans were correct. Aaron tried to change the second plan so that he crossed out the square on the very right edge and "emphasised" the already canceled square (see Plan AR2c).

Plan AR2c

4. Experimenty v ČR

Na základě zkušenosti s experimentem ve Velké Británii byl proveden i experiment s českými dětmi. Domácí experimenty probíhaly podle stejného scénáře jako experimenty v zahraničí (viz kapitola Experiment in the UK). Děvčata, se kterými byl experiment uskutečněn, byla vybrána z okolí mého bydliště. Obě dívky mě velmi dobře znaly ze zájmového kroužku, ale prostředí mého pokoje, kde experiment probíhal, jim bylo neznámé. U experimentů byl proveden audio záznam včetně fotografické dokumentace některých těles. První z experimentů probíhal individuálně, druhý se odehrál ve dvojici spolužaček 4. třídy.

Experimenty jsou komentovány ve třech hladinách. První uvádí moje myšlenky o vlastní práci během experimentu; tato je nadepisována **Komentář J**. Druhá komentuje myšlenky žačky a je nadepisována **Komentář V**, resp. **Komentář D+V**. Třetí uvádí obecné myšlenky, k nimž jsem se dopracovala až v průběhu analýz; je nadepisována **Komentář**. Nadpisem **Komentář J*** jsou označeny nápady a myšlenky, co bych udělala jinak v případě, že by byl experiment opakován.

4.1 Cíle experimentu

Hlavním cílem experimentu uskutečněného v českém prostředí je zkoumání myšlenkového procesu dítěte, které prochází jiným vzdělávacím procesem než dítě ve Velké Británii. Stejně jako experiment ve Velké Británii je český experiment zaměřen na zjištění, zda je dítě schopno uspět v osvojení nové látky bez jakékoliv předchozí znalosti a nadále pak tuto znalost aplikovat v různých případech. Ačkoliv z malého experimentálního vzorku lze těžko vyvozovat rozdíly a porovnávat počínání dětí z odlišného kulturního prostředí, přesto je jedním z cílů zaznamenat menší odchylky v přístupu k experimentální látce. Vedlejším cílem českého experimentu je zkoumání toho, zda se děti vyučované většinou tradičními metodami dokáží nové látce přizpůsobit a zda-li je bude bavit.

4.2 Hypotézy

Díky zkušenosti z předchozích experimentů uskutečněných v rámci didaktické praxe a pobytu ve Velké Británii očekávám, že děti mohou mít problémy se zápisem plánu, tedy převedením tělesa z prostorové podoby do roviny. Nejobtížnější by pak mohlo být zakreslení půdorysu a především zaznamenání počtu jednotlivých krychlí. Tím, že dítě objevuje způsob zápisu tělesa samo, předpokládám plné osvojení této dovednosti a absenci problémů při její další

aplikaci v nových úlohách. Vzhledem ke skutečnosti, že experiment probíhá v mateřském jazyce, neočekávám neporozumění či nepochopení na základě špatného vyjádření experimentátora. Avšak vzhledem k možnosti barvitějšího vyjádření je možné, že nastanou problémy s používáním a možná i nadužíváním některých slov označujících tu samou věc (např. slova krychlové těleso, stavba, těleso, dům, budova, kostky, krychle apod.), což může dítě lehce mást. Zvažujíc skutečnost, že české děti přicházejí do kontaktu s prostorovou geometrií zpravidla až ve třetím ročníku, předpokládám, že je krychlová tělesa zaujmou a samy o sobě budou motivací pro další činnost bez experimentátorova povzbuzování.

4.3 Popis jednotlivých experimentů

Poznámky:

- S dětmi se o krychlových tělesech mluvilo jen jako o stavbách či budovách. Dále nebyl brán v úvahu rozdíl mezi pojmy stavba a těleso. Za krychlovou stavbu lze považovat těleso, které stojí a má přesně daný půdorys. Otočíme-li takové těleso a dojde přitom ke změně půdorysu, nejedná se již o stavbu, ale o krychlové těleso. Například, tělesa no. 14 a 3 jsou stejným krychlovým tělesem, ale dvěma různými krychlovými stavbami.
- Slovem čtverec jsou při popisu jednotlivých kroků označovány veškeré tvary, které Veronika jako čtverce chtěla zakreslit, ale které ve skutečnosti nemají přesné rozměry čtverce. Veroničiným záměrem ani mým požadavkem nebylo zakreslit čtverec velice přesně. **Komentář:** Ačkoliv by byl čtverec nakreslen velmi přesně, nejedná se o skutečný čtverec. V tomto případě bychom mohli mluvit o zdařilém portrétu čtverce, v případě Veroniky se pak jedná o napodobeniny čtverce a méně zdařilé portréty.
- Přehled experimentů provedených v českém prostředí je uveden v tabulce 1.

Jméno	Ročník	Datum	Čas	Doba trvání	Kapitola	Strana	Příloha
Veronika I	4.	2.12.2006	11:10-11:25	12 min	4.3.1.1	68	-
Veronika II		3.12.2006	14:45-15:10	25 min	4.3.1.2	71	33,34
Veronika III		9.12.2006	13:30-13:50	20 min	4.3.1.3	75	35,36,37
Denisa, Veronika	4.	10.12.2006	15:10-15:50	40 min	4.3.2.	82	38,39

Tabulka 1. Přehled experimentů v ČR.

4.3.1 Veronika

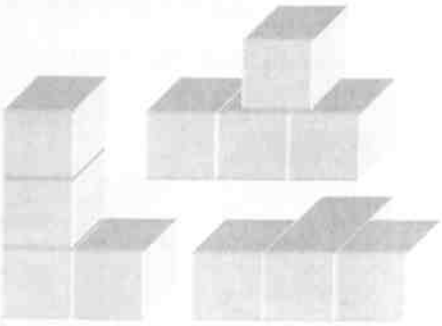
Čtvrtá třída, velmi snaživá, klidná, pozorná.

4.3.1.1 Veronika I

Po krátkém úvodním a motivačním rozhovoru jsem Veronice zadala **úlohu 1,** která byla pro zažití a uvedení do problematiky ještě třikrát opakována. Veronika tedy postavila čtyři různá tělesa; kromě tělesa no. 8 vytvořila tři pirátská tělesa P04, P02 a P10.

Komentář: Z předchozích experimentů jsem nabyla zkušenost, že děti mají potřebu vytvářet nekonvenční stavby, tedy stavby, které jsou něčím zajímavé, složité a neobyčejné. Veronika také stavěla s velkým zaujetím a soustředěním, myslím si, že hodně usilovala o to postavit něco neobvyklého.

Jako další úlohu k řešení jsem zadala **úlohu 2a** (viz Obrázek T2aG6). Ze třech daných těles Veronika určila jako piráta těleso no. 14 s odůvodněním, že „je větší než všechny jiný."



Obrázek T2aG6

Komentář J: Při zadávání další úlohy, tedy úlohy 2a, jsem vycházela z předchozí zkušenosti z různých experimentů a hned na začátku jsem tak zvolila jednodušší variantu úlohy 2.

Komentář V: Pro identifikaci piráta volí Veronika jako dominantní fenomén výšku a označuje nejvyšší těleso, které se jí může zdát z dané skupiny těles „nejzranitelnější".

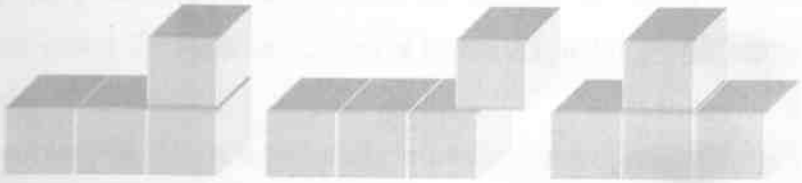
Těleso, které Veronika pojmenovala pirátem, jsem změnila na těleso no. 8 a opět zopakovala **úlohu 2a**. Tentokrát Veronika identifikovala jako piráta těleso no. 2, neboť jej viděla jako „nižší než všechny ostatní".

Komentář V: Jako identifikační rys byla opět zvolena výška; tentokrát bylo označeno to těleso, jehož výška byla jiná než výška ostatních dvou těles.

Komentář J: Když jsem další úlohu 2a Veronice zadávala, všimla jsem si teprve při postavení všech tří těles, že je tam opět jedno, které se svojí výškou odlišuje. Díky této zkušenosti jsem tedy v další úloze přešla k takové skupině těles, kde budou všechny stavby stejné výšky. Navíc, pro usnadnění hledání jsem původního piráta pozměnila tak, aby více vybočoval z řady.

Další skupinou **úlohy 2a** jsem zvolila tělesa o stejné výšce (viz Obrázek T2aG7). Veronika určila piráta se slovy „že by mohla spadnout". Na základě objeveného piráta jsem jí zadala **úlohu 2b**, přičemž Veronika posunutím přesahující kostky blíže ke středu budovy vytvořila z určeného piráta nové nekrychlové těleso P02.

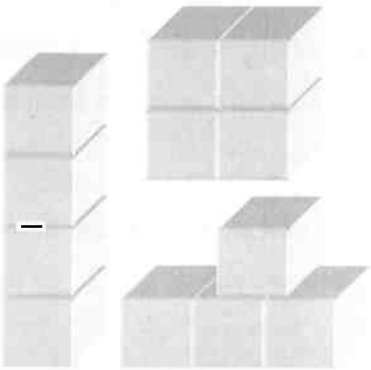
Komentář J: V nastalé situaci jsem nevěděla, jak s původní skupinou těles pracovat a jakým způsobem Veroniku k řešení dovést, a tak jsem přešla k vytvoření nové skupiny tří těles. Bez jakéhokoliv záměru, spíše tedy náhodou, zůstal ve skupině ponechán pirát, kterého Veronika v předcházející úloze 2b vytvořila.



Obrázek T2aG7

Při novém zadání úlohy 2a Veronika určila z dané skupiny těles (viz Obrázek T2aG8) jako piráta těleso, které jím opravdu bylo, a svoji volbu odůvodnila slovy: „Protože je víc široká." Jako odpověď na **úlohu 2b** vytvořila z piráta opět nekrychlové těleso P01.

Komentář: A. Je možné, že Veronika ze způsobu mé intonace a gestikulace mohla vyrozumět, který objekt je považován za piráta a s cílem zavděčit se mi jej označila. Rovněž je pravděpodobné, že při identifikaci vycházela z předchozí zkušenosti, z faktu, že jsem jedno těleso z předchozí skupiny ponechala a ostatní přestavěla. Její rozhodnutí také mohla ovlivnit frekvence výskytu pirátského tělesa v rámci skupin v úlohách 2a. **B.** Označení piráta za nejširší stavbu je opět podle kritéria měřitelnosti jednotlivých těles.



Obrázek T2aG8

Přestavěním piráta na základě **úlohy 2b** jej Veronika odebráním jedné spodní krychle umístila na stejnou úroveň šířky jako těleso no. 9 a přidáním odebrané krychle na vrchní část jej přiblížila výšce tělesa no. 15. Pro zjednodušení identifikace piráta jsem odebráním tělesa no. 9 z předcházející skupiny zadala **úlohu 2e**. Veronika určila jako piráta budovu no. 15 s tím, že je z nich nejvyšší.

Komentář V: Fenomén výšky opět v roli identifikátoru.

Komentář J: Jako experimentátor jsem si neuvědomila, že Veronika neví vůbec nic o konvencích, které zavádíme při vymezení pojmu „krychlové těleso", neboť pro mne bylo toto vymezení zcela přirozené. Příčinou mé neschopnosti úspěšně přivést Veroniku k objevu pojmu „tělesa" byla nízká úroveň mé empatie. Vzhledem ke snaze dovést Veroniku k řešení objevitelskou cestou, nikoliv jí jej poskytnout a sdělit, jsem se snažila vyjít z její životní zkušenosti a modifikovala jsem úlohu 2e otázkou: „Která z těchto dvou budov je hezky postavena? Pěkně kostka na kostce?"

Komentář J*: Kdyby byl experiment za stejných podmínek proveden znovu, změnila bych zadání úlohy 2e tak, že by ve skupině dvou těles byl Veronikou vytvořený pirát a těleso no. 14. Podle mého úsudku si jsou tato tělesa velmi podobná, a Veronika by tak třeba mohla snáze uchopit definici krychlového tělesa.

Veronika na modifikaci **úlohy 2e** reagovala určením tělesa no. 15. Uložila jsem jí tedy **úlohu 2b** s tím, aby z druhého tělesa ve skupině postavila takovou stavbu, „aby ty cihly byly pěkně na sobě". Veronika z dané stavby vytvořila těleso no. 1.

Komentář J: Slovo cihla nebylo v tomto případě vhodně použito. Vzniklo na základě vlastní asociace slova stavba se slovem cihla ve snaze navázat na životní zkušenost dítěte. Již v okamžiku vyřčení jsem si nevhodnost slova uvědomila, ale již jsem nastalou situaci nijak nekorigovala.

Komentář V: Slova „pěkně na sobě" Veronika zřejmě asociovala se stavbou věže, kdy jsou všechny kostky opravdu na sobě. A protože jednu věž, tedy těleso no. 15 již postavené měla, nabízela se tu možnost zachovat tvar, ale změnit polohu.

Pro přiblížení specifikace krychlového tělesa jsem Veronice zadala **úlohu 2d** a těleso P11 s otázkou: „Je to pořádná stavba?". Veronika rozhodla, že „není" a přestavěla ji na těleso no. 10.

Komentář J: V momentě, kdy jsem téměř rezignovala na úlohu experimentátora, jsem jako poslední možnost zvolila úlohu 2d a těleso, piráta, který je hodně „pirátový". Stále jsem chtěla, aby Veronika specifičnost krychlových těles objevila sama. Označení „pořádná stavba" se mi v této chvíli jevilo jako nejvíce vhodné, neboť evokuje stabilitu a přesnost.

Komentář V: Poněvadž Veronika již přišla s tímto pirátem do kontaktu v předchozí úloze (viz třetí varianta úlohy 2a a Obrázek T2aG7), zřejmě si na tuto úlohu vzpomněla a těleso nepovažovala za stavbu. Je také možné, že na ni silně zapůsobilo slovo „pořádná", nebo se

řídila zkušeností z poslední úlohy, kdy se diskutovalo o označení „pěkně kostka na kostce". Tato zkušenost pravděpodobně ovlivnila i řešení její úlohy, neboť oproti minulému přestavění piráta na další nekrychlové těleso, Veronika tentokrát vytvořila krychlovou stavbu no. 10.

Poté jsem provedla krátkou sumarizaci a dohodla se s Veronikou, které budovy budeme považovat za piráty a které za správné krychlové těleso. (pozn.: termín krychlové těleso nikdy nezazněl; o krychlových tělesech bylo vždy referováno jako o stavbách či budovách)

Pro ověření pochopení jsem Veronice zadala dvě **úlohy 2d**. Poprvé Veronika určila těleso P12 jako piráta a změnila jej na těleso no. 14. I druhé těleso P07 identifikovala jako piráta a přestavěla jej na těleso no. 8.

Na konci setkání jsem pokročila k **úloze 3**, při jejímž řešení neměla Veronika sebemenší problém. Nejprve začala vysvětlovat, jak by se musely budovy přemístit, aby byly stejné, poté je po pobídce přemístila do určité polohy; krychlové těleso C pouze otočila na podložce a získala tak těleso B, zatímco o tělesu A prohlásila, že „tuhle bysme museli otočit úplně a obrátit .... Pak je to stejný." A Veronika přitom převrátila krychlové těleso A tak, že získala B. Nakonec jsme se společně dohodly, že jednotlivé stavby přetáčet dnem vzhůru nebudeme, ale můžeme je otáčet kolem jejich osy, a tak získáme tělesa identická. **Úlohu 4** dostala Veronika za domácí úkol. Pro tyto účely jsem jí poskytla papír s narýsovanou čtvercovou sítí a čtyři krychle.

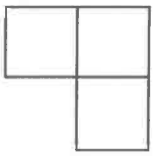
4.3.1.2 Veronika II

Výsledkem domácího úkolu Veroniky bylo sedm různých plánů (viz Příloha 33). Pro kontrolu jsem tedy Veroniku vybídla, aby jednotlivá tělesa podle plánů postavila. Při stavění tělesa no. 3 si Veronika všimla, že vedle je těleso podobné (no. 4): „tady taky, ale na druhou stranu". V průběhu stavění Veronika vždy umístila stavěné těleso mimo plán a papír, nestavěla na papíru, jen pohledem kontrolovala plán, jestli skutečně staví podle něj.

Evidence: Veroničiny plány představují půdorys přízemních budov bez vyznačení počtu krychlí. Jednotlivé plány se navzájem dotýkají. Většina z nich je přesně ohraničena rovnou, podle pravítka narýsovanou čárou, některé se však ve čtvercové síti ztrácejí. Vnitřní linie sítě znázorňující jednotlivé krychle obtáhnuty nejsou, Veronika pracovala pouze s obrysem daného tělesa. Zcela zrcadlově jsou vedle sebe zakresleny plány těles no. 3 a no. 4, čehož si Veronika při stavění jednotlivých těles všimla.

Komentář V: Podle svých slov pracovala Veronika na tvoření jednotlivých plánů zcela sama. Překvapilo mě, s jakou jistotou tělesa podle daných plánů stavěla. Pravděpodobně při kreslení zkoušela různé varianty polohy krychlí u přízemních krychlových těles. Nejspíše metodou pokus omyl. Zřejmě i díky tomu našla dosti obtížné těleso no. 6. A asi i proto se mezi plány nevyskytuje jediný, který by představoval vícepodlažní budovu. Veronika zřejmě usoudila, že ve čtvercové síti, která jí byla dána jako pomůcka pro zakreslování plánů, vždy musí být zakresleno těleso, které má čtyři krychle. Je také možné, že si se zakreslením vícepodlažní budovy nevěděla rady, takže se raději věnovala pouze stavbám přízemním.

Pro hledání plánu, který by představoval budovu vícepodlažní, jsem zadala **úlohu 4b** a postavila těleso no. 11. Když jsem si všimla Veroničiny bezradnosti, odebrala jsem vrchní kostku a Veronika pak bez větších problémů zakreslila správný plán tělesa složeného pouze ze tří krychlí (viz Obrázek V1). Poté, co jsem kostku vrátila na své původní místo a pobídla Veroniku k vytvoření plánu, ve kterém určitým způsobem zaznamená, že máme dvě krychle nad sebou, Veronika z předchozího plánu vytvořila přikreslením jednoho čtverce plán tělesa no. 7 (viz Příloha 34).



Obrázek V1

Komentář: Veronika se zřejmě dívala na nové těleso zepředu a seshora a přišlo jí nejjednodušší zakreslit jej tímto způsobem, tedy způsobem podobným, jakým tvořila plány za domácí úkol.

Komentář J*: Až později jsem si uvědomila, že těleso no. 11, které bylo dáno v rámci úlohy 4b, bylo příliš složité. Jeho rohový tvar mohl Veroniku zmást.

Když jsme se vrátily zpět k domácímu úkolu a Veroniku jsem vybídla k postavení tělesa no. 6 podle vlastního plánu, Veronika porovnáním zjistila, že dva podobné plány nemohou představovat dvě zcela rozdílné budovy. Vyšly jsme tedy opět z původního plánu, který představoval rohovou přízemní budovu obsahující pouze tři kostky. Na pobídku: „Co by se mohlo v plánu změnit, aby nám to řeklo, že je nad sebou více kostek?“ zareagovala Veronika nápadem, že by „tady napsala, že jsou tu dvě kostky nad sebou“ a tento text do plánu dopsala (viz Příloha 34).

Komentář: Pro záznam půdorysu stavby má Veronika již osvojený symbolický jazyk. Pro záznam vyšších podlaží žádný jazyk zatím nemá a je zajímavé pozorovat, jak si jej v diskusi se mnou vytváří.

Při rozboru, z jakého pohledu se na stavbu díváme, Veronika usoudila, že zakresluje plán podle toho, jak vidí těleso seshora. Když jsem ji tedy vyzvala, ať zakreslí dané těleso no. 11 jednodušeji a seshora, Veronika přikreslila k nově nakreslenému rohovému půdorysu jeden čtverec navíc (viz Příloha 34).

Evidence: Čtverec přikreslený k rohovému půdorysu není připojen přesně tak, aby vyplnil roh a vytvořil tak čtvercový tvar. Je napojen tak, jako kdyby napravo nebyl žádný další čtverec. V pravé části připojeného čtverce se nachází svislá nedotažená čára.

Komentář: Právě grafická odlišnost přikresleného čtverce k rohovému půdorysu ukazuje na Veroničinu snahu zvýraznit, že jde o jinou stavbu než těleso no. 5. Zároveň také může ukazovat na nejistotu jejího počínání. Veronika si pravděpodobně nebyla jistá svým řešením, možná i proto je přikreslený čtverec ve srovnání s ostatními menší. Nedotažená čára je způsobena předčasnou změnou vedení pohybu směrem dolů. Když si Veronika uvědomila, že tímto způsobem se na spodní čtverec přesně nenapojí, vrátila se zpátky a udělala novou čáru.

Na otázku, ze kterého pohledu se nyní na těleso, jehož plán zakreslila, dívá, Veronika uvedla, že „z boku". A hned navázala, že „kdysme to zakreslili seshora, tak by nám vyšlo tohle". Přičemž ukázala na původní plán tělesa no. 11, jež obsahoval zápis „dvě kostky na sobě". Poté na moji pobídku, ať místo daných slov napíše něco „jednoduššího, rychlejšího, stručnějšího" nakreslila Veronika nový plán s rohovým půdorysem a do čtverce představujícího dvě krychle nad sebou umístila čtverec menší (viz Příloha 34). Na výzvu, zda-li tam nelze zapsat pouze číslo, Veronika odpověděla „tak tam napíšeme dvojku".

Evidence: Čtverec vepsaný do čtverce představujícího dvě krychle nad sebou zcela přesně kopíruje tvar čtverce většího. Rozměr horního čtverce plánu je větší než rozměr čtverců spodních.

Komentář V: Veroniku zřejmě vedla instrukce zapsat něco jiného místo slov, a tak přešla k ikonickému vyjádření. Tentokrát pro ni tyto dva čtverce představují dvě kostky na sobě. Takměř těsné zakreslení menšího čtverce do většího může býti dáno jejím pohledem shora, neboť tehdy opravdu vidíme menší čtverec, který je ohraničen čtvercem větším.

Komentář J: Neuvědomila jsem si, že Veronika bude na zápis „2 kostky na sobě" rezignovat a nevezme v úvahu pouze číslici dva, kterou zápis obsahuje. Proto jsem jí taky další pobídkou hodně napověděla, nevěděla jsem již, jak ji k vytvoření plánu nejlépe navést. Když si Veronika řešení úlohy uvědomila, považovala jsem to za jasné a okamžitě jí postavila novou budovu s pobídkou nakreslit její plán ve stejném duchu řešení.

Pro shrnutí a ověření pochopení jsem přikročila k zadání **úlohy 5** a tělesa no. 15. Veronika bez delšího přemýšlení zakreslila jeho plán (viz Příloha 34).

Evidence: Proč Veronika nevpisovala pouze číslo, ale přidala za něj ještě znaménko „x"?

Komentář V: Při zapsání jednotlivých čísel do plánu Veronika zřejmě uvažovala o početní matematice a možnosti zdůraznění násobícího procesu. Tedy jeden čtverec představující jednu kostku krát dva tak znázorňuje čtverec prezentující dvě kostky nad sebou. Navíc při napsání daného čísla vyřčením slova „čtyřikrát" tento zápis ještě více umocnila.

Komentář J: Když Veronika zdůrazněním slova „čtyřikrát" napsala do plánu znaménko „krát", viděla jsem, že tento její způsob zápisu je pro ni velmi důležitý a že v podstatě není treba jej opravovat. Byla jsem ráda, že si Veronika našla vlastní cestu, které rozumí, a nechtěla jsem jí plést hlavu standardizovaným plánem.

Komentář: Při analýze této části protokolu jsem se od vedoucího práce dozvěděla, že to, jak Veronika objevovala způsob zápisu vícepodlažní budovy, plně odpovídá obecné zákonitosti popsané, hrubě řečeno, posloupností tří etap: verbální → ikonická → symbolická. Žák, který se tímto postupem (byť podporovaném radami učitele) sám dobere k symbolickému jazyku, považuje jej „za svůj", a ne za jazyk získaný od učitele. Rozumí jeho podstatě a v budoucnu jej případně dokáže rozvíjet a upravovat. Navíc se uvedený proces do vědomí žáka zapíše i na meta-kognitivní hladině. Žák se učí, jak se hledá vhodný symbolický jazyk.

Komentář: Vedoucí práce analyzoval i moji práci. I když jsem se v rozhovoru dopustila chyby urychlováním celého procesu, vedoucí práce toto moje počínání hodnotil kladně a jeho argumentace měla dva body. Předně, moje urychlování nezpůsobilo v dívčině postupu žádný zlom, protože výsledný jazyk, ke kterému jsem ji nakonec „dotlačila", okamžitě správně interiorizovala (ukázala to při řešení úlohy 5). Druhou věcí, na kterou vedoucí práce poukázal, je skutečnost, že podobný proces jen ojediněle proběhne ve škole, protože míchání jazyků symbolický – ikonický – verbální vnímají učitelé často jako nepřípustný jev. Tudíž při této své pedagogické činnosti jsem se nemohla opírat o předchozí zkušenosti, které jsem mohla a měla získat ve škole ještě jako žákyně.

Komentář vedoucího práce: Postup experimentátorky je zcela správný. Cítí, že současná symbolika je vývojové stádium tvorby vhodného jazyka a že jeho „zdokonalování" by dívka vnímala jako snížení autonomie. Až uzraje čas, může dojít k dalšímu zlepšení symboliky.

V rámci **úlohy 5** jsem zadala ještě jednu stavbu, a to těleso no. 9. I tento plán Veronika bez váhání zakreslila pomocí vlastní symboliky (viz Příloha 34).

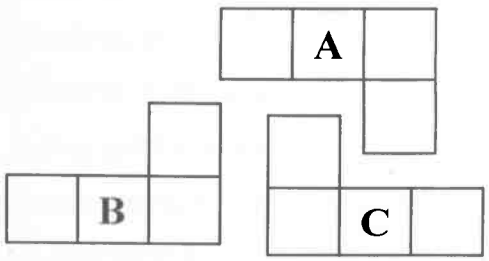
Evidence: Plán byl načrtnut ve formě obdélníka, který byl následovně rozdělen svislou čárou na dva téměř shodné čtverce. Na levé krajní straně plánu je dvojitá čára a v levém horním rohu je patrná nerovnost v podobě výstupku.

Komentář: Zdvojení je zřejmě způsobeno na začátku Veroničina črtání, kdy Veronika vedla první čáru trochu křiveji, než chtěla, a tak se znovu vrátila na začátek a kreslila již soustředěněji a rovněji. Menší výstupek v levém horním rohu je pravděpodobně dán snahou přesně se napojit na původní čáru; méně pravděpodobně může být způsoben uklouznutím kreslící ruky.

Na konci setkání jsem opět zadala domácí úkol, **úlohu 6**.

4.3.1.3 Veronika III

Výsledkem Veroničina řešení domácího úkolu bylo celkem šest dalších plánů krychlových těles (viz Příloha 35). Veroniku jsem nejprve pobídla, aby stavby podle daných plánů postavila, poté jsme se vrátily k minulým plánům a Veronika je pro přehlednost překreslila z čtvercové sítě na čistý papír. Na otázku, zda nejsou některé plány stejné, ukázala na tři podobné plány těles no. 3 a no. 4 tvrdíc, že tyto stejné jsou (viz Obrázek V2; pozn.: označení A, B, C je uvedeno pouze pro rozlišení jednotlivých plánů, kdy plány B a C jsou plány původními, zatímco plán A byl vytvořen v rámci domácího úkolu).



Obrázek V2

Komentář: Snaha Veroniky použít při překreslování jednotlivých plánů na čistý papír pravítko ukazuje na její pečlivost a citlivost pro přesnost nákresu. Pro urychlení činnosti však byla pobídnuta k pouhému načrtnutí.

Pro opětovné upřesnění pojmu stejná a podobná tělesa jsem Veroniku vyzvala k postavení těles podle plánů A a C, o nichž rozhodla, že „když je otočím, tak to bude stejný". O dvojici staveb vytvořených podle plánů B a C řekla, že stejné „nejsou... musela bych tuhle stavbu otočit dnem nahoru". Veronika stavěla vždy obě dvojice těles přesně podle plánů a dle vlastní potřeby s nimi manipulovala.

Komentář: Právě možnost manipulace s jednotlivými tělesy byla pro Veroniku velmi důležitá. Ve druhém případě, kdy se jednalo o zrcadlovou podobnost těles, Veronika již otáčení či převrácení neprováděla, úsudek nejspíš proběhl v její představě.

Veronika pak dále pokračovala v řešení **úlohy 6** (viz Příloha 36). Nejprve postavila těleso no. 1, ale při pohledu na papír s plány si uvědomila, že plán této stavby již zakreslila. Přesunem dvou krychlí tedy vytvořila těleso no. 7. Toto postavené těleso porovnala s plánem tělesa no. 6, který už zakreslen byl, a bez jakéhokoliv stavění usoudila, že nově postavenou stavbu ještě zakreslenou nemá a vytvořila její plán. Poté, co udělala několik čar, zjistila, že se jí plán na kraj listu nevejde, vymazala jej a posunula o trochu výš.

Evidence: Oproti plánu tělesa no. 6 je tento nový plán zakreslen po jednotlivých čtvercích, třebaže původní vygumovaný plán začala Veronika kreslit koncepčně, tedy nejprve tvar tělesa, pak jednotlivé čtverce.

Komentář: Veroničin nekoncepční nákres plánu tělesa no. 7 může ukazovat na procesuální vnímání nového tělesa i Veroničinu nejistotu při kreslení nového plánu; ta navíc mohla být způsobena obavou, zda se jí nový plán na list vmístí. Fakt, že Veronika pouhým pohledem na plán podobného tělesa no. 6 usoudila, že těleso no. 7 ještě zakreslené nemá, zřejmě vyplývá z její předchozí zkušenosti s plány těles no. 3 a 4.

Jako další stavbu vytvořila Veronika těleso no. 2, ale poté, co si všimla, že již jeho plán má, přesunutím pravé krajní kostky „do prvního patra" vytvořila těleso no. 13.

Evidence: Plán tělesa no. 13 je opět zakreslen po jednotlivých čtvercích, jako poslední Veronika vepsala číslici se znaménkem násobení „x", jež je přibližně stejné velikosti jako samotná číslice. Napojení čar u jednotlivých čtverců je vcelku přesné, velikost čtverců není stejná. Největší rozměry má čtverec nakreslený jako první, nejmenší a nejméně přesný pak je poslední čtverec vpravo dole.

Komentář: Menší zakřivení čáry v pravém dolním rohu, ke kterému došlo při dokreslování posledního čtverce, může ukazovat buď na Veroničinu nesoustředěnost, anebo na její snahu přesně napojit čáru na předcházející čtverec a nasměrovat její nepřesný začátek správným směrem. Opět se zde objevil posun v artikulaci: verbální → ikonická. Znak „×" zde nevystupuje jako operace násobení, ale jako ikonka pro slovo „krát".

