



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Daniel Štumpf

**Jak funguje GPS**

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické metody informační bezpečnosti

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Jak funguje GPS

Autor: Daniel Štumpf

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci se zabýváme metodami pro určování polohy pomocí GPS. K jednoznačnému určení polohy přijímače je potřeba sledovat alespoň čtyři satelity. Ze signálu, který vysílá každý satelit, se určí pseudovzdálenost k satelitu. To je hodnota, která v sobě obsahuje skutečnou vzdálenost k satelitu, ale také různé odchylky. Představíme dva hlavní algoritmy k určení polohy přijímače, které se liší v tom, jak přijímač určuje pseudovzdálenosti. První algoritmus, který vede na metrovou přesnost, určuje polohu přijímače pomocí pseudovzdáleností, které přijímač vypočte na základě rozdílu času přijetí a vyslání signálu. V druhém případě jsou pseudovzdálenosti určeny na základě fázového měření. K milimetrové odchylce v určené poloze se dostaneme pomocí fázových měření na dvoufrekvenčních přijímačích a diferenciální GPS. Detailně prozkoumáme vlivy na přesnost určené polohy a nastíníme, jak GPS určuje polohu pohybujícího se přijímače využitím Kálmánova filtru.

Klíčová slova: GPS, pseudovzdálenost, fázové měření, diferenciální GPS, Kálmánův filtr, metoda nejmenších čtverců

Title: GPS and how it works

Author: Daniel Štumpf

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., Department of Algebra

Abstract: In this bachelor thesis we provide information about algorithms for GPS positioning and about the accuracy of the estimated position. We describe two algorithms that lead to a position of a receiver. They both measure pseudoranges to the satellites but in two different ways. Pseudorange is an observed value, which we get from the received signal, that include distance to the satellite and errors like atmospheric delay and clock offset. The first algorithm uses pseudoranges based on the travel time of the broadcasted satellite signal and leads to a meter position accuracy. The second algorithm uses phase observations of pseudoranges and results in much higher accuracy. Using dual frequency receivers and differential GPS we get to a mm accuracy. Then we describe a Kalman filter that is used for estimating position of a moving receiver and improving the estimated position of a static receiver.

Keywords: GPS, pseudorange, phase observation, differential GPS, Kalman filter, least square method

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce, panu doc. RNDr. Jiřímu Tůmovi, DrSc., a své rodině za podporu během studií.

# Obsah

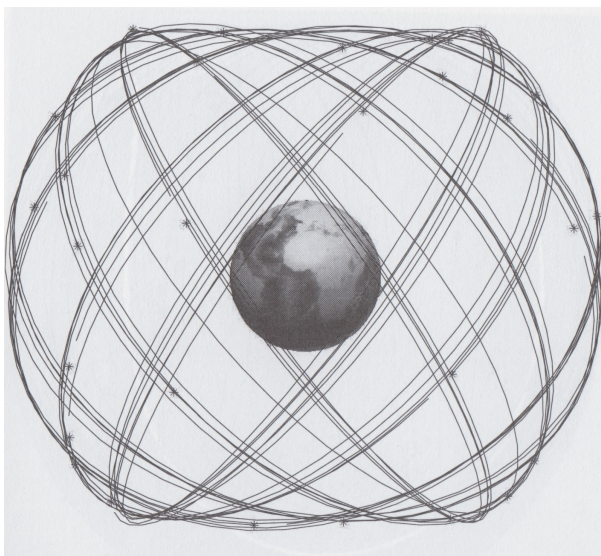
<b>1 Úvod</b>	<b>2</b>
1.1 Popis . . . . .	2
1.2 Struktura signálu . . . . .	2
1.3 Čas . . . . .	3
1.4 Cena a přesnost . . . . .	4
1.5 Využití . . . . .	4
<b>2 Jak GPS určuje a zpřesňuje polohu samostatného přijímače</b>	<b>6</b>
2.1 Základní výpočet pro určení polohy . . . . .	6
2.1.1 Pozorovací rovnice . . . . .	6
2.1.2 Aktualizace souřadnic . . . . .	7
2.1.3 Linearizace . . . . .	7
2.1.4 Soustava pozorovacích rovnic . . . . .	8
2.1.5 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	9
2.2 Přesnost . . . . .	10
2.2.1 Metoda vážených nejmenších čtverců I . . . . .	10
2.2.2 Troposférické zpoždění signálu . . . . .	11
2.2.3 Ionosférické zpoždění signálu . . . . .	12
2.2.4 Další odchylky . . . . .	13
2.3 SBAS . . . . .	13
2.4 Shrnutí . . . . .	15
<b>3 Diferenciální GPS</b>	<b>16</b>
3.1 Úvod . . . . .	16
3.2 Fáze a pseudovzdálenost . . . . .	16
3.3 Diference pozorování . . . . .	18
3.3.1 Jednoduchá diference . . . . .	18
3.3.2 Dvojitá diference . . . . .	18
3.4 Poloha přijímače použitím dvojitých diferencí . . . . .	20
3.4.1 Linearizace . . . . .	20
3.4.2 Odchylky . . . . .	21
3.5 Dvoufrekvenční přijímač . . . . .	21
3.6 Shrnutí . . . . .	22
<b>4 Kálmánův filtr a vážené čtverce II</b>	<b>23</b>
4.1 Motivace . . . . .	23
4.2 Metoda vážených nejmenších čtverců II . . . . .	23
4.3 Popis Kálmánova filtru . . . . .	23
<b>5 Závěr</b>	<b>25</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>26</b>

# 1. Úvod

## 1.1 Popis

GPS – Global Positioning System. Jak název vypovídá, jedná se o družicový polohový systém, tj. systém umožňující určit polohu přijímače pomocí satelitů. To dokáže s přesností až na jednotky milimetrů. Navíc tento systém spočítá přesný čas přijímače na jednotky nanosekund.

Celý systém se skládá nejméně z 24 aktivních družic, které jsou umístěny do 6 oběžných rovin se sklonem  $55^\circ$  k rovníku. V současnosti obíhá kolem Země okolo 30 aktivních satelitů. Družice obíhají kolem Země rychlostí okolo 11300 km/h ve výšce přibližně 20180 km, a tak za jeden den obkrouží Zemi téměř dvakrát. Satelity jsou rozmístěny tak, aby z každého bodu na Zemi byly vidět alespoň čtyři. To je minimální počet potřebný k jednoznačnému určení polohy přijímače, neboť GPS neurčuje pouze polohu přijímače (k tomu by stačily pouze tři satelity), ale i jeho čas. Přijímač většinou sleduje osm až deset satelitů najednou.



Obrázek 1.1: Schéma 24 satelitů a jejich oběžných drah za jeden den. Satelity jsou rozmístěny do 6 oběžných drah, v každé jsou čtyři. Malá mezera na konci každé dráhy je způsobena tím, že satelity za jeden den neoběhnou celou Zemi dvakrát. Zdroj [1].

## 1.2 Struktura signálu

Každý satelit vysílá dva signály s označením L1 a L2 na frekvencích  $f_{L1} = 1575,42$  MHz a  $f_{L2} = 1227,60$  MHz. Přijímání obou signálů se využívá pro zvýšení přesnosti při určování polohy přijímače a to zejména z toho důvodu, že signály s rozdílnou frekvencí jsou ionosférou různě zpomalovány, čehož se dá využít k odstranění některých odchylek.

GPS signál se skládá ze tří částí – nosné vlny, na kterou je modulován PRN kód (pseudonáhodný šum) spolu s navigačními daty, jako je např. identifikace satelitu,

jeho čas, efemeridy a další, viz formát RINEX. Efemeridy jsou údaje o přesné poloze satelitu v čase, tj. z efemerid přijímač spočítá přesné souřadnice satelitu. PRN kód je (pseudonáhodná) posloupnost nul a jedniček vygenerovaná pomocí posuvných registrů. Tohoto kódu se využívá při modulaci dat na nosnou vlnu signálu. Používají se dva PRN kódy – veřejný C/A kód, který je použit pouze na L1 signálu, a šifrovaný P kód, který je modulován na L1 i L2 signál. Ten je vyhrazen pro vojenské účely, ale je užitečný i v komerčním sektoru. Detailněji je struktura vysílaného signálu ze satelitů popsána v [1].

Pro manipulaci s GPS daty se vyvinul formát RINEX. Skládá se ze tří typů souborů, do kterých jsou umístěny informace získané z přijatého signálu a z přijímače. Observation Data File obsahuje naměřené hodnoty jako jsou datum a čas přijatého signálu, identifikace pozorovaných satelitů, pseudovzdálenost a fázová pseudovzdálenost, ukázka viz tabulka 1.1; GPS Navigation Message File obsahuje efemeridy a v třetím souboru jsou meteorologická data, tj. např. teplota, tlak, relativní vlhkost a další.

Tabulka 1.1 je ukázkou dat získaných ze signálu. První čísla na prvním řádku označují čas přijetí signálu. Což tedy dle tabulky bylo 4. 9. 2001 v 9 hodin 40 minut a 0 sekund. Další 0 říká, že přijímač je ve statickém módu. Číslo 5 označuje počet satelitů, které přijímač vidí, a následují jejich identifikační čísla. Poté následují řádky (celkem pět, protože přijímač sleduje pět satelitů) obsahující postupně pseudovzdálenost (v metrech) získanou z C/A kódu, tj. z L1 signálu. Dále dvě pseudovzdálenosti získané z P kódu nejdříve z L1 a poté z L2 signálu, počet vln na trase satelit–přijímač na L1 a L2 signálu a Dopplerův posun na obou signálech L1 a L2. Vynásobíme-li počet vln příslušnou vlnovou délkou signálu, tak dostaneme fázovou pseudovzdálenost. Pojmy, jako jsou pseudovzdálenost a fáze, budou dále v této práci detailně popsány.

```
01 9 4 9 40 0.00000000 0 5 G1G4G7G13G24
20532012.14648 20532011.55846 20532016.22546 107896448.4014 84075170.1284 -702.033 -547.047
21255524.69947 21255524.94445 21255529.02045 111698540.8774 87037834.1244 799.589 623.056
24648794.02245 24648792.88941 24648801.63741 129530300.6484 100932694.9344 -3425.352 -2669.144
21267718.45748 21267718.52445 21267722.00945 111762613.2534 87087766.9504 1911.882 1489.773
23828505.41246 23828504.07842 23828511.81542 125219643.5474 97573763.5014 2743.177 2137.544
```

Tabulka 1.1: Tabulka s pozorovacími daty ve formátu RINEX. Zdroj [1].

## 1.3 Čas

Klíčovou roli v určování polohy pomocí satelitů hraje čas. Součástí každé družice jsou atomové hodiny. Ty by byly příliš drahou a těžkou součástí přijímačů. Přijímače používají běžné hodiny, jejichž odchylka od přesného času může být poměrně velká. Jelikož GPS potřebuje pro přesné určení polohy přesný čas, tak se časová odchylka hodin na přijímači musí spočítat. Způsob, jak se určí přesný čas na hodinách přijímače, bude popsán v následující kapitole.

Chceme-li určovat polohu s přesností na centimetry (resp. milimetry), potřebujeme měřit přesný čas v jednotkách nanosekund (resp. s přesností na 0,01 ns),

neboť elektromagnetický signál urazí za 1 ns (tj. za  $10^{-9}$  s) vzdálenost přibližně

$$10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^8 = 30 \text{ (cm)}.$$

Kvůli relativistickým vlivům a faktu, že i satelitní hodiny se během dne mohou odchýlit od správného času až o 100 ns, je třeba někde na Zemi udržovat přesný čas. To zajišťuje kontrolní středisko GPS v Colorado Springs.

Pro lepší udržování času zavedlo GPS vlastní časové měřítko. Od 6. 1. 1980 se kontinuálně měří čas v týdnech, uvnitř týdne v dnech a v nich v sekundách. Každý týden má svoje číslo a začátkem týdne je neděle.

## 1.4 Cena a přesnost

Rozlišuje se několik druhů GPS přijímačů. Ty nejlevnější (součástí mobilů, navigací v aut apod.) určují svoji polohu pouze využitím pseudovzdáleností, které jsou určené z doby letu signálu L1, tj. pouze použitím C/A kódu. K určení polohy je potřeba sledovat alespoň čtyři satelity. Odchylka určené polohy z C/A kódů bývá okolo 10 m. Metody, jak a s jakou přesností běžný samostatný přijímač určuje svoji polohu, jsou detailně rozebrány v kapitole 2.

Jak zvýšit přesnost určené polohy je poté rozebráno v následujících kapitolách. Největší přesnosti dosáhneme použitím dvoufrekvenčních přijímačů a tzv. diferenciální GPS. K diferenciální GPS je zapotřebí dvou přijímačů, kde přesná poloha jednoho z nich je předem známa. Při diferenciálních pozorování se některé odchylky odstraní a tím se zvýší přesnost. Dalším krokem ke zvýšení přesnosti je určování vzdálenosti k satelitu pomocí fázových měření, což vede k až stokrát menší odchylce. U dvoufrekvenčních přijímačů jsme navíc schopni přesně určit hodnotu ionosférického zpoždění, které jinak způsobuje velkou odchylku, viz tabulka 2.3. Takto dosáhneme neuvěřitelné přesnosti – centimetrové až milimetrové. Za přesnost se platí – ceny takovýchto přístrojů se pohybují v řádu tisíců amerických dolarů.

## 1.5 Využití

V současnosti je na světě více než 500 miliónů přijímačů. Většina z nich se nachází v mobilních telefonech.

- *Určení polohy mobilů:* Předtím, než se začalo využívat GPS v mobilních telefonech, tak se lokalizovali pouze za pomoci základen umístěných na zemi. Nepřesnost takového měření polohy může být ve stovkách metrů, v obydlených oblastech až v řádu kilometrů, mj. z důvodu vícecestného šíření signálu. GPS dosahuje mnohem vyšší přesnosti, ale také spotřebovává velké množství energie. Proto se v mobilních telefonech využívá tzv. A-GPS (Asistovaná GPS). Tato služba umožňuje GPS přijímači rychleji nalézt satelity, které se nachází v jeho zorném poli. Z asistenčního centra si přijímač stáhne informace o poloze a časech všech satelitů.
- *Navigace v autech:* GPS spolu s digitálními mapami a navigací tvoří velmi užitečné spojení pro cestování autem.



- *Zemědělství* V zemědělství se využívají přijímače, u nichž je potřeba velká přesnost. Traktory řízené pomocí GPS jsou schopny zasévat semena plodin na centimetr přesně.
- *Přesný čas* V systémech, kde je potřeba velmi přesný čas, se hodiny seřizují pomocí GPS. Např. v rozvodných sítích, internetových uzlech apod.

## 2. Jak GPS určuje a zpřesňuje polohu samostatného přijímače

V této kapitole rozebereme případ, kdy máme jeden přijímač, který svoji polohu určuje pomocí pseudovzdáleností z C/A kódů, tj. máme běžný přijímač sledující pouze signál L1. Také ukážeme, jak u něj snížit odchylku určené polohy z okolo 10 metrů na metrovou přesnost.

Jak docílit až milimetrové přesnosti je rozebráno v kapitole 3. K tomu již je třeba mít dvoufrekvenční přijímač a druhý přijímač, jehož přesná poloha je předem známa.

### 2.1 Základní výpočet pro určení polohy

#### 2.1.1 Pozorovací rovnice

Každý satelit  $k$  nepřetržitě vysílá signál, který obsahuje informace o jeho přesné poloze  $(X^k, Y^k, Z^k)$  a času  $t^k$  v době, kdy byl signál ze satelitu odeslán. Signál se ve vakuu šíří rychlostí  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Přijímač určí dobu letu signálu  $\tau^k$  jako rozdíl času přijímače a satelitu, tj.

$$\tau^k = t - t^k,$$

kde  $t$  je čas přijímače v době přijetí signálu.

Čas přijímače není přesný a i satelitní hodiny se mohou od přesného času mírně lišit. Dále víme, že rychlost signálu ze satelitu se na cestě k přijímači vlivem ionosféry a troposféry zmenšuje. Proto vzdálenost  $P^k$  přijímače od satelitu  $k$  určená vztahem

$$P^k = c \cdot \tau^k,$$

je pouhým odhadem skutečné vzdálenosti satelitu od přijímače a nazývá se pseudovzdálenost. Pseudovzdálenost přijímače od satelitu  $k$  přesněji zapíšeme takto:

$$P^k = \rho^k + c(dt - dt^k) + T^k + I^k + e^k, \quad (2.1)$$

kde  $dt$  značí odchylku času přijímače od času GPST,  $dt^k$  je odchylka hodin na satelitu  $k$ ,  $\rho^k$  je geometrická vzdálenost přijímače od satelitu  $k$ ,  $T^k$  je troposférická chyba,  $I^k$  je ionosférická chyba a  $e^k$  je chyba měření. Chyba  $e^k$  se dá minimalizovat použitím metody nejmenších čtverců, lepší anténou přijímače atp.

Geometrická vzdálenost  $\rho^k$  je určena vztahem

$$\rho^k = \sqrt{(X^k - X)^2 + (Y^k - Y)^2 + (Z^k - Z)^2},$$

kde  $(X, Y, Z)$  je (neznámá) poloha přijímače a  $(X^k, Y^k, Z^k)$  je poloha satelitu  $k$ , kterou přijímač dokáže určit z přijatého signálu, konkrétně z efemerid. Chyby způsobené atmosférou (tj. hodnoty  $T^k$  a  $I^k$ ) se dají v určitých případech určit pomocí apriorních modelů, které jsou popsány dále. Tedy rovnice (2.1) obsahuje pouze čtyři neznámé – polohu přijímače  $(X, Y, Z)$  a jeho odchylku času  $dt$ . Přijímač neustále získává informace alespoň ze čtyř satelitů, a proto je možné jednoznačně určit jeho polohu i přesný čas.

### 2.1.2 Aktualizace souřadnic

Polohu přijímače určíme iterativně. Nechť  $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$  označují změnu souřadnic při  $i$ -té iteraci. Potom nové souřadnice přijímače mají hodnotu

$$\begin{aligned}X_{i+1} &= X_i + \Delta X_i, \\Y_{i+1} &= Y_i + \Delta Y_i, \\Z_{i+1} &= Z_i + \Delta Z_i,\end{aligned}\tag{2.2}$$

kde  $(X_0, Y_0, Z_0)$  volíme jako střed Země  $(0,0,0)$ , pokud nemáme předem informaci o přibližné poloze přijímače (např. v mobilních telefonech lze získat přibližnou polohu přijímače pomocí A-GPS).

### 2.1.3 Linearizace

Rovnice (2.1) je nelineární vůči poloze přijímače  $(X, Y, Z)$ . Tento nelineární člen označíme takto:

$$f(X, Y, Z) = \sqrt{(X^k - X)^2 + (Y^k - Y)^2 + (Z^k - Z)^2}.$$

Využitím (2.2) aproximujeme funkci  $f(X_i + \Delta X_i, Y_i + \Delta Y_i, Z_i + \Delta Z_i)$  na okolí bodu  $(X_i, Y_i, Z_i)$  pomocí Taylorova polynomu řádu 1:

$$\begin{aligned}f(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}) &= f(X_i, Y_i, Z_i) + \frac{\partial f}{\partial X_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)(X_{i+1} - X_i) \\&+ \frac{\partial f}{\partial Y_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)(Y_{i+1} - Y_i) \\&+ \frac{\partial f}{\partial Z_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)(Z_{i+1} - Z_i) \\&= f(X_i, Y_i, Z_i) + \frac{\partial f}{\partial X_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)\Delta X_i \\&+ \frac{\partial f}{\partial Y_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)\Delta Y_i \\&+ \frac{\partial f}{\partial Z_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i)\Delta Z_i.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Dále máme

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \frac{-2(X^k - X)}{\sqrt{(X^k - X)^2 + (Y^k - Y)^2 + (Z^k - Z)^2}} = -\frac{X^k - X}{\rho^k}.$$

Obdobně vyjdou parciální derivace funkce  $f$  podle druhé a třetí proměnné:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y, Z) &= -\frac{Y^k - Y}{\rho^k}, \\ \frac{\partial f}{\partial Z}(X, Y, Z) &= -\frac{Z^k - Z}{\rho^k}.\end{aligned}$$

A tedy parciální derivace v rovnici (2.3) vyjdou takto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i) &= -\frac{X^k - X_i}{\rho_i^k}, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i) &= -\frac{Y^k - Y_i}{\rho_i^k}, \\ \frac{\partial f}{\partial Z_{i+1}}(X_i, Y_i, Z_i) &= -\frac{Z^k - Z_i}{\rho_i^k},\end{aligned}$$

kde  $\rho_i^k = \sqrt{(X^k - X_i)^2 + (Y^k - Y_i)^2 + (Z^k - Z_i)^2}$  je vzdálenost satelitu  $k$  od již odhadnuté polohy  $(X_i, Y_i, Z_i)$  přijímače.