Veronika při tvoření dalšího nového tělesa vycházela z předchozí stavby a pouze přesunem jedné krychle získala těleso no. 11. Plán byl zakreslen ve dvou fázích; nejprve Veronika nakreslila obdélník a poté spolu s přehrazující čárou dokreslila napravo čtverec s číslem a znaménkem „krát" znázorňující, kolik krychlí je nad sebou.

Evidence: Poslední čtverec je ze všech tří čtverců nejširší. Znaménko „x" je protentokrát stejné velikosti jako číslice dva.

Komentář: S vytvářením plánu pro těleso no. 11 si Veronika byla pravděpodobně velmi jistá, což ukazuje jednoduchost provedení jejího nakresleného plánu.

I nadále postupovala Veronika při řešení úlohy 6 stejným způsobem - z předchozího tělesa vytvořila novou stavbu tak, že odebrala vrchní kostku a po kratším přemýšlení ji umístila na nové místo. Vzniklo těleso no. 12. Na můj podnět, zda toto nové těleso už není zakresleno, Veronika stavbu otáčela kolem dokola a vždy pohledem porovnala s plánem tělesa no. 11. Výsledkem byl úsudek, že plán této stavby ještě nevytvořila. Kresba nového plánu probíhala stejným způsobem jako u tělesa no. 11.

Evidence: Obdélník je rozdělen na dvě nestejně velké části, přičemž jeho horní část je větší. Čtverec, který představuje dvě krychle nad sebou, je tentokrát nejmenší. Číslice dva je umístěna přesně doprostřed, znaménko „x" je směstnáno úplně na kraji čtverce. Manipulace s tělesem při kontrole probíhala systematicky.

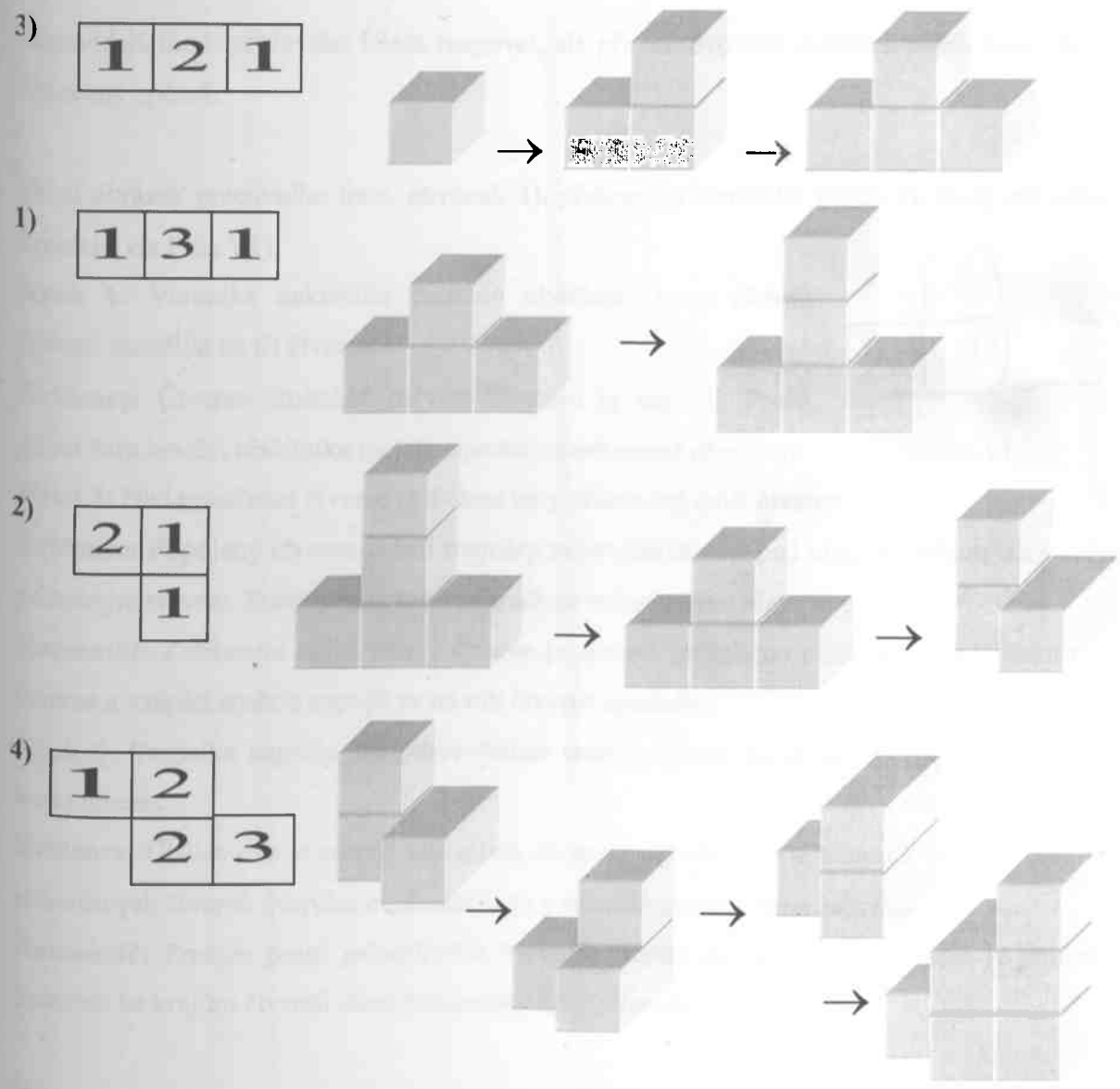
Komentář: To, že Veronika neodhadla přesné rozdělení obdélníka na dvě ekvivalentní části, mohlo být způsobeno částečným zakrytím vrchní části obdélníka kreslící rukou. Systematická manipulace s tělesem ukazuje, že proces ověřování stejnosti tělesa s plánem je již plně interiorizován.

Komentář J: Způsob postupného otáčení, pomocí kterého si Veronika ověřovala, zda již těleso no. 12 zakreslené má, mě naplnil pocitem, že Veronika již začíná problematice krychlových staveb lépe rozumět. Tento manipulační proces a vizuální kontrola ale také může ukazovat na lehkou nejistotu a následnou potřebu manipulace s tělesem. Jelikož se jedná o složitější stavbu, je Veroničino procesuální myšlení zcela pochopitelné.

Jako poslední byla zadána **úloha 7**. (Pozn.: obrázky jednotlivých těles tentokrát nebyly tištěny, ale nakresleny rukou.)

V první části pracovního listu začala Veronika stavbou tělesa podle plánu 3). Proces stavění jednotlivých těles podle plánů vždy probíhal modifikací tělesa předchozího (viz Obrázek V4).

Komentář J: Překvapilo mě, že Veronika zběžným prohlédnutím všech plánů začala plánem číslo 3), tedy od prostředku zadání. Dokonce ji ani nezaskočily v anglickém jazyce napsané instrukce, které byly součástí pracovního listu. Nejspíš jim ani nevěnovala pozornost a pro řešení úlohy se spokojila s mými instrukcemi. Veronika postupovala při stavění jednotlivých těles velmi rychle a sebevědomě, že jsem občas ani nestačila monitorovat, jak jednotlivá krychlová tělesa staví.



Obrázek V4. Obrazová analýza postupu, jakým Veronika jednotlivá tělesa stavěla.

Komentář: Překvapila mě rychlost a pohotovost, s jakou se Veronika pustila do řešení první úlohy. Zřejmě se již zcela sžila s novým prostředím.

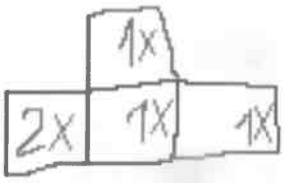
V druhé části pracovního listu postupovala Veronika velmi systematicky a většinou kreslila plány konceptuálně bez většího zaváhání.

Evidence: Ačkoliv v předchozím cvičení přišla Veronika do styku s plány, kde v každém čtverci je zapsáno pouze číslo, do svých plánů nadále vpisovala znaménko „x".

Komentář V: I přes daný vzorec plánu v prvním cvičení Veronika nadále pracuje se svojí vlastní koncepcí zápisu. Mému záznamu plánu rozumí, dokáže na něj postavením

odpovídajícího krychlového tělesa reagovat, ale při zhotovování vlastních plánů používá svůj objevený způsob.

První obrázek pracovního listu, **obrázek 1),** překreslila Veronika v plán ve třech základních krocích (viz Plán V1).



Plán V1

Krok 1: Veronika nakreslila podélný obdélník, který dvěma liniemi rozdělila na tři čtverce.

Evidence: Čtverec umístěný nejvíce napravo je nejširší. Pravá dělící čára hranici obdélníka na jeho spodní straně mírně přesahuje.

Krok 2: Nad prostřední čtverec je dvěma tahy přikreslen další čtverec.

Evidence: Připojený čtverec svými rozměry odpovídá čtverci pod ním, jak šířkou tak i velmi podobným tvarem. Pravá strana čtverce směřuje mírně šikmo zleva doprava.

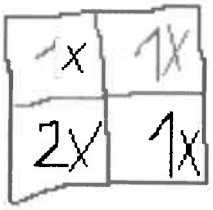
Komentář: Zešikmení boční strany čtverce je zřejmě způsobeno předčasným uděláním rohu čtverce a vzápětí snahou napojit se na roh čtverce spodního.

Krok 3: Veronika napsala jednotlivé číslice směrem zleva doprava, jako poslední vyplnila horní čtverec.

Evidence: Číslice dva je přesně uprostřed, zatímco jedničky spíše tíhnou k pravým okrajům jednotlivých čtverců. Nejvíce evidentní je to v případě čtverce zcela napravo.

Komentář: Protože psaní jednotlivých číslic probíhalo zleva doprava, nejspíš je umístění jedniček ke krajům čtverců dáno posunutím ruky při psaní.

Plán **obrázku 2)** Veronika rovněž zakreslila ve třech základních krocích (viz Plán V2).



Plán V2

Krok 1: Jako první krok vytvořila Veronika poměrně pravidelný čtverec.

Evidence: Spodní stranou čtverce je mírně zvlněná čára.

Komentář: Je možné, že Veronice při kreslení spodní čáry lehce uklouzla ruka.

Krok 2: Vzniklý čtverec pak rozdělila na čtyři shodné části - čtverce.

Evidence: Svislá dělící čára na obou koncích přetahuje strany velkého čtverce. Čára horizontální zas naopak na obou koncích není dotažena.

Krok 3: Jako poslední krok Veronika dopsala do jednotlivých čtverců číslice a znaménka. První napsala číslici 2, poté vyplnila levý horní čtverec, pravý dolní čtverec a nakonec pravý horní čtverec.

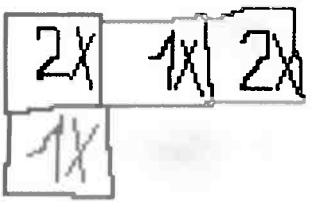
Evidence: Velikost všech číslic je v podstatě ekvivalentní. Číslice jedna jsou si velmi podobné, pouze pravá dolní jednička se dotýká spodní strany čtverce. Znaménka „krát" jsou

ve většině případů velikostně menší než číslice, pouze v případě pravého horního čtverce je velikost znaménka shodná s velikostí číslice.

Následující **obrázek 3)** vytvořila Veronika v pěti základních krocích (viz Plán V3).

Krok 1: Při tvorbě plánu začala levým horním čtvercem.

Komentář: Veroniku pravděpodobně nejdříve upoutal sloupec ze dvou krychlí, a protože jsou děti zvyklé pracovat zleva doprava, postupovala tedy při kreslení plánu zleva.



Plán V3

Krok 2: K prvnímu čtverci pak dole připojila čtverec znázorňující předsunutou krychli.

Evidence: Spodní čtverec svojí šířkou navazuje na čtverec horní, ale dole se mírně rozšiřuje a při napojení k hornímu čtverci je menší mezera.

Komentář: Veronika pravděpodobně neodhadla při kresbě spodní strany šířku horního čtverce, ale chtěla, aby došlo k přesnému napojení do rohu čtverce; musela tedy postupovat trochu šikmo. I přesto se na původní šířku zcela přesně nedostala.

Krok 3: Poté se Veronika vrátila do řady krychlí a napravo od prvního čtverce zakreslila čtverec další.

Evidence: Připojený čtverec je svojí šířkou i výškou odlišný od čtverce nalevo. Je užší a delší, na pravém konci pak nepatrně rozšířený.

Krok 4: Dalším krokem Veronika dokončila řadu krychlí nakreslením posledního čtverce, který tak představuje krajní sloupec složený ze dvou krychlí.

Evidence: Poslední čtverec je napojen tak, že obě jeho „připojení" poměrně výrazně přesahují stranu čtverce nalevo. Šíře předchozího čtverce zůstala relativně zachována, svojí velikostí čtverec spíše odpovídá čtverci prvnímu.

Krok 5: Veronika provedla vepsání jednotlivých číslic a znamének do čtverců směrem zprava doleva, jako poslední vepsala do předsunutého čtverce číslici jedna.

Evidence: Velikost jednotlivých číslic i znamének je relativně stejná, stejně jako jejich umístění do středu čtverců.

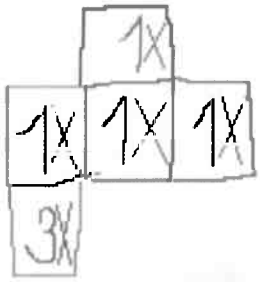
Komentář: Postup psaní číslic zprava doleva byl nejspíš důsledkem faktu, že kreslení plánu bylo ukončeno napravo. Veronika tedy začala vepisovat číslice od místa, kde skončila.

Poslední plán, tedy plán **obrázku 4),** nakreslila Veronika v šesti základních krocích (viz Plán V4).

Krok 1: Nakreslila čtverec představující téměř schovanou krychli.

Evidence: Boční strana čtverce je trochu zešikmená.

Komentář: Veroniku pravděpodobně upoutala „opuštěná" zadní krychle a rozhodla se, že začne kreslit plán z této strany. Je také možné, že si nebyla příliš jistá, jak levá část stavby vypadá.



Plán V4

Krok 2: Dalším krokem Veronika připojila spodní čtverec.

Evidence: Nový čtverec přesně nedodržuje šířku čtverce vrchního. Na levé straně je výrazná mezera při napojení.

Krok 3: Veronika dále pokračovala napojením levého krajního čtverce k čtverci vytvořenému v druhém kroku.

Evidence: Spodní strana čtverce je mírně zakřivená a při spodním napojení lehce přetahuje pravou stranu sousedícího čtverce.

Krok 4: Jako další přikreslila Veronika spodní čtverec představující předsunutý sloupec o třech krychlích.

Evidence: Velikost čtverce neodpovídá velikosti horního čtverce, na který navazuje. Napojení vpravo nahoře nejen že nedosahuje rohu čtverce, ale i přesahuje jeho spodní stranu. Spodní čtverec se navíc ve své dolní části zužuje.

Komentář: Při kreslení, kdy si Veronika kreslící rukou část plánu zakrývá, se také mohlo stát, že neodhadla spodní šířku čtverce a začala tedy příliš brzy směřovat svojí čarou k hornímu čtverci. Malé přetažení je zřejmě jako v předcházejícím případě spojeno s faktem, že jde o konečný tah, na který už nepřipadá taková soustředěnost.

Krok 5: Po krátkém zrakovém ujištění Veronika jako poslední přikreslila pravý krajní čtverec.

Evidence: Napojený čtverec téměř přesně odpovídá rozměrům čtverce sousedního. Ve spodní části je však napojení nepřesné a lehce nedotažené.

Komentář: Nedotažení je pravděpodobně způsobeno skutečností, že Veronika píše pravou rukou a při kresbě zprava doleva již nechtěla ruku posunovat, a tak čáru ukončila dříve.

Krok 6: Vepisování jednotlivých čísel a znamének „x" do čtverců Veronika opět provedla zprava doleva. Jako poslední vepsala číslici do čtverce znázorňujícího zadní krychli.

Evidence: Čtverce v řadě obsahují číslice identické nejen svojí velikostí, ale i umístěním ve čtverci. Číslice tři je umístěna v prostředku čtverce, zatímco číslice jedna v nejhornějším čtverci se blíží k jeho pravému okraji.

4.3.2 Denisa a Veronika

Denisa navštěvuje s Veronikou stejnou třídu, třebaže je o rok starší. Denisa má vrozenou zkříženou lateralitu.

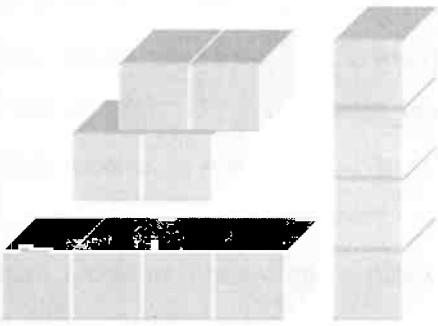
Experiment je popsán včetně citací výpovědí děvčat. Do některých citací jsou vloženy kurzívou psané poznámky, které upřesňují, o kterém jevu či tělese se mluví. Pro jednoduchost je občas uváděna pouze iniciála jejich křestního jména (V = Veronika, D = Denisa). Průběh experimentu je komentován ve čtyřech hladinách. Zatímco **Komentář D** popisuje myšlenky Denisy, **Komentář V** se věnuje popisu myšlenkových procesů Veroniky, která je ve vztahu k Denise v roli učitele. Třetí hladinou jsou mé myšlenky o vlastním působení v průběhu experimentu; označeno jako **Komentář J**. Zároveň je uváděn i komentář obecných myšlenek, které vyvstaly při analýze experimentu, nadepisován jako **Komentář**.

Veronika již o své úloze učitele věděla z naší poslední schůzky. Po kratším úvodu, kdy jsem ji povzbudila v činnosti a poskytla jí veškeré pomůcky, které může během experimentu potřebovat a použít, se Veronika do své role s odhodláním pustila.

V: „Deny, já ti sestavím všelijak kostky a ty musíš uhádnout, která, která budova z nich je pirát."

A Veronika vytvořila skupinu tří těles pro **úlohu 2a** (viz Příloha, Obrázek T2aG9).

Komentář V: Veronika začala tou úlohou, která jí pravděpodobně nejvíce utkvěla v paměti. Patrně to mohlo být díky neobvyklému použití slova pirát v úloze z matematiky. Zalíbení v tomto slově bylo patrné i z Veroničiny intonace a jejím zdůrazněním na slově pirát. Volba jednotlivých těles ve skupině je pravděpodobně podmíněna Veroničinou předchozí zkušeností. Aplikuje zde tělesa, u kterých sama objevila, že se jedná o pořádné stavby. Pirátem pak volí těleso, které je hodně „pirátovské" a které nejspíš považuje za lehce identifikovatelné.



Obrázek T2aG9

D: „Pirát?"

V: „Hm."

D: „Jak jako pirát? Já to nechápu."

Veronika úlohu a charakteristické rysy piráta blíženespecifikovala, protože si již nepamatovala, jak bychom mohli takového piráta popsat. Na moji otázku „Co je na tom pirátovi zvláštního? Proč pirát?" nevěděla jak odpovědět.

Komentář V: Veroničina představa o správné a pirátské stavbě již byla zřejmě hodně upevněna. Myslím si, že přijala charakteristiku, jak má krychlová stavba vypadat, za vlastní, ale v podstatě nad ní nijak nepřemýšlela. Zcela jistě věděla, že to má tak nějak být, ale nedokázala určit proč. Je také možné, že prostě nedokázala najít vhodná slova, kterými by piráta popsala.

Poznámka vedoucího práce: Jedná se o poznání v činnosti, které ještě nedospělo do stádia poznání ve slovech.

Když už jsem do experimentu zasáhla, popsala jsem piráta jako těleso, které „je nějakým způsobem jiný, zvláštní, nepatří do té skupiny". Denisa zareagovala odpovědí: „Tenhle tam asi nepatří." a ukázala na piráta. V: „Hm."

Komentář D: Je možné, že Denisa určila piráta zcela náhodně. Více pravděpodobný je však fakt, že pirát je opravdu jiný než obě zbylá tělesa a mohl na Denisu zapůsobit jak svým tvarem, tak jistou neuspořádaností, do níž je stylizován. Slovo „asi" v Denisině výpovědi ukazuje na to, že si nebyla svojí odpovědí z nějakého důvodu zcela jistá.

V: „Co když ... teďka ... postavím ... takhle." A Veronika přestavěla v **úloze 2a** těleso no. 1 na těleso no. 9. Denisa slovy „Tenhle." identifikovala jako piráta těleso no. 15. Tentokrát Veroniku Denisin názor zajímal, a proto se jí zeptala: „Proč myslíš?" D: „No, tohleto je do takovýho čtverečku *(D ukáže na těleso no. 9)*, takhle s timhle *(dotkne se piráta)* a tadyto jako do takovýho sloupce *(D ukáže na těleso no. 15)*."

Komentář V: Veronika se tentokrát zeptala na zdůvodnění Denisina rozhodnutí o pirátovi zřejmě proto, že ji zajímalo, proč Denisa určila pirátem budovu, která vlastně pirátem není. Vznesením otázky tak možná chtěla zjistit, jak Denisa uvažuje a proč určuje špatnou budovu.

Komentář D: Stejně jako v předchozím případě se Denisa při určování pirátského tělesa řídí fenoménem tvaru. Těleso no. 15 se tvarově nepodobá ani jednomu z daných těles, stejně jako se pirát v předchozí úloze nepodobal tvarově shodným tělesům no. 1 a 15. V jejím vědomí jde o velmi silnou asociaci se slovy jiný, zvláštní, nepatřící do skupiny.

V: „Hm... A kdyby tenhle byl takhle .... tenhle takhle?“ a Veronika vytvořila novou skupinu o třech různých tělesech v rámci **úlohy 2a**. Pirát zůstal ponechán, ostatní dvě stavby byly přeměny na tělesa no. 10 a 14. Veronika tak opět postavila skupinu se dvěma podobnými krychlovými stavbami. Denisa bez většího rozmýšlení určila piráta se slovy: „Tenhle tam nepatří.“ A vzápětí svoji volbu bez pobízení zdůvodnila: „no, tady ty jsou jako tři na sobě a jedna dole, a tady to je dvě na sobě, jako jedna nahoře a tři dole“.

Komentář D: I další úloha vedla k Denisině přesvědčení o pirátově jinakosti a tvarové rozdílnosti a výjimečnosti. Z Veroničiných reakcí Denisa nemohla poznat, zda-li úlohy řeší správně. Ale z předchozí zkušenosti ji ve skupině zaujalo vždy to těleso, které se od ostatních maximálně lišilo. Nyní si byla Denisa svojí volbou jistá, což ukazuje i její rozhodná odpověď bez použití slůvka „asi“ a následné zdůvodnění.

V: „A proč si myslíš, že zrovna tenhle?“

Komentář V: Ačkoliv tentokrát Denisa piráta určila správně, Veronika nejspíš nebyla s její výpovědí spokojena a chtěla slyšet více definující zdůvodnění, možná podobné tomu, jež jsme specifikovaly při společném experimentu.

D: „Protože ten je jako do takovýho čtverce a tady ty jsou jako do ... úhlu.“

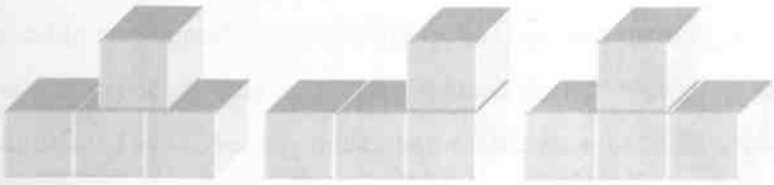
Komentář D: Denisa svoji další odpověď tentokrát přesněji definovala, zcela jasně vystihla tvar obou podobných těles. Zřejmě bylo vnímání tělesa a jeho tvaru v jejím vědomí hodně silné.

V: „Hm.. A když je postavim... jeden takhle ... a druhej takhle?“ Veronika se opět nespokojila s Denisiným vysvětlením a vytvořila novou skupinu staveb v rámci **úlohy 2a**, v níž opět ponechala stejného piráta. Novými budovami byla tělesa no. 1 a 8. Denisa identifikovala piráta se slovy, že „Tady ta tam zase nepatří, protože tyhle jsou takhle *(a ukazuje prstem po celé délce těles no. 1 a 8)* a ta jedna tady nahoře.“

Komentář V: Je velmi pravděpodobné, že Veronika daného piráta záměrně neměnila. Nová telesa mohla postavit pouze náhodně.

Komentář D: **A.** Denisa se opět rozhodovala podle tvaru daných staveb. **B.** Je možné, že se v duchu pozastavila nad tím, že jedno z těles se nikdy nemění a ve většině případů se od zbylých dvou odlišuje.

V: „Hm... Když teda ... takhle..." a Veronika opět vytvořila novou skupinu těles (viz Příloha, Obrázek T2aG10). Piráta tentokrát změnila.



Obrázek T2aG10

Denisa určila jako piráta těleso no. 10 se slovy: „Tam nepatří tahle, protože tohle to *(ukáže na těleso no. 10)* je jakoby, trochu nad tu kostičku *(ukáže na spodní prostřední krychli)*, tady nad tu druhou *(ukáže na spodní pravou krychli)*, čili to mohlo bejt jako už uprostřed tady s tim *(těleso no. 8)*.... A tady to *(ukáže na těleso no. 8)* už je to na ty pevný kostičce rovnou veprostřed."

Komentář D: Denisa si pravděpodobně představovala stavbu do tvaru pyramidy a do této představy jí nezapadalo těleso no. 10, kde boční hrana směřuje kolmo nahoru. Dalo by se tak říci, že při jejím rozhodování hrál tvar opět důležitou roli.

Veronika tedy změnila Denisou označenou stavbu, těleso no. 10, na těleso no. 2. V: „Hm?" Po chvíli váhání Denisa určila právě nově pozměněnou stavbu jako piráta, ale nebyla si svojí volbou jistá: „Tak tam nepatří tahle ... asi, ne?" Při vyslovení své domněnky se na Veroniku podívala.

Komentář: Denisina nejistota a nerozhodnost byla v tomto případě „podtržena" jejím pohledem na Veroniku. Jako by tímto pohledem hledala odpověď na svoji otázku.

Když se Veronika zeptala, proč si to tak myslí, Denisa uvedla, že „Tady ta *(pirát)* je trochu nad tu prostřední a tady ta je jako takhle vedle ní, že to není přímo nebo jako kousek ani na tyhle ty ani nad touhle .. no přímo takhle."

Komentář D: Jelikož Denisa již v předchozí úloze tuto stavbu jako piráta označila, nejspíš jej za piráta považovala i tentokrát. Je také možné, že těleso no. 2, které je přízemní, jí přišlo ode dvou zbývajících těles odlišné.

Veronika na Denisinu výpověď zareagovala odebráním tělesa no. 2 a zadáním **úlohy 2e**, kdy se měla Denisa rozhodnout mezi dvěma stavbami - pirátem a tělesem no. 10. Veronika úlohu přiblížila slovy: „A když tady ty kostky tady nebudou... Která z nich?" a ukázala na zbylé dvě stavby.

D: „Tam nepatří, nebo? Nebo jak?"

V: „Tam nepatří."

D: „Když tamty tam nebudou?"

V: „Hm."

Denisa ukázala na piráta: „Tak asi tahle tam nepatří, protože tady ty, to jsou jako hnedka jako nad tím, že jsou, takhle rovně i takhle rovně. A tady ty že jako takhle šikmo." Veronika se chtěla ještě ujistit, a tak se zeptala: „Hm. Takže všechny musej bejt takhle na sobě?" D: „No, aby to bylo jako rovný."

Komentář V: A. Odebrání jednoho z těles může býti projevem Veroničiny snahy co nejvíce Denise úlohu usnadnit a přivézt ji tak ke správnému řešení. **B.** Veronika možná nevěděla, jak pokračovat dál, a vzpomněla si na zjednodušenou verzi úlohy o pirátovi, kterou jsme společně dělaly. Zcela logicky pak odstranila právě to těleso, které Denisa označila za piráta. Zřejmě tím chtěla Denise sdělit, že toto těleso pirátem není a že pirát ve skupině nadále zůstává. Poté, co Denisa již svými slovy celý problém poněkud vystihla, otázka, kterou Veronika Denise položila, byla nejspíš míněna jako ujištění, že Denisa řešení rozumí.

Komentář D: Když Denisa srovnávala obě zbývající budovy, nejspíš si všimla „nerovností", které pirát má. Je možné, že si také uvědomila, že odebrané těleso ve skutečnosti pirátem nebylo a přitom bylo velmi podobné tělesu no. 10.

Po vyřešení úlohy 2a zadala Veronika Denise **úlohu 1**: „Teďka mi zkus z tědlech kostiček postavit několik domků." Na Veroničiny instrukce Denisa reagovala slovy: „Domků?" Veronika postaví jedno z krychlových těles a vysvětlí: „No, třeba takhle jak jsem stavěli."

Komentář D: Slovo domek zaznělo od začátku experimentu poprvé. Denisa si tedy potřebovala ověřit, co si pod tímto slovem může představit.

D: „Ze čtyř, jo?"

V: „No."

D: „Jako co nejvíc, jo?

V: „No."

Obrázek D1

D: „Třeba takhle jako domek?" A postavila kostky vedle sebe (viz Obrázek D1).

V: „Ne. Musí být všechny takhle... spojením kostek k sobě." A přestavěla kostky k sobě tak, aby se dotýkaly. Vzniklo těleso no. 5.

D: „Jako na sobě? Z toho musí bejt kolik domků?"

V: „Nevim."

D: „Jeden domek, jo?"

V: „No."

D: „Jako aby se všechny dotýkaly všech, jo? Nebo to může bejt...?" a přitom Denisa začala stavět. Veronika ji však přerušila, vzala kostky do ruky a se slovy: „No, to může být všelijak, třeba.." postavila krychlovou stavbu, „.. třeba takhle."

D: „Takže se nemusí třeba..."

V: „Nemusí bejt jen vedle sebe, můžou bejt i na sobě, ale nesmějí bejt třeba takhle" a Veronika postavila nekrychlové těleso. „Musej se dotýkat všechny čtyři."

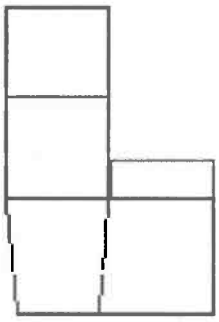
Poté Denisa na Veroničiny pobídky stavěla vždy ze čtyř kostek několik krychlových těles (no. 14, 10, 15, 1, 9, 5, 12, 11, a opět no. 14) Ke konci již Denisu stavění bavilo natolik, že ji Veronika nemusela pobízet.

Komentář V: Když Veronika zjistila, že Denisa nerozumí zadání úlohy a řešení předchozí úlohy vlastně ještě nemá zažité, velmi pravděpodobně považovala za důležité Denise na příkladech názorně ukázat, jaká tělesa by měla vytvářet. Tím, že s krychlemi manipulovala, vyhnula se složitému vysvětlování; jazyk, který pak použila, byl výstižný a srozumitelný.