Tím jsme linearizovali rovnici (2.1) a dostáváme pro satelit  $k$  rovnici

$$P_i^k = \rho_i^k - \frac{X^k - X_i}{\rho_i^k} \Delta X_i - \frac{Y^k - Y_i}{\rho_i^k} \Delta Y_i - \frac{Z^k - Z_i}{\rho_i^k} \Delta Z_i + c(dt_i - dt^k) + T_i^k + I_i^k + e_i^k,$$

kde  $dt_i$  je odhadovaná odchylka času přijímače,  $dt_0$  volíme 0. Tuto rovnici upravíme převedením neznámých na levou stranu rovnice a zapíšeme ji pomocí vektorů:

$$\begin{pmatrix} -\frac{X^k - X_i}{\rho_i^k} & -\frac{Y^k - Y_i}{\rho_i^k} & -\frac{Z^k - Z_i}{\rho_i^k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ cdt_i \end{pmatrix} = P_i^k - \rho_i^k + cdt^k - T_i^k - I_i^k - e_i^k. \quad (2.4)$$

#### 2.1.4 Soustava pozorovacích rovnic

Sestavíme příslušnou soustavu rovnic z pozorovaných pseudovzdáleností. Jelikož rovnice (2.4) obsahuje čtyři neznámé, tak k jednoznačnému řešení je třeba alespoň čtyř lineárně nezávislých rovnic.

Označme  $b_i^k$  pravou stranu rovnice (2.4), tj.  $b_i^k = P_i^k - \rho_i^k + cdt^k - T_i^k - I_i^k - e_i^k$  a  $\mathbf{b}_i$  bude vektor pravých stran, tj.  $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^m)^T$ . Dále

$$A_i = \begin{pmatrix} -\frac{X^1 - X_i}{\rho_i^1} & -\frac{Y^1 - Y_i}{\rho_i^1} & -\frac{Z^1 - Z_i}{\rho_i^1} & 1 \\ -\frac{X^2 - X_i}{\rho_i^2} & -\frac{Y^2 - Y_i}{\rho_i^2} & -\frac{Z^2 - Z_i}{\rho_i^2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^m - X_i}{\rho_i^m} & -\frac{Y^m - Y_i}{\rho_i^m} & -\frac{Z^m - Z_i}{\rho_i^m} & 1 \end{pmatrix}$$

označíme matici soustavy pozorovacích rovnic.

K určení polohy přijímače potřebujeme vyřešit soustavu

$$A_i \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} -\frac{X^1 - X_i}{\rho_i^1} & -\frac{Y^1 - Y_i}{\rho_i^1} & -\frac{Z^1 - Z_i}{\rho_i^1} & 1 \\ -\frac{X^2 - X_i}{\rho_i^2} & -\frac{Y^2 - Y_i}{\rho_i^2} & -\frac{Z^2 - Z_i}{\rho_i^2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^m - X_i}{\rho_i^m} & -\frac{Y^m - Y_i}{\rho_i^m} & -\frac{Z^m - Z_i}{\rho_i^m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ cdt_i \end{pmatrix} = \mathbf{b}_i. \quad (2.5)$$

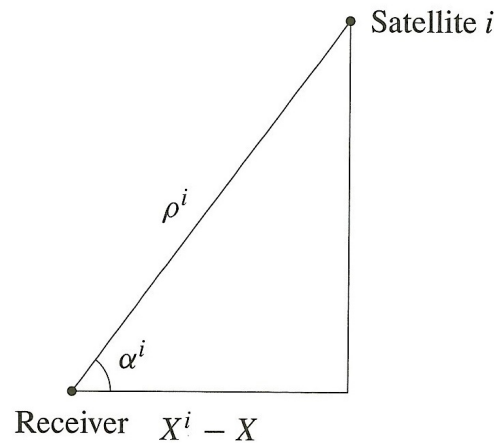
### 2.1.5 Metoda nejmenších čtverců

Pro  $m = 4$  má soustava (2.5) jednoznačné řešení, právě když je matice  $A_i$  soustavy (2.5) regulární. Na prvky v prvních třech sloupcích této matice můžeme koukat jako na kosiny úhlů, které svírá úsečka mezi přijímačem a satelitem a její projekce na některou ze souřadnicových os, viz obrázek 2.1. Tedy prvky v prvním sloupci matice  $A_i$  se dají také vyjádřit takto:

$$\cos(\alpha^k) = \frac{X^k - X}{\rho^k}.$$

Podobně pro zbývající dvě souřadnicové osy. To, že matice  $A_i$  je pro  $m = 4$  regulární, znamená předpokládat, že lineární kombinací poloh satelitů nezískáme polohu jiného sledovaného satelitu, tj. např. že dva přijímačem sledované satelity neleží za sebou a neleží ve stejné oběžné rovině.

Pro  $m = 4$  budeme vždy předpokládat, že příslušná matice  $A_i$  je regulární. Toho lze snadno dosáhnout, neboť přijímač většinou sleduje okolo osmi satelitů, ze kterých můžeme vybrat čtyři takové, jejichž polohy nejsou nijak lineárně závislé.



Obrázek 2.1: Projekce vektoru pseudovzdálenosti na osu  $X$ . Zdroj [1].

V případě, že  $m > 4$ , nemá soustava  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešení. V takovém případě použijeme metodu nejmenších čtverců a nalezneme aproximaci řešení. Nadále budeme předpokládat, že chyby v měření mají Gaussovo rozdělení.

Soustava  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nemá řešení, tak nalezneme nejmenší vektor  $\mathbf{e}$  takový, že soustava  $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{e}$  je řešitelná, tj. ekvivalentně hledáme takovou aproximaci řešení  $\hat{\mathbf{x}}$ , že norma vektoru  $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$  je nejmenší možná.

Hledanou aproximaci řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  nalezneme jako řešení soustavy rovnic

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}.$$

Jelikož sloupce matice  $A_i$  jsou lineárně nezávislé (to předpokládáme), tak získáme aproximaci řešení soustavy (2.5) pomocí nejmenších čtverců ve tvaru

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ cdt_i \end{pmatrix} = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T \mathbf{b}_i. \quad (2.6)$$

Nový odhad polohy  $(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$  přijímače získáme po přičtení změn souřadnic z (2.6) ke stávajícímu odhadu polohy  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , viz (2.2). Iterujeme dokud změny souřadnic  $(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$  nejsou menší než jeden metr.

## 2.2 Přesnost

Popsali jsme základní algoritmus, jak GPS určuje polohu přijímače. V další části této kapitoly se zaměříme na to, jak samostatný přijímač může zvýšit přesnost určené polohy, jaké faktory v tom hrají roli a jaké chyby naopak eliminovat nedokáže.

### 2.2.1 Metoda vážených nejmenších čtverců I

V sekci 2.1.5 se při řešení nejmenších čtverců, tj. při řešení soustavy  $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ , počítá s tím, že jednotlivá měření  $b_1, \dots, b_m$  jsou stejně spolehlivá. Někdy se můžeme domnívat, že některá měření  $b_i$  byla přesnější než ostatní, těmto rovnicím bychom tedy měli dát větší váhu.

Mějme soustavu  $m$  rovnic  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Váhy  $\omega_i$  přidáme vynásobením každé rovnice  $i$  váhou  $\omega_i$ . Vložme tyto váhy do diagonální matice  $W$ , tj. matice  $W$  je typu  $m \times m$ , která má na pozici  $(i, i)$  váhu  $\omega_i$ , jinak samé nuly. Nahradíme soustavu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  váženou soustavou

$$W A \mathbf{x} = W \mathbf{b}.$$

Nejlepší řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  této soustavy nalezneme pomocí metody nejmenších čtverců popsané v předchozí části, tj.  $\hat{\mathbf{x}}$  je řešením soustavy

$$(W A)^T W A \hat{\mathbf{x}} = (W A)^T W \mathbf{b}.$$

Tuto soustavu zapíšeme do kompaktnější podoby

$$A^T C A \hat{\mathbf{x}} = A^T C \mathbf{b}, \quad (2.7)$$

kde  $C = W^T W$ . Jak volit váhy  $\omega_i$ ?

V tabulce 2.1 vidíme, že pseudovzdálenosti k satelitům, které přijímač pozoruje pod větším úhlem<sup>1</sup>, jsou zatíženy menší chybou. Je tedy rozumné zvolit

<sup>1</sup>Úhel měříme k tečné rovině Země v místě pozorovatele, tj. v případě, že satelit je přímo nad pozorovatelem, tak naměříme výškový úhel  $90^\circ$ .

váhy tak, aby rovnice odpovídající satelitům, které vidíme pod větším úhlem, měly větší váhu. Nejjednodušší takový model je s váhami  $\omega_i = \sin z_i$ , kde  $z_i$  je výškový úhel<sup>1</sup> k satelitu  $i$ . Tedy matice  $C$  z rovnice (2.7) je tvaru

$$C = \text{diag}(\sin^2 z_1, \dots, \sin^2 z_m).$$

Lze zvolit váhy jinak? Lze a lépe. Gaussova metoda vážených čtverců je popsána v kapitole o Kalmanově filtru. Pro soustavu  $m$  rovnic o  $n$  neznámých,  $m \geq n$ , dává Gaussova metoda jak jednoznačné řešení vážených nejmenších čtverců s nejmenší odchylkou, tak míru přesnosti (kovarianci) tohoto řešení.

## 2.2.2 Troposférické zpoždění signálu

Část atmosféry nejbližší k zemskému povrchu se nazývá troposféra. Její šířka není okolo Země jednotná – v rovníkové oblasti dosahuje okolo 18 km a směrem k pólům se zužuje až na 9 km. Tato část atmosféry je složena převážně z dusíku, vodních par a oxidu uhličitého a neobsahuje volné ionty a elektrony.

Troposférické zpoždění závisí právě na cestě signálu vyslaného ze satelitu troposférou. Toto zpoždění se dá rozložit na dvě složky – hydrostatickou a vodní, která je způsobena vodními parami. Hydrostatická složka se dá přesně určit z měření na povrchu Země. Kvůli nerovnoměrnému rozložení vodních par v atmosféře se druhá složka troposférického zpoždění nedá dobře namodelovat. Zpoždění signálu hydrostatickou složkou se udává v průměru přibližně 2,3 m, vodní složka způsobuje zpoždění pouze okolo 0,15 m. Dohromady troposférické zpoždění signálu bývá okolo 2,4 m. V příkladu 2.2.2.1 ukážeme na reálných datech, jak a na čem závisí hodnota troposférického zpoždění.

Jednoduše řečeno, troposférické zpoždění signálu přijatého GPS přijímačem v nadmořské výšce  $H$  je funkce výškového úhlu  $z$  k satelitu, zeměpisné šířky  $\varphi$ , tlaku vzduchu  $P_0$  v milibarech, teploty  $T_0$  v Kelvinech a parciálního tlaku  $e_0$  vodních par v milibarech. Jeden z modelů popisující troposférické zpoždění je následující

$$T = 0.002277 \cdot \frac{1 + 0.0026 \cdot \cos(2\varphi) + 0.00028 \cdot H}{\sin(z)} \left( P_0 + \left( \frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) e_0 \right).$$

Troposférické zpoždění je nepřímo úměrné hodnotě  $\sin(z)$ , proto se satelity, které vidíme pod úhlem menším než  $15^\circ$ , pro určení polohy přijímače nevyužívají. Naopak, jelikož troposféra je nejužší na pólech, tak čím větší zeměpisná šířka  $\varphi$ , tím menší troposférické zpoždění, neboť  $\cos(2\varphi)$  má největší hodnotu pro  $\varphi = 0^\circ$ , naopak nejmenší pro  $\varphi = 90^\circ$ .

*Příklad 2.2.2.1.* V tomto příkladě ilustrujeme, jak se troposférická odchylka přijatého signálu může v různých situacích velmi lišit. V tabulce 2.1 jsou data, která odpovídají přijímači umístěnému v Praze. Na nich je vidět, jak je troposférické zpoždění ovlivněno počasím a úhlem, pod kterým vidíme satelit, ze kterého jsme signál přijali. Všimněme si, že je-li výškový úhel menší jak  $15^\circ$ , tak hodnota troposférického zpoždění se výrazně zvětšuje. Proto se zavádí tzv. mezní úhel (často s hodnotou  $15^\circ$ ). Satelity, které vidíme pod úhlem menším než je mezní úhel, se pro určení polohy přijímače nevyužívají. Tabulka 2.2 ilustruje změnu troposférického zpoždění na změně poloze přijímače, resp. na změně zeměpisné šířky.

Zeměpisná šířka $\varphi$ (°)	Výškový úhel $z$ (°)	Teplota $T_0$ (°C)	Atm. tlak $P_0$ (mbar)	Parciální tlak $e_0$ (mbar)	Výška $H$ (km)	Tropo. zpoždění $T$ (m)
50	5	26.5	1013	26.3	0.2	29.37
50	5	-9	1005	3.0	0.2	26.49
50	15	26.5	1013	26.3	0.2	9.8
50	15	-9	1005	3.0	0.2	8.9
50	45	26.5	1013	26.3	0.2	3.6
50	45	-9	1005	3.0	0.2	3.26
50	90	26.5	1013	26.3	0.2	2.5
50	90	-9	1005	3.0	0.2	2.3

Tabulka 2.1: Data pro výpočet troposférického zpoždění. Hodnoty tohoto zpoždění odpovídají přijímači umístěnému v Praze.

Zeměpisná šířka $\varphi$ (°)	Výškový úhel $z$ (°)	Teplota $T_0$ (°C)	Atm. tlak $P_0$ (mbar)	Parciální tlak $e_0$ (mbar)	Výška $H$ (km)	Tropo. zpoždění $T$ (m)
0	60	15	1013.25	16.9	0	2.867
45	60	15	1013.25	16.9	0	2.859
90	60	15	1013.25	16.9	0	2.852

Tabulka 2.2: Data pro výpočet troposférického zpoždění. Pro výpočet velmi přesné odchylky je třeba znát i zeměpisnou šířku.

### 2.2.3 Ionosférické zpoždění signálu

Ionosféra je horní část atmosféry, jejíž spodní část se nachází ve výšce okolo 50 km nad Zemí a horní část sahá do výšky 1000 km a více. Na rozdíl od troposféry obsahuje ionosféra velké množství volných elektronů a elektricky nabitých molekul, které ovlivňují průchod signálu. Množství volných elektronů závisí na Slunci a jeho aktivitě. Tím pádem se ionosférická odchylka liší ve dne a v noci a také závisí na ročním období. Během dne způsobuje sluneční záření ionizaci neutrálních atomů, a tím se vytváří volné elektrony a ionty. Naopak v noci se volné elektrony spojují s ionty a jejich hustota tedy klesá. Rozdíly v slunečním cyklu, sluneční erupce apod. mají také vliv na ionizaci atmosféry. Ten není tak výrazný, ale za to hůře předpovědatelný.

Hodnota ionosférického zpoždění signálu závisí z 99 % na převrácené hodnotě kvadrátu frekvence signálu, viz zdroj [2]. Tato hodnota bývá obvykle 5–15 m, ale v extrémních případech (např. při malém výškovém úhlu či zvýšené solární aktivitě) může dosáhnout až 150 m.

Na rozdíl od troposférického zpoždění (které nezávisí na frekvenci signálu), lze u dvoufrekvenčního přijímače určit ionosférické zpoždění kombinací měření na L1 a L2 signálu. Dvoufrekvenční přijímač dokáže určit pseudovzdálenosti  $P_1$  a  $P_2$  z obou signálů L1 a L2. A tak dokáže spočítat zpoždění

$$dP_{1,ion} = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (P_2 - P_1) + \text{náhodná/nemodelovaná chyba.} \quad (2.8)$$

Máme-li tedy pseudovzdálenost  $P_1$  obsahující ionosférické zpoždění, tak hodnota



pseudovzdálenosti  $P_1$  bez tohoto zpoždění je

$$P_{1,iono-free} = P_1 - dP_{1,ion} = P_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (P_2 - P_1) = \frac{f_1^2 P_1 - f_2^2 P_2}{f_1^2 - f_2^2}.$$

Výpočet ionosférického zpoždění signálu z (2.8) se dá zjevně využít jenom u dvoufrekvenčních přijímačů. Jednofrekvenční přijímače nemohou využít klíčového pozorování, že signály s různou frekvencí jsou ionosférou různě ovlivněny.

Pro jednofrekvenční přijímače existují dvě možnosti, jak zjistit hodnotu ionosférického zpoždění, ale tato hodnota nebude úplně přesná. Lze využít modely, jejichž parametry vysílají GPS satelity, např. Klobucharův, či NeQuick model. Tyto modely dokážou opravit až 60 % ionosférického zpoždění, viz [3]. V další části této kapitoly je popsán systém SBAS, jehož pomocí je jednofrekvenční přijímač informován o hodnotě ionosférického zpoždění.

Další možnosti, jak spočítat ionosférické zpoždění, či ho z rovnic pro pseudovzdálenosti zcela odstranit, jsou popsány v další kapitole o diferenciální GPS.

## 2.2.4 Další odchylky

*Satelitní hodiny* Atomové hodiny na satelitech bývají cesiové, nebo rubidiové. Takovéto hodiny mají relativní přesnost okolo  $10^{-12}$ . To znamená, že za čas  $t$  nebude jejich odchylka větší než  $(10^{-12})t$ . Jeden den má přibližně 86400 s, tj. odchylka satelitních hodin po uplynutí jednoho dne bude přibližně

$$86400 \cdot 10^{-12} = 8.64 \times 10^{-8} \approx 100 \text{ (ns)}.$$

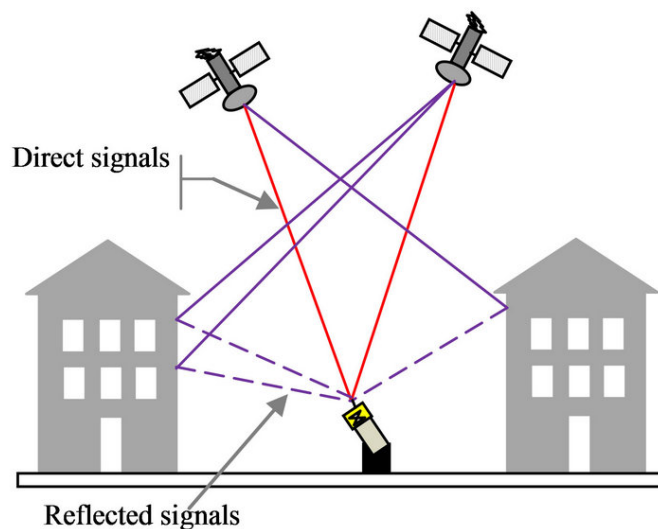
Vynásobením rychlostí šíření signálu dostaneme odchylku v pseudovzdálenosti až 30 m. Proto se satelitní hodiny nejméně každé dvě hodiny aktualizují, aby odchylka nebyla větší než 2 m.

*Vícecestné šíření signálu* Vyslaný GPS signál může dorazit k anténě na přijímači po několika různých cestách, viz obr. 2.2. To může být způsobeno průchodem signálu atmosférou nebo okolním prostředím (hory, budovy, vodní plochy, atd.). Vícecestné šíření také závisí na tvaru satelitu i antény, a proto se dá těžko modelovat. Eliminací signálů, které anténa zachytí pod nízkým úhlem, se odchylka způsobená vícecestným šířením výrazně zmenší. Modely pro vícecestné šíření signálu jsou velmi komplikované, ale popsány např. v [1].

Odchylka pseudovzdálenosti způsobená vícecestným šířením signálu se udává menší než 5 m.