Když Denisa postavila dostatečné množství krychlových těles, Veronika musela chvíli přemýšlet, než jí zadala **úlohu 4**: „Jak ... bys zapsala teďka tady ... jak bys zakreslila tadyto?" Veronika ukázala na těleso no. 14, které Denisa postavila jako poslední. D: „Jako takhle, když to stojí?" Veronika přikývla a dala Denise čistý papír, na jehož druhé straně byla čtvercová síť (viz Příloha 38).

D: „Tak tady ta kostka *(ukáže na krychli vedle sloupce ze tří krychlí)* je jasná ... ne, není ..." Po chvilce přemýšlení zakreslila Denisa plán (viz Plán D1).

Evidence: Nejprve byl načrtnut nárys tělesa, poté byl přikreslen menší obdélník.



Plán D1

V: „A jak se na to takhle díváš?"

D: „Co?"

V: „Kdyžs to nakreslila takhle, tak jak se na tady to díváš?" A protože Denisa stále nechápala, Veronika ji ukazovala jednotlivé směry pohledů a přitom říkala: „Díváš se na to odsud *(seshora)*, odsud *(zpředu)*, nebo odsud *(zprava)* nebo odsud *(zleva)*?"

D: „Odtud *(zepředu)*."

Komentář V: Veronika nejspíš podle nákresu plánu tušila, z jakého pohledu je těleso zachycené, ale chtěla po Denise, aby si to i ona uvědomila. Když Denisa nepochopila její

otázku ohledně směru pohledu, Veronika považovala za důležité jí jednotlivé pohledy názorně ukázat.

Komentář D: Denisa zakreslila těleso tak, jak jej viděla zepředu. Do svého plánu navíc doplnila obdélník představující horní stěnu jedné z krychlí. Protože to samé přikreslení není také u sloupce ze tří krychlí, ačkoliv se zde objevuje stejný jev, Denisa nejspíš nepovažovala horní stěnu sloupce za tak důležitou jako tu spodní. Její způsob zachycení ukazuje na snahu co nejvýstižněji těleso zakreslit. Je také možné, že vzhledem k výšce tří krychlí nad sebou si vrchní plošky ani nevšimla.

Komentář: Myslím, že Veronika na Denisin nákres velmi vhodně reagovala. Bohužel už s pohledem na těleso dále nepracovala, nechtěla třeba po Denise, aby to samé těleso zakreslila při pohledu seshora.

V: „A zkus si představit, že bys to musela zapsat pouze matematicky ... Jak bys to udělala?"

Komentář V: Veronika si z našich setkání dobře pamatovala moji pobídku, aby dané těleso zkusila zapsat nějakým matematickým způsobem. V tomto případě si však neuvědomila, že je třeba změnit Denisin pohled na těleso.

D: „Jako číslo, jako nějaké ... tak jako? Tam jsou ... ty čtyři kostky, tak jako ... to nějak zapsat?"

V: „Tak to nějak zkus.."

Denisa přemýšlela nahlas: „Tři plus jako takhle.. jedna.. jako tady ty tři a jedna je rovně..."

Když Veronika viděla, že si Denisa neví rady, snažila se jí pomoci: „Představ si, že maluješ plán na nějakou stavbu ... a ty maluješ na stavbu tuhle *(těleso no. 14)* ... jak bys to zapsala?"

D: „Vždycky, když je nějaký plán, tak jsou tam takový čárky ..."

Komentář V: Veronika poprvé použila slovo plán. Je možné, že si na něj vzpomněla až v daném okamžiku, nebo tím, jak chtěla Denise co nejvíce pomoci, jí přišlo jako nejvhodnější, nejsnáze pochopitelnější.

Komentář D: Zcela zřejmá je Denisina asociace slova „matematicky" s nějakou početní operací, v jejím případě se sčítáním. Denisa při definování slova plán vychází ze své vlastní životní zkušenosti. Pravděpodobně ji nejvíce zmátlo právě spojení slov „plán" a „matematicky".

V: „No, nějak to jde.."

D: „Kdybych dala třikrát jedna ... tam jsou čtyři kostky ... tak to zase nevyjde."

Komentář D: Přechod od původního záměru sčítání k násobení je pravděpodobně výsledkem hledání možností řešení „příkladu".

V: „Něco zkus." Denisa nějakou chvíli váhala, Veronika ji tedy zkusila povzbudit: „Mně to taky nešlo."

D: „Dva plus dva?"

V: „Tak si to otáčej ... všelijak." A naznačila Denise, jak může s tělesem manipulovat. Denisa jednou otočila těleso o 360° a opět nahlas přemýšlela: „Takhle tři..."

Veronika na její úvahu zareagovala slovy: „No a my potřebujeme čtyři... Jak to zapsat?"

Denisa byla bezradná, jak pokračovat dál, stejně tak i Veronika nevěděla, jak ji lépe navést, a proto jsem ji vyzvala, aby zkusila Denise zadat jednodušší přízemní budovu. Veronika tedy postavila těleso no. 1 se slovy: „Tadys *(ukáže na plán, který Denisa vytvořila)* to ďála dobře, ale teď by to chtělo matematicky ... a tady, když to chceme matematicky ... tak to bude? Máš tam jenom jedno patro, víc jich na sobě nemáš."

Komentář V: Veronika věděla, že Denisin plán tělesa no. 14 je pouhým pohledem zepředu, ale nadále se snažila Denisu navést k nějakému jasnějšímu zápisu; možná jí chtěla poukázáním na původní plán určitým způsobem motivovat. Nejspíš jí chtěla ukázat, že už nějaký nákres udělala, teď je jenom třeba vymyslet čísla.

D: „Takhle jednou krát čtyři..." Opět jsem do experimentu zasáhla tím, že jsem Denise papír otočila a pobídla ji, že pomocí čtverců může plán zakreslit.

D: „To jsem nikdy nedělala."

V: „Taky jsem to nedělala.. Ty kostičky ti tady pomáhají přeci."

D: „No, a když to mám takhle rovně? Čtyři .. dva plus dva jsou přece čtyři."

Komentář D: Denisa pravděpodobně stále bojovala na hranici dvou různých prostředí pojmů „matematicky" a „plán". Jistě pochybovala, jakým početním příkladem může dané těleso zapsat do nalinkovaných čtverců.

V: „A jak bys to nakreslila, aby to nebylo matematicky?"

D: „No, tak jak jsem to měla na druhé straně."

V: „Tak to tak nakresli."

D: „Jako ty kostky, jak jsou takhle...?"

V: „No."

Denisa nejprve nakreslila obrys celého tělesa. V průběhu nákresu postupovala vždy čtverec po čtverci, na každém rozhraní se zastavila, zkontrolovala s tělesem a pak teprve pokračovala v kreslení. Nakonec doplnila jednotlivé dělící čáry.

D: „A co teď?"

Veronika postavila nové krychlové těleso no. 2 a opět zadala **úlohu 5**: „Teďka zkus zapsat, spíš zakreslit tuhle."

Komentář V: Veronika ve svém zadání zcela vědomě opravila slovo „zapsat" na „zakreslit"; tušila asi, že by to mohlo Denisu opět zmást.

Denisa kreslila nový plán po jednotlivých čtvercích a postupovala zleva doprava. Jako poslední připojila k řadě tří čtverců horní prostřední čtverec. Když byl plán hotov, Denisa jej ještě výraznější čárou oddělila od plánu prvního.

Dalším tělesem, které Veronika postavila v rámci **úlohy 5**, bylo těleso no. 5. Denisa začala nejprve svislou čárou přesně na pravé hranici s předchozím tělesem, poté se však rozhodla umístit plán o něco níže a danou čáru nedokončila (viz Příloha 39). Když Denisa náčrt plánu ukončila, otočila Veronika list papíru, postavila těleso no. 1 a pobídla Denisu k vytvoření plánu na čistém papíře: „Zkus zapsat ... na tuhle stranu tohle."

D: „Nakreslit nebo zapsat?"

V: „Nakreslit."

Komentář D: Z Denisiny výpovědi je zřejmé, že rozlišuje mezi slovy nakreslit a zapsat. Pokyn nakreslit je jí v tuhle chvíli bližší, neboť už zná způsob. Zapsání pro ni představuje určitý způsob početního příkladu, což ještě neuchopila. Když Veronika list papíru otočila, Denisa si v tu chvíli nebyla jistá, o jaký způsob zachycení krychlového tělesa se má pokusit.

Denisa tedy zakreslila plán tělesa no. 1. Tentokrát Veronika stavbu změnila na těleso no. 15: „A když ti dám kostičky takhle, tak jak bys to zapsala?"

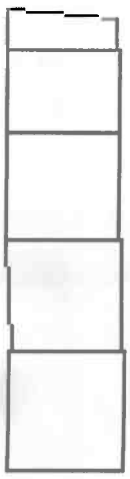
Komentář D: Denisa nyní nepotřebovala přesnější vysvětlení, zda má zapisovat či kreslit. Je možné, že z Veroničiny řeči vytušila, že její předchozí plánek byl nakreslen správně, a tak se, pro ni stejným způsobem, pustila do vytvoření plánu tělesa no. 15.

Denisa nakreslila plán (viz Plán D2) při pohledu zepředu. 1 v tomto případě, stejně jako při prvním pokusu o plán, přikreslila k vrchní části menší obdélník.

Evidence: Plán tělesa no. 15 je jeho nárysem. Navíc je zde k vrchnímu čtverci připojen užší obdélník.

Komentář D: Obdélník připojený na horní čtverec mohl být přikreslen ve snaze dát plánu plastičtější podobu. Denisa se opět vrátila ke svému původnímu způsobu zakreslení plánu. V podstatě zakreslila plán shodný s plánem předchozího tělesa, ale plány od sebe odlišila právě přikreslením obdélníku.

Komentář: V každém případě zakresluje Denisa to nejjednodušší, tedy to, co bezprostředně vidí. U tělesa no. 1 jde o řadu čtyř krychlí, čtyř čtverců vedle sebe, ať už při pohledu zepředu či shora. V případě tělesa no. 5 je zakreslení pohledu shora nejvýstižnější; je to dáno i přízemností tělesa, na které se člověk vždy podívá spíše seshora.



Plán D2

V: „A nejsou tyhle dvě podobný?" a ukáže na Denisou vytvořené plány těles no. 1 a 15.

Komentář V: Veronika si zřejmě velmi dobře uvědomuje rozdílnost jednotlivých plánů a těles a svojí vhodně kladenou otázkou se snaží Denise pomoci najít správný způsob.

Denisa vysvětlila: „Jsou, ale tady to nahoře to ukazuje jako když to je to *(postaví těleso no.15)* ... takhle nahoru, takže tady je vidět ten roh. A tady *(postaví těleso no. 1)*, když to je takhle tak jako žádný okraj tam není vidět, akorát tady na začátku."

Při vysvětlování Denisa s jednotlivými krychlemi manipulovala a obě tělesa postavila.

V: „No, a kdyby se to vystříhlo a tady to by se obrátilo takhle ... tak by byly taky stejný, že?"

D: „Co? Kdyby se tady to jedno ustříhlo?"

V: „No, kdyby se tady to a tady to vystříhlo..." Veronika ukázala na jednotlivé připojené obdélníky.

D: „Tak by byly stejný.."

V: „No, no právě."

D: „Tak to musí být nějak jinak, jo?"

V: „No, tahle by byla možná dobře *(ukáže na těleso no. 1)*, ale tahle *(ukáže na těleso no. 15)* ..Matematicky to musíš zapsat."

Komentář V: Veroničin originální nápad s ustřihnutím přečnívajících obdélníků pravděpodobně vyplývá ze snahy ukázat Denise stejnost jednotlivých plánů a přitom rozdílnost daných těles.

Komentář D: Denisina bezradnost při řešení úlohy může vyplývat z únavy a částečného ochabnutí při přemýšlení, jak si s danou úlohou poradit.

Když si Denisa vůbec nevěděla rady, Veronika odstranila z tělesa no. 15 tři vrchní kostky: „Tak. Tady to dáme pryč. Jak bys ji teďka tuhle kostičku ... zapsala? Matematicky? Jenom tohle ... s tady tou kostičkou ..."

Komentář V: Je možné, že si Veronika vzpomněla na úlohu, kterou jsme dělaly společně. Je také možné, že odejmutím tří kostek reagovala pouze na Denisinu bezradnost ve snaze co nejvíce jí řešení usnadnit. Z předchozích plánů Veronika viděla, že Denisa nemá se zakreslením přízemní budovy výrazné problémy.

D: „A co to znamená matematicky?"

V: „Že tam bude nějaký číslo krát...."

Komentář V: Veronika již zřejmě nenacházela vhodná slova, jak by Denise vysvětlila „matematický" zápis plánu.

Komentář D: Podle plánu tělesa no. 1 Denisa ví, co je správně, ale není si jistá slovy „zapsat" a „matematicky". Pravděpodobně stále váhá mezi nákresem a zápisem nějakého příkladu.

Denisa nakreslila plán jedné kostky pomocí čtverce. Veronika na její řešení hned reagovala postavením věže, tedy tělesa no. 15. Při Denisině bezradnosti jsem jí pomohla otázkou: „Jak zapsat, že tam je více kostek nad sebou?" Denisa reagovala slovy: „Když tohle bude jednou krát čtyři." A ukázala přitom na nakreslený čtverec. Byla tedy pobídnuta, aby se pokusila o nějaký zápis. D: „Jako nakreslit nebo...?" Já: „No, zakreslit, zaznamenat ... a vyjdi z tohohle plánu." A ukázala jsem na čtverec znázorňující jednu krychli. Pro lepší pochopení jsem ještě Denise vysvětlila, že „my potřebujeme do tohohle plánu zaznamenat ... protože takhle by to byl plán jenom této jedné kostky... a my potřebujeme do toho plánu nějakým způsobem zaznamenat, že těch kostek tam je víc ..." Veronika ještě dodala: „No a když máš vyjít jenom z tohohle plánu *(ukázala na načrtnutý čtverec)*.". Když Denisa opět nakreslila čtyři čtverce vedle sebe, tedy plán tělesa no. 1, pokusila jsem se o diskusi ohledně pohledu na tělesa: „Když máš tuto budovu *(ukázala jsem na těleso no. 15)* a pro tuto budovu máš ty tento plán *(plán tělesa no. 1)*, tak se na ni díváš z jakého pohledu?"

D: „Takhle jako.." *(zepředu)*

Já: „Zepředu? A vidíš všechny čtyři kostky ... a tohle ti tady znázorňuje co? *(ukázala jsem na menší přikreslený obdélník na straně stavby)* Co to má být?"

D: „To jako tohle." A prstem přejela po svrchní straně horní krychle.

Já: „To je ta ploška, dobře. Kdežto tento plán *(plán tělesa no. 1)* jsi nakreslila takhle. A to se na to díváš jak, na tu budovu?"

D: „Takhle." *(seshora)*

Vybídla jsem tedy Denisu, aby se dívala na jednu krychli tak, že úroveň jejích oči bude na úrovni krychle. Na otázku, kolik kostek Denisa vidí, odpověděla, že „jednu". Když jsem postavila těleso no. 15, na stejnou otázku odpověděla „čtyři". Poté jsem Denisu pobídla, aby si stoupla a podívala se na těleso seshora.

D: „Úplně seshora?"

V: „Kolik jich vidíš?"

Komentář: Veronika si byla neustále vědoma své role učitele, a ačkoliv jsem do rozhovoru v obtížnějších momentech vstoupila, stále cítila svoji povinnost a zodpovědnost pomoci Denise najít řešení.

D: „Jednu."

Já: „Jednu kostku vidíš, ale kolik jich je přitom nad sebou?"

D: „Čtyři ... no tedy seshora vidím jen tu jednu kostku, ale takhle čtyři."

Přestavěla jsem tedy těleso no. 15 na těleso no. 1 a zeptala se Denisy, kolik kostek vidí teď.

D: „Čtyři vedle sebe."

Vyzvala jsem tedy Denisu, ať se pokusí nakreslit plán této budovy, jako když se na ni dívá seshora. Po zakreslení půdorysu si Denisa nebyla zcela jistá, a proto se zeptala: „Takhle úplně seshora?" a poté se zcela nad budovu naklonila.

Veronika opětovně zasáhla instrukcemi: „Teďka zakresli ... Tuhle, když se na ni díváš seshora. Jak ji zakreslíš?" Veronika znovu postavila těleso no. 15. Když viděla Denisino váhání, snažila se jí pomoci otázkou: „No, seshora jich vidíš kolik?" D: „Jednu. Ale takhle vidím ještě dolů ty ..." A Denisa ukázala na sloupec čtyř krychlí. Na moji pobídku, ať tedy zakreslí, co vidí, Denisa načrtla čtverec: „Takhle vidím, že je to jedna kostka a teď ty rohy dolů."

Já: „Ale my takhle nevíme, kolik tam těch kostek je."

V: „Takhle podle toho plánu bys to asi nepostavila."

Já: „No, vidíme seshora jednu kostku a my potřebujeme nějakým způsobem vědět, kolik jich je nad sebou. Kolik jich je nad sebou?"

D: „Tři .. ehm, čtyři."

Komentář D: Při vyřčení odpovědi tři Denisa zřejmě nepočítala s krychlí, kterou již vlastně zakreslila pomocí čtverce.

Já: „Jak by se to dalo zapsat, že máme nad sebou čtyři kostky?“

D: „Takhle ty rohy dolů..“

Já: „Nějak jinak ... bez jakéhokoliv přikreslování? Jsme v matematice. Jak zapíšeme množství, kolik tam čeho je?“

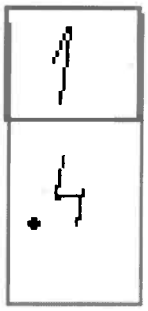
Komentář J: Ve snaze Denisu navést, ale neprozradit jí řešení, jsem volila slovo množství namísto slova číslo.

D: „Jednou krát čtyři ... jako tu jednu kostku krát čtyři.“

Já: „Zkus to nějak zapsat do tohoto plánu.“

Denisa opět svoji myšlenku s početním příkladem zopakovala: „Jako jednou krát čtyři.“ Do čtverce vepsala číslici jedna, poté k němu připojila delší obdélník, do něhož napsala znaménko „x“ a číslici čtyři (viz Plán D3). Své počínání komentovala slovy: „Jakože tady ta jedna kostka tady seshora ... a takhle ty tři. Kdybych dala jednou krát tři, tak by mi vyšlo tři, a já potřebuju, aby vyšlo čtyři.“

Já: „Ještě jednou zakresli, jak se na tuto budovu díváš seshora. Co všechno vidíš seshora. Tentokrát bez jakéhokoliv přikreslování, jen pomocí číslic nám zaznamenej, kolik je nad sebou kostek.“



Plán D3

V: „Můžeš to pouze zapsat něco krát...“

D: „Jednou krát tři.“

V: „Zkus jinak... číslo krát..“

Já: „To krát tam ani nemusí být, stačí to číslo.“

V: „Jen jedno číslo.“

D: „Tak čtyři. Jakože jedna kostka a jsou tam čtyři. Takhle čtyři, když tam dám *(zapíše do čtverce číslici čtyři)*.“

Pro kontrolu jsem tedy postavila těleso, věž o třech krychlích.

D: „Tak tři.“

Další stavbou, kterou měla Denisa zakreslit, bylo těleso no. 9. Denisa zakreslila plán tělesa no. 5 se slovy: „Takhle rovně jsou dvě a pod sebou dvě.“

Komentář D: Vytvoření plánu tělesa no. 5 ukazuje na Denisino neuchopení zápisu krychlových těles. Denisa byla nejspíš opět ovlivněna tím, jak těleso vypadá zepředu, protože to bylo první, co viděla.

Když jsem ji upozornila, že tímto způsobem se na těleso opět dívá zepředu, Veronika Denisu pobídla: „Seshora se podívej ... kolik jich vidíš?“

D: „Dvě.“

V: „No, tak to zakresli.“

D: „Když mám jako ty dvě? Aby mi to dalo ty čtyři? .. Dám tam dvakrát dva a vyjdou mi čtyři, jako dvě takhle, nebo dvě takhle.“ Přitom Denisa vytvořila plán tělesa no. 9.

Veronika poté postavila těleso no. 14 a zeptala se Denisy: „Jak zapíšeš tuhle? Seshora?“

D: „Seshora?“

Komentář V: Pro upřesnění zadání úlohy Veronika uvedla, že je třeba se na stavbu dívat seshora. Nejspíš si nebyla jistá, zda Denisa zcela úplně jednotlivým plánům rozumí. Její domněnka byla správná, což také ukazuje Denisin ověřující dotaz.

Komentář D: Denisa stále ještě neměla zažitý správný způsob zápisu tělesa, což se projevilo v její potřebě ujasnění si zadání.

Denisa tedy zakreslila plán, do kterého poté vepsala jednotlivé číslice. D: „Takhle vidím jednu, a tady taky jednu dole, tady napíšu tři a tady jedna .. jako tři plus jedna jsou čtyři.“

Když jsem se zeptala, proč jeden čtverec je větší než druhý, Denisa vysvětlila: „No, jak tady jsou ty tři a tady je jen jedna.“

Evidence: Čtverec představující sloupec tří krychlí nad sebou je rozměrově větší, než čtverec po jeho pravé straně.

Komentář D: Je zřejmé, že Denisa nyní potřebovala obměnit svoji teorii příkladu násobení z předchozí úlohy. Věděla, že je třeba zaznamenat počet krychlí tak, jak jsou nad sebou a v tomto případě se jí mnohem lépe hodil sčítací proces, tedy jedna a tři jsou čtyři. Pravděpodobně si uvědomila, že i v předchozí situaci by tato operace fungovala.

Nakonec jsem s děvčaty, tedy především s Denisou, provedla shrnutí a přiblížila dohodu, jak budeme jednotlivé stavby zakreslovat do plánu.

5. Orientační rozhovor

Cílem rozhovoru bylo zjistit, jak kteří učitelé přistupují k určité látce v matematice a jakým způsobem seznamují děti s prostorovou geometrií. Jistě by bylo zajímavé provést rozhovor s více učitelkami, ale ze „stránkových" důvodů této práce nemohly být uskutečněny. Jednotlivé rozhovory byly nahrávány a jsou prezentovány tak, jak skutečně proběhly. Na závěr jednotlivých rozhovorů jsem učitelky poprosila o zkušenou radu do života.

5.1 PhDr. Jitka Michnová, II. ZŠ Neratovice

Jitka Michnová se již delší dobu podílí na výzkumných projektech konaných v rámci Evropské unie a spolupracuje tak s Katedrou matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty v Praze. Jako výborná metodicka i objevitelka spousty nových pomůcek a matematických úloh mi byla pro orientační rozhovor doporučena. Nejen při samotném rozhovoru, ale i při krátkém následném posezení jsem od Jitky získala mnoho podnětných nápadů, postřehů a informací pro svoji budoucí učitelskou praxi.

5.1.1 Záznam rozhovoru

Datum: 19. 6. 2006

Čas: 13:00 – 13:10

Místo: třída 5., ZŠ Neratovice

Jak dlouho učíš?

Deset let.

A který předmět učíš nejraději?

Nejradši učím … ani nevím. No možná tu matiku.

Matiku?

Myslím, že jo. Že matiku … a výchovy, výtvarku.

Výtvarku. A pracovní činnosti nebo samotnou výtvarku?

Já teď v poslední době učím výhradně výtvarku, pracovky přebírá jiná kolegyně, která tím doplňuje úvazek.

A když teda vzpomeneme matematiku: učíš raději geometrii nebo aritmetiku?

No, v mém případě radši učím geometrii. (smích)

A můžeš zdůvodnit proč?

No, protože pod vedením docentky Jirotkové jsem objevila v geometrii ... jsem objevila způsoby, možnosti, hry, práci, činnosti, které se s dětmi v geometrii dělat dají, o kterých jsem dříve nevěděla, nebo mě nenapadlo tímto způsobem učit.

A když vezmeme geometrii, tak jakou upřednostňuješ? Prostorovou nebo rovinnou?

To bych řekla, že je skoro jedno. Že jak ta rovinná, tak ta prostorová mají něco do sebe, možná že, když se jde do toho prostoru a dětem se dají pomůcky, takže je to možná o něco zajímavější pro ty děcka.

Jak velkou část vyučovacího času věnuješ vlastně 3D geometrii, prostorové? Odhadem?

Jo, z matematiky, když bychom vzaly?

Hm, jo.

25%, možná spíš 20.

Z vlastní zkušenosti a i tím způsobem, jakým vyučuješ, kterou tu geometrii děti vnímají jako složitější, která jim dělá více problémů?

Jestli rovinná nebo prostorová?

Hm.

No asi víc problémů dělá prostor, ale zase jak se to vezme. Protože třeba rozdíl mezi přímkou, úsečkou a polopřímkou, to je rovinná geometrie a mají s tím děti taky ohromné problémy. Už jenom proto, že se to v podstatě velice těžko znázorní nějak hmatatelně, není nic ... No, když se nad tím hodně zamyslím, tak v podstatě ta rovinná dělá větší problémy než ta prostorová. Pokud zůstáváme u manipulace s předměty. Nesmí to být v abstrakci.

Když vezmu teď tu pětku, kde učíš, jakým tématům z prostorové geometrie se převážně věnuješ?

No obecně tělesům, v páté třídě určitě je to povrch a ..., povrch krychle a kvádru, stavby z krychlí tam jsou nějaké jako propedeutika objemu právě zase krychle a kvádru, nebo obecně uvažování o objemu, to je snad všechno. Tělesa, základní pojmy a povrch krychle a kvádru.

A co myslíš, co děti z prostorové geometrie nejvíce baví? Jaká témata jsou jim nejbližší?

Já bych řekla, že cokoliv, s čím se může manipulovat. Že pokud jsme dělali sítě krychle a manipulovali, a z nich se pak vyvozovali sítě kvádru, a zase manipulovali, tak je to bavilo. A hodnotí ty hodiny hodně dobře. Když stavěli z krychliček nějaké větší krychle a počítali počet těch krychlí, tak je to taky bavilo. Možná i když se to potom přenese už jen do té roviny tužka a papír, a je to něco takového, čím prošli, tak je to taky pořád ještě baví. Já si myslím, že je to skoro jedno.

Když tedy dětem vysvětluješ novou látku, nebo je jim nějak dána nová látka, tak jakým způsobem postupuješ, jak si ji vlastně osvojují? Vykládáš nebo.. Jak ten proces probíhá?

To je různé. Záleží jak na čem.

Tak třeba krychlová tělesa.

Krychlová tělesa, co to je. Takže to .... Z velké části, já to v podstatě na základě nějaké otázky nechávám vyvodit ty děti, že jim to těleso ukážu, dejme tomu, a zeptám se, co to je. Takže se dovím, že to jsou dvě slepené krychle, nebo jsou to tři slepené krychle, pak abychom zjednodušili to názvosloví, abychom si rozuměli, tak se dohodneme na tom, že teda krychlový těleso bude tohle, ale chce to jim ukazovat takové ty modely, že například je slepené krychlové těleso, nebo prostě přilepená krychle ke krychli s pomocí hrany, a teď jestli to tam patří nebo to tam nepatří, tohleto odiskutovat. Takže dejme tomu, že jeden z těch je ... nabídnout otázku a řešit ten problém, nabídnout problém a řešit ten problém a potom diskusi. Určitě.

Jaké pomůcky pro představu prostoru používáš?

Takže, domina, trimina, tetramina, kvadramina, sítě krychle, tu pomůcku táhlo, krychle, krychlová tělesa, modely geometrických těles.

Modely geometrických těles. A to máš ty drátěné?

Mám drátěné, tam jsou jak drátěné, tak normální, a taky dřevěné pro děti a i drátěné pro každé dítě. A mám i nekonfekční, to co nám ukazovali taky na fakultě, ale já ho mám taky u kolegyně. Jehlan s nekonvexním úhlem. To je zase dobré na hru sovu a na klasifikaci, třídění těch těles, klasifikaci, dělení obecných vlastností.

Otázka pracuješ s krychlovými tělesy je bezpředmětná...

Ano.

No, jestli děti mají možnost si s jednotlivými krychlovými tělesy jako modelovat anebo pracují pouze s obrázky?

Modelují si s krychlovými tělesy.

A obrázky nepoužívají?

Obrázky taky používáme jako nástavbu, že v podstatě, kdo to zvládne tu úlohu v rovině modelingu, tak potom třeba obdobnou úlohu řeší s pomocí obrázku a nebo potom už i z hlavy. Tím se v podstatě už diferencuje ta třída na ty, kteří mají a kteří nemají rozvinutou prostorovou představivost. Nebo naopak, nabídnu jim obrázek a kdo potřebuje, tak si k tomu vezme ta tělesa, že vlastně ta vyšší náročnost, a kdo potřebuje, tak prostě si to k tomu vezme, ale má tu možnost si to vzít.

S jakými úlohami na krychlová tělesa nejčastěji pracuješ? Stačí třeba jeden příklad.

No tak nejběžnější je ta hodina na hlavolamy, kdy děti s pomocí šipkového zápisu staví různá krychlová tělesa, slepují, přímo je slepují, když se jim to podaří, tak ta tělesa v rámci skupiny dohromady tvoří hlavolam a tím je krychle. Takže pokud pracovali správně, porozuměli šipkovému zápisu, tak získají krychli a skupinka pak získává hlavolam.

A ten šipkový zápis, ten už předem znají nebo...

Děti ano, znají to zpravidla z předcházející hodiny, která v podstatě vybízí k tomu ..., a tam zase se v podstatě objevuje ten šipkový zápis, protože potřebují se dohodnout, aniž by... Popisují si vzájemně ta tělesa, aniž by věděli, jak vypadá, jakoby poslepu se musí domluvit a zjistí, že v podstatě takový šipkový zápis je docela dobrý způsob a vede to potom do budoucna k souřadnicovému systému, ty šipečky.

Je úloha, o které jsi teď mluvila, tvojí nejoblíbenější? A když ne, která z těch úloh to je? Kterou nejraději s dětmi děláš?

To nevím, možná, že je to ta s hlavolamem nejoblíbenější. Ještě se mi líbí takové ty úlohy, kde jako něco postaví a uvnitř je jakoby díra a oni musí vyzkoumat.. nemusí tam být ani díra, stačí když je to obyčejná krychle a teď musí zkoumat, když stojí ty krychličky a zvenčí by se natřela ta krychle, kolik stěn je červených, když se přidá zase, zvětší se ta krychle o jednu, tak kolik jich je teď, jak to vlastně narůstá, posloupnosti.

A pracujete také s kótovaným půdorysem? S plány těles?

Ano, taky. Ale ono je jich zase několik, těch kótovaných půdorysů, a nepoužívám všechny. Jen takové ty asi nejběžnější, co jsou v učebnicích.

Pracuješ s učebnicí?

Taky.

A můžu vědět s jakou?

V tuto chvíli s Prodosem... ne s SPN.

A máš učebnici jako inspiraci?

Ano. Třeba stavby z krychlí si myslím, že tady nic takého není. Je toho strašně málo.

Rada do života: Odpoutat se od teorie, využít ji pouze pro pochopení nových poznatků. Je třeba nabídnout dětem co nejvíce možností setkání se s praxí a nechat je získávat zkušenosti z aktivit, které vycházejí z reálného života.