## 2.3 SBAS

SBAS je zkratka pro anglický výraz Satellite-based Augmentation Systems. Jedná se o satelitní systémy rozšiřující polohovací systémy. V případě GPS nemáme jak zjistit, že námi určená poloha přijímače není kvůli nějakým anomáliím špatná. Systémy, které vyžadují velkou hladinu spolehlivosti, tak nemohou využívat samotné GPS. Proto vznikly systémy, které nejenom zvyšují přesnost určené polohy, ale zajišťují, že určená poloha bude v určitém intervalu spolehlivosti.

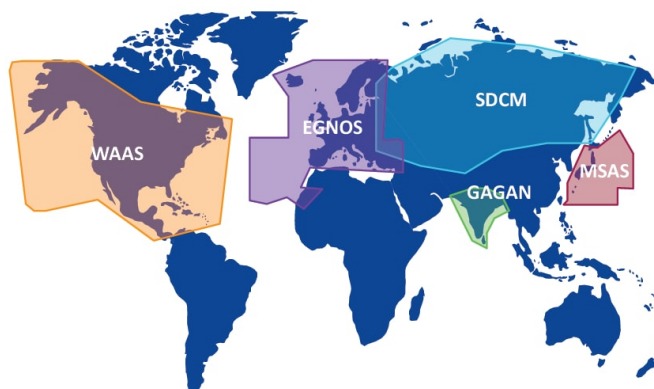


Obrázek 2.2: Vícecestné šíření signálu. Zdroj [4].

V situacích, kde jde o lidské životy (např. přistávání letadel), se nesmí používat samotné GPS, ale musí být právě doplněno o SBAS. Díky zvýšení přesnosti určené polohy se dále GPS ve spojení s SBAS využívá v zemědělství, geodézii, řízení aut a v mnoha dalších odvětvích.

SBAS se skládá z referenčních stanic rozmístěných po celém světě, jejichž přesná poloha je známa. Pozorování z těchto stanic jsou odesílána do čtyř hlavních center, kde se využitím dvojitých diferencí spočítá ionosférické zpoždění a určí se přesnost měřené polohy. Tyto informace jsou následně poslány na geostacionární satelity, ze kterých potom uživatelé GPS s SBAS přijímačem přijímají signál obsahující různé korekce, které by samostatný přijímač nebyl schopen určit, např. hodnotu ionosférického zpoždění. Využitím SBAS se běžná odchylka určené polohy samostatného přijímače sníží na 1–2 m.

SBAS není jednotný systém, různé země implementovali svoji vlastní verzi, ale základní myšlenku mají společnou – zlepšit přesnost a zajistit spolehlivost. Obrázek 2.3 ukazuje pokrytí zeměkoule systémem SBAS.



Obrázek 2.3: Pokrytí Země systémy SBAS. Zdroj [5].

	Vliv na pseudovzdálenost	Ovlivňující faktory
Ionosférické zpoždění	4-5 m <sup>2</sup>	Výškový úhel, zeměpisná šířka, denní doba, solární aktivita, geomagnetické poruchy
Troposférické zpoždění	2.3-2.6 m <sup>2</sup>	Výškový úhel, nadmořská výška, teplota, zeměpisná šířka, tlak, vlhkost
Chyby v efemeridách	0-2 m	Doba mezi dvěma aktualizacemi parametrů v navigační zprávě
Odchylka satelitních hodin	0-2 m	Doba mezi korekcemi satelitních hodin
Mnohacestné šíření signálu	0-5 m	V závislosti na okolním prostředí se odchylka může výrazně lišit

Tabulka 2.3: Tabulka s vlivy na GPS signál. Zdroje [1], [6].

## 2.4 Shrnutí

Popsali jsme, jak samostatný GPS přijímač určuje svoji polohu a přesný čas. K tomu je zapotřebí pozorovat alespoň čtyři satelity, ke kterým pomocí přijatého signálu naměříme pseudovzdálenosti. Běžný přijímač v navigacích či mobilech umí přijímat pouze L1 signál a pseudovzdálenosti určí na základě doby letu signálu ze satelitu k přijímači. Odchylka určené polohy u takovýchto GPS přijímačů se pohybuje okolo 10 m.

Přesnost určené polohy závisí na tom, jak jsme schopni odhalit chyby v pseudovzdálenostech. Příchozí signál ze satelitu je ovlivněn atmosférou, ale i okolním prostředím přijímače. Tabulka 2.3 shrnuje vlivy působící na GPS signál.

Při využití systému rozšiřující GPS (tzv. SBAS) se odchylka sníží na 1–2 m. Navíc SBAS s určitou pravděpodobností garantuje určenou polohu.

<sup>2</sup>V případě, kdy je satelit přímo nad pozorovatelem. Velký vliv má právě výškový úhel, viz tabulka 2.1.

# 3. Diferenciální GPS

## 3.1 Úvod

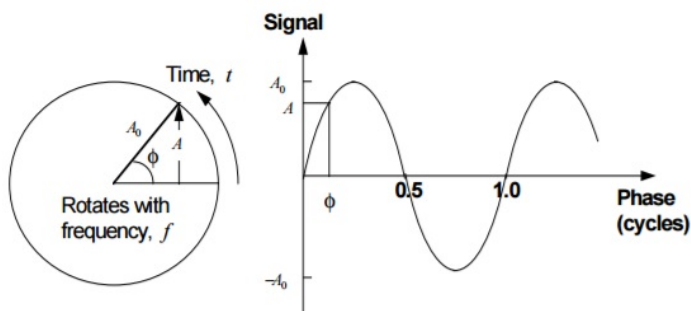
V předchozí kapitole jsme dopodrobna rozebrali situaci jednoho běžného přijímače, tj. jednofrekvenčního přijímače, který přijímá pouze signál L1 a pseudovzdálenosti určí z doby letu signálu.

V praxi se ukazuje, že některé chyby (zpoždění signálu způsobené atmosférou, nepřesnost satelitních hodin, chyby v efemeridách) mají stejnou, či velmi podobnou hodnotu pro přijímače umístěné blízko sebe. Tyto chyby se při diferencích (odečtení) pozorování vyruší, a proto se pro zvýšení přesnosti využívá tzv. diferenciální GPS (DGPS). Nejčastěji se používá metoda dvojité difference (diference na dvou přijímačích a dvou satelitech).

Chceme-li dosáhnout milimetrové přesnosti při určování polohy přijímače, tak se musíme nejprve vrátit ke struktuře signálu. Z první kapitoly víme, že informace z přijatého signálu můžeme získat buď z C/A, nebo P kódu, kde C/A kód je modulován pouze na signál L1 a P kód je na obou signálech L1 i L2. Ale C/A kód není vhodný pro přesné určování polohy. Udává se standardní odchylka pseudovzdálenosti určené z C/A kódu 3 m. Díky vyšší čípkové frekvence (vyššího počtu přijatých bitů za sekundu) P kódu je směrodatná odchylka P pseudovzdálenosti výrazně nižší. Udává se přesnost 10–30 cm. Zahrnutím fázového pozorování signálu se směrodatná odchylka pseudovzdálenosti sníží na 3 mm. Tj. prvním krokem ke zvýšení přesnosti je používat pseudovzdálenosti z P kódu, ale nejpřesnější pseudovzdálenosti dostaneme fázovým měřením, které popíšeme v další části této kapitoly.

## 3.2 Fáze a pseudovzdálenost

Fáze je jednoduše řečeno úhel rotace za čas. Mějme bod, který se pohybuje po kružnici proti směru hodinových ručiček. Obr. 3.1 ilustruje definici fáze, tj. že fáze  $\phi(t)$  je v čase  $t$  definovaná jako úhel, který tento bod obkroužil.



Obrázek 3.1: Význam fáze. Zdroj [7].

Přijímač je schopen "změřit" až  $1/100$  nosné vlny. Vlnová délka signálu L1 je  $\lambda_1 = 0.1905$  m, v případě signálu L2 je vlnová délka  $\lambda_2 = 0.2445$  m. Proto přesnost určené pseudovzdálenosti z fázového měření je v řádu milimetrů.

Při pozorování signálu máme k dispozici pouze část signálu. Z té dokážeme určit, v jaké fázi (tj. v jaké části sinusovky) k nám signál dorazil, ale nemáme informaci o počtu celých vln (tzv. ambiguit), které na celé trase satelit – přijímač předcházely. Přesněji řečeno, pozorování nosné fáze signálu L1 ze satelitu  $k$  přijímačem  $i$  v čase  $t$  nám dle zdrojů [1] a [7] dává fázovou pseudovzdálenost

$$\begin{aligned} L_i^k(t) &:= \lambda_1 \Phi_i^k(t) \\ &= \rho_i^k + c(dt_i - dt^k) + \lambda_1(\varphi_i(t_0) - \varphi^k(t_0)) - \lambda_1 N_i^k + T_i^k - I_i^k + \epsilon(\phi) \\ &= \rho_i^k + c(dt_i - dt^k) + B_i^k + T_i^k - I_i^k + \epsilon(\phi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $\Phi_i^k$  je hodnota fáze naměřená přijímačem,  $\lambda_1$  vlnová délka signálu L1,  $\varphi^k(t_0)$  je počáteční fáze signálu přicházejícího ze satelitu  $k$  přijímači  $i$ ,  $\varphi_i(t_0)$  je fáze přijatého signálu na počátku měření,  $N_i^k$  je hodnota ambiguit,  $\epsilon(\phi)$  značí šum (např. vícecestné šíření signálu) a  $B_i^k := \lambda_1(\varphi_i(t_0) - \varphi^k(t_0) - N_i^k)$ .

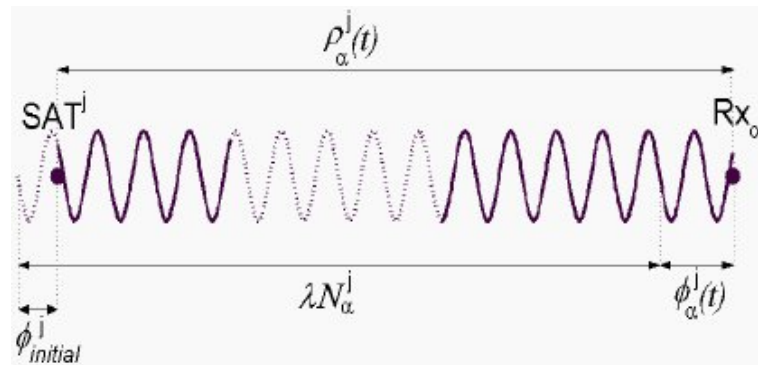
Při použití výše zmíněného značení je v [8] fázová pseudovzdálenost naměřená v čase  $t$  definována takto:

$$L_i^k(t) = \rho_i^k + \lambda_1 \varphi^k(t_0) - \lambda_1 N_i^k + \text{errors}, \quad (3.2)$$

kde tedy  $L_i^k$  je přijímačem naměřená fáze přijatého signálu vynásobená vlnovou délkou signálu.