5.2 Mgr. Silva Zeková, ZŠ Pod Marjánkou

S paní učitelkou jsem se seznámila v průběhu souvislé praxe. Se zaměřením rozhovoru jsem ji seznámila již před jeho začátkem. Téma krychlových těles bylo pro ni nové, lehce jsem ji tedy s problematikou seznámila. Paní učitelka Silva mě velmi překvapila osobitým pohledem na výuku dětí, nápaditostí a bohatými zkušenostmi. Díky tomuto rozhovoru jsem si uvědomila, jak je důležité zůstat pružným a přizpůsobivým pedagogem a naslouchat potřebám dětí nikoliv diktátu osnov a školy.

5.2.1 Záznam rozhovoru

Datum: 20. 6. 2006

Čas: 7:30 – 7:45

Místo: třída 4.B, ZŠ Pod Marjánkou

Jak dlouho již učíte?

Přes 20 let.

Který předmět učíte nejraději?

Humanitně zaměřené předměty, především vlastivědu, a to zeměpisnou, nebo dějepisnou.

Učíte raději geometrii nebo aritmetiku?

V tom nedělám rozdíl, beru obojí stejně.

Jakou geometrii upřednostňujete?

Asi spíše rovinnou, zde mám více nápadů, co s dětmi dělat.

Jak velkou část vyučovaní věnujete geometrii?

Odhadem asi jednu třetinu. Některé kolegyně mají vždy každý týden alespoň jednu hodinu geometrie. Pro mě je důležité vyučovat v blocích, věnovat se látce intenzivně právě teď po několik hodin.

Z vlastní zkušenosti, která z geometrií je pro děti složitější, se kterou mají větší problémy?

Asi s tou prostorovou, která je přece jen hodně náročná na představivost.

Kterým tématům z prostorové geometrie se ve své třídě věnujete?

Obecně tomu, co je v osnovách – tedy tělesa a jejich pochopení, orientace v prostoru, krychle, kvádr. Někdy i nadstavbově, např. výpočet povrchu kvádru – děti samy nalezly způsob, jak to vypočítat – přišla na to určitě polovina dětí.

Jak si děti novou látku osvojují? Jakým způsobem ji většinou prezentujete?

Rozhodně nejsem zastánce frontálního vyučování. Nemám ráda, když učitel předkládá dětem fakta, o kterých s nimi nediskutuje. Většinou se nadnese problém, který potom děti řeší. Je hrozně fajn, když mohou samy objevovat.

Jaká témata mají děti nejraději?

To ani nezáleží na tématech, ale na tom, co dělají. Každopádně je baví jakákoliv modelace, když samy něco vytvářejí.

Jaké pomůcky pro představu prostoru používáte?

Většinou to, co si samy děti vyrobí, teď například krychle vzniklé ze sítě. Dále používáme hodně špejle a plastelínu, či různé provázky pro dělení, vyhraničení prostoru. Často i samy děti mohou být modelem. Modely těles však nemám.

Pracujete s krychlovými tělesy?

Co to je krychlové těleso, jsem se dozvěděla až od tebe. Většinou si na toto téma uděláme nějaké cvičení v učebnici.

Mají děti možnost si jednotlivá KT modelovat, nebo pracují pouze s obrázky?

Myslím, že je hodně důležité, aby modelovaly a přišly tak s tělesem do kontaktu. To jim taky usnadní lepší uchopení látky.

S jakou učebnicí pracujete?

Alter.

Narazila jste tam někdy na úlohy řešící právě krychlová tělesa?

To nevím, to bychom se musely podívat.

Pracujete přesně podle učebnice, nebo ji máte pouze pro inspiraci?

Pouze jako inspirace.

Na konci rozhovoru mě paní učitelka seznámila s právě probíhající aktivitou:

Děti si vytvářely sítě krychle a měly si na té síti samy vyznačit, kde budou lepící „pacičky" zbytečné a kde naopak by mohly chybět. Nesmí vznikat díry mezi jednotlivými hranami. A proto je učitelka motivovala také tím, že mají dát dovnitř nějaké malé překvapení a krychličku pořádně slepit, aby opravdu nebylo dovnitř vidět. Na konci se krychličky vybraly, každý si jednu vylosoval a mohl s ní naložit podle libosti – buď ji otevřít a podívat se na překvapení, nebo si ji nechat na památku.

Rada do života: Osnovy či probíraná látka nejsou nejdůležitější, důležité je především přiblížit život za stěnami školy. Poskytnout dětem různou zkušenost.

6. Problematika krychlových těles v učebnicích ZŠ

Poté, co jsem blíže pronikla do problematiky krychlových těles, zajímalo mě, jakým způsobem jsou s touto látkou seznamovány děti a do jaké míry se jí zabývají jednotlivé učebnice.

S cílem zjistit, jak se téma krychlových těles objevuje v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ, byly prostudovány učebnice několika nakladatelství (viz Příloha, Tabulka U1), ať již první nebo druhé vydání či pracovní sešity. Některé z učebnic byly podrobeny důkladnější analýze zaměřené na způsob výkladu látky a její následné procvičení (viz Příloha, Tabulka U2).

Podle očekávání prezentuje většina učebnic krychlové stavby z pravého nadhledu. Zřejmě je to dáno zažitými představami krychle a způsobem, jakým je krychle v geometrii prezentována. Pouze v učebnici pro 5. třídu vydavatelství Fortuna je těleso zpodobněno z levého nadhledu.

Pokud bychom zvažovali „obsažnost" učebnic vzhledem k ročníku, nevíce různých typů úloh na krychlová tělesa zahrnovaly učebnice třetích a čtvrtých tříd. Převážná většina učebnic pak pracovala s jednotlivými pohledy (průměty), některé učebnice se zmínily i o půdorysu tělesa s vyznačeným množstvím krychlí. Nejčastěji vyskytující se úlohou je zakreslování pohledů podle obrázků, stavění těles podle plánů či obrázků, nebo určení, kolik krychlí která stavba obsahuje.

Velmi kladně bych pak ohodnotila výzvy k manipulaci s krychlemi a tělesy, které byly ve většině zkoumaných učebnicích.

Ve většině učebnic mi však chybělo jakékoliv propojení s životní zkušeností dítěte. Nejspíš je brán v úvahu předpoklad, že samotné krychlové stavby jsou již dosti hmatatelným jevem, který není třeba blíže představovat a připodobňovat k předmětům z okolí dítěte.

Po zkušenosti z experimentů mě mile překvapilo, že většina učebnic pracuje s plánem; většinou se jedná o jednoduchý plán či pouze půdorys.

Nejvíce mě zaujala řada učebnic vydavatelství MÚ AV ČR. Žák se zde setkává s mnoha různými typy úloh, s plány a pohledy na tělesa i s výzvami k manipulaci a vlastní tvořivosti. Učebnice nakladatelství Fortuna mě zase nadchly svým hravým a „barevným" přístupem. Vše je názorně vysvětleno a dítěti je dán dostatečný prostor k vlastní práci.

7. Sebereflexe a závěr

Sebereflexe je chápána jako ohlédnutí zpět a zvážení, jaké zkušenosti napsání práce přineslo. Pokud vezmu v úvahu hlavní cíl a záměr projektu nazývaný diplomovou prací, zcela jistě mohu potvrdit, že mě jeho tvorba hodně obohatila. Získala jsem podrobný vhled do jedné z oblastí geometrie a mnoho podnětů, které mohu uplatnit ve své praxi.

První zkušenost

Velmi přínosným a doslova startovním bodem pro moji práci byla hodina, kterou jsem učila v rámci pedagogické praxe. Tento před-experiment mi přinesl nejen podrobnější vhled do problematiky krychlových těles, ale především podnítil moji snahu jej nadále rozvíjet a sledovat reakce dětí. Prostorová geometrie mi byla vždy bližší, pamatuji, že mě vždy velmi bavilo manipulovat s předměty a zakreslovat různá tělesa. Když jsem se s tématem krychlových těles v rámci projektu seznámila blíže, oslovila mě právě možnost manipulace, která pomáhá dítěti prostor uchopit. Při své první hodině, která se tak stala experimentem, jsem si nejen vyzkoušela méně obvyklou látku, ale i konstruktivistický způsob výuky. Ohlas, kterého se mi u dětí dostalo, mě natolik nadchnul, že jsem v dané problematice pokračovala dál. Výsledky před-experimentu jsem prezentovala na jednom ze seminářů matematiky. Podnětné připomínky a zájem kolegů mě motivovaly nadále na tématu pracovat.

Za nejdůležitější přínos svého psaní považuji získání zkušeností v analýze jednotlivých experimentů. Myslím, že díky odbornému vedení svého školitele jsem byla schopna jednotlivé jevy lépe poznat a některé i pojmenovat. Zjistila jsem, jak je důležité pozorně vše během experimentu sledovat a zapisovat. To, že úlohy experimentu nebyly zadávány vždy ve stejném provedení, se ukázalo jako matoucí a nevhodné pro pozdější snahu porovnat a vyhodnotit počínání žáků.

Experimenty v Anglii

Samotné provedení experimentu ve Velké Británii se ukázalo jako velmi podnětné a přínosné, třebaže na základě absence mých zkušeností s vedením experimentu nenaplnilo mé očekávání a cíl srovnat reakce anglických dětí s dětmi v České republice. Přestože byly experimenty nahrávány na audio kazetu, brzy jsem si uvědomila, jak málo informací mi při analýze mluvená řeč poskytne. Zjistila jsem, jak rychle experimentátor zapomene situace, které nemohou být zachyceny na pásku. Sama jsem se s tím hodně potýkala, když jsem se při

poslechu hluchých míst nahrávky a luštěním rychle napsaných poznámek z experimentu, snažila rekonstruovat pohyby rukou dítěte a jeho počínání. Uvědomila jsem si, jak velkou pomocí by mohla být obrazová dokumentace či video záznam. Ačkoliv mi bylo doporučeno dělat analýzy bezprostředně po jednotlivých experimentech, dostala jsem se k nim až za delší dobu. Při tomto rozpomínání, které díky časové odluce trvalo dvojnásobně dlouho, jsem si uvědomila, oč obtížnější je některé jevy popsat a následně je analyzovat. Dostatečně poučena jsem český experiment analyzovala bezprostředně po jeho provedení.

Práce s anglickými dětmi mě nadchla. Upoutala mě jejich bezprostřednost, samostatnost a většinou i sebevědomí, s jakým vyslovovaly některé závěry. Třebaže jsem cítila určitou bariéru v komunikaci v angličtině, nemyslím, že by to děti nějak ovlivňovalo či bylo příčinou většího nedorozumění.

Analýza anglických experimentů

Mé prvotní pokusy o analýzu experimentů byly spíše esejistické a víceméně nestrukturované. Díky radám vedoucího práce jsem pak byla schopna zvolit určitou formu a naučila jsem se, jak nejlépe formulovat a hodnotit své myšlenky. Jednotlivé anglické experimenty jsem popsala, opatřila evidencí a případným komentářem. Musím říci, že na konci práce s anglickými experimenty jsem byla s jejich konečnou podobou spokojená a měla jsem pocit, že se tomu již více věnovat nelze.

Experimenty v České republice a jejich analýza

Po vzájemné dohodě s vedoucím práce jsem oproti původnímu záměru provedla v českém prostředí pouze dva experimenty. Stalo se tak nejen z nedostatku času, ale především z nedostatku prostoru, který mi diplomová práce poskytovala. České experimenty jsem analyzovala podle rad a podnětů konzultanta, který mě naučil posuzovat jednotlivé momenty z různých hledisek a nebát se detailů a popisu vlastních postřehů. Nejvíce mě při této analýze obohatily právě naše společné diskuse, které mě neustále podněcovaly k novým myšlenkám a nápadům. Kolikrát se mi tak vybavily zajímavé postřehy, které jsem předtím nepovažovala za důležité uvádět. Zjistila jsem, že právě tyto myšlenky by se měly v analýze objevit, že je třeba popsat vše, co se stalo a co nějakým způsobem mohlo danou situaci ovlivnit. Mnohokrát mě překvapilo, jak niterné roviny myšlení mohou být v analýze popsány a komentovány. Zcela novou sférou mých postřehů pak bylo zamyšlení se nad vlastním jednáním, proč jsem reagovala právě daným způsobem a ne jinak. Naučila jsem se, že při analýze není důležité jen

pozorovat a snažit se popsat a pojmenovat jevy v jednání dítěte, ale je také třeba zamyslet se nad vlastním počínáním, které do experimentu výrazně zasahuje. Zpočátku mi přišlo zbytečné rozepisovat se o svých vlastních domněnkách a styděla jsem se za chyby, kterých jsem se jako experimentátor dopustila, ale zjistila jsem, jak je to vše pro podrobnou analýzu důležité. Právě zmíněné chyby ve mně často vyvolávaly pocit selhání a ze začátku jsem se je pokoušela minimalizovat či je z analýzy zcela vypustit. Naučila jsem se však, že je třeba se s nimi vyrovnat a že právě tyto chyby a jejich uvědomění mě jako experimentátora a budoucího učitele posouvají o kousek dál.

Návrat k anglickým experimentům

Právě díky nově nabyté zkušenosti, která mi byla během analýzy českého experimentu předána, jsem se opět vrátila k již zpracovaným experimentům z Anglie. Již při čtení prvního z nich narůstala moje nespokojenost. Poté, co jsem svoje pocity konzultovala s vedoucím práce, bylo mi navrhnuto jeden z experimentů znovu analyzovat jak nejlépe umím. Jako velmi podnětná mi přišla myšlenka uvést dvě různé analýzy jednoho experimentu jako dokumentaci mého vlastního vývoje. Při analýze anglického experimentu s Adamem jsem cítila, že by bylo třeba poopravit i ostatní rozbory. Třebaže jsem již neměla dostatek času, jsem ráda, že jsem některé úpravy v analýzách provedla a stala se tak s výslednou prací spokojenější. I přesto cítím, že by stále bylo na čem pracovat.

Porovnání zkušeností z dvou různých zemí

Při experimentu v českém prostředí jsem hodně vycházela ze zkušeností nabytých v Anglii. Třebaže jsem nezaznamenala žádné větší rozdíly při srovnávání jednotlivých experimentů s experimentem českým, všimla jsem si především chování dětí a jejich zájmu o probíranou látku. Ačkoliv je Veronika svým založením spíše plašším a tišším dítětem, cítila jsem, jak silná je její potřeba zpětné reakce a snaha vyvarovat se chyby. Musím říci, že jsem byla zklamaná, jak neprůbojně se s úlohami potýkala, mrzelo mě, že si více nevěří, že se bojí své nápady prodat. Na druhou stranu však obě české dívky vynikaly systematičností, pečlivostí a smyslem pro zodpovědnost. Všimla jsem si také, že je téma krychlových těles více zaujalo, což bych přisoudila faktu, že nic podobného ve škole ještě nedělaly a jakékoliv zpestření matematické látky tak pro ně bylo velkou vzácností. Velkou roli zde přitom hrály podmínky, za kterých experiment probíhal. Zatímco v Anglii jsem za dětmi docházela do školy a brala je z výuky, Veronika s Denisou přišly ke mně domů ve svém volném čase o víkendu. Již prostředí mého pokoje, kde jsem s nimi pracovala, a víkendový čas tak dávaly experimentu

kouzlo neobvyklosti. Těžko říci, zda lze z tak malého experimentálního vzorku vyvozovat jakékoliv závěry v rozdílnosti zpracování plánů těles. Všimla jsem si však, že všechny anglické děti přišly s nápadem zakreslit do plánu čtverec, který by znázorňoval jednu krychli na druhé. Veronika tento způsob zápisu také navrhla, ale spíše jako východisko při neustálém hledání. To, že anglické děti uvažovaly podobným způsobem a přicházely s podobnými návrhy by mohlo vyplývat již z předešlé zkušenosti; je možné, že se s něčím takovým již dříve setkaly a z této zkušenosti pak vycházely.

Evidence experimentu

Nejspíš díky tomu, že experiment s českými dětmi probíhal po delší časové odluce, jsem zpočátku měla problémy se zachycením všeho potřebného a především s opětovným vžitím se do role experimentátora. Cítila jsem, jak mi některé postřehy unikají a třebaže jsem byla tentokrát vybavena fotoaparátem, přišlo mi, že mě pořizování snímků spíše brzdí a překáží. Nakonec jsem však fotografie ocenila při analýze, kdy mi připomněly některé situace a pomohly sestavit průběh experimentu.

Co si z experimentů a jejich analýz odnáším

Práci na experimentech a především na jejich analýzách považuji za největší přínos pro moji budoucí profesi učitele. Je důležité, abych se jako učitel byla schopna zamyslet nad procesem, jakým dítě při hledání řešení postupovalo, abych se snažila pochopit, jaké cesty volí a proč. Zjistila jsem, že není stěžejní, k jakému výsledku dítě došlo, ale jakou zvolilo cestu a především co si z dané zkušenosti může odnést. Bohužel cítím, že pod časovým tlakem a díky vysokému počtu dětí ve třídě nebude možné ke každému dítěti takto přistupovat. Navíc je školní systém stále víceméně nastaven na výsledky žáků. Osobně však cítím, že to lze postupně měnit k lepšímu.

Zkušenosti s kritickým hodnocením učebnic

Nezanedbatelnou zkušenost jsem také získala při podrobném zkoumání jednotlivých učebnic. Myslím, že v dnešní době, kdy se mění koncepce vzdělávání a na trhu je spousta učebnic různých nakladatelství, může být pro učitele velmi těžké se v nich zorientovat a vybrat tu vyhovující. Po konzultaci s vedoucím práce jsem učebnice a úlohy zaměřené na krychlová tělesa analyzovala podle několika hledisek. Při práci na tabulce přehledu jsem se naučila, kolik různých kritérií je možné pro hodnocení zvolit a jak podrobně lze dané úlohy

„rozpitvat". Zjistila jsem však, že není podstatné, aby učebnice plnila všechna daná kritéria. Za nejdůležitější považuji způsob, jakým učitel s učebnicí pracuje.

Rozhovory s učitelkami

Na téma používání učebnic jsem se zaměřila i během krátkých rozhovorů se dvěma učitelkami. Oba rozhovory mi přinesly jiný pohled do světa matematiky a učení. Uvědomila jsem si, jak se teorie kolikrát oddaluje od praxe, ale také jsem zjistila, jak může dobrý učitel svoji výuku obohatit a tím jí tak dodat zcela jiný rozměr. Rozhovor s Jitkou Michnovou mi přinesl několik podnětných postřehů, které mohu uplatnit ve své praxi. Bylo zajímavé vstřebávat poznámky člověka, který se neustále vzdělává a tím posouvá svoji učitelskou praxi stále dál. Ačkoliv se učitelka Silva Zeková s krychlovými tělesy nikdy podrobněji neseznámila, při našem rozhovoru z ní mluvila několikaletá praxe a zkušenosti. Velmi příjemným zjištěním byl její nápaditý způsob výuky a hravost, se kterou k učení přistupuje.

Závěr

Třebaže jsem na diplomové práci pracovala dostatečně dlouho, cítím, že zůstává stále mnoho možností, jak rozšířit své zkušenosti a problematiku nadále rozvíjet. Jistě by bylo velmi zajímavé uskutečnit více podobných rozhovorů s pedagogy z jiných škol. Je možné, že by mohlo dojít ke srovnání pohledu učitele venkovské školy, malotřídky či učitele, který žije v Praze a má tak možnost být neustále v kontaktu se vzdělávacími institucemi. Velmi zajímavé by bylo i pokračování v experimentech s českými dětmi. Tím by se mohlo dosáhnout určitého porovnání s experimenty anglickými.

Pokud se podívám zpět na svoje začátky s krychlovými tělesy a na hodinu, ve které jsem tuto problematiku poprvé aplikovala, cítím, že jsem v průběhu psaní diplomové práce nabyla velké množství zkušeností, které se jistě promítnou i do mé budoucí praxe. Moc bych si přála, aby tyto postřehy určitým způsobem inspirovaly i ostatní, kteří budou diplomovou práci číst. Myslím, že by mohly pomoci studentům učitelství, kteří se stejně jako já budou potýkat s analýzou žákova myšlení, nebo mohou inspirovat učitele, jež hledají pro své hodiny nová témata a úlohy. Ačkoliv tato práce není zaměřená na prezentaci úloh a nápadů do hodin, věřím, že by mohla sloužit jako startovní bod pro některé hodiny matematiky s prostorovým zaměřením. Přestože jsem si v matematice nikdy příliš nedůvěřovala a vždy jsem k ní přistupovala s lehkou nechutí, psaní diplomové práce mi ukázalo, jak zajímavá a podnětná může být. A takovou bych ji chtěla prezentovat i dětem.

8. Seznam literatury

Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K., Staudková, H. (1995). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: Alter

Cihlář, J., Melichar, J., Zelenka, M. (1994). *Matematika pro 2. třídu*. Praha: Fortuna

Cihlář, J., Melichar, J., Zelenka, M. (1994). *Matematika pro 3. třídu*. Praha: Fortuna

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., Potůček, J. (1995). *Matematika pro 4. třídu*. Praha: Fortuna

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., Potůček, J. (2000). *Matematika pro 4. třídu*. Praha: Fortuna

Cihlář, J., Zelenka, M. (1995). *Matematika pro 5. třídu*. Praha: Fortuna

Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F. (1997). *Svět čísel a tvarů, matematika pro 2. ročník*. Praha: Prometheus.

Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F. (1998). *Svět čísel a tvarů, matematika pro 3. ročník*. Praha: Prometheus.

Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F., Nechvátalová, J. (2002). *Svět čísel a tvarů, matematika pro 3. ročník. Sbírka úloh*. Praha: Prometheus.

Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F. (1999). *Svět čísel a tvarů, matematika pro 4. ročník*. Praha: Prometheus.

Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F. (2000). *Svět čísel a tvarů, matematika pro 5. ročník*. Praha: Prometheus.

Hejný, M., Jirotková, D. (2005). Krychlová tělesa. In: *Zborník príspevkov z letnej školy z teorie vyučovania matematiky Pytagoras 2005*, P-MAT Bratislava, str. 32 – 36

Hejný, M., Michalcová, A. (2001). *Skúmanie matematického riešitelského postupu*. Metodické centrum Bratislava 2

Charles University In Prague, CR, Kassel University, Germany, Aristostle University, Thessaloniki, Greece, University of Derby, UK (2006). *Creative Teaching in Mathematics*. Universita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Jarošová, J., Kaslová, M., Nechanická, R. (1998). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: SPN

Jarošová, J., Kaslová, M., Nechanická, R. (2000). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: SPN

Jarošová, J., Kaslová, M., Nechanická, R. (1999). *Matematika pro 4. ročník ZŠ*. Praha: SPN

Justová, J. (1996). *Matematika pro 5. ročník ZŠ*. Všeň: Alter

Kárová, V. (1997). *Matematika pro 2. ročník ZŠ*. Praha: Scientia

Kárová, V. (1998). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: Scientia.

Kárová, V. (1999). *Matematika pro 4. ročník ZŠ*. Praha: Scientia.

Kárová, V. (2000). *Matematika pro 5. ročník ZŠ*. Praha: Scientia.

Kaslová, M., Čížková, R., Laksarová, M., Tanglová, M. (2000). *Barevná matematika pro páťáky*. Praha: SPN

Kittler, J., Kuřina, F. (1994). *Matematika pro 2. ročník ZŠ*. Praha: MÚ AV ČR

Kittler, J., Kuřina, F., Tichá, M. (1992). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: MÚ AV ČR

Kittler, J., Kuřina, F., Tichá, M. (1995). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Praha: MÚ AV ČR

Koman, M., Kuřina, F., Tichá, M. (1993). *Matematika pro 4. ročník ZŠ*. Praha: MÚ AV ČR

Komárková, V., Trejbal, J. (1997). *Matematika pro 5. ročník ZŠ*. Praha: SPN

Mikulenková, H., Molnár, J. (1993). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Olomouc: Prodos

Mikulenková, H., Molnár, J. (1996). *Matematika pro 4. ročník* ZŠ, 1. díl. Olomouc: Prodos

Mikulenková, H., Molnár, J. (1994). *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 3. díl*. Olomouc: Prodos

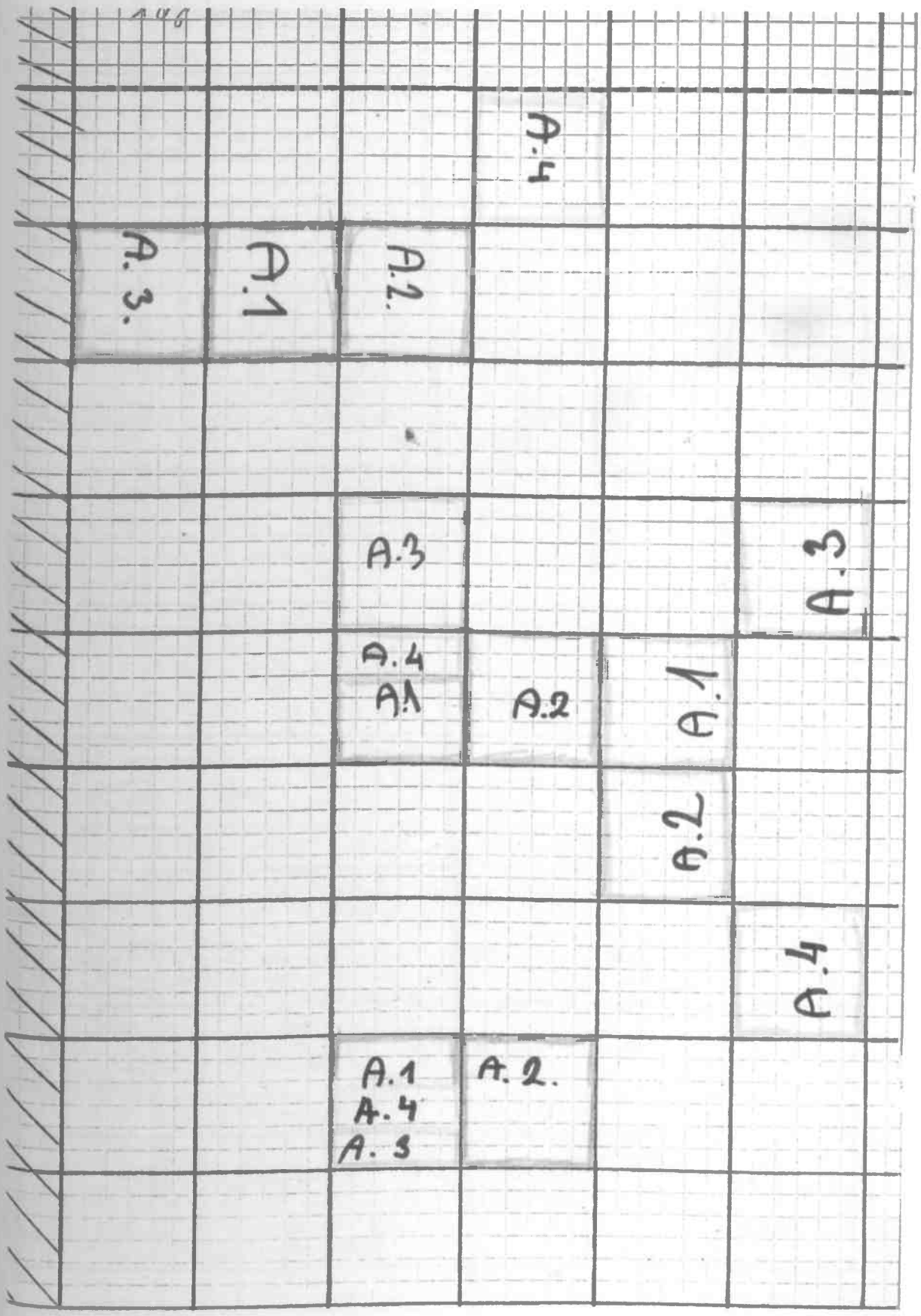
Mikulenková, H., Molnár, J. (1996). *Zajímavá matematika pro 4. ročník ZŠ*. Olomouc: Prodos

Selley, N. J. (1999). *The art of constructivist teaching in the primary school: a guide for students and teachers*. London: David Fulton

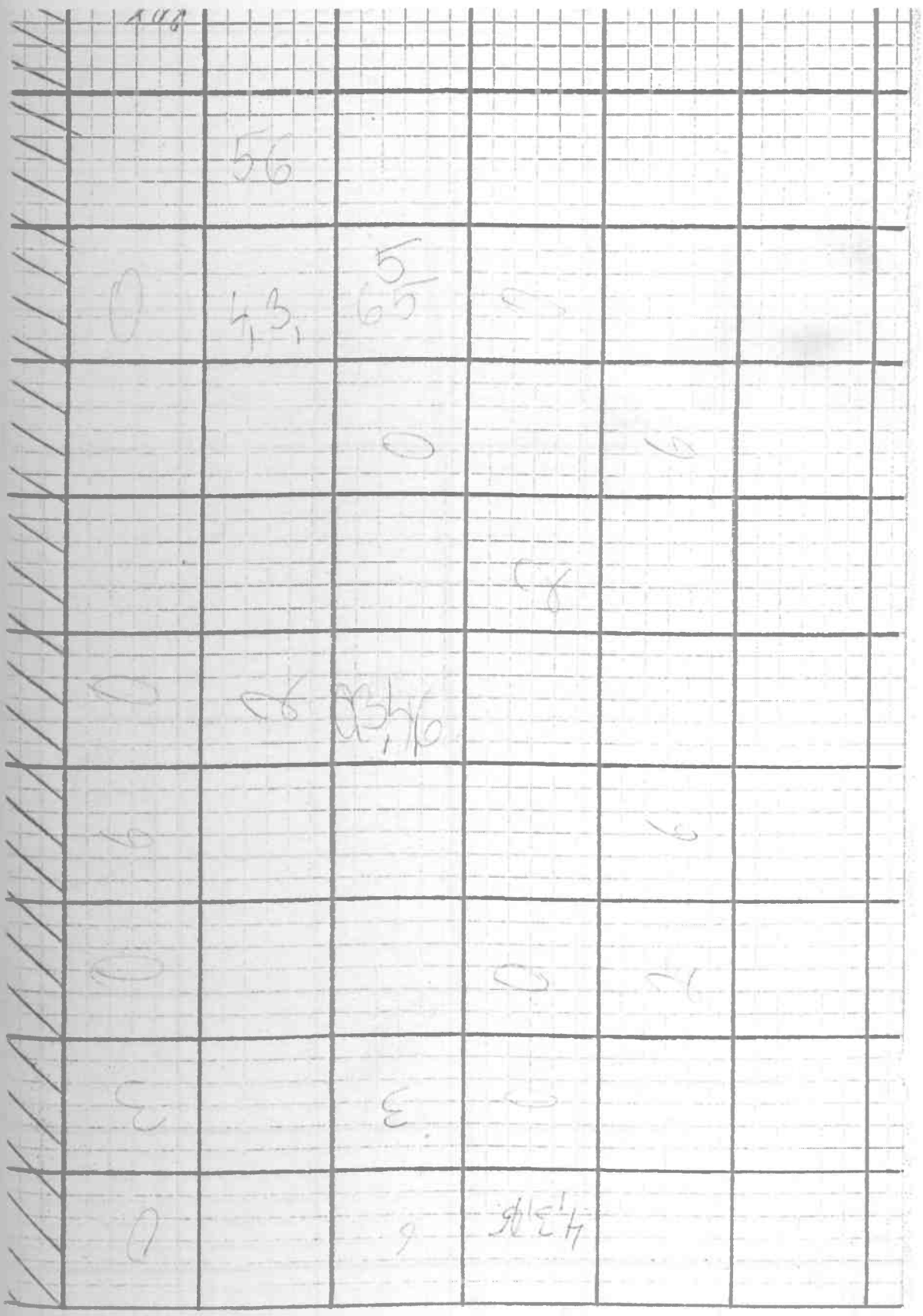
Teaching the primary curriculum for constructive learning / edited by Michael Littledyke and Laura Huxford (1998). London: David Fulton

Trch, Zapotilová, Laurmannová, Turecká (1995). *Matematika pro 1. ročník obecné a základní školy*. Praha: Scientia.