Tedy zdroje [1], [7] a [8] uvádí různé definice fázové pseudovzdálenosti, resp. zdroj [8] ji trochu zjednodušil. Definice (3.1) a (3.2) se liší o člen  $\varphi_i(t_0)$  a o znaménko před členem  $\varphi^k(t_0)$ . Obrázek 3.1 nám dává jasné geometrické vysvětlení rovnice (3.2). Rovnici (3.1) chápou tak, že uvažujeme dvě měření signálu z jednoho satelitu  $k$  – první měření je v čase  $t_0$  a druhé v čase  $t$ . Jakmile totiž jednou určíme hodnotu  $N_i^k$ , tj. počet celých vln signálu mezi satelitem a přijímačem, a nadále pozorujeme přichodící signál ze satelitu  $k$ , tak se tato hodnota nemění a nemusíme ji znovu počítat – v čase  $t$  naměříme určitou fázi, ale délku signálu (počet vln) od naměřené fáze v  $t_0$  známe, neboť signál jsme kontinuálně měřili.

Dále budeme používat definici fázové pseudovzdálenosti (3.1), neboť zjednodušení, které provedl [8], zcela eliminuje sílu dvojitých diferencí.



Obrázek 3.2: Fázové pozorování pseudovzdálenosti. Význam rovnice (3.2). Zdroj [8].

### 3.3 Diference pozorování

Základním kamenem GPS je měření pseudovzdálenosti mezi přijímačem a satelitem. Při diferencí pseudovzdáleností mezi dvěma přijímači a jedním satelitem se eliminují chyby společné pro tento satelit, tj. např. odchylka satelitních hodin. Provedeme-li diference mezi dvěma přijímači a dvěma satelity (tzv. dvojitá diference), tak navíc odstraníme odchylky časů přijímačů.

Dále budeme pracovat pouze s pozorováními na signálu L1. Výpočty by proběhly stejně pro L2.

#### 3.3.1 Jednoduchá diference

Jednoduchou diferencí rozumíme rozdíl dvou pseudovzdáleností, které naměřily dva přijímače ke stejnému satelitu ve stejný čas. Touto jednoduchou diferencí odstraníme chyby společné pro ten jeden společný satelit. Mějme tedy dva přijímače  $i$  a  $j$ , které sledují stejný satelit  $k$ . Získáme fázové pseudovzdálenosti:

$$\begin{aligned} L_i^k &= \rho_i^k + cdt_i - cdt^k + T_i^k - I_i^k + B_i^k, \\ L_j^k &= \rho_j^k + cdt_j - cdt^k + T_j^k - I_j^k + B_j^k. \end{aligned}$$

Potom diference těchto dvou pozorování je

$$\begin{aligned} \Delta L_{ij}^k &:= L_i^k - L_j^k = \\ &= (\rho_i^k + cdt_i - cdt^k + T_i^k - I_i^k + B_i^k) - \\ &\quad - (\rho_j^k + cdt_j - cdt^k + T_j^k - I_j^k + B_j^k) \\ &= (\rho_i^k - \rho_j^k) + (cdt_i - cdt_j) - (cdt^k - cdt^k) \\ &\quad + (T_i^k - T_j^k) - (I_i^k - I_j^k) + (B_i^k - B_j^k) \\ &\stackrel{?}{=} (\rho_i^k - \rho_j^k) + (cdt_i - cdt_j) + \\ &\quad + (T_i^k - T_j^k) - (I_i^k - I_j^k) + (B_i^k - B_j^k) \\ &= \Delta\rho_{ij}^k + c\Delta dt_{ij} + \Delta T_{ij}^k - \Delta I_{ij}^k + \Delta B_{ij}^k. \end{aligned}$$

Rovnost označená symbolem  $\stackrel{?}{=}$  platí za předpokladu, že odchylka času  $cdt^k$  satelitu  $k$  je v časech vyslání signálu přijímači  $i$  a přijímači  $j$  stejná. Jelikož máme dva různé přijímače, jejichž poloha není stejná, tak čas vyslání signálu přijímači  $i$  a přijímači  $k$  se bude mírně lišit. Proto nemusí být stejná ani odchylka hodin na satelitu. Ale jak je popsáno v [7, str. 33], tak tato odchylka může být maximálně pár milisekund, což nevede ani k milimetrové odchylce v odhadu polohy přijímače.

#### 3.3.2 Dvojitá diference

Pro dvojitou diferencí potřebujeme dva přijímače, které sledují ve stejný čas dva stejné satelity. Výsledkem dvojité diference je, že se zbavíme všech odchylek hodin, tj. satelitních i na přijímačích. Mějme tedy dva přijímače  $i$  a  $k$ , které ve stejný čas sledují satelity  $i$  a  $j$ , tj. máme pozorování  $L_i^k, L_j^k, L_i^l, L_j^l$ . Tato pozorování

diferencujeme, jak je popsáno v části 3.3.1 a dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta L_{ij}^k &= \Delta \rho_{ij}^k + c\Delta dt_{ij} + \Delta T_{ij}^k - \Delta I_{ij}^k + \Delta B_{ij}^k, \\ \Delta L_{ij}^l &= \Delta \rho_{ij}^l + c\Delta dt_{ij} + \Delta T_{ij}^l - \Delta I_{ij}^l + \Delta B_{ij}^l.\end{aligned}$$

Potom dvojitou diferencí definujeme jako rozdíl těchto dvou jednoduchých diferencí, tj.:

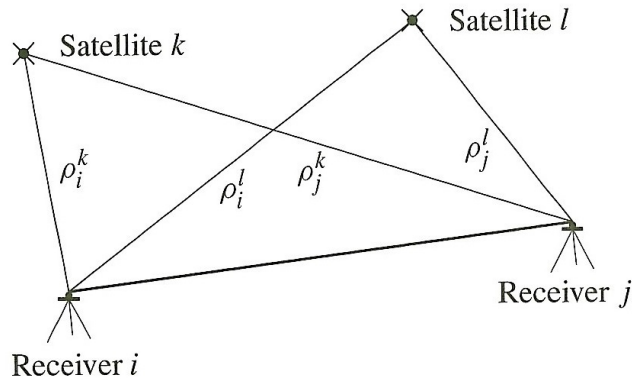
$$\begin{aligned}\Delta\Delta L_{ij}^{kl} &:= \Delta L_{ij}^k - \Delta L_{ij}^l = \\ &= (\Delta \rho_{ij}^k + c\Delta dt_{ij} + \Delta T_{ij}^k - \Delta I_{ij}^k + \Delta B_{ij}^k) - \\ &\quad - (\Delta \rho_{ij}^l + c\Delta dt_{ij} + \Delta T_{ij}^l - \Delta I_{ij}^l + \Delta B_{ij}^l) \\ &= (\Delta \rho_{ij}^k - \Delta \rho_{ij}^l) + c(\Delta dt_{ij} - \Delta dt_{ij}) + (\Delta T_{ij}^k - \Delta T_{ij}^l) \\ &\quad - (\Delta I_{ij}^k - \Delta I_{ij}^l) + (\Delta B_{ij}^k - \Delta B_{ij}^l) \\ &= \Delta\Delta \rho_{ij}^{kl} + \Delta\Delta T_{ij}^{kl} - \Delta\Delta I_{ij}^{kl} + \Delta\Delta B_{ij}^{kl},\end{aligned}$$

kde  $\Delta$ , resp.  $\Delta\Delta$  jsme definovali pouze v průběhu výpočtů, ale význam by měl být zřejmý. Člen  $\Delta\Delta B_{ij}^{kl}$  se po rozepsání výrazně zjednoduší, přičemž členy označené velkým  $B$  jsme definovali v (3.1). Máme tedy

$$\begin{aligned}\Delta\Delta B_{ij}^{kl} &= \Delta B_{ij}^k - \Delta B_{ij}^l = (B_i^k - B_j^k) - (B_i^l - B_j^l) \\ &= \lambda_1(\varphi_i(t_0) - \varphi^k(t_0) - N_i^k) - \lambda_1(\varphi_j(t_0) - \varphi^k(t_0) - N_j^k) - \\ &\quad - \lambda_1(\varphi_i(t_0) - \varphi^l(t_0) - N_i^l) + \lambda_1(\varphi_j(t_0) - \varphi^l(t_0) - N_j^l) \\ &= -\lambda_1(N_i^k - N_j^k - N_i^l + N_j^l) \\ &= -\lambda_1\Delta\Delta N_{ij}^{kl},\end{aligned}$$

tj. dvojitá diference fázových pozorování je:

$$\Delta\Delta L_{ij}^{kl} = \Delta\Delta \rho_{ij}^{kl} + \Delta\Delta T_{ij}^{kl} - \Delta\Delta I_{ij}^{kl} - \lambda_1\Delta\Delta N_{ij}^{kl}. \quad (3.3)$$



Obrázek 3.3: Dva přijímače pozorují ve stejný čas dva satelity. Tato pozorování dvojitě diferencujeme pro zvýšení přesnosti. Zdroj [1].