Příloha 1



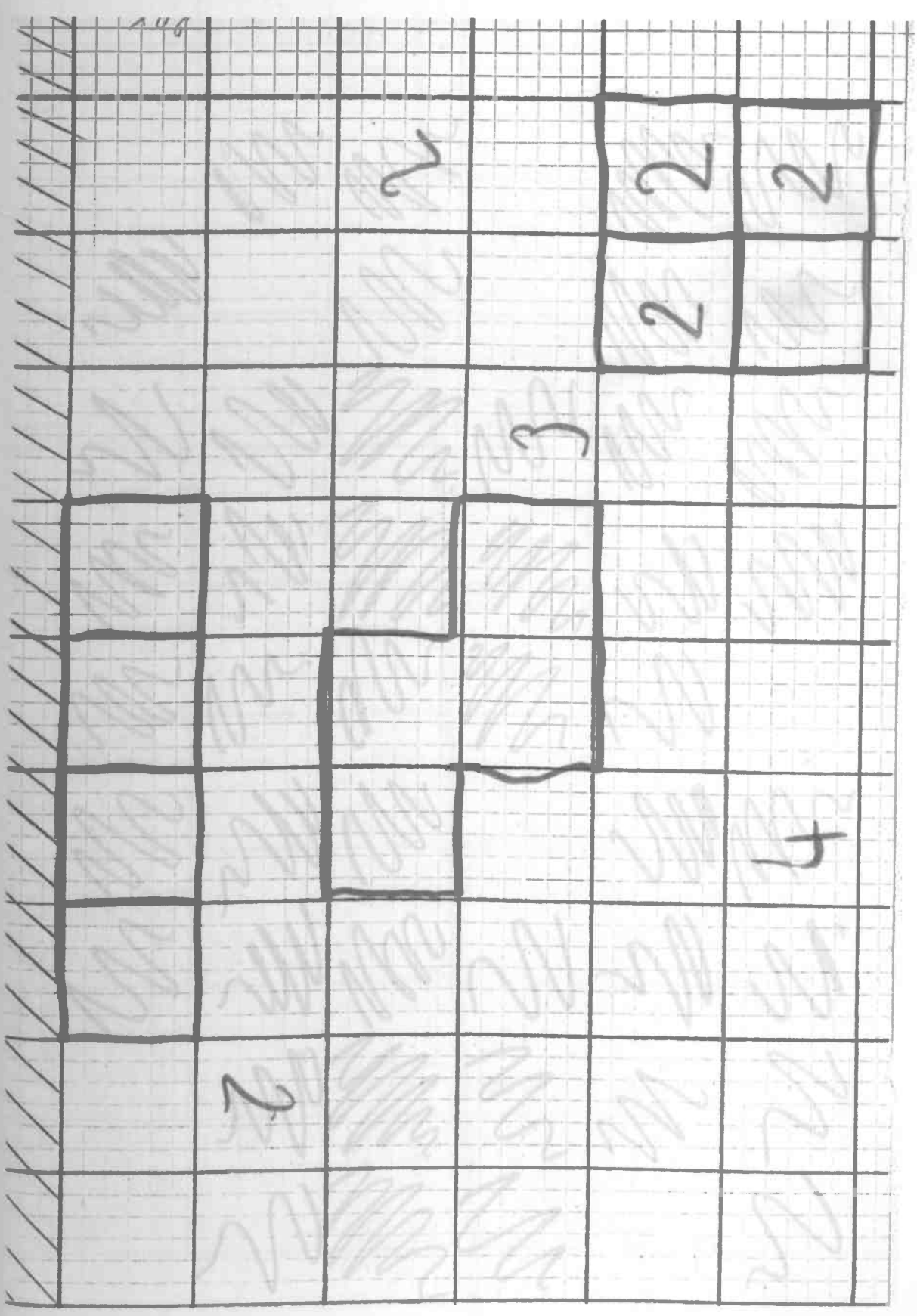
Příloha 2



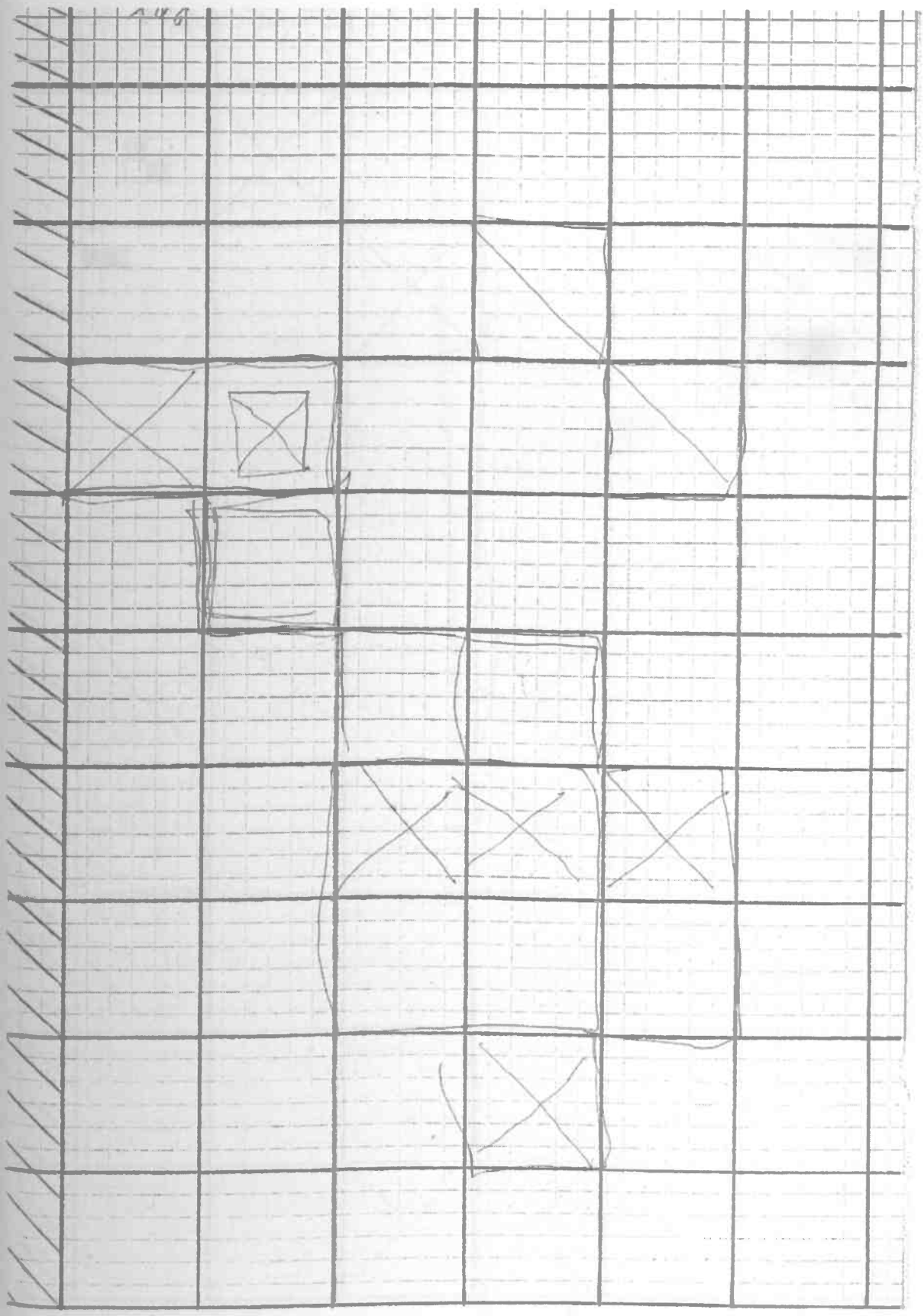
Příloha 3

	A	B	C	E	F	F
			3	4		3
		6	0	4	03	
4		4	0	4	3	
5			4	0		
6	05		3	6		
			4			
	3,6		03	6		
		6				

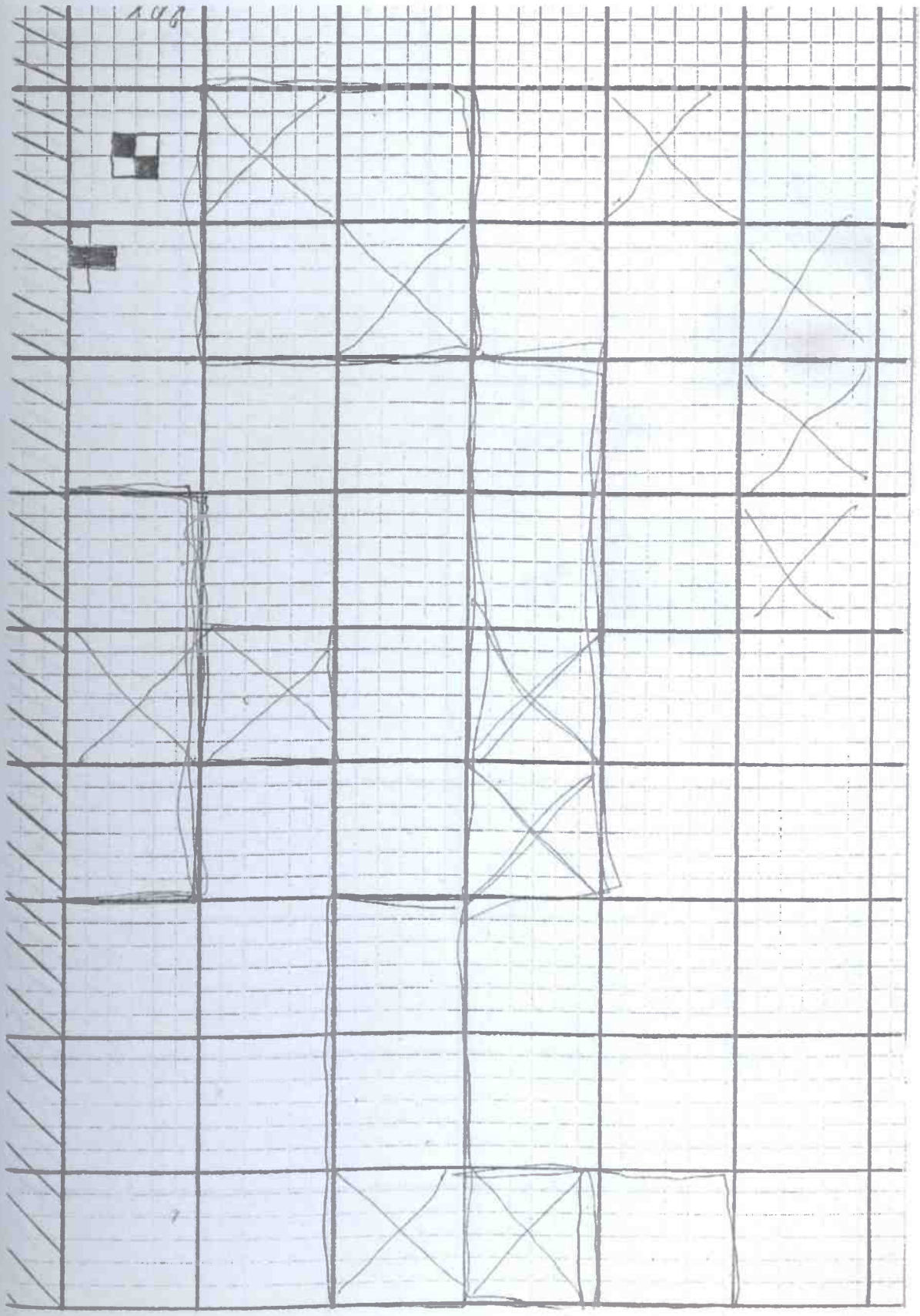
Příloha 4



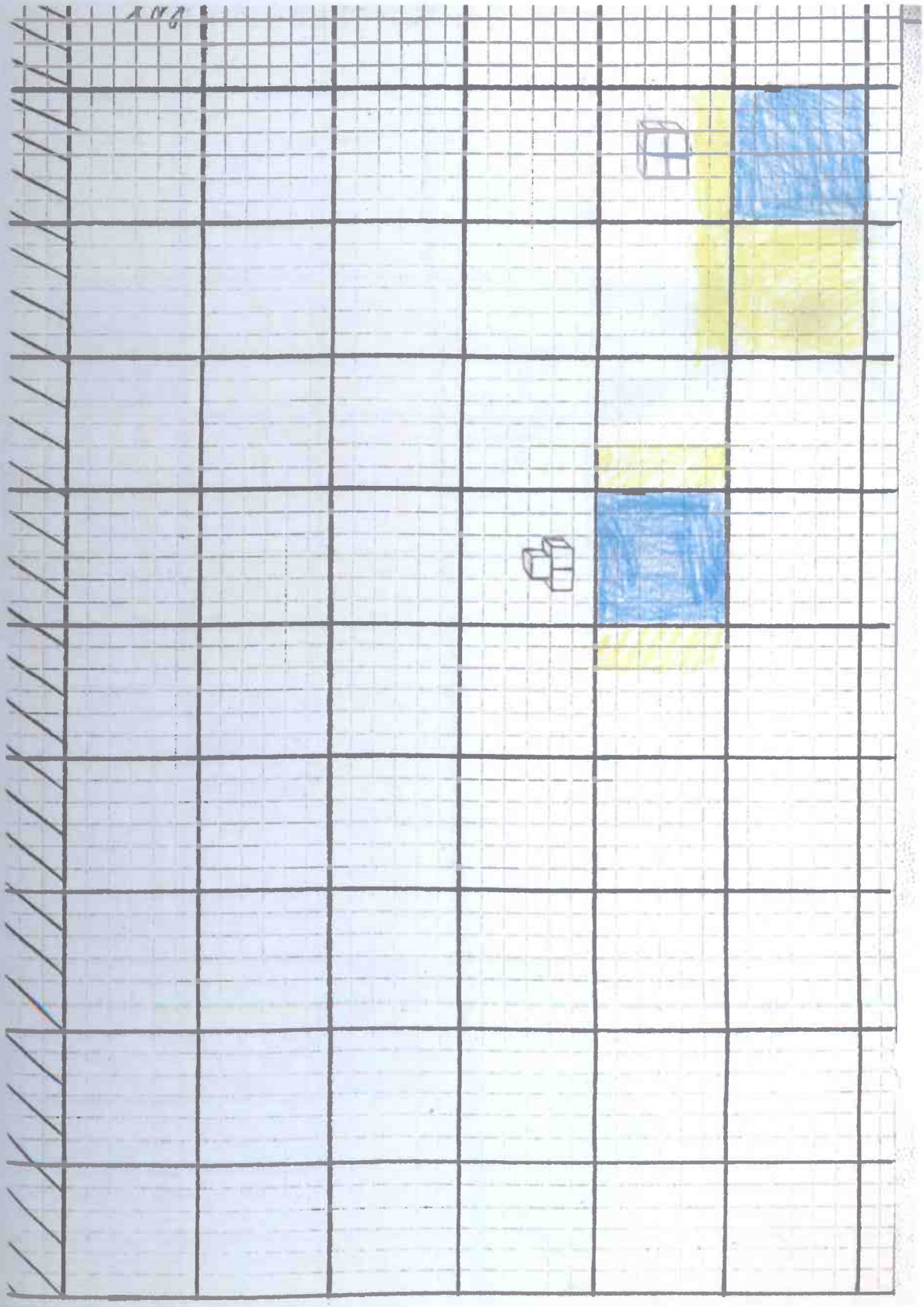
Příloha 5



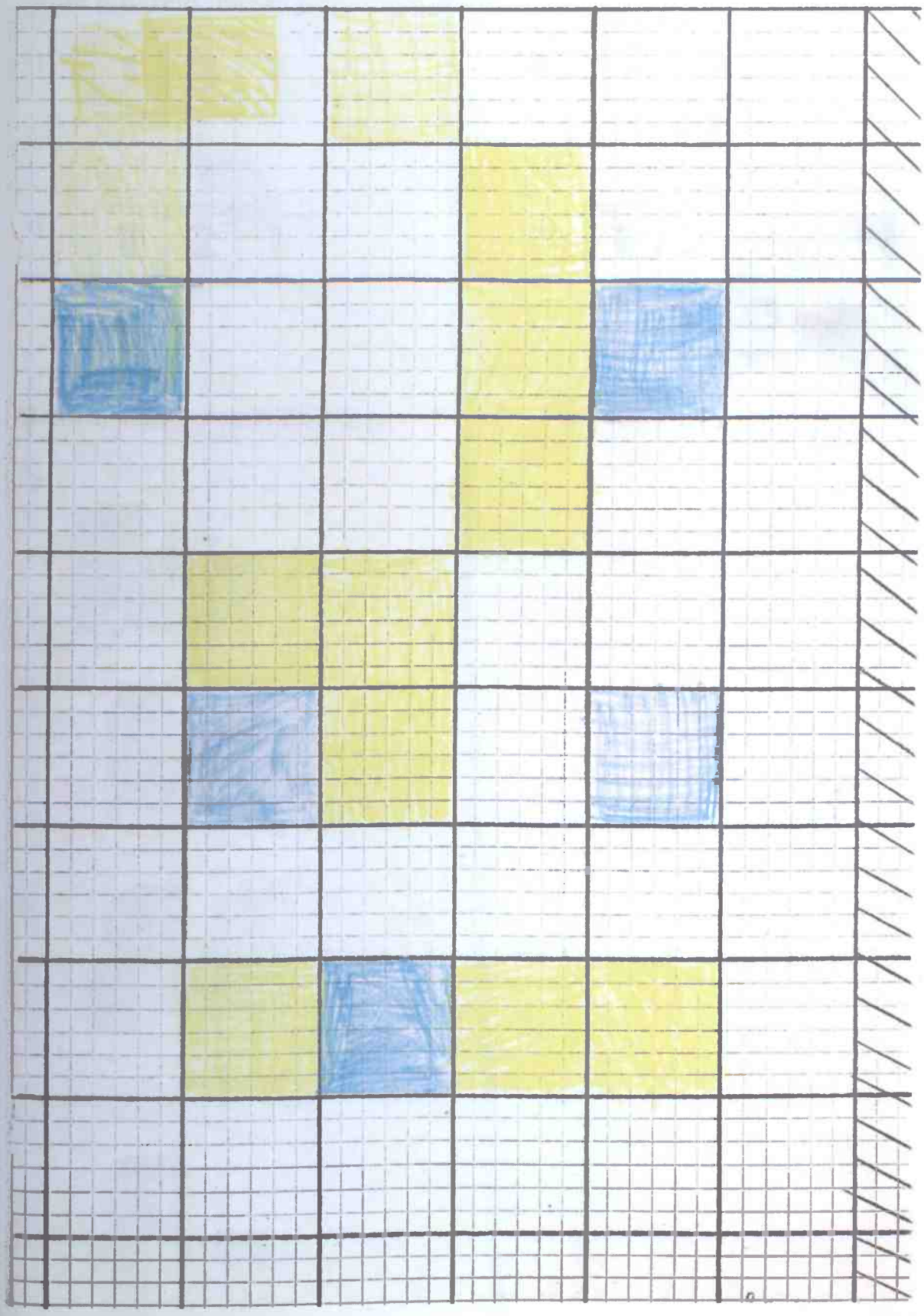
Příloha 6



Příloha 7



Příloha 8



Příloha 9

Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

1	2	1

4)

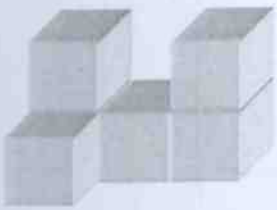
1	2	
	2	3

Draw a plan for each building:

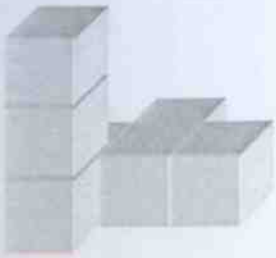
1)

2)

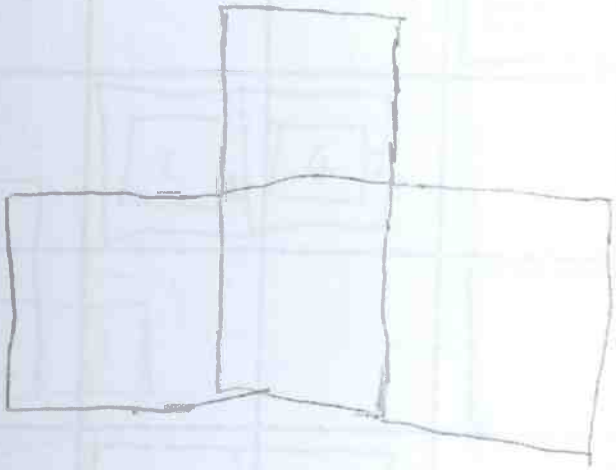
3)

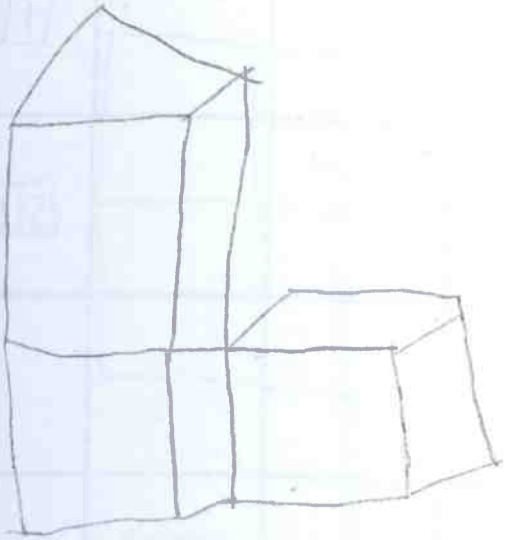


4)

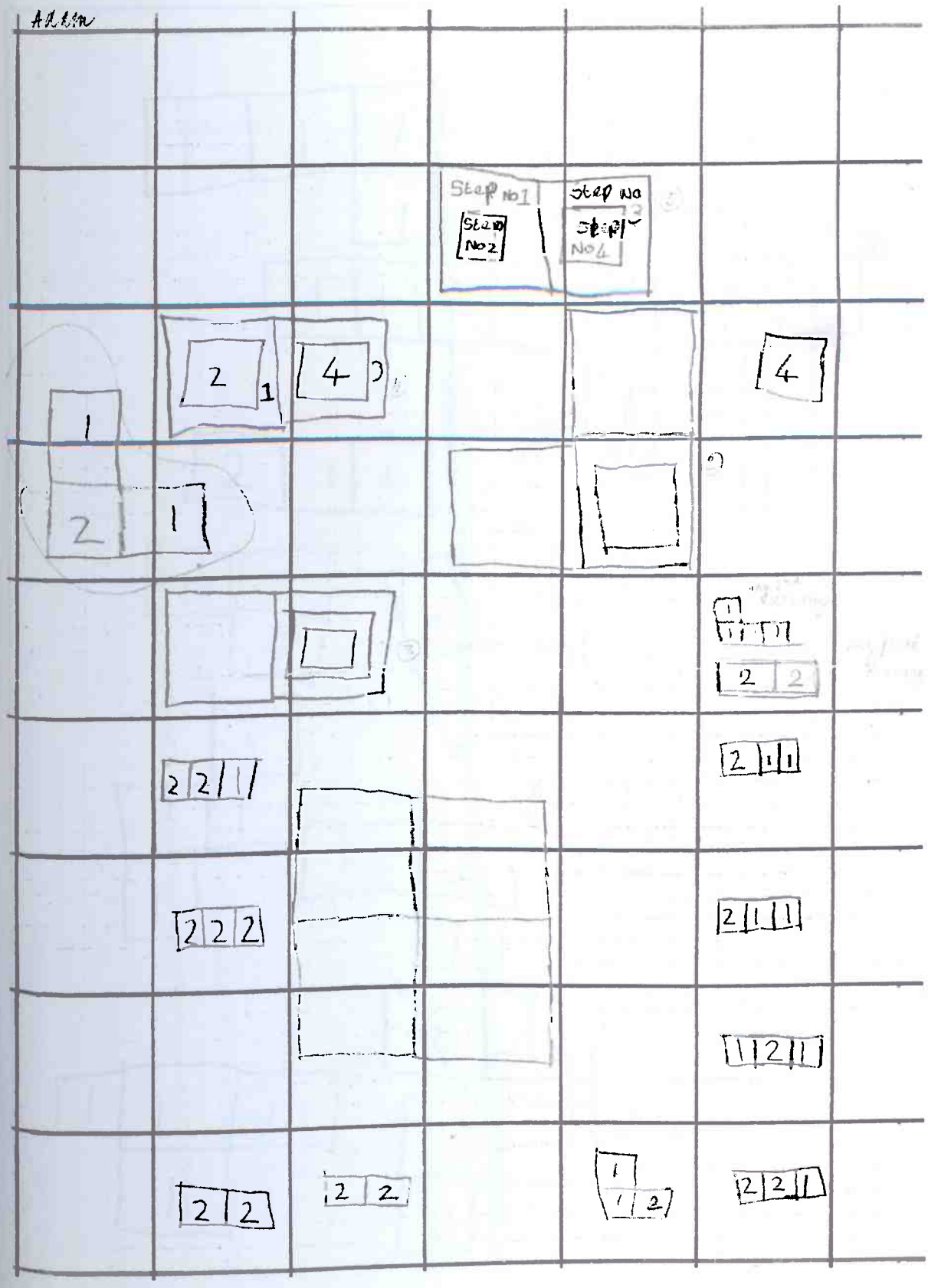


Příloha 10

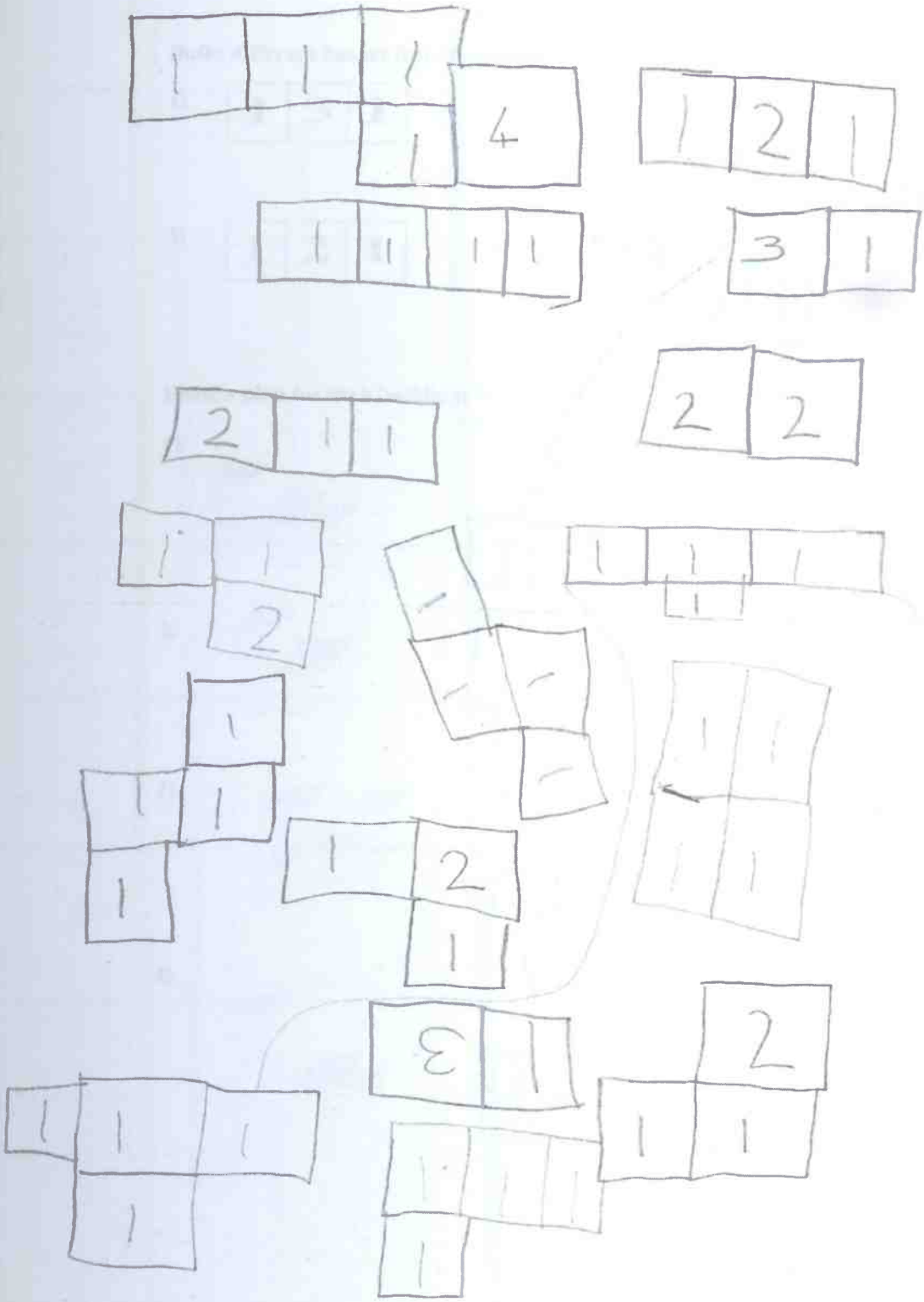




Příloha 11


Step No1
Step No2
Step No4
2
1
4
4
1
2
1
2 2
2 2 1
2 1 1
2 2 2
2 1 1 1
1 1 2 1
2 2
2 2
1
1 2
2 2 1

Příloha 12



Příloha 13

Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

1	2	1

4)

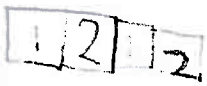
1	2	
	2	3

Draw a plan for each building:

1)

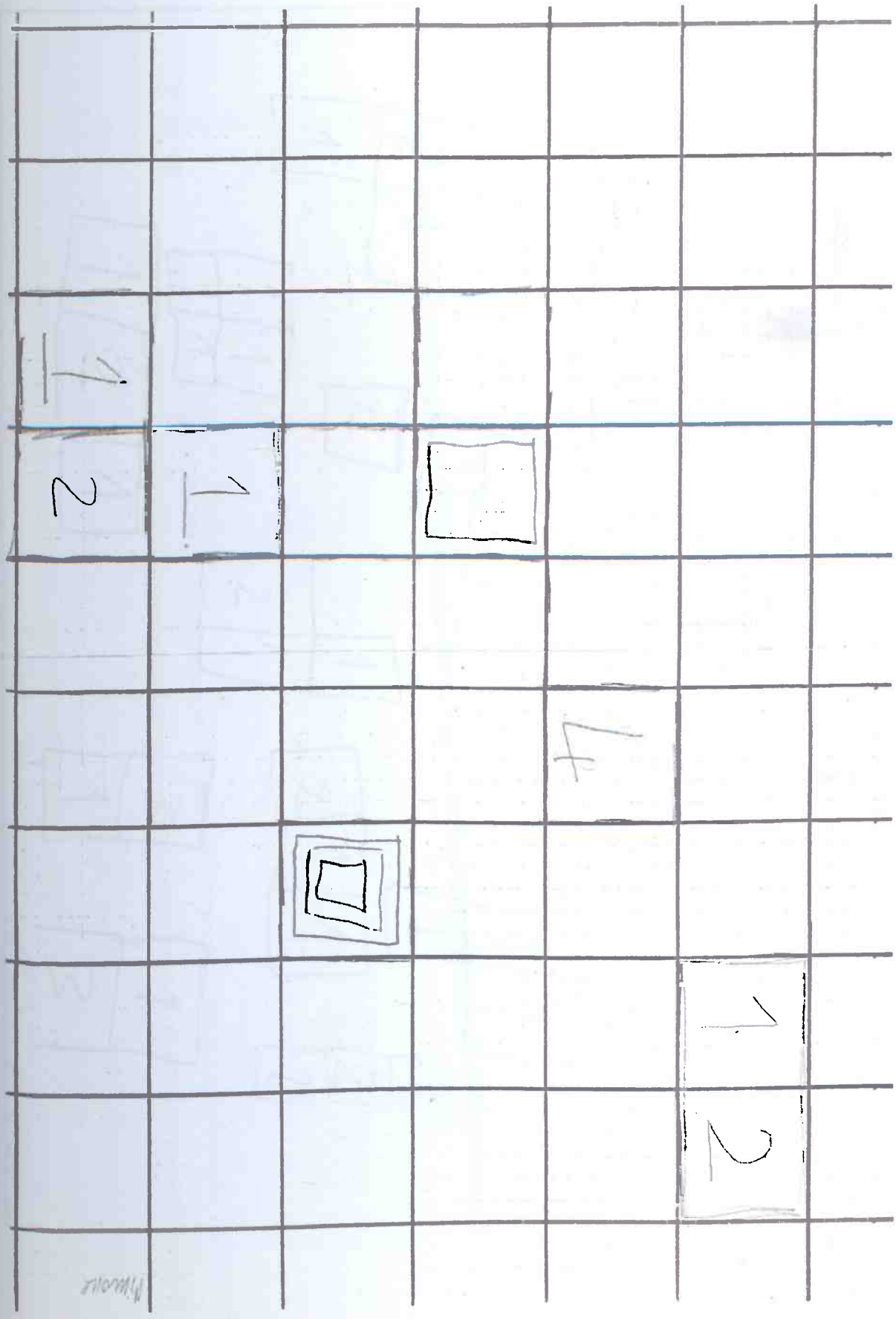
2)

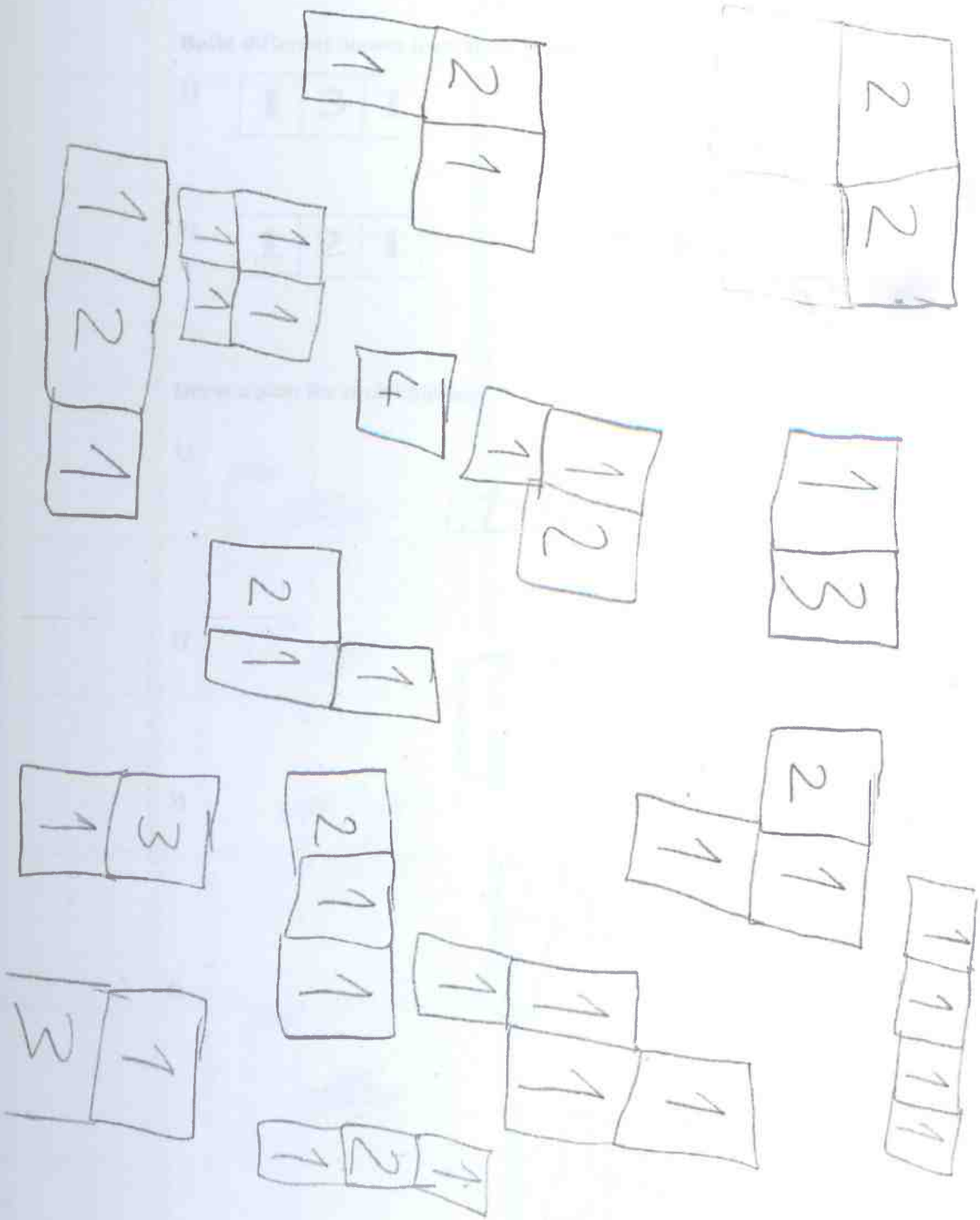
3)



4)

Příloha 14




1
2
1
2
2
1
1
1
1
1
2
1
f
1
2
1
3
2
1
1
1
3
2
1
1
2
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
2
1
W
1

Příloha 16

Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

1	2	1

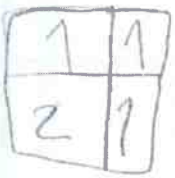
4)

1	2	
	2	3

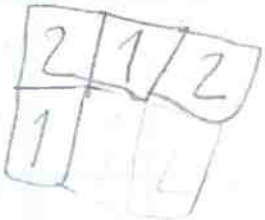
Draw a plan for each building:

1)

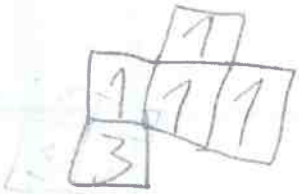
2)



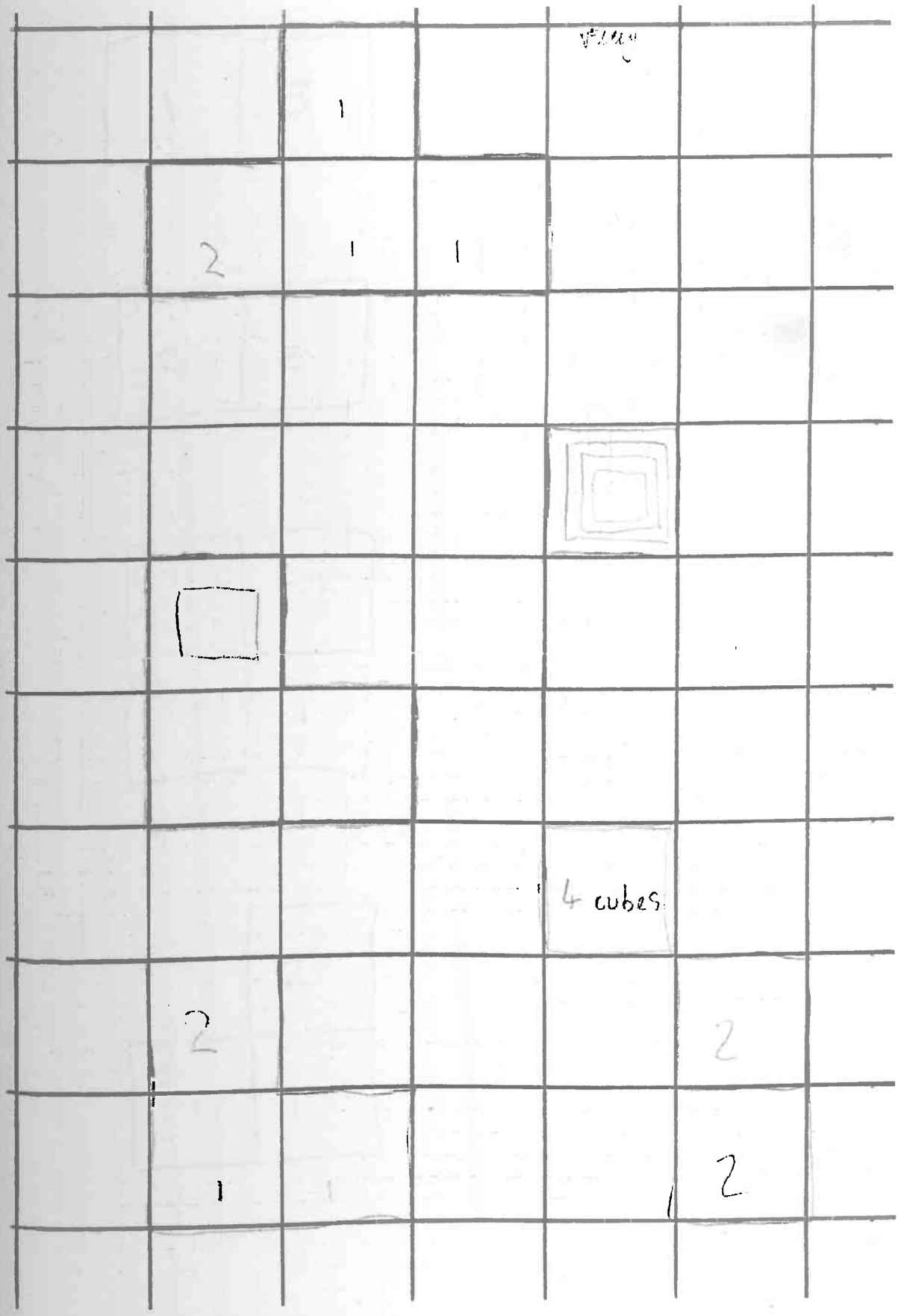
3)



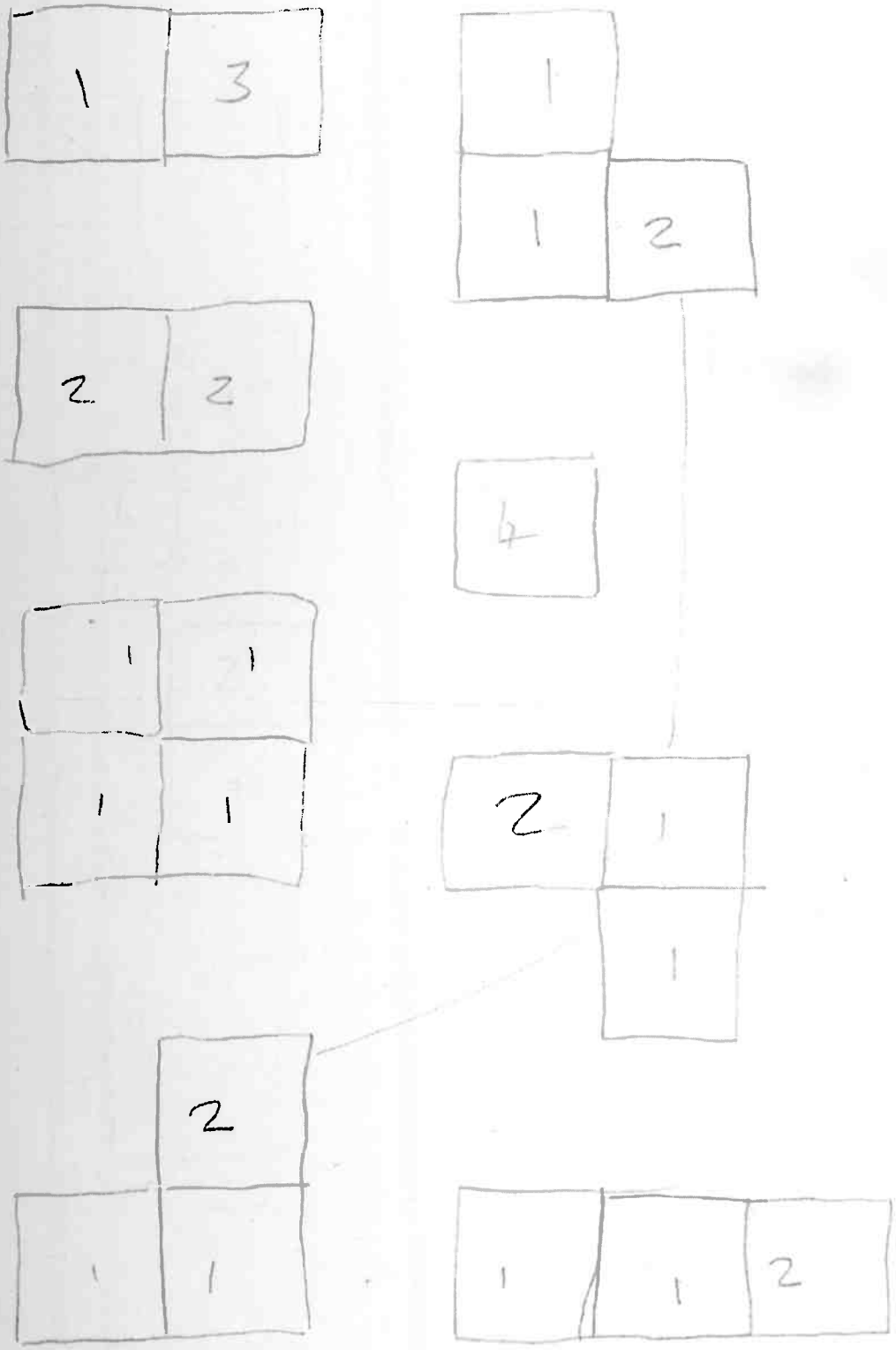
4)



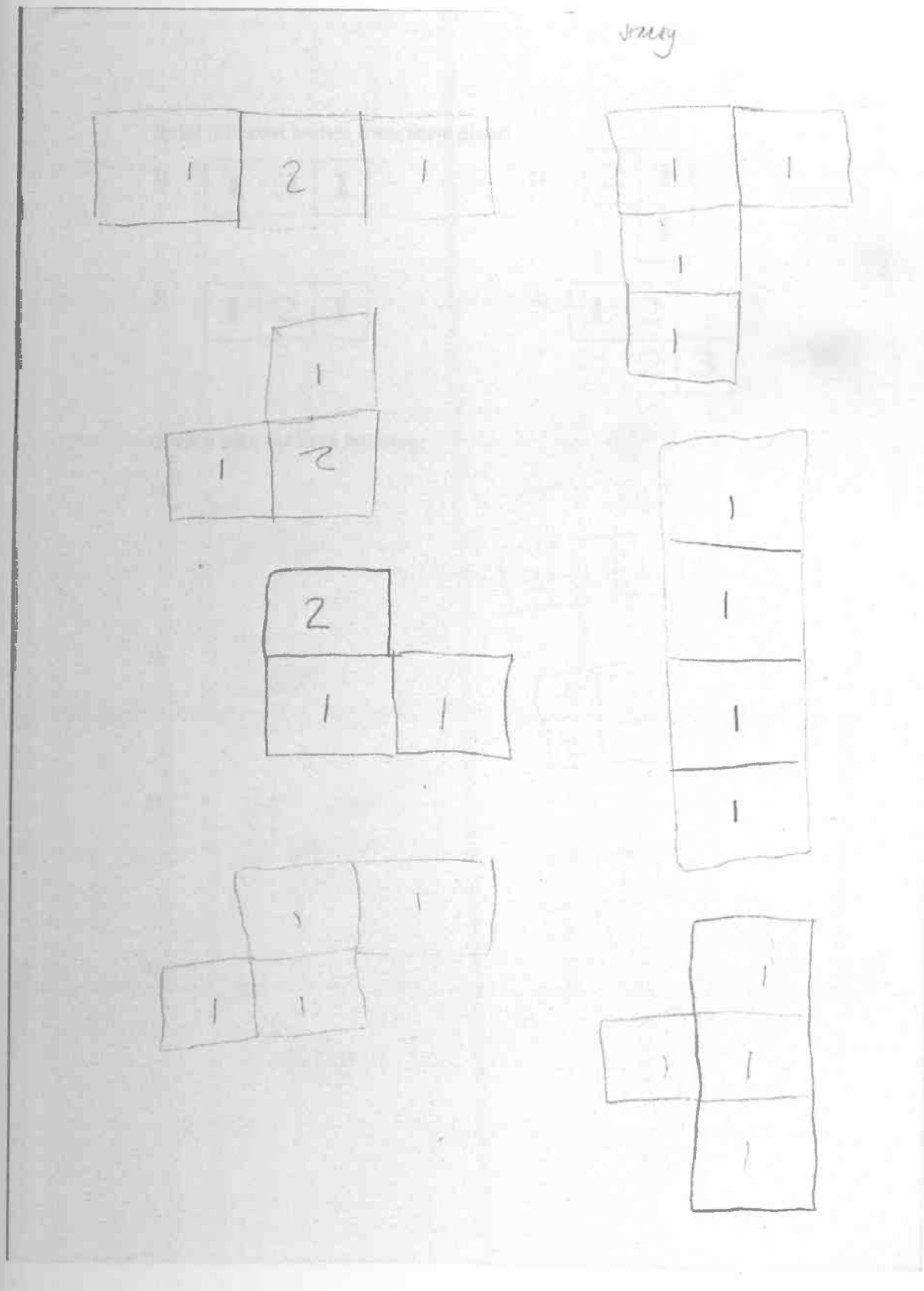
Příloha 17



Příloha 18



Příloha 19



Příloha 20

Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

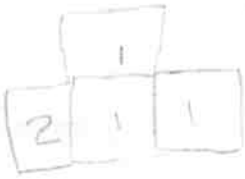
1	2	1

4)

1	2	
	2	3

Draw a plan for each building:

1)

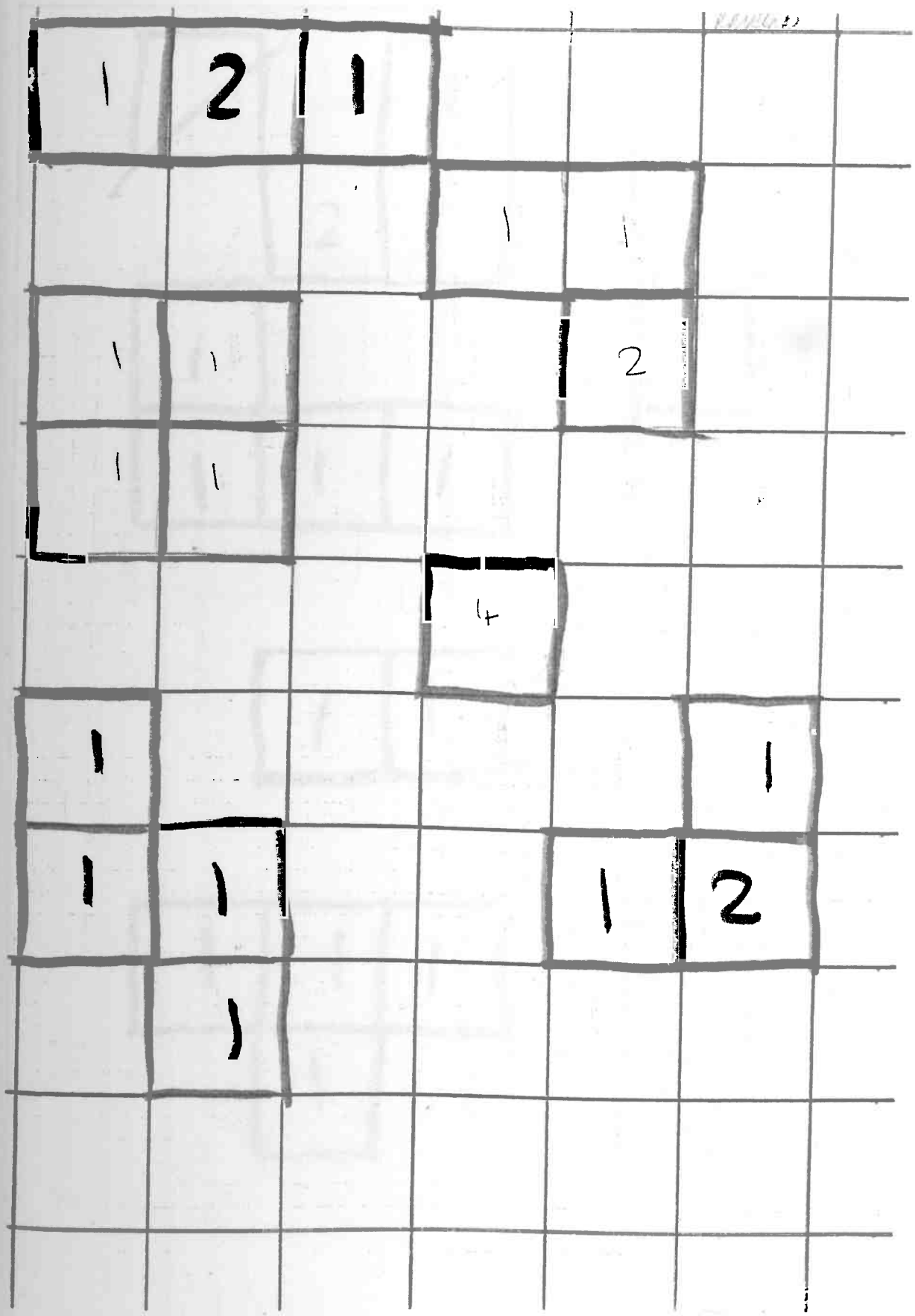


2)

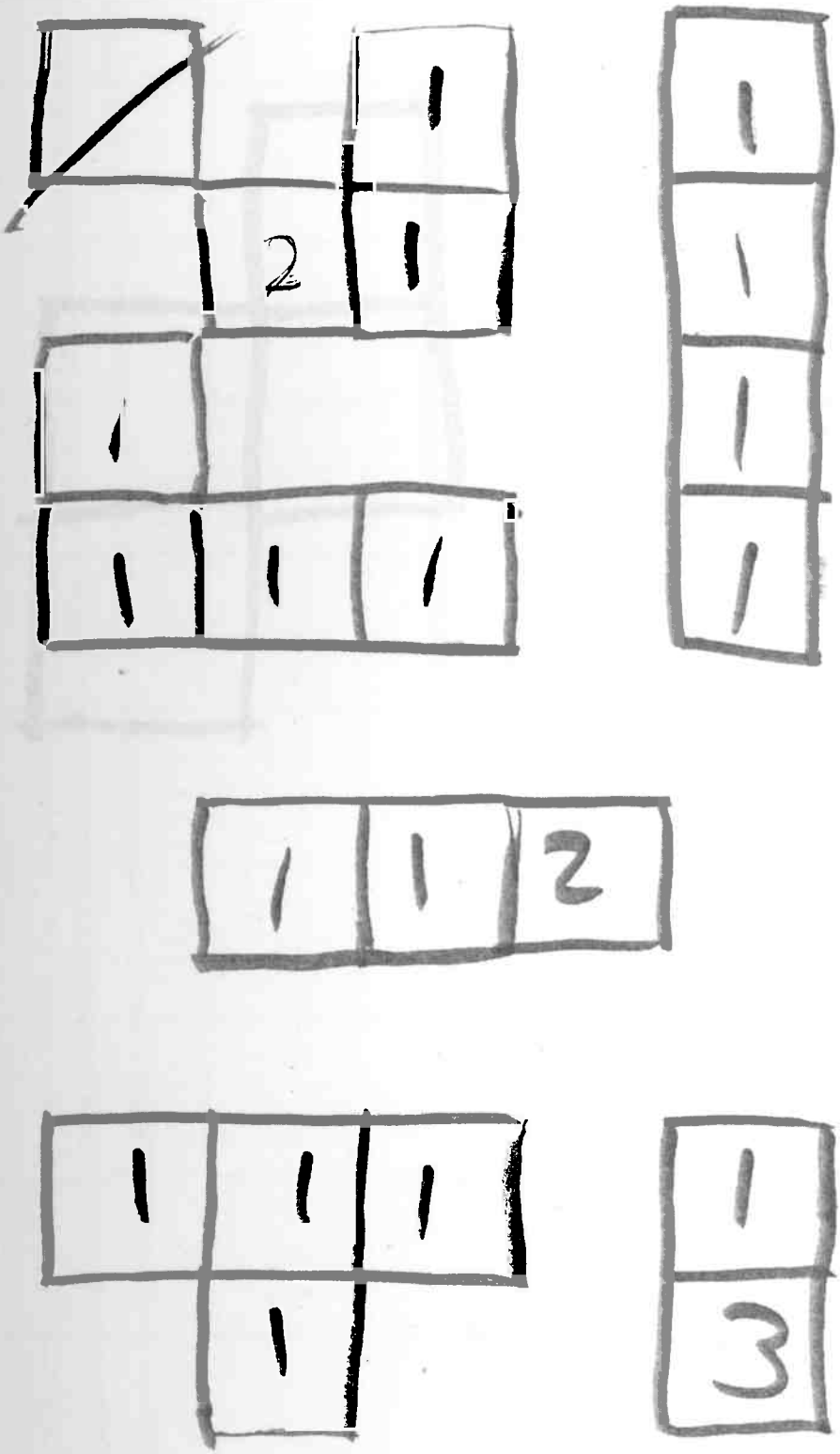
3)

4)