## 3.4 Poloha přijímače použitím dvojitých diferencí

Mějme dva přijímače  $A$  a  $B$  a předpokládejme, že polohu  $A$  známe. Ukážeme, jak najít souřadnice bodu  $B$  užitím dvojitých diferencí. Při malé vzdálenosti mezi oběma přijímači můžeme pro jednoduchost uvažovat, že rozdíly v atmosféře jsou zanedbatelné a tedy troposférické i ionosférické zpoždění signálu na cestě k přijímači  $A$  a  $B$  bude stejné. Tím se nám zjednoduší rovnice (3.3) a zároveň zjednodušíme značení vynecháním symbolů  $\Delta$  a  $\Delta\Delta$ :

$$L_{AB}^{kl} = \rho_{AB}^{kl} - \lambda_1 N_{AB}^{kl}.$$

Nechť oba přijímače sledují ve stejný čas satelity  $1, \dots, m$ . Z těchto pozorování vytvoříme  $m - 1$  lineárně nezávislých dvojitých diferencí tak, že jeden satelit budeme uvažovat jako referenční a vzhledem k němu provedeme difference. Tak dostaneme  $m - 1$  dvojitých diferencí:

$$\begin{aligned} L_{AB}^{12} &= \rho_{AB}^{12} - \lambda_1 N_{AB}^{12} \\ L_{AB}^{13} &= \rho_{AB}^{13} - \lambda_1 N_{AB}^{13} \\ &\vdots \\ L_{AB}^{1m} &= \rho_{AB}^{1m} - \lambda_1 N_{AB}^{1m}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.4.1 Linearizace

Jednotlivé rovnice v (3.4) nejsou lineární. Linearizaci provedeme stejným způsobem jako v kapitole 2, proto jednotlivé kroky nebudeme příliš zdůvodňovat.

Mějme rovnici  $L_{AB}^{1p} = \rho_{AB}^{1p} - \lambda_1 N_{AB}^{1p}$  pro  $p = 2, \dots, m$ :

$$L_{AB}^{1p} = \rho_{AB}^{1p} - \lambda_1 N_{AB}^{1p} = \rho_A^1 - \rho_B^1 - \rho_A^p + \rho_B^p - \lambda_1 N_{AB}^{1p}.$$

Poloha přijímače  $A$  je předem známa, tedy máme neznámé  $X_B, Y_B, Z_B$ , tj. polohu přijímače  $B$ , a ambiguitu  $N_{AB}^{1p}$ . Převědeme neznámé na levou stranu rovnice:

$$\rho_B^p - \rho_B^1 - \lambda_1 N_{AB}^{1p} = L_{AB}^{1p} - \rho_A^1 + \rho_A^p. \quad (3.5)$$

Členy  $\rho_B^p$  a  $\rho_B^1$  nejsou lineární, proto je linearizujeme a polohu přijímače  $B$  určíme iterativně. Nový odhad polohy zapíšeme takto:

$$\begin{aligned} X_{B,i+1} &= X_{B,i} + \Delta X_{B,i} \\ Y_{B,i+1} &= Y_{B,i} + \Delta Y_{B,i} \\ Z_{B,i+1} &= Z_{B,i} + \Delta Z_{B,i}, \end{aligned}$$

kde  $(X_{B,0}, Y_{B,0}, Z_{B,0})$  volíme bod  $(0,0,0)$ . Stejně jako v části 2.1.3 dostaneme:

$$\rho_{B,i+1}^k = \rho_{B,i}^k - \frac{X^k - X_{B,i}}{\rho_{B,i}^k} \Delta X_{B,i} - \frac{Y^k - Y_{B,i}}{\rho_{B,i}^k} \Delta Y_{B,i} - \frac{Z^k - Z_{B,i}}{\rho_{B,i}^k} \Delta Z_{B,i}.$$

Tedy linearizovaná rovnice (3.5) je tvaru

$$(\mathbf{u}_{B,i}^{1p})^T \Delta \mathbf{x}_{B,i} - \lambda_1 N_{AB}^{1p} = L_{AB}^{1p} - \rho_A^1 + \rho_A^p - \rho_{B,i}^p + \rho_{B,i}^1, \quad (3.6)$$



kde  $\Delta \mathbf{x}_{B,i} = (\Delta X_{B,i}, \Delta Y_{B,i}, \Delta Z_{B,i})^T$  a

$$\mathbf{u}_{B,i}^{1p} = \left( \frac{X^1 - X_{B,i}}{\rho_{B,i}^1} - \frac{X^p - X_{B,i}}{\rho_{B,i}^p}, \frac{Y^1 - Y_{B,i}}{\rho_{B,i}^1} - \frac{Y^p - Y_{B,i}}{\rho_{B,i}^p}, \frac{Z^1 - Z_{B,i}}{\rho_{B,i}^1} - \frac{Z^p - Z_{B,i}}{\rho_{B,i}^p} \right)^T$$

Označme  $b_{AB,i}^{1p}$  pravou stranu rovnice (3.6). Linearizovanou soustavu (3.4) potom zapíšeme jako:

$$A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i,$$

kde  $\mathbf{b}_i = (b_{AB,i}^{12}, \dots, b_{AB,i}^{1m})^T$ ,  $\mathbf{x}_i = (\Delta X_{B,i}, \Delta Y_{B,i}, \Delta Z_{B,i}, N_{AB}^{12}, \dots, N_{AB}^{1m})^T$  a

$$A_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{B,i}^{12} & -\lambda_1 & & & \\ \mathbf{u}_{B,i}^{13} & & -\lambda_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{u}_{B,i}^{1m} & & & & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Iterujeme dokud změna souřadnic není na centimetrové/milimetrové úrovni.

### 3.4.2 Odchyly

Na začátku sekce 3.4 jsme zjednodušili pozorovací rovnice tím, že jsme vyloučili troposférické a ionosférické zpoždění. Měli jsme k tomu dobrý důvod, protože v případě blízko umístěných přijímačů by mělo být zpoždění signálu způsobené atmosférou podobné. Chceme-li ale určovat polohu přijímače velmi přesně, je třeba brát tato zpoždění v potaz.

Jak jsme ukázali v předchozí kapitole, tak troposférické zpoždění lze spočítat pomocí dat na příchozím signálu a z měření na zemi (teplota, tlak atp.). K přesnému určení ionosférického zpoždění je zapotřebí dvoufrekvenčních přijímačů.

	Odchylnka
Ionosférické zpoždění	10-20 cm
Troposférické zpoždění	5-10 cm
Šum	1-2 cm

Tabulka 3.1: Tabulka s vlivy na odchylku dvojité diferencovaných fázových pseudovzdáleností. Některé odchylky (troposférické zpoždění, ionosférické pouze u dvoufrekvenčních přijímačů) dokážeme pomocí dalších modelů zcela odstranit. Zdroj [9].

## 3.5 Dvoufrekvenční přijímač

Doposud jsme se zabývali pouze situací jednofrekvenčních přijímačů. U nich není možné přesně určit hodnotu ionosférického zpoždění. V sekci o ionosférickém zpoždění v kapitole 2 jsme zjistili, že hodnota tohoto zpoždění bývá okolo pěti metrů, ale v extrémních případech může nabývat až 150 m. U dvojité diferenc

se nám objevuje člen  $I_{ij}^{kl} = (I_i^k - I_j^k) - (I_i^l - I_j^l)$ , přičemž při malé vzdálenosti mezi přijímači  $i$  a  $j$  bude mezi  $I_i^k$  a  $I_j^k$  malý rozdíl. Pro milimetrové určování přesnosti chceme veškeré zdroje chyb eliminovat, a proto se pokusíme určit přesnou hodnotu ionosférického zpoždění.

Ionosférické zpoždění závisí na frekvenci signálu. Proto se využívá dvoufrekvenčních přijímačů, u nichž se dá toto zpoždění snadno spočítat. Zde napíšeme model, který je popsán v [1].

Mějme dvoufrekvenční přijímač  $i$ . Potom  $I_{i,2}^k = \alpha I_{i,1}^k$ , kde  $\alpha = (f_1/f_2)^2$ . Dále předpokládejme, že troposférické zpoždění máme spočítané a známe přesný čas satelitu i přijímače. Máme tedy pseudovzdálenosti získané z obou signálů L1 a L2:

$$\begin{aligned} L_{i,1}^k &= \rho_i^k - I_{i,1}^k + \lambda_1 N_{i,1}^k, \\ L_{i,2}^k &= \rho_i^k - \alpha I_{i,1}^k + \lambda_2 N_{i,2}^k. \end{aligned}$$

Odtud snadno vyjádříme ionosférické zpoždění:

$$I_{i,1}^k = \frac{(L_{i,2}^k - \lambda_2 N_{i,2}^k) - (L_{i,1}^k - \lambda_1 N_{i,1}^k)}{1 - \alpha}.$$

### 3.6 Shrnutí

Oproti předchozí kapitole jsme ukázali způsob, jak přesněji měřit pseudovzdálenost mezi satelitem a přijímačem. Směrodatná odchylka pseudovzdálenosti získaného z C/A kódu se udává 3 m, zatímco odchylka fázového měření pseudovzdálenosti je pouze 3 mm.

Oproti pseudovzdálenostem popsaným v předchozí kapitole přibyla nová neznámá, a to ambiguita  $N$ . Ambiguitou rozumíme počet celých vln před naměřenou fází na trase satelit–přijímač.

Jak jsme popsali v části 3.3.2, tak při dvojitých diferencích se některé odchylky vyruší, např. odchylka satelitních hodin i hodin přijímače. Navíc u dvoufrekvenčních přijímačů jsme schopni přesně určit hodnotu ionosférického zpoždění.

Výše popsaná vylepšení vedou k velmi malé odchylce určené polohy, udává se odchylka v řádu milimetrů.

# 4. Kálmánův filtr a vážené čtverce II

## 4.1 Motivace

- Mějme soustavu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde  $A$  je matice typu  $m \times n$ ,  $m \geq n$ . Ať  $\hat{\mathbf{x}}$  je nejlepší aproximace řešení této soustavy pomocí nejmenších čtverců. Přijde nové pozorování. Toto pozorování změní náš dosavadní odhad  $\hat{\mathbf{x}}$ . Nové řešení je závislé na novém měření, ale také na předchozích řešeních. Abychom nemuseli uchovávat všechna předešlá pozorování, tak bychom chtěli nové řešení najít jako lineární kombinaci starého odhadu  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{old}}$  a nového pozorování  $\mathbf{b}_{\text{new}}$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{new}} = L\hat{\mathbf{x}}_{\text{old}} + K\mathbf{b}_{\text{new}}.$$

- Mějme přijímač, který se pohybuje. Jeho nová poloha je závislá na nových pozorováních, ale také na předchozích polohách a jeho pohybu. Lze aktuální polohu získat, aniž bychom museli mít všechna předchozí měření uložena?

Obě nastíněné situace se dají efektivně vyřešit pomocí Kálmánova filtru a jeho rekurzivního řešení metody vážených nejmenších čtverců.

## 4.2 Metoda vážených nejmenších čtverců II

Metodu vážených nejmenších čtverců jsme již částečně popsali dříve. Mějme soustavu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde  $A$  je typu  $m \times n$ ,  $m \geq n$  a sloupce této matice jsou lineárně nezávislé. Řešení takovéto soustavy metodou vážených čtverců znamená vyřešit soustavu

$$A^T C A \hat{\mathbf{x}} = A^T C \mathbf{b},$$

kde  $C = W^T W$ ,  $W$  je matice vah. Jak zvolit matici  $C$ ?

V sekci 2.2.1 jsme se zamysleli nad nejjednodušší volbou vah, a to podle výškového úhlu, pod kterým satelit pozorujeme.

V případě metody vážených nejmenších čtverců optimální volba vah, resp. matice  $C$ , je  $C = \Sigma^{-1}$ , kde  $\Sigma$  je (předem známá) kovarianční matice vstupních chyb v  $\mathbf{b}$ . Takováto volba vah dává jednoznačné řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  s nejmenší odchylkou. Navíc kovarianční matice  $P$  výstupních chyb definovaná jako

$$P = (A^T C A)^{-1} = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1}, \quad (4.1)$$

ukazuje, jak spolehlivý odhad  $\hat{\mathbf{x}}$  dostaneme. Matice  $P$  nezávisí na konkrétním  $\mathbf{b}$ , ale pouze na nastavení systému maticemi  $A$  a  $\Sigma$ , tj.  $P$  nám dopředu říká, jak dobrý experiment máme.

## 4.3 Popis Kálmánova filtru

Kálmánův filtr se skládá ze dvou kroků – předpovědi a korekce. Předpověď vychází ze stavového popisu našeho modelu, např. jízdy autem. Pro jednoduchost

uvažujme lineární změnu stavu a diskrétní čas. Potom:

$$\text{Stavová rovnice} \quad \mathbf{x}_k = F_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\epsilon}_k, \quad (4.2)$$

kde  $F_{k-1}$  je známá matice přechodu ze stavu  $k-1$  do stavu  $k$  a  $\boldsymbol{\epsilon}_k$  označuje chybu měření.

Korekce bude vycházet z měření  $\mathbf{b}_k$  v čase  $k$ :

$$\text{Pozorovací rovnice} \quad \mathbf{b}_k = A_k\mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k. \quad (4.3)$$

Právě tento systém rovnic (4.2) a (4.3) je základem řešení Kálmánova filtru pomocí vážených čtverců. Optimální váhy, jak jsme popsali v části 4.2, jsou inverzemi kovariančních matic vstupních chyb  $\Sigma_{\epsilon,k}$  a  $\Sigma_{e,k}$ .

Jak jsme již naznačili, tak Kálmánův filtr je dvoukrokový a rekurzivní. Ze starého odhadu  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  stavu v čase  $k-1$  dospějeme k novému odhadu  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  v čase  $k$ :

$$\text{Predikce} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\text{Korekce} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k(\mathbf{b}_k - A_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}).$$

Pomocí stavové matice  $F_{k-1}$  předpovíme novou polohu přijímače, kterou následně pomocí nového měření  $\mathbf{b}_k$  upravíme. V případě statického přijímače se stavová matice volí jako jednotková matice. Korekce je nutná, neboť  $\mathbf{b}_k$  je nové měření obsahující novou informaci.

Matice  $K$  se nazývá Kálmánova přírůstková matice. Tato matice v sobě obsahuje kovarianční matice pozorování a stavové rovnice, tj. matice  $\Sigma_{e,k}$  a  $\Sigma_{\epsilon,k}$ . Tyto kovarianční matice nám říkají, jak jsou pozorování spolehlivá, jaké jim dát váhy a přispívají do kovarianční matice  $P_{k|k}$  chyby v  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ . Tuto kovarianční matici také nalezneme ve dvou krocích:

$$\text{Odhadnutá kovariance} \quad P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + \Sigma_{\epsilon,k}$$

$$\text{Přírůstková matice} \quad K_k = P_{k|k-1}A_k^T (A_kP_{k|k-1}A_k^T + \Sigma_{e,k})^{-1}$$

$$\text{Opravená kovariance} \quad P_{k|k} = (I - K_kA_k)P_{k|k-1}.$$

Přijde-li nové pozorování, tak přijímač využije výše popsaný rekurzivní algoritmus. První krok tohoto algoritmu je následující.

Mějme první měření  $\mathbf{b}_0 = A_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_0$  a  $A$  matice typu  $m \times n$ ,  $m \geq n$ . Nalezneme aproximaci řešení této soustavy pomocí metody vážených nejmenších čtverců, kde vážíme pomocí  $C = \Sigma_{e,0}^{-1}$ . Tento první odhad tedy je:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = (A_0^T \Sigma_{e,0}^{-1} A_0)^{-1} A_0^T \Sigma_{e,0}^{-1} \mathbf{b}_0$$

a dle rovnice (4.1) je

$$P_{0|0} = (A^T \Sigma_{e,0}^{-1} A)^{-1}.$$

Tímto jsme plně popsali Kálmánův filtr, který v GPS slouží k přesnějšímu určení polohy přijímače. Kálmánův filtr bere při výpočtu nové polohy přijímače v úvahu jeho předešlé pozice, svůj stav (pohyb) a nové měření, proto zvyšuje přesnost určené polohy a využívá se u pohybujících se přijímačů.

## 5. Závěr

V této práci jsme popsali GPS, tj. systém, který pomocí satelitů určuje polohu přijímače. Kolem Země obíhá okolo třiceti GPS satelitů, které jsou rozmístěny do šesti oběžných drah tak, aby z každého místa na Zemi byly vidět minimálně čtyři. Pro určení polohy přijímače je potřeba sledovat právě alespoň čtyři satelity, neboť GPS neurčuje pouze polohu přijímače (tři neznámé), ale také odchylku času na hodinách přijímače.

Ze signálu, který neustále vysílá každý satelit, se určí pseudovzdálenosti k satelitům. To je hodnota, která v sobě obsahuje skutečnou vzdálenost k satelitu, ale také různá zpoždění signálu vzniklá průchodem signálu atmosférou, nepřesnosti ve vysílaných datech apod.

Algoritmy, které jsme v této práci popsali, se liší ve výsledné přesnosti určené polohy. To je způsobeno především jiným způsobem měření pseudovzdáleností. Běžné přijímače, jejichž cena se pohybuje v desítkách amerických dolarů a jsou součástí mobilních telefonů a běžných navigací v autě, dokáží přijímat pouze signál na jedné frekvenci. Tyto přijímače určí pseudovzdálenost na základě doby letu signálu ze satelitu k přijímači. Standardní přesnost těchto přístrojů je v řádu několika metrů. Vlivy na přesnost polohy jsme v této práci důkladně popsali a nastínili, jak je odstranit. Pomocí metody vážených nejmenších čtverců a systému SBAS se různé odchylky minimalizují a samostatný přijímač se tak dostane na metrovou přesnost.

V kapitole 3 jsme důkladně popsali mnohem přesnější, ale také složitější metodu jak určit pseudovzdálenosti, a to pomocí fázových měření. Tak dosáhneme centimetrové přesnosti.

V případě, že máme k dispozici druhý přijímač, jehož poloha je předem známa, se využije tzv. dvojitých diferencí. Kombinací jednotlivých pozorování se vyruší odchylky způsobené nepřesným časem. Nejvyšší přesnosti dosáhneme při použití dvojitých diferencí na dvoufrekvenčních přijímačích. Tak jsme schopni odstranit nejvíce nepřesnosti, určit přesnou hodnotu ionosférického zpoždění a dostaneme se tak až k milimetrové přesnosti.

Dále jsme nastínili, jak funguje Kálmánův filtr. Ten zvyšuje přesnost a díky dvoukrokovému postupu při zjišťování nové polohy přijímače, kde se bere v úvahu i stav přijímače, se využívá u pohybujících se přijímačů.

# Seznam použité literatury

- [1] Kai Borre and Gilbert Strang. *Algorithms for Global Positioning*. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, 2012.
- [2] Ionosphere-free Combination for Dual Frequency Receivers. Dostupné z: [http://www.navipedia.net/index.php/Ionosphere-free\\_Combination\\_for\\_Dual\\_Frequency\\_Receivers](http://www.navipedia.net/index.php/Ionosphere-free_Combination_for_Dual_Frequency_Receivers), cit. 7. 4. 2017.
- [3] Ahmed El-Rabbany. *Introduction to GPS: The Global Positioning System*. Artech house, 2002.
- [4] G Sateesh Kumar, G Sasi Bhushana Rao, and MNVSS Kumar. GPS Signal Short-Term Propagation Characteristics Modeling in Urban Areas for Precise Navigation Applications. *Positioning*, 4(2), 2013.
- [5] What is SBAS? Dostupné z: <https://www.gsa.europa.eu/european-gnss/what-gnss/what-sbas>, cit. 13. 4. 2017.
- [6] Jakub Jedlička. Analýza vlivů působících na signály GPS a jejich dopady na výslednou chybu vypočtené polohy, 2012. Dostupné z: <https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/2326/1/Analyza%20vlivu%20pusobicich%20na%20signaly%20GPS%20a%20jejich%20dopady%20na%20vyslednou%20chybu%20vypoctene%20polohy.pdf>, cit. 3. 4. 2017.
- [7] Geoffrey Blewitt. Basics of the GPS technique: observation equations. pages 10–54, 1997. Editovaná kapitola z knihy Geodetic applications of GPS, The Swedish Land Survey.
- [8] JG Garcia, PI Mercader, and CH Muravchik. Use of GPS carrier phase double differences. *Latin American applied research*, 35(2):115–120, 2005.
- [9] Anna Jensen. Carrier phase based positioning, May 2015. Dostupné z: <http://gidec.abe.kth.se/MPG/summerschool/jensen2.pdf>, cit. 23. 4. 2017.
- [10] Miroslav Čábelka. Úvod do GPS, 2008. Dostupné z: <https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/gps/skriptum-uvod-do-gps>.