Příloha 21

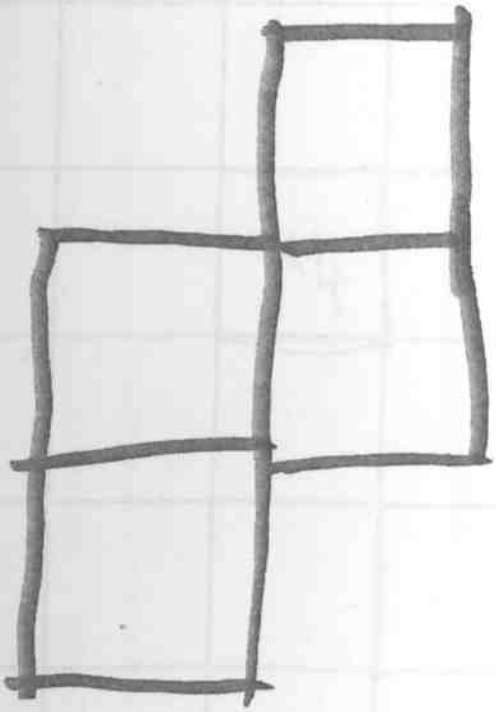


Příloha 22

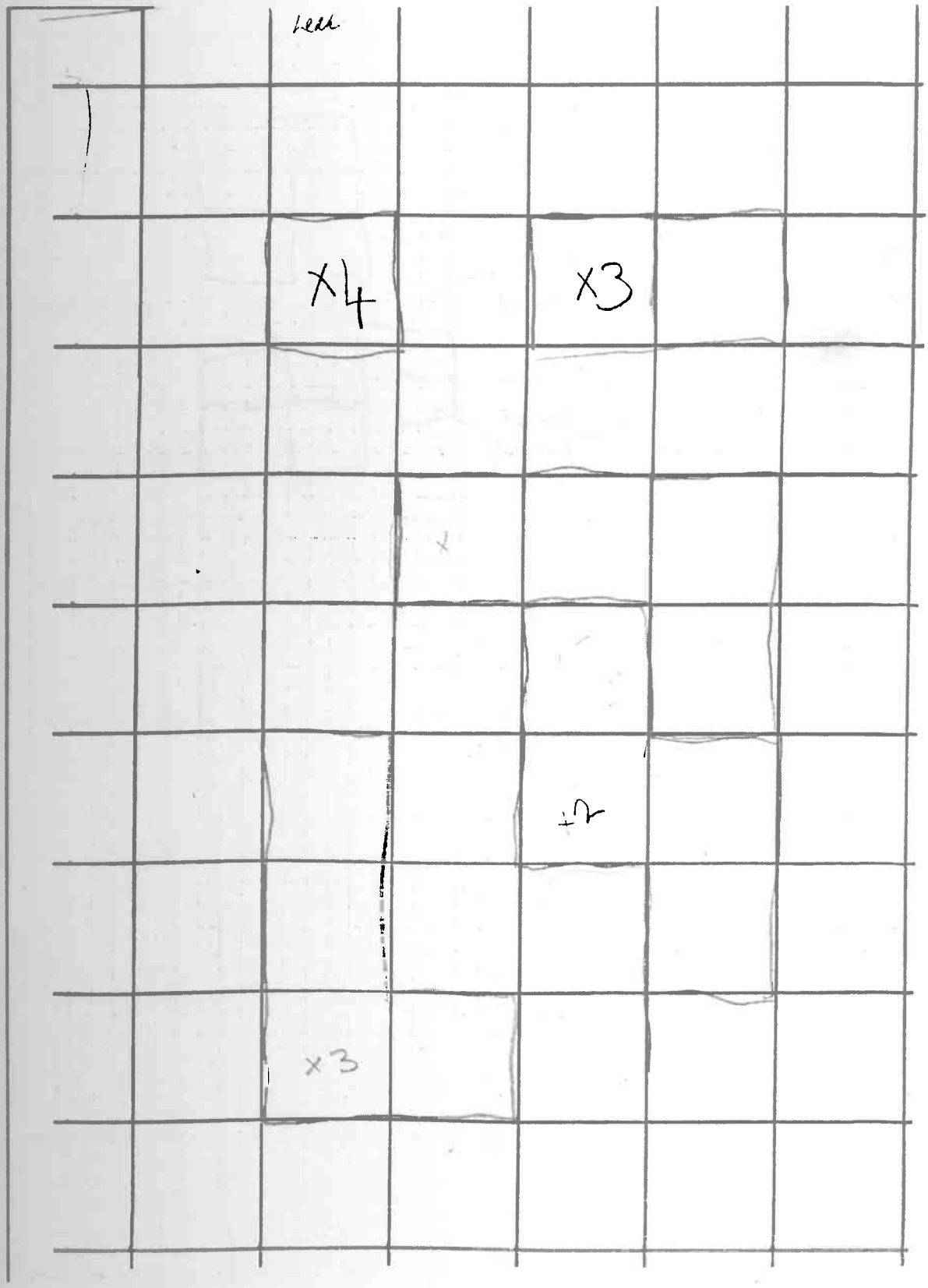


Příloha 23

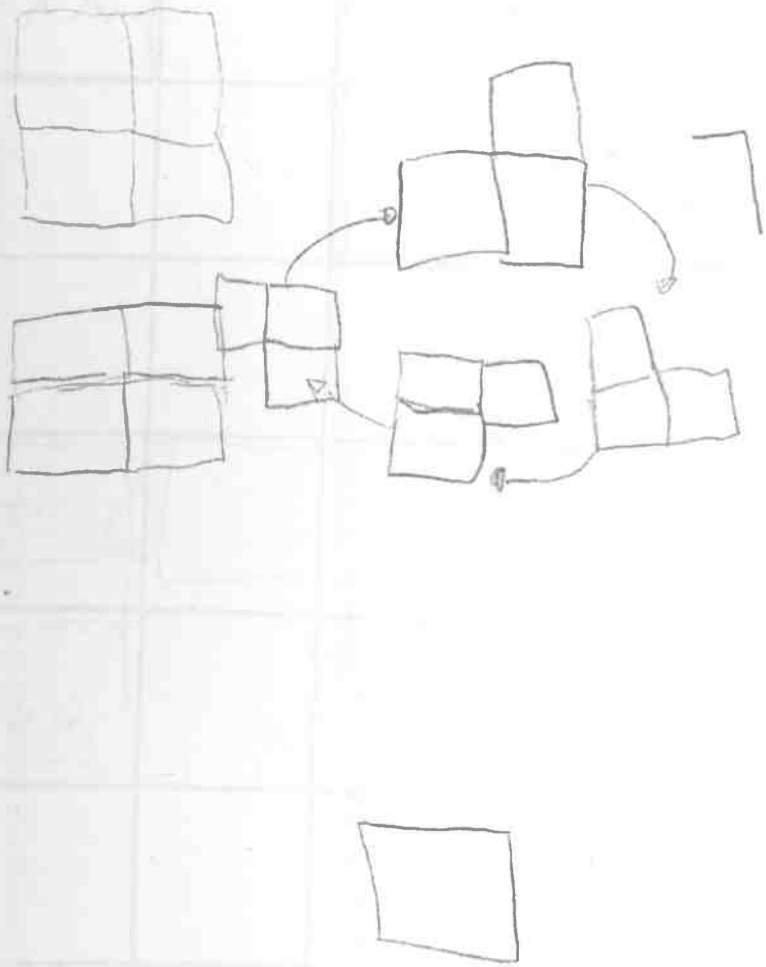
Karla



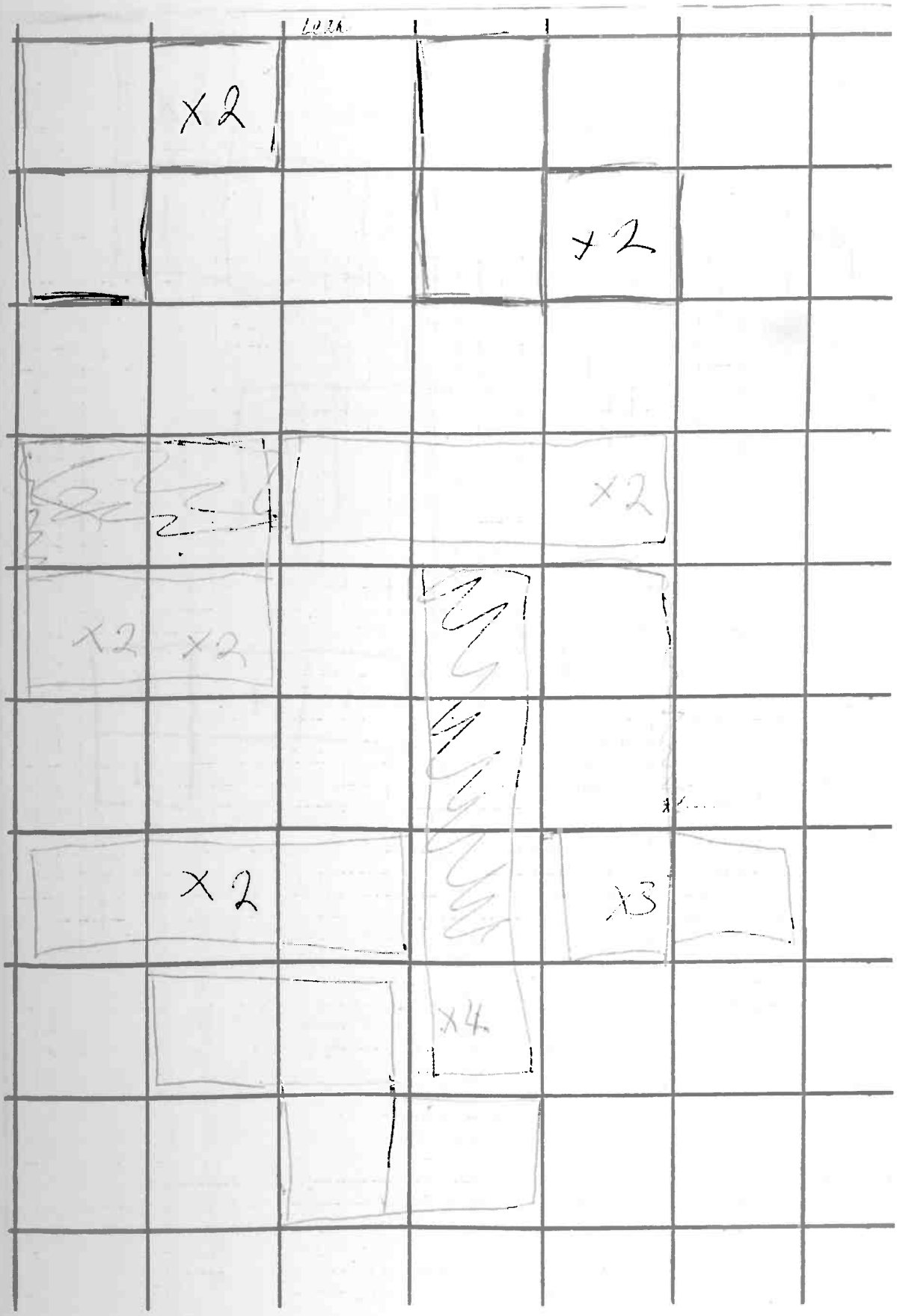
Příloha 24



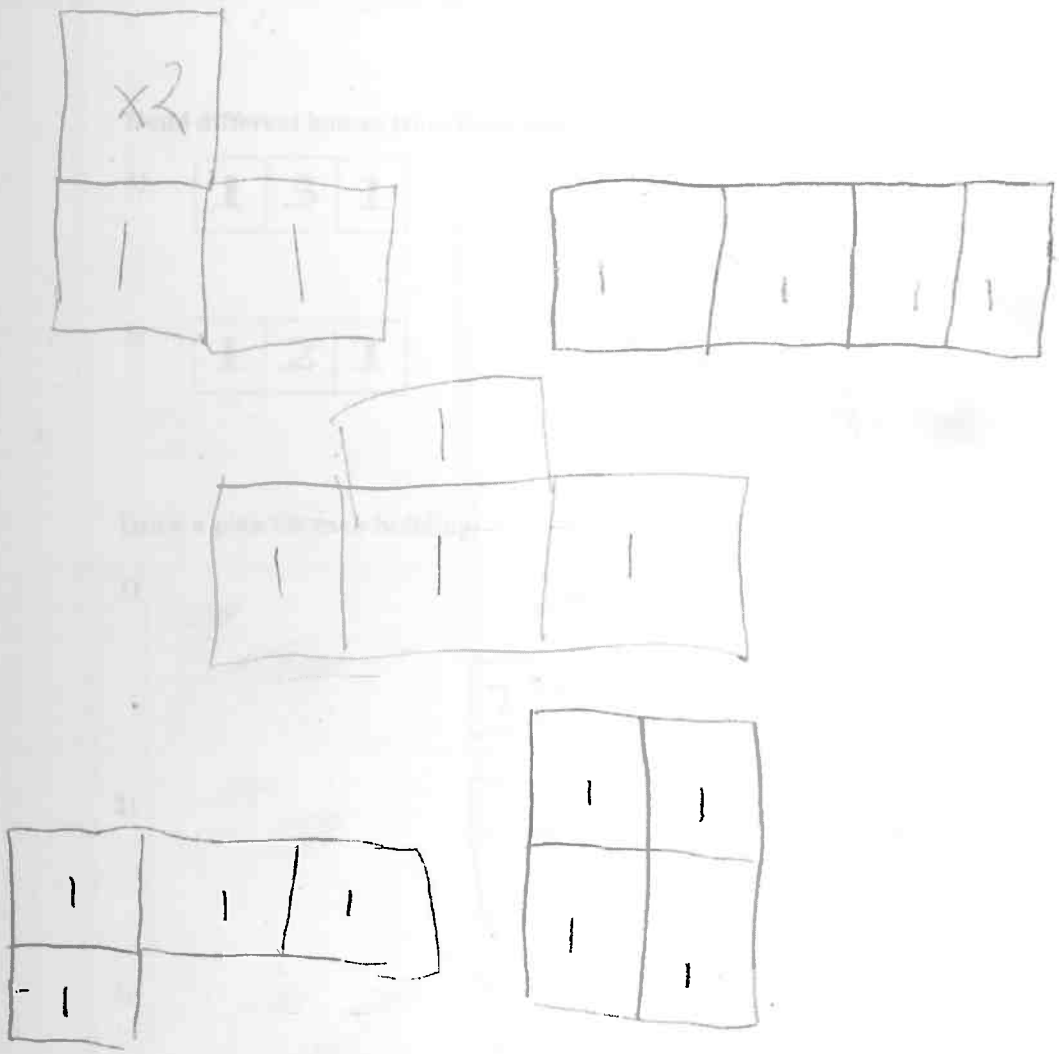
Příloha 25



Příloha 26



Příloha 27



Lee

Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

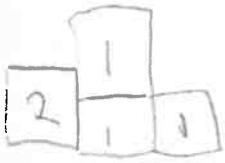
1	2	1

4)

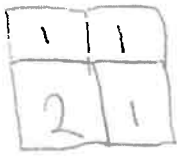
1	2	
	2	3

Draw a plan for each building:

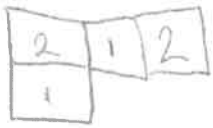
1)



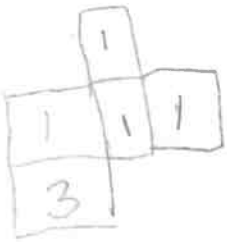
2)



3)



4)



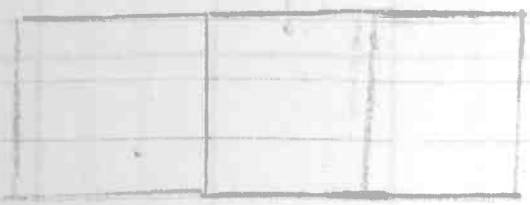
Příloha 29

7/6/05

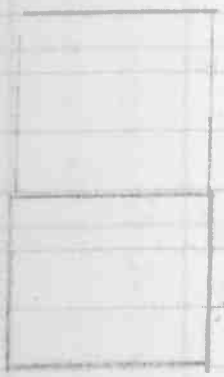
Aaron Lotge

Building plan

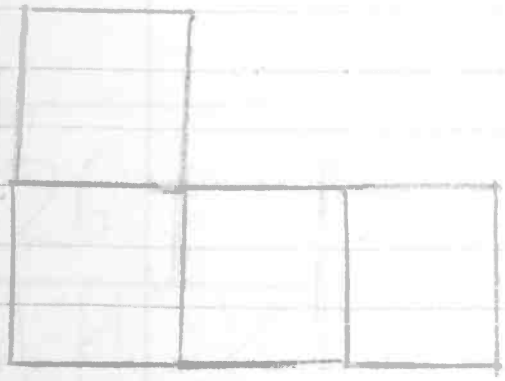
Top



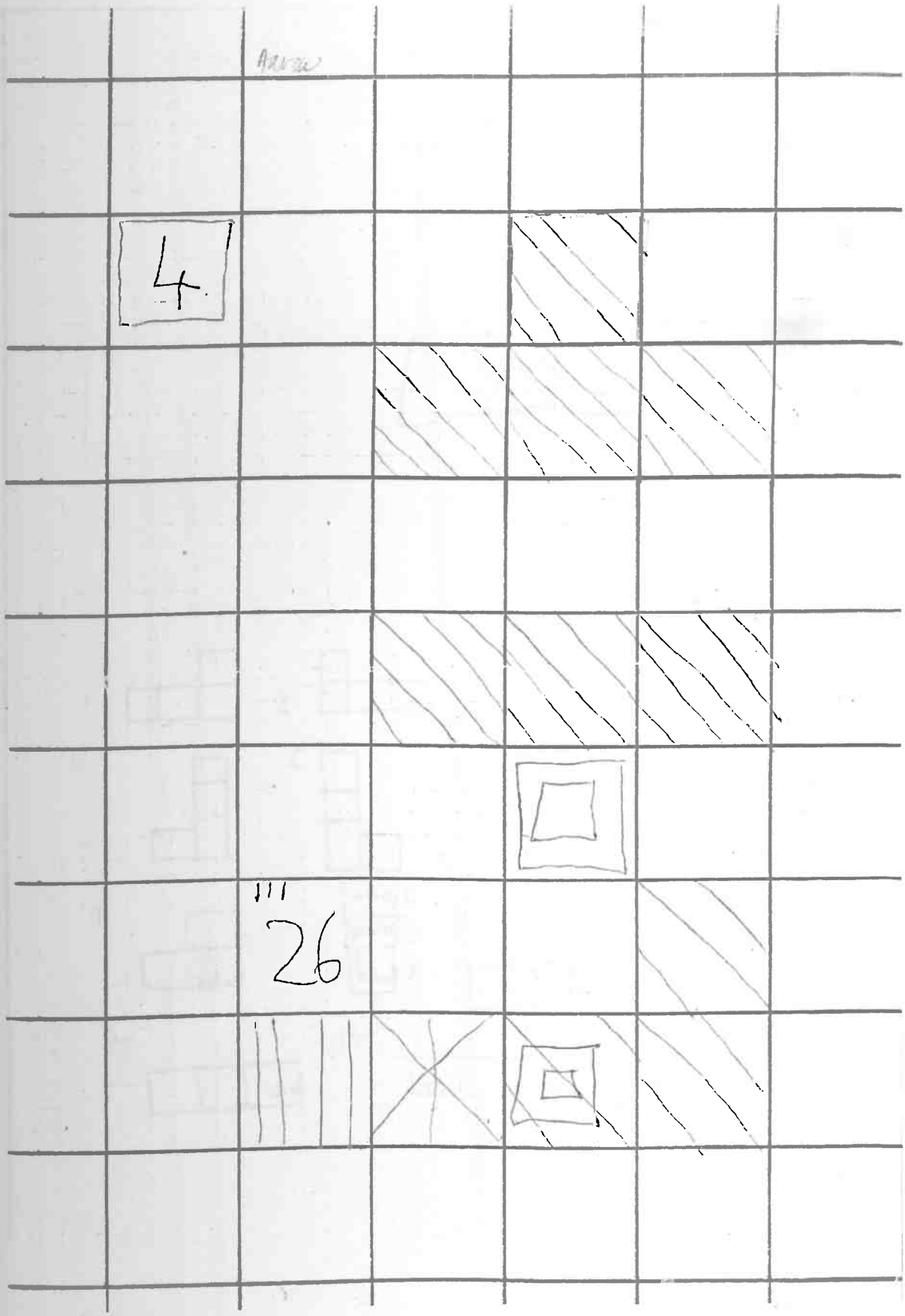
Side



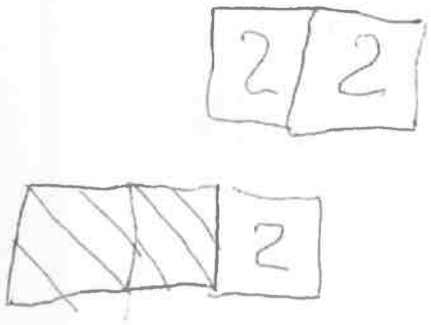
Front

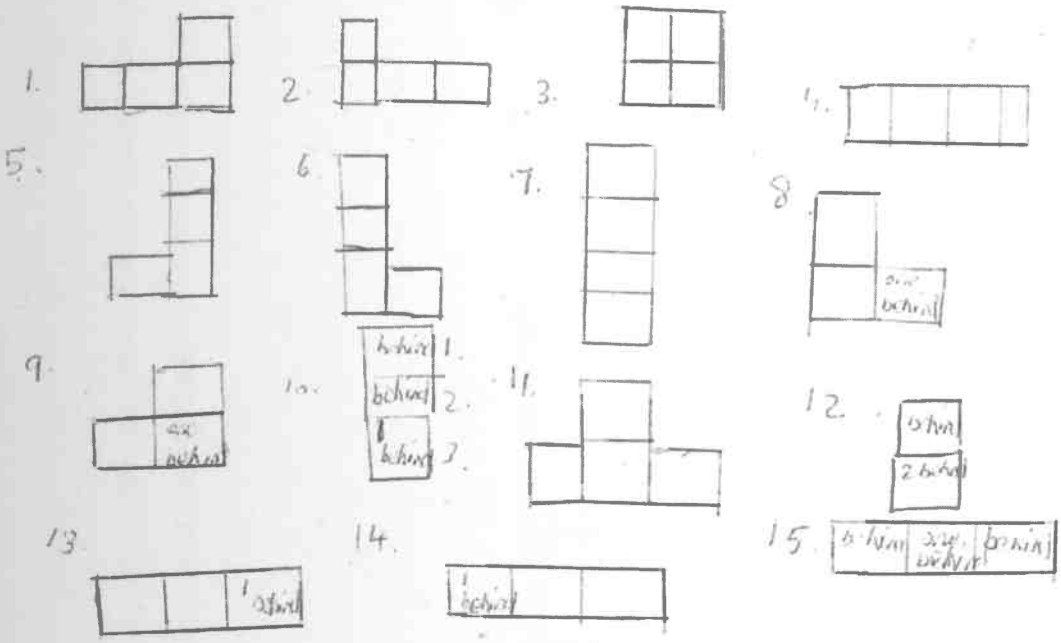


Příloha 30

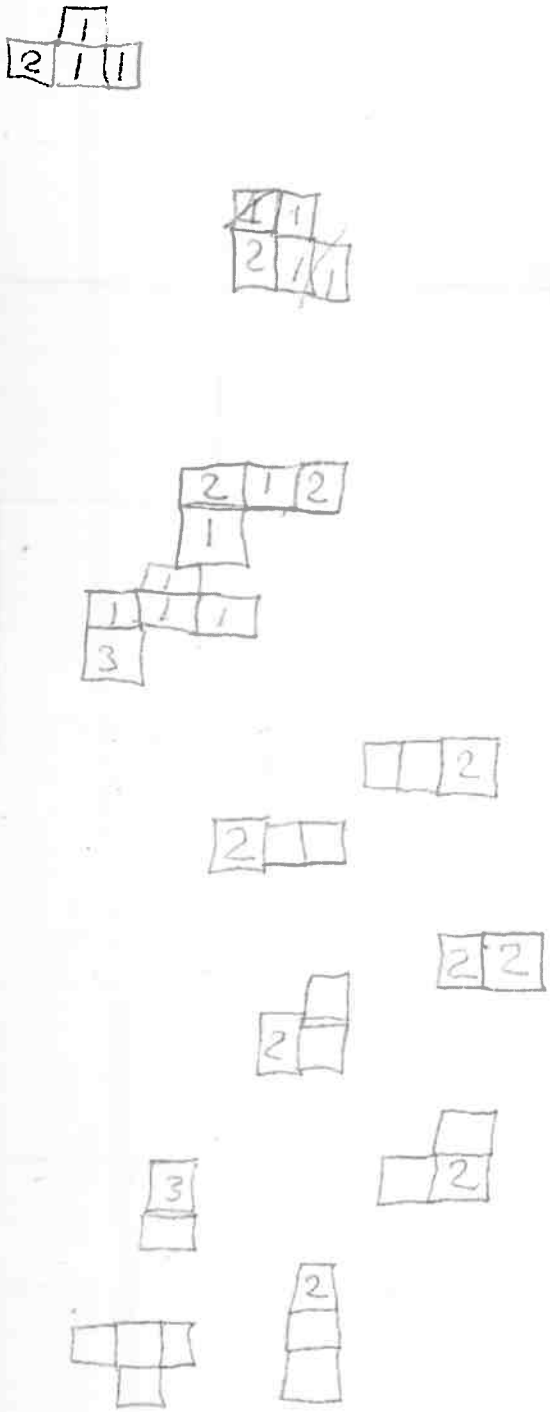


Příloha 31

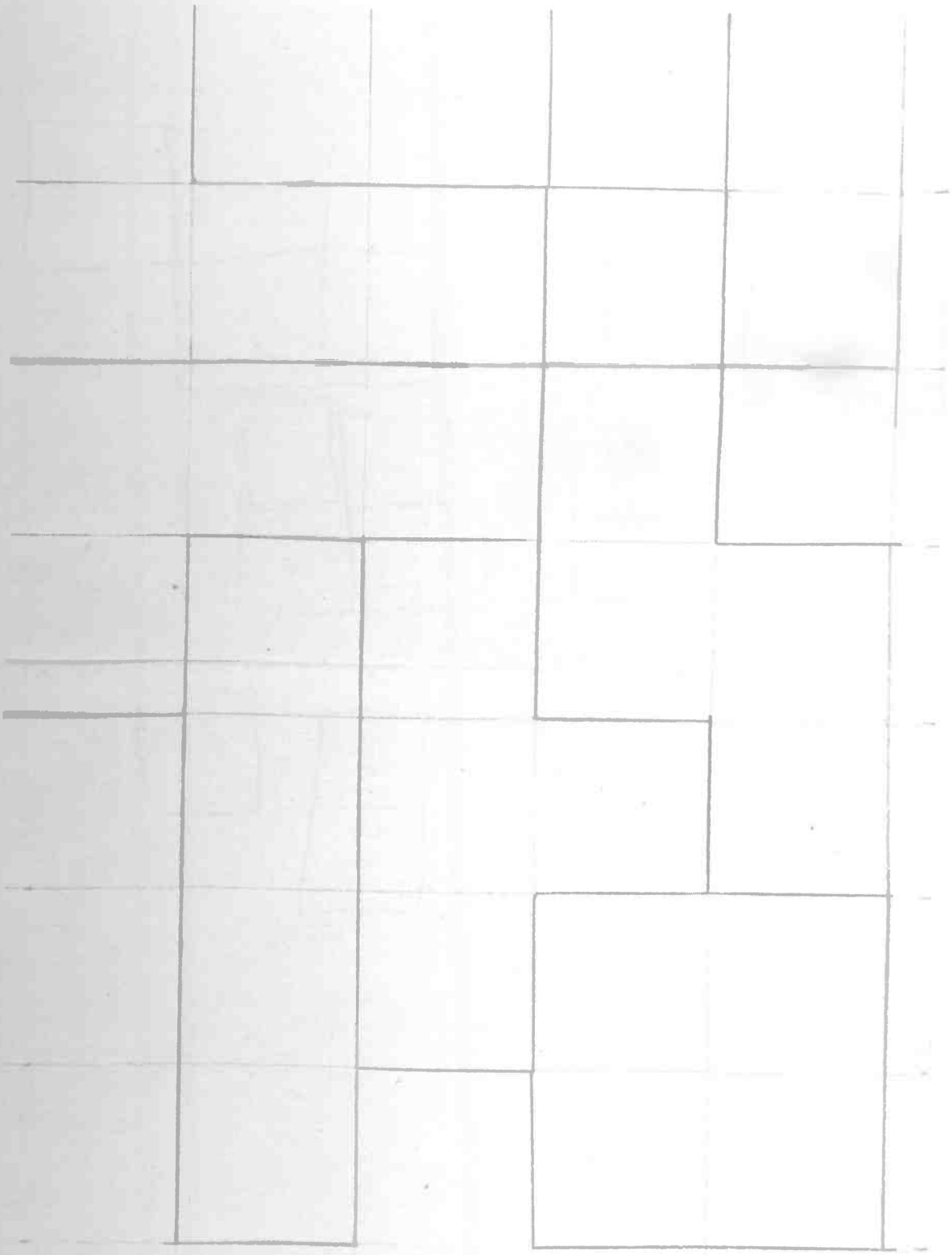




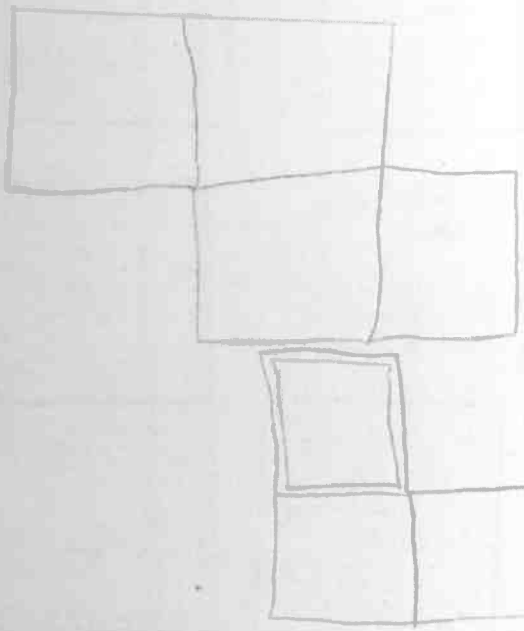
Příloha 32

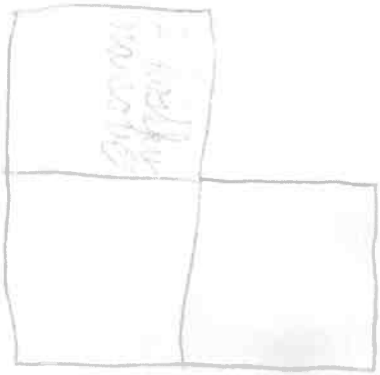


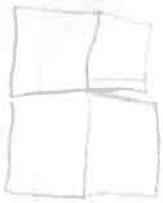
Příloha 33

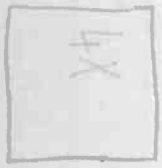


Příloha 34

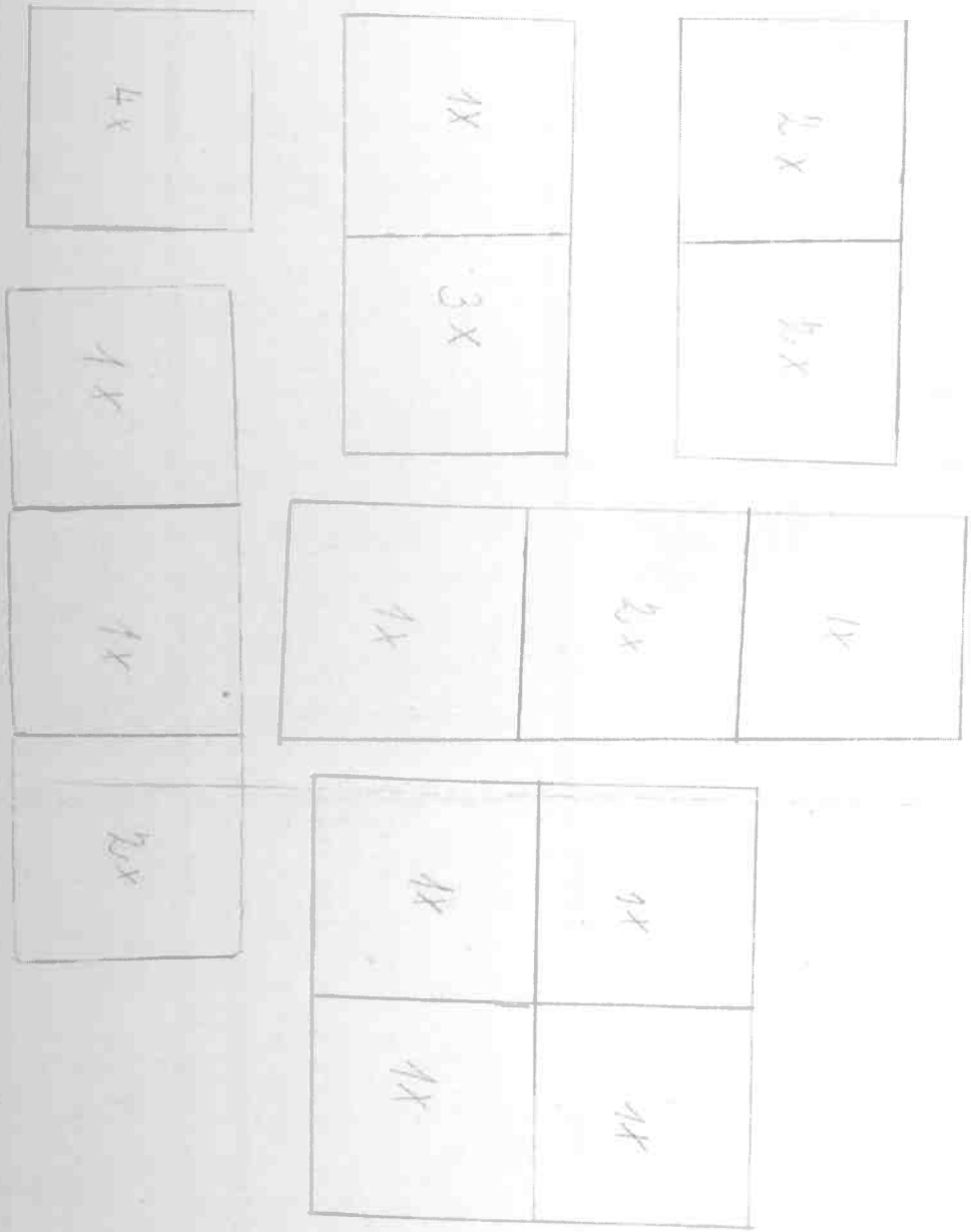








Příloha 35



Příloha 36

I. Build different houses from these plans:

1)

1	3	1

2)

2	1
	1

3)

1	2	1

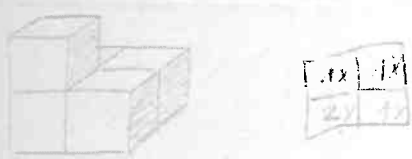
4)

1	2	
	2	3

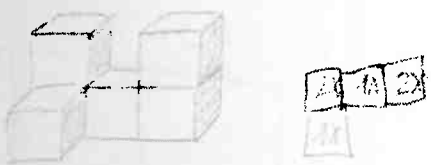
II. Draw a plan for each building:

1)

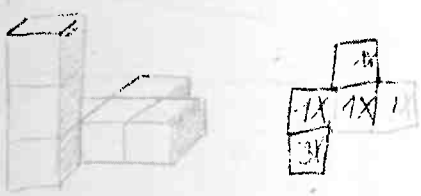
2)



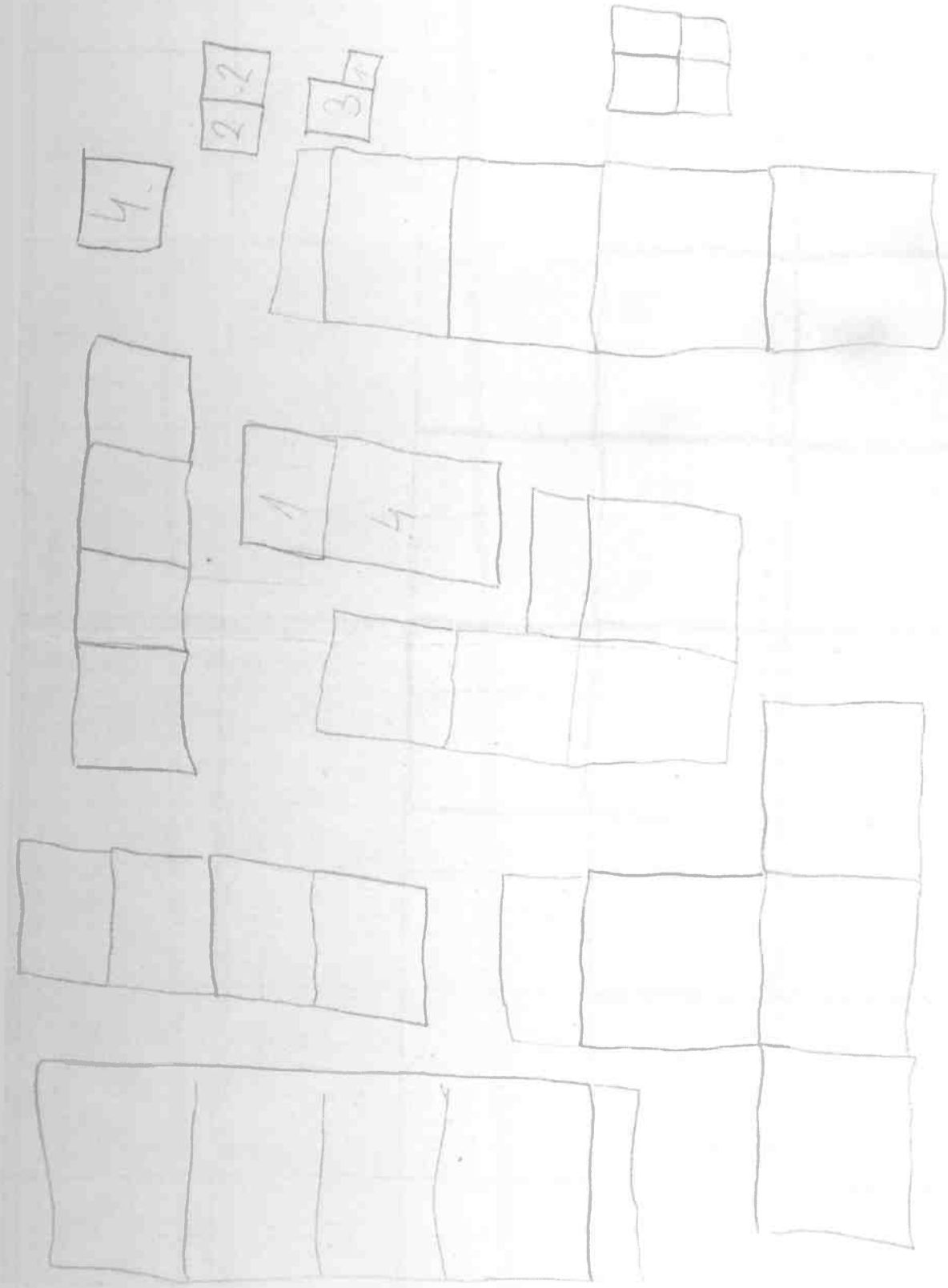
3)

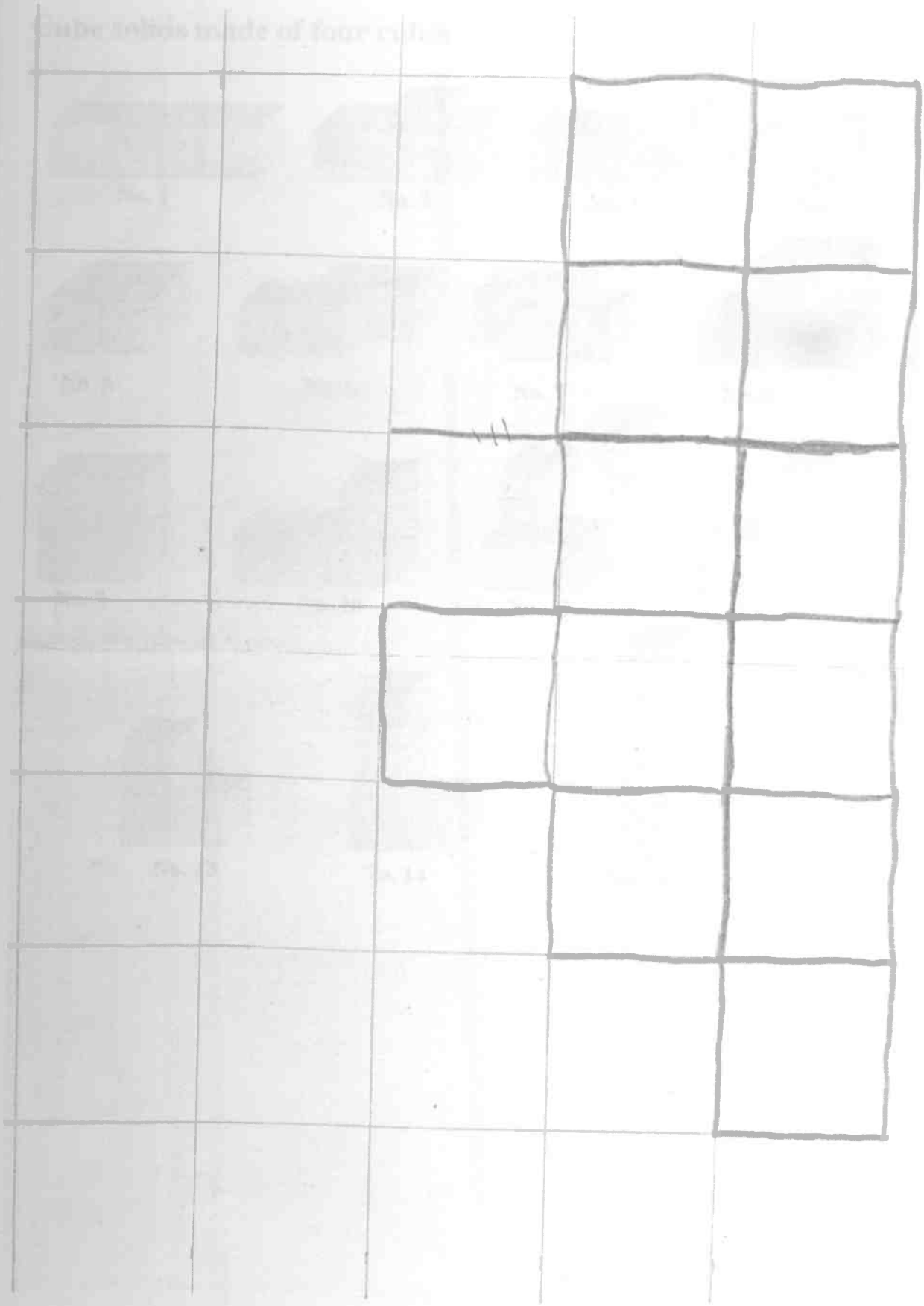


4)

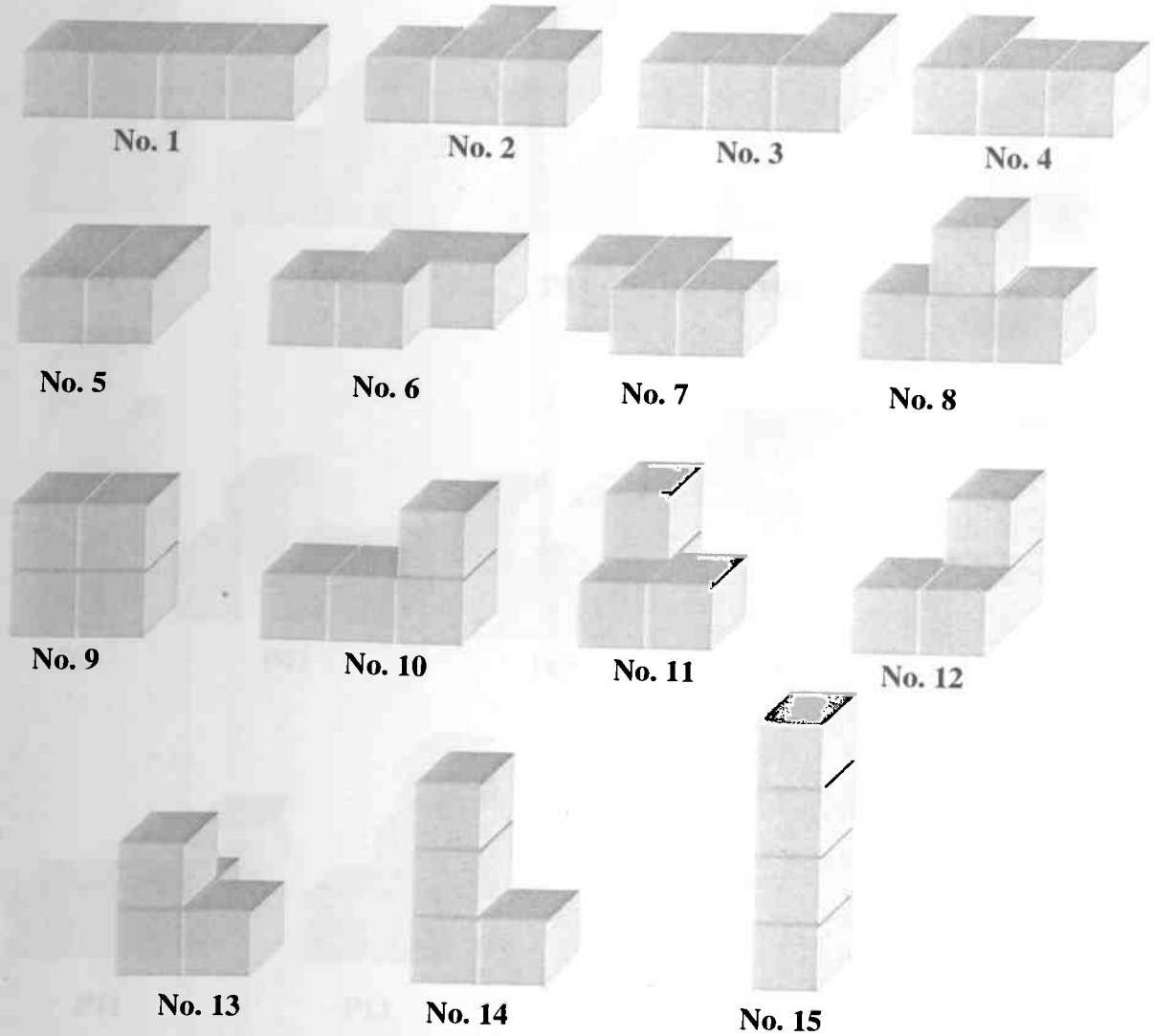


Příloha 38

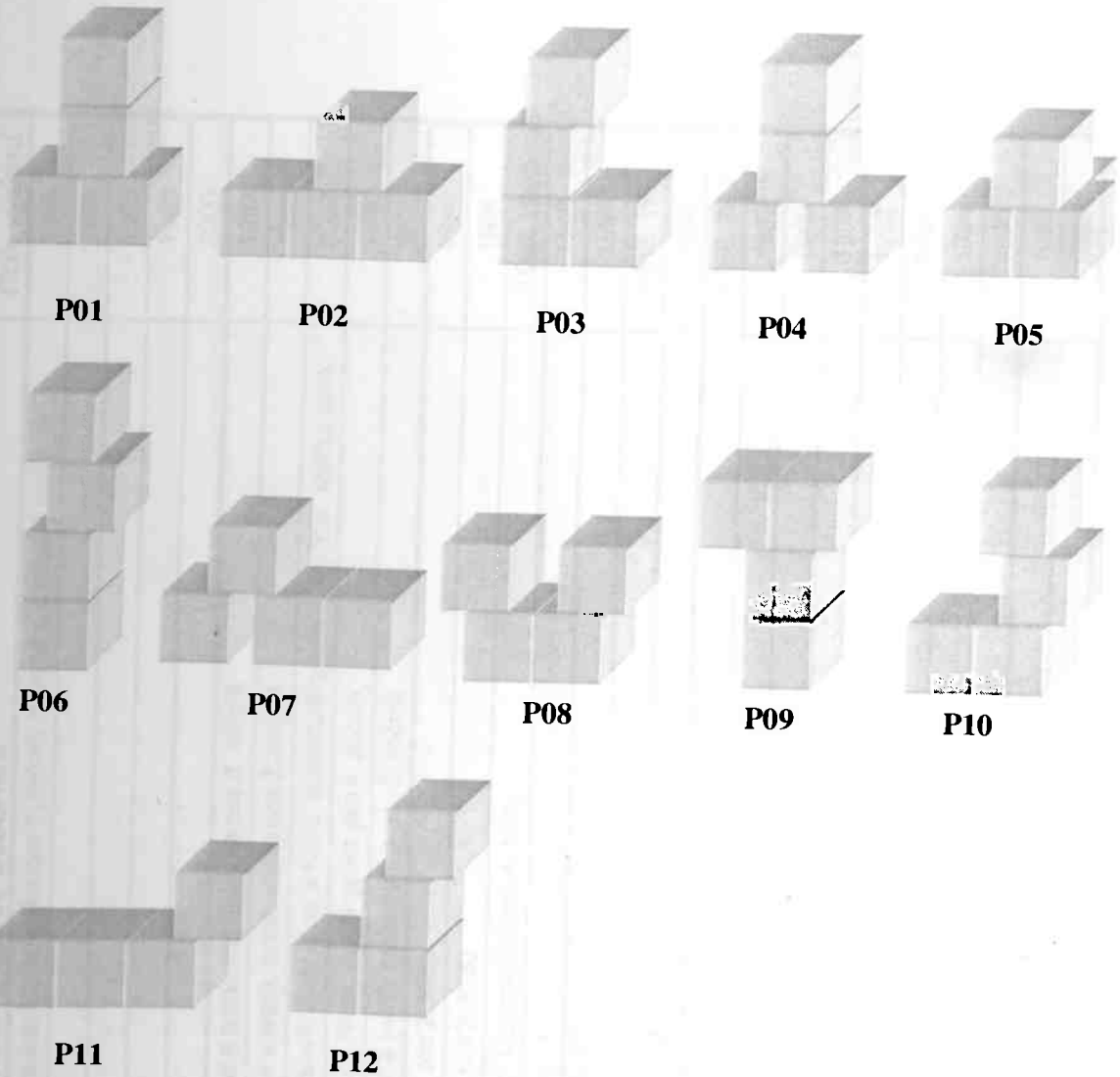




Cube solids made of four cubes



Some types of pirates



Nakladatelství	Autoři, název učebnice	Rok vydání
SCIENTIA	Trch, Zapotilová, Lauermannová, Turecká: Matematika pro 1. ročník obecné a základní školy	1995
	Kárová: Matematika pro 2. ročník ZS	1997
	Kárová: Matematika pro 3. ročník ZS	1998
	Kárová: Matematika pro 4. ročník ZS	1999
	Kárová: Matematika pro 5. ročník ZS	2000
PROMETHEUS	Divíšek, Hošpesová, Kuřina: Svět čísel a tvarů, matematika pro 2. ročník	1997
	Divíšek, Hošpesová, Kuřina: Svět čísel a tvarů, matematika pro 3. ročník	1998
	Divíšek, Hošpesová, Kuřina, Nechvátalová: Svět čísel a tvarů, matematika pro 3. Ročník, sbírka úloh	2002
	Divíšek, Hošpesová, Kuřina: Svět čísel a tvarů, matematika pro 4. ročník	1999
	Divíšek, Hošpesová, Kuřina: Svět čísel a tvarů, matematika pro 5. ročník	2000
FORTUNA	Cihlář, Melichar, Zelenka: Matematika pro 2. třídu	1994
	Cihlář, Melichar, Zelenka: Matematika pro 3. třídu	1994
	Coufalová, Pěchoučková, Hejl, Hervert: Matematika pro 4. třídu	1995, 2000
	Cihlář, Zelenka: Matematika pro 5. třídu	1995
MU AV CR	Kittler, Kuřina: Matematika pro 2. ročník ZS	1994
	Kittler, Kuřina, Tichá: Matematika pro 3. ročník ZS	1992, 1995
	Koman, Kuřina, Tichá: Matematika pro 4. ročník ZS	1993
SPN	Jarošová, Kaslová, Nechanická: Matematika pro 3. ročník ZS	1998, 2000
	Jarošová, Kaslová, Nechanická: Matematika pro 4. ročník ZS	1999
	Kaslová, Čížková, Laksarová, Tanglová: Barevná matematika pro páťáky	2000
	Komárková, Trejbal: Matematika pro 5. ročník ZS	1997
PRODOS	Mikulenková, Molnár: Matematika pro 3. ročník ZS	1993
	Mikulenková, Molnár: Matematika pro 4. ročník ZS, 1. díl	1996
	Mikulenková, Molnár: Matematika pro 4. ročník ZS, 3. díl	1994
	Mikulenková, Molnár: Zajímavá matematika pro 4. ročník	1996
ALTER	Blažková, Vaňurová, Matoušková, Staudková: Matematika pro 3. ročník ZŠ	1995
	Justová: Matematika pro 5. ročník ZS	1996

	1. třída	2. třída	3. třída	3. třída
	SCIENTIA 1995, str. 17	MU AV CR 1994, str. 65, 66	PROMETHEUS 1998, str. 56	SCIENTIA 1998, str. 30
manipulativní činnost	x	pokyny: postav stavbu ze 2, 3, 4 krychlí; postav stavby podle obrázků	postavení staveb podle obrázku a půdorysu	pokyny: postav stavby jako Terezka s Honzíkem, postav stavby z pěti krychlí, postav nejvyšší stavbu, kterou lze postavit z pěti krychlí
propojení s životní zkušeností dítěte	x	stupně vítězů	x	x
modely	x	model supně vítězů	x	x
portrétovost, typ tělesa	různé hranoly, ale stejné půdorysy	různé hranoly - 1 typ těles	různé hranoly; jeden hranol s dírou uprostřed	různé hranoly, různé půdorysy
L - P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled
možnost vlastního portrétování stavby	x	zakreslení průmětů do čtverečkované sítě daného tělesa; zakreslení průmětů stavby podle vlastního výběru	jak se jeví stavby shora, zprava, zepředu; kreslení pohledu na stavbu shora, zprava a zepředu	x
návod na vlastní portrétování	x	x	tečkovaná mřížka pro jednodušší kreslení, názorná ukázka na první stavbě	x
typy úloh	1. Tvorba plánu podle portétu, 2. Porovnávání množství krychlí v jednotlivých sloupcích	1. Pokyny k stavění, 2. Kresba průmětů, 3. Stavba podle obrázků, 4. Určení spotřeby krychlí	1. Nakreslit průměty podle obrázků, půdorysu, 2. Ověření, že se všechny stavby jeví stejně, 3. Postavení stavby podle půdorysu	1. Stavění staveb z krychlí podle obrázků, určení, kolik která stavba obsahuje krychlí, 2. Stavění různých staveb z pěti krychlí
použité pojmy	stopa stavby z krychlí, plán stavby	stavba, jednopodlažní dům, pohledy zepředu, shora, zprava	stavby, půdorys	stavby
plány staveb	jednoduché plány	x	půdorys, jednoduchý plán	x
průměty těles	pouze půdorys	zepředu, shora, zprava	znázorněn pouze půdorys, ale i požadavky na ostatní průměty	x
porovnávání těles	x	porovnávání vzhledem ke spotřebě krychlí	porovnat, že se určité stavby jeví stejně	x
vlastnosti těles	3 z 6 jsou souměrné podle 2 rovin	5 těles souměrných podle 2 rovin, 1 těleso souměrné podle 1 roviny, 3 tělesa nesouměrná	většina je souměrná alespoň podle 1 roviny	většina staveb nesouměrná

	3. třída	3. třída	3. třída	3. třída
	FORTUNA 1994, str. 77-79	**PRODOS 1993, str. 48**	**MU AV CR 1992**	**MÚ AV ČR 1995, str.107+108**
manipulativní činnost	x	pokyny: vytvoř stavby podle půdorysů	pokyny: postav stavby podle obrázků, stavte společně krychle, některá tělesa vymodeluj z krychlí	pokyny: postav několik staveb ze šesti krychlí
propojení s životní zkušeností dítěte	x	stíny různých těles - stíny staveb z krychlí (půdorysy)	kolik kostek cukru je v krabici, které věci tvaru kvádru znáte	x
modelv	x	vlastní stavění	x	x
portrétovost, typ tělesa	různé hranoly - ve většině případů čtyřúhelníkové půdorysy	různé hranoly s čtvercovým půdorysem	různé hranoly, různé půdorysy	různé hranoly, různé půdorysy
L - P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled
možnost vlastního portrétování stavby	zakreslení průmětů do připojené čtverečkované sítě (vybarvování také podle barvy jednotlivých krychlí); zakreslování kostek, kolik je v jednotlivých vrstvách i podle barev	x	nakresli pohledy na stavby zepředu a zprava	nakresli tři pohledy na zobrazení tělesa
návod na vlastní portrétování	podrobný pomocný návod, jak průměry vnímat a zakreslovat	x	x	barevně rozlišené průměty
typy úloh	1. Určení počtu krychlí v kvádrových stavbách, 2. Kresba (barevně) pohledů zleva, zprava, zepředu, 3. Určení počtu kostek ve sloupcích a vrstvách	1. Vytvoření stavby podle půdorysu, 2. Vypočtení spotřeby krychlí na dané stavby	1. Postav stavby, 2. nakresli pohledy zepředu a zprava, 3. Z kolik akrychlí je složen daný kvádr	1. Určení, z kolika krychlí jsou stavby, 2. Stavění staveb, 3. Nakreslení pohledů, 4. Určení tělesa podle jeho dvou pohledů (shora, zepředu)
použité pojmy	stavby z krychlí, vrstva krychlí. Stavba z krychlí - z kolika kostek je postavena?	stavba z krychlí, půdorys	kótovaný půdorys, stavby, těleso	stavby, pohledy - zprava, zepředu, shora (kótovaný), těleso
plány staveb	pouze 1 plán - půdorys	jednoduché plány - čtvercová podstava	jednoduché plány, různé půdorysy	x
průměty těles	zepředu, zleva, zprava	x	pouze půdorys	zprava, zepředu, shora (kótovaný)
porovnávání těles	x	x	x	x
vlastnosti těles	většina těles nesouměrná, 2 tělesa souměrná podle 2 rovin, 1 těleso souměrné podle 1 roviny	tělesa souměrná až podle 4 rovin	většina těles jsou kvádry složené z krychlí	většina těles souměrná podle více rovin

	4. třída	4. třída	4. třída	4. třída
	MÚ AV ČR, 1993, str.15	FORTUNA 1995, str. 16+17	FORTUNA 2000, str. 30-31	PRODOS 1996, str. 37+45
manipulativní činnost	ano, postavit tělesa podle obrázku; vymodelovat podle pohledů	ano, stavění podle obrázku	ano, podle obrázku, podle pohledů	ano, stavění staveb podle map
propojení s životní zkušeností dítěte	x	ano, nákres, jak dělají plány architekti	x	x
modely	krabičky od zápalek, ale jsou to kvádry	model domu na plánu a pohledy	x	pouze model hrací kostky
portrétovost, typ tělesa	různé hranoly	různé hranoly	různé hranoly, z více krychlí	různé hranoly, často s čtvercovým půdorysem
L - P nadhled	Pnadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled
možnost vlastního portrétování stavby	ano, zakreslení pohledů shora, zepředu, zprava	ano, pohledy a jak se mění	ano, pohledy	ano, zápis počtu kryclí do mapy
návod na vlastní portrétování	x	ano - vybarvováním políček v jednotlivých pohledech	x	x
typy úloh	1. Modelace - kresba pohledů, 2. Modelace podle pohledů, 3. Stavba KT, která vypadají ze tří pohledů stejně	1. Postavit podle obrázků, 2. Nakreslit pohledy, 3. Úlohy na zamyšlení	1. Postavit podle obrázků, 2. Postavit za určitých podmínek (daná spotřeba krychlí a pohledy), 3. Postavit podle pohledu shora a půdorysu,4. Postavit podle pohledů, 5. Přiřadit ke stavbám správný pohled, 6. Určit typ pohledu, 7. Nakreslit pohledy	1. Postavit stavby podle map, 2. Zápis čísla do map podle staveb, 3. Vypočítání spotřeby krychlí, 4. Postavení různých staveb ze 2,3,4 a 5krychlí
použité pojmy	pohled, těleso, krychle, stavba	pohled, stavba, krychle, značená spotřeba krychlí	stavba, pohledy	mapa, půdorys
plány staveb	pouze průměty (při vysvětlování pohledů uveden jednoduchý plán, ale nadále se s ním nepracuje)	průměty, jednoduchý plán	ano, uváděné jako pohledy shora s uvedenou spotřebou krychlí	ano, mapy
průměty těles	zprava, shora zepředu	zprava, zpředu, shora	zprava, zpředu, shora	pouze půdorys
porovnávání těles	x	x	ano, přiřazováním pohledů ke stavbám	x
vlastnosti těles	většinou tělesa souměrná podle 1 roviny	nesouměrná tělesa, budovy z krychlí	x	x

4. třída	4. třída	4. třída	4. třída	4. třída
PROMETHEUS 1999, str. 65	**PROMETHEUS 1999, str. 39, PS**	**SCIENTIA 1999, str. 21, 27 PS**	**SPN 1999, str. 93, 94, 95**	**SPN 1999, str. 70, PS**
ano	postav stavby	postav stavby jako na obrázku, postav stavby podle pohledu s čísly	ano, různé úlohy	ano
skupina KT jako skupina domů na sídlišti	x	x	x	souměrnost staveb
model sídliště	x	x	x	x
na obrázcích není příliš hranolů	hranoly	různé hranoly	různé hranoly	hranoly, většinou však nejsou KT
P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled	x
ano	ano, pohledy	ano, zakreslení pohledů	ano, různé úlohy	x
ano, rozbor zakreslení pohledů	x	ano, rozbor zobrazených pohledů	ano, různé úlohy	x
1. Postavte tělesa podle plánků staveb, 2. Nakreslete pohledy na sídliště zepředu a zprava	1. Jak bude pokračovat stavba, 2. Postav a zakresli tři pohledy	1. Urči spotřebu krychlí, 2. Určení, o který pohled se jedná, 3. Zakreslení pohledů do čtvercové sítě, 4. Stavba podle plánku s čísly	1. Postav z 10 krychlí stavbu tak, aby zepředu vypadala takto.. Jak bude vypadat seshora?, 2. Postav stavbu ze 6 krychlí, vyznač pohledy shora, zepředu, zprava, 3. Výměna pohledů ve dvojici, porovnání, 4. Urči, která z daných staveb patří ke všem třem obrázkům, 5. postav podle půdorysu	1. Posoudit souměrnost stavby, 2. Stavět podle návodu
pohled, stavba, plánek	pohled, stavba	pohled, stavba (čísla znamenají počet krychlí nad sebou)	stavba, pohled, půdorys	stavba
jednoduché	x	ano, ale nemluví se jako o plánech	ano, různé úlohy	x
zepředu, zprava, shora	zepředu, zprava, shora	zpředu, shora, zprava	zepředu zprava, shora	zepředu
x	x	při určení pohledů k dané stavbě dítě musí trochu porovnávat	P nadhled	porovnat, které je souměrné a které ne

	5. třída	5. třída	5. třída	5. třída
	SPN 2000, str. 29	PRODOS 1996, str. 49	ALTER 1996, str. 47	FORTUNA 1995, str. 86
manipulativní činnost	ano, pokud si žák neví rady s řešním, je povzbuzen k postavení tělesa a prohlédnutí ze všech stran	ano	ano, hned v úvodu je uvedeno, co budou žáci pro jednotlivé úlohy potřebovat - stavebnici, krabice, které se budou kostkami plnit	x
propojení s životní zkušeností dítěte	x	akvárium tvaru kvádru složené z krychlí (zaplněné krychlemi)	rovnání kostek do krabic a určení, kolik se tam vejde - odhad	x
modely	x	akvárium, krabice džusu, mélka	krabice, jednotkové krychle	x
portrétovost, typ tělesa	x	tři hranoly	rúzné hranoly, stejnoměrné i nestejnoměrné	dva různé hranoly
L - P nadhled	P nadhled	P nadhled	P nadhled	L nadhled
možnost vlastního portrétování stavby	x	zápis do plánu	x	ano, do tečkované sítě
návod na vlastní portrétování	x	x	x	x
typy úloh	1. Přiřaď k tělesům jejich pohledy	1. Představ si stavby krychle podle jejich mapy, 2. Převeď obrázek do plánu, 3. Vypočítej spotřebu krychlí, 4. Je dána stavba z krychlí souměrná podle roviny, nakresli její půdorys a mapu, kolik krychlí bude stavba obsahovat?	1. Určení, kolika jednotkovými krychlemi se naplní určitá tělesa, 2. Kolik krychlí je potřeba na stavbu na obrázku, 3. Určení, kolik krychlí je třeba dodat k původní stavbě na obrázku, aby vznikla určitá stavba	1. Nakreslete ještě čtyři tělesa ze sedmi krychliček různých tvarů a vybarvěte je
použité pojmy	pohled, těleso	stavba, půdorys, mapa	jednotková krychle	těleso
plány staveb	x	půdorys, mapa s vyznačeným počtem krychlí (jednoduchý plán)	x	x
průměty těles	ano, ale nemluví se o tpůmětech, ale o trojici pohledů	x	x	x
porovnávání těles	ano, porovnávání a na základě toho přiřazování pohledů k jednotlivým tělesům	x	ano, srovnání, z kolika krychlí je jaké těleso složeno, porovnání, kdo měl vyšší věž za jiných podmínek	x
vlastnosti těles	dvě tělesa souměrná podle 2 rovin, jedno těleso nesouměrné	dvě tělesa nesouměrná, 1 těleso souměrné podle 2 rovin	krabicová tělesa souměrná, zbylé hranoly nesouměrné	nesouměrná tělesa